

Analiza matematyczna

4

Umiejętności

Po klasach pierwszej i drugiej szkoły ponadpodstawowej i dziale „3. Ciągi” uczeń:

- zna pojęcie ciągu, bada własności ciągu liczbowego: określa jego monotoniczność, podaje miejsca zerowe itp.,
- stosuje wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego,
- podaje na podstawie wykresu funkcji jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności itp.,
- z wykresu funkcji odczytuje rozwiązania nierówności typu $f(x) < m$, dla ustalonej wartości m , oraz równań i nierówności typu $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$,

- wyznacza dziedzinę i zbiór wartości funkcji określonej

$$\text{wzorami typu: } f(x) = \frac{1}{g(x)},$$

$$f(x) = \sqrt{g(x)}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}},$$

gdzie $g(x)$ jest funkcją liniową lub funkcją liniową z wartością bezwzględną,

- oblicza miejsca zerowe funkcji na podstawie jej wzoru,
- rysuje wykresy funkcji $y = ax$, $y = |ax + b|$ i funkcji liniowej określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; omawia ich własności,
- określa wartość najmniejszą i wartość największą funkcji na podstawie jej wykresu (w całej dziedzinie albo w pewnym jej podzbiore),
- wyznacza wartość największą (najmniejszą) funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Po tym dziale uczeń:

- oblicza granice ciągów z wykorzystaniem granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych,
- oblicza granice niewłaściwe ciągów rozbieżnych,
- rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy,
- oblicza granice funkcji (w tym granice jednostronne) z wykorzystaniem twierdzeń o działaniach na granicach,
- oblicza granice funkcji i bada ciągłość funkcji,
- stosuje definicję pochodnej funkcji w punkcie; korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej,
- stosuje twierdzenia o działaniach na pochodnych i oblicza pochodne funkcji wymiernych,
- wyznacza dziedzinę funkcji złożonej i oblicza pochodne funkcji złożonych,
- korzysta z własności pochodnej do znajdowania przedziałów monotoniczności funkcji,
- wyznacza wartości ekstremalne funkcji,
- wyznacza wartość największą i wartość najmniejszą w przedziale domkniętym,
- stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Uwagi metodyczne

Pojęcie granicy ciągu jest z jednej strony naturalnym rozszerzeniem wiedzy o ciągach przedstawionej w poprzednim dziale podręcznika, a z drugiej strony – wprowadzeniem do zagadnień analizy matematycznej.

Warto poświęcić sporo czasu na wyrobienie u uczniów właściwych intuicji związanych z pojęciem granicy ciągu (właściwej i niewłaściwej), w szczególności dokładne zrozumienie określenia „prawie wszystkie wyrazy ciągu”.

Zwracamy uwagę na twierdzenie o trzech ciągach – nowe hasło w obecnie obowiązującej podstawie programowej.

1. Granica ciągu

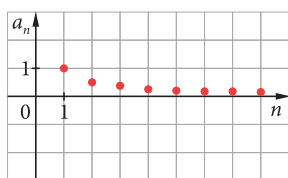
Umiejętności:

- obliczanie granic ciągów z wykorzystaniem granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$
- stosowanie twierdzeń o działaniach na granicach ciągów

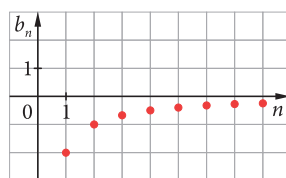
Będziemy badać nieskończone ciągi liczbowe, czyli funkcje, których dziedziną jest zbiór dodatnich liczb naturalnych, a wartościami są liczby rzeczywiste.

Ciągi zbieżne do zera

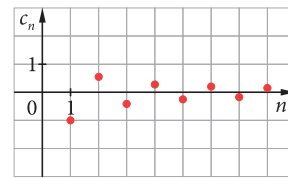
Przyjrzyjmy się wykresom trzech ciągów: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = -\frac{2}{n}$ oraz $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$.



$$a_n = \frac{1}{n}$$



$$b_n = -\frac{2}{n}$$



$$c_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Jeśli odczytujemy własności tych ciągów tylko z wykresów, możemy przypuszczać, że np. (a_n) jest ciągiem malejącym, (b_n) – rosnącym, (c_n) – niemonotonicznym, (a_n) ma wszystkie wyrazy dodatnie, (c_n) jest ciągiem naprzemiennym itp. Wszystkie trzy ciągi mają też wspólną własność: w miarę wzrostu wartości n punkty wykresu każdego z nich coraz bardziej zbliżają się do osi odciętych – ich wyrazy dążą do zera. Symbolicznie zapisuje się tę własność następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

i czyta: „granica ciągu (a_n) przy n dążącym do nieskończoności jest zero” lub krócej „ciąg (a_n) dąży do zera” albo „ciąg (a_n) jest zbieżny do zera”.

Wprowadzimy teraz określenia, które będą użyteczne przy definiowaniu pojęcia zbieżności ciągu do zera.

- Zwrot **prawie wszystkie wyrazy ciągu** oznacza wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu liczbowego poza ich skończoną liczbą. Zauważmy, że jeżeli skończona liczba wyrazów ciągu (a_n) nie spełnia pewnego warunku, to wśród nich istnieje wyraz o największym numerze. Oznaczmy go k . Zatem wszystkie wyrazy o numerach większych od k , czyli a_{k+1} , a_{k+2} , a_{k+3} , ..., już ten warunek spełniają.
- **Otoczeniem** o promieniu $\varepsilon > 0$ liczby g na osi nazywamy przedział $(g - \varepsilon; g + \varepsilon)$. W szczególności otoczeniem o promieniu $\varepsilon > 0$ liczby 0 jest przedział $(-\varepsilon; \varepsilon)$.

ZZ i MKP

tematy 3.14–3.17

Multiteka

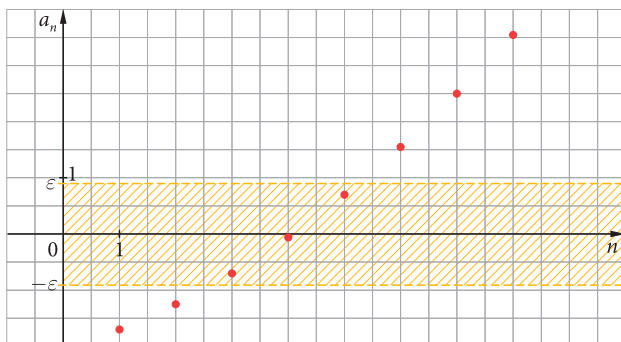
- Granica ciągu (1)
- Granica ciągu (2)
- Twierdzenie o trzech ciągach (1)
- Twierdzenie o trzech ciągach (2)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.1

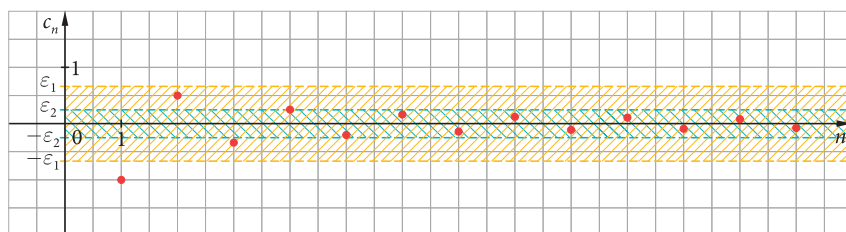
Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 1

W układzie współrzędnych narysowany jest wykres ciągu $a_n = \frac{n^2 + 6n - 41}{20}$. Na osi a_n wybrane zostało otoczenie liczby 0 o promieniu $\varepsilon = 0,9$. W otoczeniu tym znajdują się tylko trzy wyrazy ciągu (a_n) : $a_3 = -0,7$, $a_4 = -0,05$ oraz $a_5 = 0,7$. Ciąg jest rosnący i wszystkie wyrazy, poczynając od szóstego, są większe od liczby 0,9. Z kolei wyrazy a_1 i a_2 są mniejsze od liczby $-0,9$. Punkty wykresu, które leżą w zaznaczonym kolorem obszarze, nazywanym paskiem epsilonowym, są graficznym rozwiązaniem układu nierówności $-0,9 < a_n < 0,9$.



Przyjrzyjmy się ponownie wykresowi ciągu $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ z zaznaczonymi na osi c_n dwoma otoczeniami liczby 0 i odpowiednimi paskami w układzie współrzędnych.



Na wykresie:

- wszystkie wyrazy ciągu o numerach większych od 1 (czyli $c_2, c_3, c_4, \dots$) należą do otoczenia liczby 0 o promieniu ε_1 (wszystkie punkty wykresu, poczynając od drugiego, mieszczą się w pasku o szerokości $2\varepsilon_1$),
- wszystkie wyrazy ciągu o numerach większych od 4 (czyli $c_5, c_6, c_7, \dots$) należą do otoczenia liczby 0 o promieniu ε_2 (wszystkie punkty wykresu, poczynając od piątego, mieszczą się w pasku o szerokości $2\varepsilon_2$).

Gdy badamy zbieżność ciągu do 0, interesuje nas odpowiedź na pytanie, gdzie będą prawie wszystkie wyrazy ciągu, gdy promień ε będzie coraz mniejszy. Poglądowo mówiąc, granicą ciągu jest 0, jeżeli w dowolnie małym otoczeniu liczby 0 znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Definicja

Granica ciągu (a_n) jest liczba 0 wtedy i tylko wtedy, gdy do każdego otoczenia liczby 0 należą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Wyrazy ciągu (a_n) znajdują się w otoczeniu o promieniu $\varepsilon > 0$ liczby 0 wtedy i tylko wtedy, gdy należą do przedziału $(-\varepsilon; \varepsilon)$, czyli spełniają podwójną nierówność $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$ albo równoważną nierówność $|a_n| < \varepsilon$.

◀ 1.4. Które wyrazy ciągu (a_n) należą do otoczenia o promieniu 0,0001 liczby 0?

a) $a_n = \frac{1}{n+7}$

b) $a_n = -\frac{4}{n+9}$

c) $a_n = \frac{1}{n^2}$

d) $a_n = \frac{3}{n^2+5}$

Odp.:

a) wyrazy o numerach $n > 9993$

b) wyrazy o numerach $n > 39\,991$

c) wyrazy o numerach $n > 100$

d) wyrazy o numerach $n \geq 174$

Przykład 2 ◀ zad. 1.4

Dany jest ciąg $a_n = \frac{4}{\sqrt{n}}$. Sprawdźmy, które wyrazy tego ciągu należą do otoczenia liczby 0 o promieniu

a) $\varepsilon = 1$. b) $\varepsilon = 0,1$. c) $\varepsilon > 0$.

Rozwiązanie

a) $|a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{4}{\sqrt{n}} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{n}} < 1 \Leftrightarrow 4 < \sqrt{n} \Leftrightarrow 16 < n$

W otoczeniu o promieniu 1 liczby 0, czyli w przedziale $(-1; 1)$, znajdują się wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach większych niż 16, czyli poczynając od a_{17} .

Zwrot „wtedy i tylko wtedy” zapisujemy za pomocą symbolu $\Leftrightarrow$.

b) $|a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{4}{\sqrt{n}} \right| < 0,1 \Leftrightarrow 40 < \sqrt{n} \Leftrightarrow 1600 < n$

W otoczeniu o promieniu 0,1 liczby 0, czyli w przedziale $(-0,1; 0,1)$, znajdują się wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach większych niż 1600, czyli poczynając od a_{1601} .

c) $|a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{4}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow 4 < \varepsilon \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{4}{\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{16}{\varepsilon^2} < n$

W otoczeniu o dowolnym promieniu $\varepsilon > 0$ liczby 0, czyli w przedziale $(-\varepsilon; \varepsilon)$, znajdują się wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach większych niż $\frac{16}{\varepsilon^2}$. Na zewnątrz tego przedziału jest ich skończona liczba. Oznacza to, że ciąg (a_n) jest zbieżny do 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{n}} = 0$$

D Przykład 3 ◀ zad. 1.6

Wykażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Założenia

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Teza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Dowód

Przyjmijmy $\varepsilon > 0$.

$$|a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n \quad \leftarrow \varepsilon > 0, n > 0$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wyrazy o numerach większych od $\frac{1}{\varepsilon}$ należą do otoczenia o promieniu ε liczby 0.

Koniec dowodu**Własności ciągów zbieżnych do zera**

Podamy (bez dowodu) kilka twierdzeń o ciągach zbieżnych do zera.

- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i $t \in \mathbb{R}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (t \cdot a_n) = 0$.

Na przykład:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot 1004}{27n} = 0, \text{ bo } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot 1004}{27n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1004}{27} \cdot \frac{(-1)^n}{n} \right) = 0$$

- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Na przykład:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n^7} = 0 \text{ i ogólnie } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{n^k} = 0, \text{ gdzie } t \text{ jest ustaloną liczbą rzeczywistą, } k \text{ jest ustaloną liczbą naturalną, } n, k \in \mathbb{N} - \{0\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0, \text{ bo } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = 0$.

Na przykład:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = 0, \text{ bo } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} = 0$$

◀1.6. Skorzystaj z definicji i wykaż, że ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a_n = \frac{3}{n+10} & \text{c) } a_n = \frac{6}{n^2+5} \\ \text{b) } a_n = -\frac{7}{n+2} & \text{d) } a_n = -\frac{2}{\sqrt{n+4}} \end{array}$$

Rozwiązanie

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią.

$$\text{a) } |a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n+10} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n+10 > \frac{3}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 10$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wyrazy o numerach większych od $\frac{3}{\varepsilon} - 10$ należą do otoczenia o promieniu ε liczby 0.

Stąd wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

$$\text{b) } |a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{7}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+2}{7} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n+2 > \frac{7}{\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{7}{\varepsilon} - 2$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wyrazy o numerach większych od $\frac{7}{\varepsilon} - 2$ należą do otoczenia o promieniu ε liczby 0.

Stąd wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

$$\text{c) } |a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{6}{n^2+5} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2+5}{6} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n^2+5 > \frac{6}{\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 > \frac{6}{\varepsilon} - 5$$

Jeżeli $\frac{6}{\varepsilon} - 5 < 0$, to warunek

$|a_n| < \varepsilon$ spełniają wszystkie wyrazy ciągu, a jeżeli $\frac{6}{\varepsilon} - 5 \geq 0$ – wyrazy

o numerach $n > \sqrt{\frac{6}{\varepsilon} - 5}$.

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wyrazy o numerach większych

od $\sqrt{\frac{6}{\varepsilon} - 5}$ należą do otoczenia

o promieniu ε liczby 0.

Stąd wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

$$\text{d) } |a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n+4}} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{n+4} < \varepsilon^2 \Leftrightarrow \frac{n+4}{4} > \frac{1}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{4}{\varepsilon^2} - 4$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wyrazy o numerach większych od $\frac{4}{\varepsilon^2} - 4$ należą do otoczenia o promieniu ε liczby 0.

Stąd wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Wyróżnimy twierdzenie dotyczące ciągu geometrycznego.

Twierdzenie

Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg geometryczny o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 q^{n-1}$ jest zbieżny do zera.

◀ 1.8. Dla jakich wartości x podany nieskończony ciąg geometryczny jest zbieżny?

- a) $1, x, x^2, x^3, x^4, \dots$
- b) $1, -3x, 9x^2, -27x^3, 81x^4, \dots$
- c) $1, x+4, (x+4)^2, (x+4)^3, \dots$
- d) $1, \frac{x^2}{2}, \frac{x^4}{4}, \frac{x^6}{8}, \frac{x^8}{16}, \dots$
- e) $1, |x|-1, (|x|-1)^2, (|x|-1)^3, \dots$
- f) $1, x^2-1, (x^2-1)^2, (x^2-1)^3, \dots$

Odp.: a) $x \in (-1; 1)$

b) $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

c) $x \in (-5; -3)$

d) $x \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$

e) $x \in \langle -2; 0 \rangle \cup (0; 2)$

f) $x \in \langle -\sqrt{2}; 0 \rangle \cup (0; \sqrt{2})$

Przykład 4 ◀ zad. 1.8

Ciąg $b_n = \frac{5}{3^{n-1}}$ jest ciągiem geometrycznym, w którym $b_1 = 5$ i iloraz $q = \frac{1}{3}$.

Wypiszmy kilka kolejnych wyrazów tego ciągu: $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \frac{5}{243}, \frac{5}{729}, \dots$

$|q| < 1$, więc ciąg (b_n) jest zbieżny do zera: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3^{n-1}} = 0$.

Ciągi zbieżne

Definicja

Granica ciągu (a_n) jest liczba g wtedy i tylko wtedy, gdy granicą ciągu $(a_n - g)$ jest liczba 0, czyli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - g) = 0$$

Zauważmy, że powyższą definicję można poglądowo interpretować w następujący sposób:

granica ciągu jest liczba g , jeżeli w dowolnie małym otoczeniu liczby g znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Oznacza to, że dla danego ciągu może istnieć tylko jedna liczba g będąca granicą tego ciągu.

Każdy ciąg, który ma granicę, nazywamy **ciągami zbieżnym**. Wszystkie pozostałe ciągi nieskończone nazywamy **ciągami rozbieżnymi**.

Ciągi różniące się skończoną liczbą wyrazów są jednocześnie zbieżne do tej samej granicy lub jednocześnie rozbieżne.

D **Przykład 5**

Wykażemy, że a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$. b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5-3^{n+1}}{3^{n-1}} = -9$.

Rozwiązanie

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$, ponieważ: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n} - 2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1-2n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 3^{n+1}}{3^{n-1}} = -9$, ponieważ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5 - 3^{n+1}}{3^{n-1}} + 9 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 3^{n+1} + 9 \cdot 3^{n-1}}{3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 3^{n+1} + 3^{n+1}}{3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3^{n-1}} = 0$$

Twierdzenie

Twierdzenie o działaniach na granicach ciągów zbieżnych

- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $t \in \mathbb{R}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (t \cdot a_n) = t \cdot a$.
- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$.
- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ i $b \neq 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oraz wszystkie wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n \geq 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Dowód tego twierdzenia pomijamy. Zauważmy tylko, że w punkcie dotyczącym $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ nie musimy zakładać, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) są różne od 0. Jeśli bowiem $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$, to jedynie skończona liczba wyrazów tego ciągu ma wartość 0. Te wyrazy nie mają więc wpływu na istnienie granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Przykład 6 ◀ zad. 1.9

Obliczmy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 2}$.

Rozwiązanie

Przekształćmy ułamek do innej, równoważnej postaci.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} \quad \leftarrow \text{dzielimy licznik i mianownik ułamka przez } n^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 3 \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right) = 2, \text{ więc } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{3}{2}.$$

Odp.: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$

◀ 1.9. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{6n - 31}{n + 5}$

b) $a_n = \frac{n - n^2}{n^2 + 1}$

c) $a_n = \frac{7n^3 + 5n^2 - 9}{n^2 + 5n^3}$

d) $a_n = \frac{3n^3 - 1}{n^4 - 5n + 75}$

e) $a_n = \frac{2 - n^5}{n^2 + 5n^5}$

f) $a_n = \frac{n^4}{n^2 + 5 - 8n^4}$

g) $a_n = \frac{2n}{n^3 + 5}$

h) $a_n = \frac{n^2 - 6n + 100}{7n^2 + 5}$

i) $a_n = \frac{15 - 8n^4}{2n^4 + n^2 + 1}$

Odp.: a) 6 b) -1 c) $\frac{7}{5}$ d) 0

e) $-\frac{1}{5}$ f) $-\frac{1}{8}$ g) 0 h) $\frac{1}{7}$ i) -4

◀1.14. Wykaż, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ jest rozbieżny.

Rozwiązanie

$$a_n = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 4k + 1, k \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{dla } n = 4k + 3, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{dla } n = 2k, k \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases}$$

Zatem dla dowolnej liczby poza jej otoczeniem o promieniu 1 jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu (równych 1 lub -1), co oznacza, że ciąg (a_n) jest rozbieżny.

Zauważmy na koniec, że granica ciągu zbieżnego może być równa któremuś wyrazowi tego ciągu. Szczególnym przypadkiem jest ciąg stały, którego wszystkie wyrazy są równe jego granicy.

Przykład 7 ◀ zad. 1.14

Wykażemy, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = (-1)^n$ jest rozbieżny.

Dowód

Wykres ciągu (a_n) przedstawiono na rysunku. Nie trudno zauważyć, że w tym ciągu wszystkie wyrazy o numerach nieparzystych mają wartość -1 , a wszystkie wyrazy o numerach parzystych mają wartość 1 , czyli dla każdego $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:

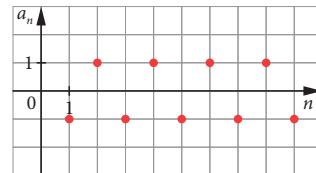
$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \text{ oraz } a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$$

Liczba 1 nie jest granicą ciągu (a_n) . Jeśli bowiem weźmiemy np. otoczenie liczby 1 o promieniu $\varepsilon = 0,5$, to poza nim znajdują się wszystkie wyrazy o numerach nieparzystych, a jest ich nieskończenie wiele.

Analogicznie dowodzimy, że liczba -1 nie jest granicą ciągu (a_n) . Podobnie każda liczba rzeczywista różna od 1 i różna od -1 nie może być granicą tego ciągu. Zatem ciąg (a_n) nie ma granicy, czyli jest rozbieżny.

Koniec dowodu

Prawdziwe jest następujące stwierdzenie: **granicą ciągu o prawie wszystkich wyrazach dodatnich nie może być liczba ujemna**. Poglądowo mówiąc, jeżeli prawie wszystkie punkty wykresu ciągu znajdują się powyżej osi x , to najmniejszą granicą takiego ciągu może być liczba 0 . Analogicznie, granicą ciągu o prawie wszystkich wyrazach ujemnych nie może być liczba dodatnia.



Ciągi rozbieżne do nieskończoności

W zbiorze ciągów rozbieżnych wyróżnimy ciągi rozbieżne do nieskończoności.

Definicja

Mówimy, że **ciąg (a_n) jest rozbieżny do nieskończoności** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego M prawie wszystkie wyrazy ciągu są większe od M .

Zapisujemy to jako:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Zapis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ czytamy również „ciąg (a_n) dąży do nieskończoności”.

D Przykład 8 ◀ zad. 1.15

Wykażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 1) = \infty$.

Dowód

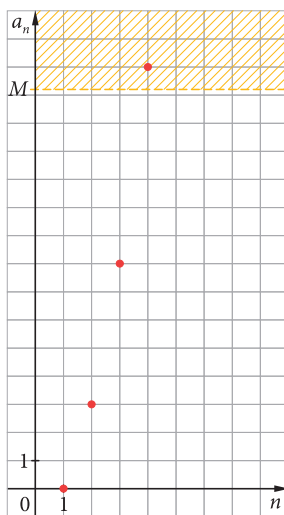
Mamy wykazać, że dla dowolnego M prawie wszystkie wyrazy ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 1$ spełniają nierówność $a_n > M$.

$$a_n > M \Leftrightarrow n^2 - 1 > M \Leftrightarrow n^2 > M + 1$$

Zauważmy, że jeżeli $M \leq -1$, to wszystkie wyrazy ciągu spełniają żadaną nierówność, bo $n^2 > 0$.

Natomiast jeśli $M > -1$, to żadaną nierówność spełniają wszystkie wyrazy o numerach większych od $k = \sqrt{M+1}$.

Koniec dowodu

**Definicja**

Mówimy, że **ciąg** (a_n) **jest rozbieżny do minus nieskończoności** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego M prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze od M .

Zapisujemy to jako:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Zapis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ czytamy również „ciąg (a_n) dąży do minus nieskończoności”.

Przykłady ciągów rozbieżnych do minus nieskończoności:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty \quad \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (-3^n) = -\infty \quad \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$$

O ciągach rozbieżnych do nieskończoności lub do minus nieskończoności mówimy także, że mają **granice niewłaściwe** równe odpowiednio nieskończoność lub minus nieskończoność.

Przykład 9

Rozważany w przykładzie 7 rozbieżny ciąg $a_n = (-1)^n$ nie ma również granicy niewłaściwej.

Podobne własności ma ciąg o wyrazie ogólnym $b_n = (-2)^n$. Jego kolejne wyrazy to $-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, \dots$ Ciąg (b_n) jest naprzemienny, rozbieżny, nie ma również granicy niewłaściwej.

◀1.15. Skorzystaj z definicji i wykaż, że

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 3) = \infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sqrt{n}) = -\infty$.

Rozwiązanie

a) Przyjmujemy $a_n = n^2 - 3$ i M – dowolna liczba.

$$a_n > M \Leftrightarrow n^2 - 3 > M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 > M + 3$$

Zauważmy, że jeżeli $M + 3 < 0$, to $a_n > M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Natomiast jeśli $M + 3 \geq 0$, to $a_n > M$ dla wszystkich $n > \sqrt{M+3}$.

Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

b) Przyjmujemy $a_n = 1 - \sqrt{n}$ i M – dowolna liczba.

$$a_n < M \Leftrightarrow 1 - \sqrt{n} < M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} > 1 - M$$

Zauważmy, że jeżeli $1 - M < 0$, to $a_n < M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Natomiast jeśli $1 - M \geq 0$, to $a_n < M$ dla wszystkich $n > (1 - M)^2$.

Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Twierdzenie

Twierdzenie o własnościach granic niewłaściwych ciągów rozbieżnych

- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $t > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (t \cdot a_n) = \infty$.
- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $t < 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (t \cdot a_n) = -\infty$.
- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$.
- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$.
- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.
- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.
- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ i $b > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.
- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ i $b > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$.
- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ i $b < 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$.
- Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ i $b < 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.

◀1.16. Wyznacz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = n^4 - n^3 - 2n^2 - 6$

b) $a_n = 3n^4 - 2n^2 - 6n^7 + 2$

c) $a_n = \frac{3 - 4n^3}{n + n^2}$

d) $a_n = \frac{n^4 + 5}{n - 2} - n^2$

e) $a_n = 3 \cdot 2^n + 3^n - 5 \cdot 6^n$

f) $a_n = 4 \cdot 7^n + 5^n - 5 \cdot 35^n$

Odp.: a) ∞ b) $-\infty$ c) $-\infty$

d) ∞ e) $-\infty$ f) $-\infty$

Przykład 10 ◀ zad. 1.16

Wyznamy granicę.

Rozwiązanie

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \left(\frac{1}{n^2} - 2 \right) \right) = -\infty \quad \leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} - 2 \right) = -2$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n + 5^n - 15^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(15^n \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{3^n} - 1 \right) \right) = -\infty$$

Podamy (bez dowodu) dwa twierdzenia odwołujące się do intuicyjnego rozumienia własności odwrotności liczby.

Twierdzenie

Dany jest ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Przykład 11

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{\sqrt{n}} = 0$, bo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(-2)^n} = 0$, bo $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-2)^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$.

Twierdzenie

- Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n > 0$
i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.
- Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n < 0$
i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

Pokażemy teraz przykłady obliczania granic ciągów, w których wyrazy ogólne należy przekształcić, bo żadne z powyższych twierdzeń nie mogą być bezpośrednio zastosowane.

Przykład 12 ◀ zad. 1.17

Obliczmy podaną granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}-n}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-1}-n)$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n})$

Rozwiązanie

W każdym z podanych przykładów przekształcimy ogólny wyraz ciągu do takiej postaci, w której nie będzie występować różnica dwóch wyrazów dążących do nieskończoności.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{(\sqrt{n^2+3}-n)(\sqrt{n^2+3}+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{n^2+3-n^2} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{3} = \infty$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-1}-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2-1}-n)(\sqrt{n^2-1}+n)}{\sqrt{n^2-1}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1-n^2}{\sqrt{n^2-1}+n} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n^2-1}+n} = 0$

◀1.17. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

- a) $a_n = \sqrt{n+7} - \sqrt{n+9}$ d) $a_n = \sqrt{3n^2+n+5} - \sqrt{3n^2-2n+1}$
b) $a_n = \sqrt{3n^2+n+1} - \sqrt{n^2+4}$ e) $a_n = \frac{5}{\sqrt{n^2+7n}-n}$
c) $a_n = \sqrt{n^2+5}-n$ f) $a_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{4n^2-1}$
- Odp.: a) 0 b) ∞ c) 0 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{10}{7}$ f) $-\infty$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n})(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1 - n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n + \frac{1}{n} - 1)}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{1}{n} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}}} = \infty
 \end{aligned}$$

Na koniec podamy (bez dowodu) dwa twierdzenia. Pierwsze opisuje sytuację, w której znajomość granic dwóch ciągów pozwala podać granicę trzeciego ciągu.

Twierdzenie

Twierdzenie o trzech ciągach

Dane są trzy ciągi: (a_n) , (b_n) , (c_n) .

Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągu (b_n) spełniają nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$, a ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

Drugie twierdzenie ułatwia liczenie granic ciągów pojawiających się, gdy stosujemy twierdzenie o trzech ciągach.

Dla $a > 0$ mamy $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Twierdzenie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{dla } a > 0$$

◀ 1.20. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 6^n}$

b) $a_n = \sqrt[n]{5^n + 9^n + 13^n}$

c) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n}$

Odp.: a) 6 b) 13 c) $\frac{5}{7}$

Przykład 13 ◀ zad. 1.20

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $d_n = \sqrt[n]{2^n + 4^n + 5^n}$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność:

$$5^n < 2^n + 4^n + 5^n \leq 5^n + 5^n + 5^n, \quad \text{czyli } 5^n < 2^n + 4^n + 5^n \leq 3 \cdot 5^n$$

Zatem również:

$$\sqrt[n]{5^n} < \sqrt[n]{2^n + 4^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 5^n}, \quad \text{czyli } 5 < \sqrt[n]{2^n + 4^n + 5^n} \leq 5 \cdot \sqrt[n]{3}$$

Niech $k_n = 5$ i $u_n = 5 \cdot \sqrt[n]{3}$. Wtedy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 5 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (5 \sqrt[n]{3}) = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 5 \cdot 1 = 5$$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 5$.

Odp.: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 4^n + 5^n} = 5$

Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

1.1. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } 0 < n < 100^{10\,000} \\ 2 & \text{dla } n \geq 100^{10\,000} \end{cases}$.

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ B. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ C. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ D. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ nie istnieje.

1.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ i $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$ C. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty$ D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$

1.3. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \sin n$.

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ B. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ C. (a_n) jest rozbieżny. D. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

1.4. Które wyrazy ciągu (a_n) należą do otoczenia o promieniu 0,0001 liczby 0?

a) $a_n = \frac{1}{n+7}$ b) $a_n = \frac{-4}{n+9}$ c) $a_n = \frac{1}{n^2}$ d) $a_n = \frac{3}{n^2+5}$

1.5. Czy prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) znajdują się w otoczeniu o promieniu ε liczby 0? Jeżeli tak, podaj numer M wyrazu, od którego ten warunek jest spełniony.

a) $a_n = \frac{1}{n+3}$ $\varepsilon = 0,000001$ c) $a_n = -\frac{3}{n^2}$ $\varepsilon = \frac{1}{80}$

b) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\varepsilon = 0,01$ d) $a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$ $\varepsilon = 0,01$

D 1.6. Skorzystaj z definicji i wykaż, że ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

a) $a_n = \frac{3}{n+10}$ b) $a_n = -\frac{7}{n+2}$ c) $a_n = \frac{6}{n^2+5}$ d) $a_n = -\frac{2}{\sqrt{n+4}}$

1.7. Dane są ciągi geometryczne o następujących wyrazach ogólnych: $a_n = -3 \cdot 2^{n-1}$,

$b_n = (-0,1)^{n+1}$, $c_n = -\frac{0,2}{0,1^n}$ oraz $d_n = \frac{0,27}{(\sqrt{1,1})^{n-1}}$. Które z nich są zbieżne?

1.8. Dla jakich wartości x podany nieskończony ciąg geometryczny jest zbieżny?

a) $1, x, x^2, x^3, x^4, \dots$

d) $1, \frac{x^2}{2}, \frac{x^4}{4}, \frac{x^6}{8}, \frac{x^8}{16}, \dots$

b) $1, -3x, 9x^2, -27x^3, 81x^4, \dots$

e) $1, |x| - 1, (|x| - 1)^2, (|x| - 1)^3, \dots$

c) $1, x+4, (x+4)^2, (x+4)^3, \dots$

f) $1, x^2 - 1, (x^2 - 1)^2, (x^2 - 1)^3, \dots$

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. A

1.2. B

1.3. C

1.4.

a) wyrazy o numerach $n > 9993$

b) wyrazy o numerach $n > 39\,991$

c) wyrazy o numerach $n > 100$

d) wyrazy o numerach $n \geq 174$

1.5. a) $M = 999\,998$

b) $M = 5$

c) $M = 16$

d) $M = 3$

1.6. Patrz s. 271.

1.7. $(b_n), (d_n)$

1.8. a) $x \in (-1; 1)$

b) $x \in \left\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\rangle$

c) $x \in (-5; -3)$

d) $x \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$

e) $x \in \langle -2; 0 \rangle \cup (0; 2)$

f) $x \in \langle -\sqrt{2}; 0 \rangle \cup (0; \sqrt{2})$

1.9. a) 6 b) -1 c) $\frac{7}{5}$ d) 0
e) $-\frac{1}{5}$ f) $-\frac{1}{8}$ g) 0 h) $\frac{1}{7}$ i) -4

1.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 7$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 3$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 10$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \frac{5}{2}$

1.11. a) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n+1}$

b) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{-2n+1}$

c) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2+1}$

d) np. $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n+1}$

e) np. $a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2+1}$

f) np. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$

1.12. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) -4 d) $-\sqrt{2}$

1.13. a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$. Wskazówka:

$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1.14. Patrz s. 274.

1.15. Patrz s. 275.

1.16. a) ∞ b) $-\infty$ c) $-\infty$

d) ∞ e) $-\infty$ f) $-\infty$

1.9. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{6n-31}{n+5}$

d) $a_n = \frac{3n^3-1}{n^4-5n+75}$

g) $a_n = \frac{2n}{n^3+5}$

b) $a_n = \frac{n-n^2}{n^2+1}$

e) $a_n = \frac{2-n^5}{n^2+5n^5}$

h) $a_n = \frac{n^2-6n+100}{7n^2+5}$

c) $a_n = \frac{7n^3+5n^2-9}{n^2+5n^3}$

f) $a_n = \frac{n^4}{n^2+5-8n^4}$

i) $a_n = \frac{15-8n^4}{2n^4+n^2+1}$

1.10. Dane są ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach ogólnych $a_n = \frac{5n}{n+5}$ i $b_n = \frac{2n^2}{n^2+5n-1}$.

Wyznacz granice ciągów o wyrazach ogólnych:

$c_n = a_n + b_n$, $d_n = a_n - b_n$, $e_n = a_n \cdot b_n$, $f_n = \frac{a_n}{b_n}$

1.11. Podaj przykład takich ciągów (a_n) i (b_n) , że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ oraz

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -2$.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ nie istnieje.

1.12. Ciąg (a_n) ma granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$. Oblicz granicę ciągu o podanym wyrazie ogólnym. Zakładamy, że wszystkie wyrazy ciągu w mianowniku są różne od 0.

a) $b_n = \frac{2a_n}{3a_n-1}$

c) $d_n = a_n - \sqrt{2a_n^2+7}$

b) $c_n = \frac{a_n^2+1}{a_n^2-4a_n+1}$

d) $e_n = a_n \cdot \sqrt{a_n^2+1}$

1.13. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$

b) $a_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}$

1.14. Wykaż, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ jest rozbieżny.

1.15. Skorzystaj z definicji i wykaż, że

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2-3) = \infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-\sqrt{n}) = -\infty$.

1.16. Wyznacz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = n^4 - n^3 - 2n^2 - 6$

c) $a_n = \frac{3-4n^3}{n+n^2}$

e) $a_n = 3 \cdot 2^n + 3^n - 5 \cdot 6^n$

b) $a_n = 3n^4 - 2n^2 - 6n^7 + 2$

d) $a_n = \frac{n^4+5}{n-2} - n^2$

f) $a_n = 4 \cdot 7^n + 5^n - 5 \cdot 35^n$

1.17. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \sqrt{n+7} - \sqrt{n+9}$

d) $a_n = \sqrt{3n^2 + n + 5} - \sqrt{3n^2 - 2n + 1}$

b) $a_n = \sqrt{3n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 4}$

e) $a_n = \frac{5}{\sqrt{n^2 + 7n} - n}$

c) $a_n = \sqrt{n^2 + 5} - n$

f) $a_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{4n^2 - 1}$

1.18. Podaj przykład takich ciągów (a_n) i (b_n) , że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ oraz

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 3$. b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$. c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

1.19. Podaj przykład takich ciągów (a_n) i (b_n) , że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ oraz

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$.

1.20. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 6^n}$ b) $a_n = \sqrt[n]{5^n + 9^n + 13^n}$ c) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n}$

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wiadomo, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Z podanych założeń wynika, że

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ nie istnieje. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

2. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{n-13}{\sqrt{2}-n}$ b) $a_n = \frac{n^3-2n}{n^5-2}$ c) $a_n = \frac{4n^2+2n-1}{8n^2+9n+7}$

3. Ciąg (a_n) spełnia warunki: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ i $a_n^2 + 3a_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + 5}}{a_n^2 + 3a_n}$.

4. Podaj przykład takich ciągów (a_n) i (b_n) , że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ oraz

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 1$. b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$. c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$ nie istnieje.

D 5. Skorzystaj z definicji granicy ciągu i wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+3} = 0$.

5. Przyjmujemy $a_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$ i ε – dowolna liczba dodatnia.

$$|a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+3} < \varepsilon \Leftrightarrow n+3 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wyrazy o numerach większych od $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ należą do otoczenia o promieniu ε liczby 0.

Stąd wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

1.17. a) 0 b) ∞ c) 0 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{10}{7}$ f) $-\infty$

1.18. a) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 3n$

b) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^2$

c) np. $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$

1.19. a) np. $a_n = n^2$, $b_n = n$

b) np. $a_n = n$, $b_n = n^2$

c) np. $a_n = 2n$, $b_n = n$

1.20. a) 6 b) 13 c) $\frac{5}{7}$

Prosto do matury

1. F, F, F

2. a) -1 b) 0 c) $\frac{1}{2}$

3. $\frac{1}{2}$

4. a) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n$

b) np. $a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = n^2$

c) np. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n$

2. Szereg geometryczny zbieżny i jego suma

Umiejętności:

- rozpoznawanie szeregów geometrycznych zbieżnych i obliczanie ich sum

Za pomocą danych ciągów możemy tworzyć inne ciągi poprzez ich sumowanie, mnożenie itp. Szczególnym sposobem budowania nowego ciągu jest utworzenie ciągu kolejnych sum częściowych. Załóżmy, że dany jest nieskończony ciąg (a_n) . Przypomnijmy, że kolejne wyrazy ciągu (S_n) jego sum częściowych są równe:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_{n+1}$$

...

Zajmiemy się zbadaniem granicy ciągu sum częściowych w sytuacji, gdy (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

Definicja

Szeregiem geometrycznym nazywamy ciąg sum częściowych (S_n) o wyrazie ogólnym $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$, gdzie (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym. Jeżeli ciąg sum częściowych ma granicę $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, to szereg nazywamy **zbieżnym**, a liczbę S – jego **sumą**.

Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy **szeregiem rozbieżnym**.

Uwaga: Zamiast terminu „granica szeregu geometrycznego” używane jest czasem określenie „suma nieskończonego ciągu geometrycznego”. Wówczas zamiast stwierdzenia „szereg geometryczny jest zbieżny” powiemy „istnieje suma nieskończonego ciągu geometrycznego” (i odpowiednio „rozbieżny” – „nie istnieje suma”).

ZZ i MKP

temat 3.18

Multiteka

- Szereg geometryczny

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.2

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 1 ◀ zad. 2.4

W ciągu geometrycznym pierwszy wyraz $a_1 = 2$ i iloraz $q = \frac{1}{2}$. Zbadamy, czy istnieje suma tego ciągu.

Rozwiązanie

Kolejne wyrazy tego ciągu to: 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, ..., $\frac{1}{2^{n-2}}$, ...

Początkowe trzy wyrazy szeregu geometrycznego (S_n) są równe:

$$S_1 = 2, \quad S_2 = 2 + 1 = 3, \quad S_3 = 2 + 1 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

n -ty wyraz szeregu (S_n) :

$$\begin{aligned} S_n &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} = \\ &= \frac{2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad \leftarrow \text{dla ciągu geometrycznego } (a_n): S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 4 \end{aligned}$$

Odp.: Podany ciąg ma sumę równą 4.

Twierdzenie

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 q^{n-1}$, w którym $a_1 \neq 0$. Jeżeli $|q| < 1$, to szereg geometryczny (S_n) jest zbieżny i ma sumę $S = \frac{a_1}{1 - q}$.

Założenia

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad a_1 \neq 0, \quad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

Teza

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Dowód

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1 q^n}{1 - q} \right) = \frac{a_1}{1 - q} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{jeżeli } |q| < 1, \\ \text{to } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \end{array}$$

Koniec dowodu

Pozostawiamy do samodzielnego wykazania, że jeśli $|q| \geq 1$, to szereg jest rozbieżny.

Często spotykany zapis sumy szeregu geometrycznego zbieżnego, czyli spełniającego warunek $|q| < 1$, to $S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots = \frac{a_1}{1 - q}$.

Zauważmy, że jeżeli w szeregu geometrycznym (S_n) wyraz $S_1 = a_1 = 0$, to $S = 0$.

◀ **2.4.** Oblicz sumę nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q .

a) $a_1 = -3$, $q = 0,01$

b) $a_1 = 0,1$, $q = \frac{3}{4}$

c) $a_1 = -1$, $q = -\frac{2}{9}$

d) $a_1 = 10$, $q = -0,1$

Odp.: a) $-\frac{100}{33}$ b) $\frac{2}{5}$

c) $-\frac{9}{11}$ d) $\frac{100}{11}$

◀2.8. Dany ułamek okresowy zamień na ułamek zwykły.

- a) $0,(36)$
 b) $0,(06)$
 c) $1,0(45)$
 d) $0,03(18)$
 e) $1,2(6)$
 f) $2,(27)$

Odp.: a) $\frac{4}{11}$ b) $\frac{2}{33}$ c) $\frac{23}{22}$
 d) $\frac{7}{220}$ e) $\frac{19}{15}$ f) $\frac{25}{11}$

Przykład 2 ◀ zad. 2.8

Zapiszemy ułamek dziesiętny okresowy $0,(17)$ w postaci ułamka zwykłego. Zadanie rozwiążemy inną metodą niż w pierwszej klasie.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} 0,(17) &= 0,1717171717\ldots = 0,17 + 0,0017 + 0,000017 + 0,00000017 + \ldots = \\ &= 0,17 + 0,17 \cdot 0,01 + 0,17 \cdot (0,01)^2 + 0,17 \cdot (0,01)^3 + \ldots \\ a_1 &= 0,17, \quad q = 0,01 \end{aligned}$$

Zatem $0,(17)$ jest sumą szeregu geometrycznego zbieżnego i jest to liczba:

$$S = \frac{0,17}{1 - 0,01} = \frac{17}{99}$$

$$\text{Odp.: } 0,(17) = \frac{17}{99}$$

Każdy ułamek dziesiętny okresowy jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego o dodatnim i mniejszym od jedności ilorazie. Zatem jego sumą jest liczba wymierna.

Przykład 3 ◀ zad. 2.10

Rozwiążemy równanie $1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3} + \ldots = \frac{6}{x+5}$, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

Rozwiązanie

Lewa strona równania jest sumą szeregu geometrycznego, w którym $a_1 = 1$, $q = -\frac{2}{x}$. Taka suma istnieje, czyli równanie (lub w innych przykładach – nierówność) ma sens wtedy i tylko wtedy, gdy szereg jest zbieżny. Aby wyznaczyć dziedzinę D równania, musimy zatem rozwiązać układ warunków:

$$\begin{aligned} |q| &< 1 \quad \text{i} \quad x \neq 0 \quad \text{i} \quad x + 5 \neq 0 \\ |q| &< 1 \Leftrightarrow \left| -\frac{2}{x} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \\ D &= (-\infty; -5) \cup (-5; -2) \cup (2; \infty) \end{aligned}$$

Jeżeli $x \in D$, to korzystamy ze wzoru na sumę szeregu i zapisujemy lewą stronę równania jako $S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{x}{x+2}$.

$$\text{Rozwiązujemy równanie } \frac{x}{x+2} = \frac{6}{x+5}.$$

$$x(x+5) = 6(x+2), \text{ stąd } x^2 - x - 12 = 0, \text{ czyli } x = -3 \in D \text{ lub } x = 4 \in D.$$

$$\text{Odp.: } x = -3 \text{ lub } x = 4$$

Przykład 4 ◀ zad. 2.12

Rozwiążemy nierówność $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^4} + \ldots < 3x - 2$, której lewa strona jest sumą zbieżnego szeregu geometrycznego.

◀2.10. Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

$$\text{a) } x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots = \frac{3x+1}{3}$$

$$\text{b) } 2x + \frac{4x^2}{3} + \frac{8x^3}{9} + \frac{16x^4}{27} + \ldots = \frac{9}{4x}$$

$$\text{c) } \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} + \ldots = 1 - 2x$$

$$\text{Odp.: a) } x = -1, \quad x = \frac{2}{3} \quad \text{b) } x = \frac{3}{4} \quad \text{c) } x = -\frac{1}{2}$$

◀2.12. Rozwiąż nierówność, której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

$$\text{a) } 4 - x + \frac{4-x}{x-5} + \frac{4-x}{(x-5)^2} + \ldots > 0$$

$$\text{b) } \cos 2x + \cos^2 2x + \cos^3 2x + \ldots < 1$$

$$\text{Odp.: a) } x \in (-\infty; 4) \quad \text{b) } x \in \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi \right) - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Rozwiązanie

Zakładamy, że $x \neq -1$. Oznaczmy $a_1 = \frac{1}{1+x}$, $q = \frac{1}{1+x}$.

$$|q| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{1+x} \right| < 1 \Leftrightarrow |1+x| > 1 \Leftrightarrow (1+x > 1 \text{ lub } 1+x < -1) \Leftrightarrow (x > 0 \text{ lub } x < -2)$$

Zatem dziedziną nierówności jest zbiór $D = (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$.

Jeżeli $x \in D$, to lewą stronę nierówności, jako sumę szeregu, zapisujemy w postaci:

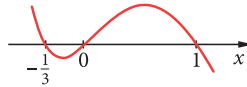
$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{1+x}}{1 - \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{x}$$

Rozwiązujemy nierówność.

$$\frac{1}{x} < 3x - 2 \quad \frac{1 - 3x^2 + 2x}{x} < 0$$

$$-3x(x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right) < 0$$

$$x \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (1; \infty)$$



Po uwzględnieniu dziedziny nierówności otrzymujemy rozwiązanie: $x \in (1; \infty)$.

Odp.: $x \in (1; \infty)$

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Wskaż sumę szeregu geometrycznego $7 - \frac{7}{3} + \frac{7}{9} - \frac{7}{27} + \dots$

A. $\frac{28}{3}$ B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{21}{3}$ D. $5\frac{1}{4}$

2.2. Wskaż ułamek zwykły równy ułamkowi okresowemu $0,(15)$.

A. $\frac{15}{33}$ B. $\frac{5}{33}$ C. $\frac{13}{99}$ D. $\frac{3}{11}$

2.3. Szereg geometryczny, w którym $a_1 = 1$ i $q = m^2 - 1$, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy m należy do zbioru

A. $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ B. $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ C. $(0; \sqrt{2})$ D. $(-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2})$

2.4. Oblicz sumę nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q .

a) $a_1 = -3$, $q = 0,01$ c) $a_1 = -1$, $q = -\frac{2}{9}$
b) $a_1 = 0,1$, $q = \frac{3}{4}$ d) $a_1 = 10$, $q = -0,1$

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. D

2.2. B

2.3. D

2.4. a) $-\frac{100}{33}$ b) $\frac{2}{5}$
c) $-\frac{9}{11}$ d) $\frac{100}{11}$

2.5. a) $m \in (1; 3)$, $S = \frac{1}{3-m}$

b) $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)$,

$S = \frac{m}{1-m^2-m}$

c) $m \in \langle 3; \infty \rangle$, $S = 2\sqrt{m-3}$

d) $m \in \langle -\sqrt{2}; -1 \rangle \cup (1; \sqrt{2})$,

$S = \frac{m\sqrt{2-m^2}}{m-1}$

2.6. a) $\frac{1}{2}$ b) $2 + \sqrt{2}$

c) $\frac{30}{11}$ d) $\frac{49}{2}$

e) szereg rozbieżny f) -10

2.7. a) 3 b) 16 c) $\sqrt{3}$ d) -12

2.8. a) $\frac{4}{11}$ b) $\frac{2}{33}$ c) $\frac{23}{22}$

d) $\frac{7}{220}$ e) $\frac{19}{15}$ f) $\frac{25}{11}$

2.9. $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$

2.10. a) $x = -1$, $x = \frac{2}{3}$

b) $x = \frac{3}{4}$

c) $x = -\frac{1}{2}$

2.11. a) $x = 1,5$

b) $x = -\frac{2}{3}$, $x = 1$

2.5. Dla jakich wartości m istnieje suma S nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q ? Wyznacz tę sumę.

a) $a_1 = 1$, $q = m - 2$

c) $a_1 = \sqrt{m-3}$, $q = 0,5$

b) $a_1 = m$, $q = m^2 + m$

d) $a_1 = \sqrt{2-m^2}$, $q = \frac{1}{m}$

2.6. Oblicz sumę podanego szeregu geometrycznego (o ile taka suma istnieje).

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

d) $21 + 3 + \frac{3}{7} + \frac{3}{49} + \dots$

b) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots$

e) $\sqrt{3} - 3 + 3\sqrt{3} - 9 + \dots$

c) $3 - 0,3 + 0,03 - 0,003 + \dots$

f) $-5 - \frac{5}{2} - \frac{5}{4} - \frac{5}{8} - \dots$

2.7. Liczba S jest sumą szeregu geometrycznego o podanym ilorazie q . Wyznacz wyraz a_1 ciągu geometrycznego.

a) $S = 3\frac{1}{3}$, $q = 0,1$

c) $S = 3\sqrt{3}$, $q = \frac{2}{3}$

b) $S = 20$, $q = \frac{1}{5}$

d) $S = -8$, $q = -0,5$

2.8. Dany ułamek okresowy zamień na ułamek zwykły.

a) $0,(36)$ b) $0,(06)$ c) $1,0(45)$ d) $0,03(18)$ e) $1,2(6)$ f) $2,(27)$

2.9. Rozwiąż równanie $x^{\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots} = 2x^2 + 3x$, w którym wykładnik po lewej stronie równania jest sumą szeregu geometrycznego.

2.10. Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

a) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \dots = \frac{3x+1}{3}$

b) $2x + \frac{4x^2}{3} + \frac{8x^3}{9} + \frac{16x^4}{27} + \dots = \frac{9}{4x}$

c) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} + \dots = 1 - 2x$

2.11. Rozwiąż równanie, w którym po lewej stronie występują sumy szeregów geometrycznych.

a) $\frac{x}{3} - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{x^2} + \frac{x^3}{12} - \frac{1}{x^3} + \dots = 0$ b) $x - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{8x} + \dots = 1$

2.12. Rozwiąż nierówność, której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

a) $4 - x + \frac{4-x}{x-5} + \frac{4-x}{(x-5)^2} + \dots > 0$ b) $\cos 2x + \cos^2 2x + \cos^3 2x + \dots < 1$

2.12. a) $x \in (-\infty; 4)$

b) $x \in \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi \right) - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$, $k \in \mathbb{Z}$

2.13. Suma S_3 trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego wynosi 6, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu równa się $\frac{16}{3}$. Dla jakich liczb naturalnych n spełniony jest warunek $|S - S_n| < \frac{1}{96}$?

2.14. Dla jakich wartości x szereg geometryczny $\cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \dots$ ma sumę mniejszą od $\frac{1}{2}$?

2.15. Wyznacz iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego, w którym $a_1 = 2$, a suma wyrazów jest 3 razy mniejsza od sumy kwadratów wyrazów.

2.16. Koło o promieniu R jest styczne do ramion kąta α . Drugie koło o mniejszym promieniu jest styczne do pierwszego koła i do ramion kąta. Tworzymy nieskończony ciąg takich kół. Oblicz sumę obwodów oraz sumę pól wszystkich kół.

Prosto do matury



1. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 \neq 0$ i ilorazie q . Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Ciąg (a_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$.

B. Suma nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$.

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow |q| < 1$

2. Zapisz ułamek $1,14$ w postaci ułamka zwykłego.

3. Rozwiąż nierówność, której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^4} + \dots > 3x + 2$$

4. Dla jakich wartości x szereg geometryczny, w którym $a_1 = 1$ i $q = x^2 - x - 1$, jest zbieżny i ma sumę równą $0,8$?

5. W trójkąt równoboczny o boku a wpisano koło, w to koło wpisano znów trójkąt równoboczny, w ten trójkąt wpisano koło itd. nieskończenie wiele razy. Oblicz sumę promieni i sumę pól tych wszystkich kół.

2.13. $n > 9, n \in \mathbb{N}$

2.14. $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right) \cup \left(\pi + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

2.15. $-\frac{1}{3}$

2.16. suma obwodów: $\frac{\pi R \cdot \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}},$
suma pól: $\frac{\pi R^2 \cdot \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}{4 \sin \frac{\alpha}{2}}$

Prosto do matury

1. F, P, P

2. $\frac{113}{99}$

3. $x \in (-\infty; -2) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$

4. Szereg zbieżny dla $x \in (-1; 0) \cup (1; 2), S = 0,8$
dla $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$.

5. suma promieni: $\frac{a\sqrt{3}}{3},$
suma pól: $\frac{\pi a^2}{9}$

Uwagi metodyczne

W tym i następnym temacie omawiamy jedno z podstawowych pojęć analizy – pojęcie granicy funkcji. Jest ono dla uczniów trudniejsze niż pojęcie granicy ciągu. Warto więc poświęcić mu sporo czasu i wykonać wiele ćwiczeń. Bardzo pomocne w zrozumieniu pojęcia granicy funkcji jest ilustrowanie rozwiązań odpowiednimi wykresami oraz odczytywanie granic funkcji z wykresu.

3. Granica funkcji w punkcie

Umiejętności:

- obliczanie granic funkcji z wykorzystaniem twierdzeń o działaniach na granicach
- obliczanie granic jednostronnych funkcji z wykorzystaniem twierdzeń o działaniach na granicach

Przykład 1

Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$.

Jej dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}$, a wykresem parabola. Wybierzmy argument $x_0 = 4$.

Istnieje nieskończenie wiele ciągów liczbowych zbieżnych do liczby 4. Są nimi

np. ciągi o wyrazach ogólnych $a_n = 4 + \frac{1}{n}$,

$$b_n = 4 - \frac{\sqrt{2}}{n^2}, \quad c_n = 4 + \frac{\pi}{n^3 + n}.$$

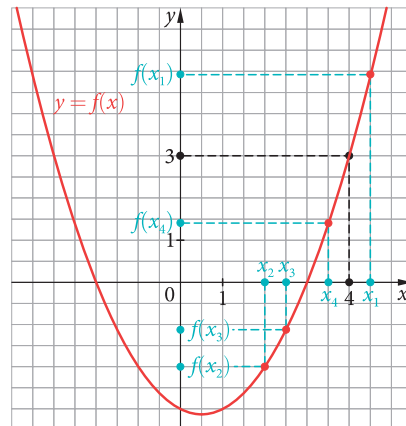
Przyjmijmy, że (x_n) jest ciągiem zbieżnym do $x_0 = 4$. Ciągowi argumentów (x_n)

odpowiada ciąg wartości funkcji, który

ma postać $(f(x_n))$, czyli $(\frac{1}{2}x_n^2 - \frac{1}{2}x_n - 3)$.

Skoro $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2}x_n^2 - \frac{1}{2}x_n - 3) = \frac{1}{2} \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 4 - 3 = 3$.

Zatem dla dowolnego ciągu argumentów zbieżnego do liczby 4 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji $f(x_n) = \frac{1}{2}x_n^2 - \frac{1}{2}x_n - 3$ dąży do liczby 3. Mówiąc poglądowo, gdy argumenty dążą na osi x do 4, to odpowiednie wartości funkcji dążą na osi y do 3. W takiej sytuacji mówimy, że funkcja f ma w punkcie 4 granicę równą 3 i zapisujemy to $\lim_{x \rightarrow 4} (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3) = 3$.



Definicja

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której dziedziną D jest zbiór $\mathbf{R}$ albo przedział liczbowy, albo suma przedziałów. Mówimy, że **funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą równą g** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach różnych od x_0 i zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ jest zbieżny do liczby g .

Zapisujemy to: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$.

ZZ i MKP

tematy 4.1–4.3

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.3

Generator
testów i sprawdzianów

Zauważmy, że zgodnie z definicją:

- każdy wyraz ciągu (x_n) musi spełniać dwa warunki: $x_n \in D$ i $x_n \neq x_0$,
- każdy z rozpatrywanych ciągów (x_n) musi być zbieżny do x_0 , czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Punkt x_0 **nie musi** należeć do dziedziny funkcji.

D Przykład 2 ◀ zad. 3.4

Wykażemy, że funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ 2x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ nie ma w punkcie $x_0 = 1$ granicy.

Dowód

Aby wykazać, że funkcja **nie ma** granicy w danym punkcie, wystarczy wskazać dwa ciągi spełniające założenia definicji i równocześnie takie, by odpowiadające im ciągi wartości funkcji były zbieżne do różnych liczb. Analizując wzór albo wykres tej funkcji, możemy wskazać takie ciągi:

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \leftarrow \text{ciąg o wszystkich wyrazach mniejszych od 1}$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \leftarrow \text{ciąg o wszystkich wyrazach większych od 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Obliczymy granice odpowiednich ciągów wartości.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 \quad \leftarrow \text{wyrazy ciągu } (a_n) \text{ są mniejsze od 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 \quad \leftarrow \text{wyrazy ciągu } (b_n) \text{ są większe od 1}$$

Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$.

Koniec dowodu

D Przykład 3 ◀ zad. 3.5

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji

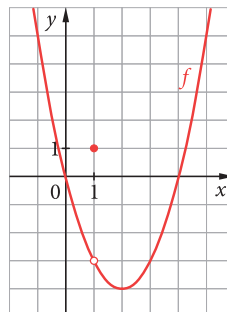
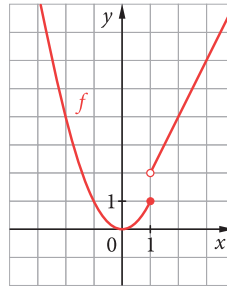
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{dla } x \neq 1 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Wykażemy, że $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3$.

Dowód

Niech (x_n) oznacza ciąg argumentów zbieżny do 1, którego wszystkie wyrazy są różne od 1.

Odpowiadający mu ciąg wartości funkcji ma wyraz ogólny $f(x_n) = x_n^2 - 4x_n$.



◀ 3.5. Patrz s. 295.

◀ 3.4. Skorzystaj z odpowiedniej definicji i wykaż, że funkcja $y = f(x)$ nie ma granicy w punkcie x_0 .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{dla } x < -2 \\ x^2 + 1 & \text{dla } x > -2 \end{cases}, \quad x_0 = -2$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{dla } x \geq 1 \\ x^2 & \text{dla } x < 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

Rozwiązanie

a) Rozpatrujemy dwa ciągi:

$$a_n = -2 - \frac{1}{n}, \quad b_n = -2 + \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3\left(-2 - \frac{1}{n}\right) + 5 \right] =$$

$$= -6 + 0 + 5 = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(-2 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1 \right] =$$

$$= (-2 + 0)^2 + 1 = 5$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n),$$

więc $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nie istnieje.

b) Rozpatrujemy dwa ciągi:

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad b_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n} - 1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 =$$

$$= (1 - 0)^2 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n),$$

więc $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nie istnieje.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 - 4x_n) = -3 \quad \leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

(x_n) jest dowolnym ciągiem spełniającym warunki definicji, zatem $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3$.

Koniec dowodu

Zauważmy, że w powyższym przykładzie $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) = 1$.

D

Przykład 4

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Wykażemy, że $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

Dowód

Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbf{R} - \{2\}$. Badamy zatem istnienie granicy funkcji w punkcie nienależącym do dziedziny. Zauważmy, że dla $x \in \mathbf{R} - \{2\}$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$$

Niech (x_n) oznacza ciąg argumentów zbieżny do 2, którego wszystkie wyrazy są różne od 2. Odpowiadający mu ciąg wartości funkcji ma wyraz ogólny $f(x_n) = x_n + 2$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 2) = 4 \quad \leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$$

(x_n) jest dowolnym ciągiem spełniającym warunki definicji, zatem $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

Koniec dowodu

Definicja granicy funkcji w punkcie korzysta bezpośrednio z definicji granicy ciągu. Dlatego prawdziwe jest poniższe twierdzenie dotyczące działań na granicach.

Twierdzenie

Dane są funkcje $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ i $g: D \rightarrow \mathbf{R}$, przy czym D jest zbiorem $\mathbf{R}$ albo przedziałem liczbowym, albo sumą przedziałów. Jeżeli istnieją granice właściwe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, to:

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad \leftarrow \text{granica funkcji stałej}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \leftarrow \text{granica sumy funkcji}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \leftarrow \text{granica różnicy funkcji}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \leftarrow \text{granica iloczynu funkcji}$
- (5) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \leftarrow \text{granica ilorazu funkcji}$

przy założeniu, że $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.

Przykład 5 ◀ zad. 3.6

Zastosujemy podane twierdzenie do obliczenia granicy $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 1)$.

Rozwiązanie

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} (2x) + \lim_{x \rightarrow 3} 1 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 1 = 4$$

Uwaga: Ze wzorów (1) i (4) powyższego twierdzenia wynika, że stałą możemy wyłączyć przed symbol granicy, czyli przy spełnionych założeniach twierdzenia mamy:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Twierdzenie

Granica wielomianu $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ jest $W(x_0)$.

Dowód

Dany jest wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ i punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Na mocy twierdzenia o działaniach na granicach funkcji:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} W(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 = \\ &= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = W(x_0) \end{aligned}$$

Koniec dowodu**Przykład 6**

Obliczymy podane granice.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (x^2 + 3) = 5$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x + 5}{x^2 - 7} = \frac{8 - 2 + 5}{4 - 7} = -\frac{11}{3}$$

Przykład 7 ◀ zad. 3.7, 3.8

Jeżeli x_0 jest wspólnym miejscem zerowym wielomianu z licznika i wielomianu z mianownika funkcji wymiernej f , to przed obliczeniem granicy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ obydwie wielomiany rozkładamy na czynniki i upraszczamy wyrażenie.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) = -6$$

◀ 3.7. Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 4}{x + 5}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$$

$$\text{Odp.: a) } -\frac{7}{4} \quad \text{b) } \frac{5}{3} \quad \text{c) } \frac{15}{123} \quad \text{d) } -\frac{1}{3}$$

◀ 3.8. Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 + x - 6}$$

$$\text{Odp.: a) } -2 \quad \text{b) } 1 \quad \text{c) } \frac{6}{35} \quad \text{d) } -\frac{10}{13}$$

◀ 3.6. Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (x^{23} - 24x^{13} + 11x^7 - 17x + 13)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x^2 + x - 1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} (x^7 - 2)^3$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x + 2} + x + 1)^2$$

$$\text{Odp.: a) } 13 \quad \text{b) } \sqrt{2}$$

$$\text{c) } -27 \quad \text{d) } 25$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 20x + 50}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x-5)^2}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} 2(x-5) = 0$$

Podamy jeszcze (bez dowodu) twierdzenie dotyczące granic pewnych funkcji.

Twierdzenie

- Jeżeli $x_0 \geq 0$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.
Ogólnie (dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$):
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ dla $x_0 \geq 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[2n+1]{x} = \sqrt[2n+1]{x_0}$ dla $x_0 \in \mathbf{R}$.
- Jeżeli funkcja f przyjmuje wartości nieujemne i istnieje granica właściwa $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$.
- Jeżeli $x_0 \in \mathbf{R}$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$.
- Jeżeli $x_0 \in \mathbf{R}$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$.

3.9. Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3}-1}{2x+4}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1 - \sqrt{x+4}}{x+3}$$

$$\text{Odp.: a) } -2 \quad \text{b) } 4 \quad \text{c) } \frac{1}{4} \quad \text{d) } -\frac{1}{2}$$

3.10. Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin 2x$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos 2x + \sin x)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\sin x - 2 \cos x)$$

$$\text{Odp.: a) } \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c) } \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{d) } \frac{\sqrt{3}-2}{2}$$

Przykład 8 ◀ zad. 3.9, 3.10

Obliczymy podaną granicę.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{10} \quad \leftarrow \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 1) = 10$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2 \\ &\leftarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b \end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2 \sin x = 2 \quad \leftarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Granice jednostronne

Przykład 9

W przykładzie 2 zbadaliśmy zachowanie dwóch konkretnych ciągów i w ten sposób

wykazaliśmy, że funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ 2x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ nie ma granicy w punkcie $x_0 = 1$.

Spójrzmy teraz na tę sytuację ogólniej.

Jeżeli weźmiemy dowolny ciąg (a_n) o wyrazach mniejszych od 1, to $f(a_n) = a_n^2$. Natomiast dla dowolnego ciągu (b_n) o wyrazach większych od 1 mamy $f(b_n) = 2b_n$.

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2b_n = 2$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie 1 **granice jednostronne** – lewostronną równą 1 i prawostronną równą 2, i zapisujemy to następująco:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

Definicja

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której dziedziną D jest zbiór $\mathbf{R}$ albo przedział liczbowy, albo suma przedziałów. Mówimy, że **funkcja f ma w punkcie x_0 granicę prawostronną (lewostronną) równą g** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach większych (mniejszych) od x_0 i zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest zbieżny do liczby g .

Zapisujemy to:

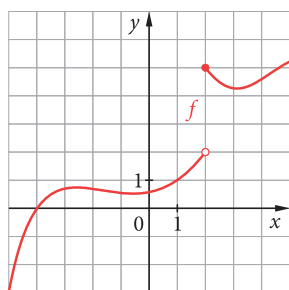
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g \quad (\text{granica prawostronna})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g \quad (\text{granica lewostronna})$$

Podczas obliczania granic jednostronnych stosujemy poznane twierdzenia dotyczące działań na granicach funkcji.

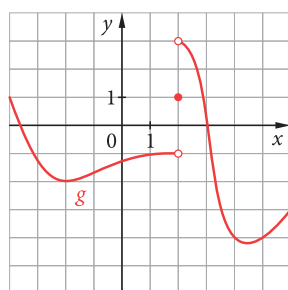
Przykład 10 ◀ zad. 3.12

Odczytamy z wykresów funkcji f , g i h ich granice jednostronne w punkcie $x_0 = 2$.



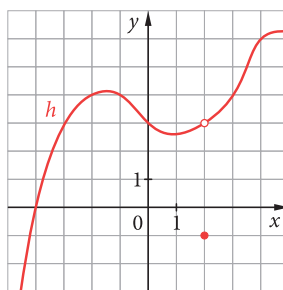
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 3$$

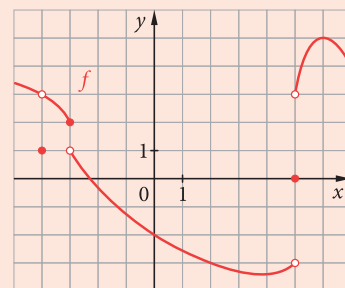
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -1$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = 3$$

◀3.12. Odczytaj z wykresu granice jednostronne funkcji f w punktach $x = -4$, $x = -3$ i $x = 5$. Zbadaj istnienie granicy funkcji w każdym z tych punktów.



◀3.12. Odp.: $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 3$;
 $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ nie istnieje;
 $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ nie istnieje

Twierdzenie

Granica $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Dowód tego twierdzenia pominiemy.

Zatem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g$$

Przykład 11 ◀ zad. 3.13

Sprawdźmy, czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1 & \text{dla } x \leq -1 \\ x^3 + 6 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

ma granicę w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - 3x + 1) = 5 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 + 6) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 5 \end{aligned}$$

Zatem $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 5$.

Odp.: Funkcja f ma granicę w punkcie $x_0 = -1$ i granica ta jest równa 5.

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. D

3.1. Granica $\lim_{x \rightarrow -2} (2 - 2x - x^2)$ jest równa

- A. 0. B. 4. C. -2. D. 2.

3.2. B

3.2. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x - 3}$. Dla tej funkcji

- A. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$. C. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$.
B. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 15$. D. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ nie istnieje.

3.3. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x > \frac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{dla } x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$. Dla tej funkcji

- A. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x)$. C. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 B. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x)$ nie istnieje. D. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = 1$.

D 3.4. Skorzystaj z odpowiedniej definicji i wykaż, że funkcja $y = f(x)$ nie ma granicy w punkcie x_0 .

- a) $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{dla } x < -2 \\ x^2 + 1 & \text{dla } x > -2 \end{cases} \quad x_0 = -2$
 b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{dla } x \geq 1 \\ x^2 & \text{dla } x < 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$

D 3.5. Skorzystaj z odpowiedniej definicji i wykaż, że funkcja $y = f(x)$ ma granicę w punkcie x_0 .

- a) $f(x) = -3x^3 + 2x + 7, x_0 = 1$ c) $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{dla } x \neq -2 \\ 0 & \text{dla } x = -2 \end{cases}, x_0 = -2$
 b) $f(x) = \sqrt{x+7}, x_0 = -1$ d) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \neq \frac{\pi}{3} \\ 0 & \text{dla } x = \frac{\pi}{3} \end{cases}, x_0 = \frac{\pi}{3}$

3.6. Oblicz.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{23} - 24x^{13} + 11x^7 - 17x + 13)$ c) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^7 - 2)^3$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x^2 + x - 1}$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+2} + x + 1)^2$

3.7. Oblicz.

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x-4}{x+5}$ c) $\lim_{x \rightarrow 11} \frac{x+4}{x^2+2}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-1}{x^2-1}$ d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^7 - 4x^5 + 3x^4 - 4}{x^6 + 5}$

3.8. Oblicz.

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 2x - 35}{x^3 - 4x^2 - 21x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 + x - 6}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 3x - 2}{2x^3 + x^2 + 6x + 3}$

3.3. C

3.4. Patrz s. 289.

3.6. a) 13 b) $\sqrt{2}$ c) -27 d) 25

3.7. a) $-\frac{7}{4}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{15}{123}$ d) $-\frac{1}{3}$

3.8. a) -2 b) 1 c) $\frac{6}{35}$ d) $-\frac{10}{13}$

3.5. a) Niech (x_n) oznacza ciąg argumentów zbieżnych do 1, którego wyrazy są różne od 1.

Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-3x_n^3 + 3x_n + 7) = -3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 + 7 = 6$. Zatem $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 6$.

b) Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem takim, że $x_n + 7 \geq 0$ i $x_n \neq -1$ dla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$.

Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n + 7} = \sqrt{-1 + 7} = \sqrt{6}$. Zatem $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt{6}$.

c) Niech (x_n) oznacza ciąg argumentów zbieżnych do -2, którego wyrazy są różne od -2.

Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3x_n + 5) = 3 \cdot (-2) + 5 = -1$. Zatem $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$.

d) Niech (x_n) oznacza ciąg argumentów zbieżnych do $\frac{\pi}{3}$, którego wyrazy są różne od $\frac{\pi}{3}$.

Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.9. a) -2 b) 4 c) $\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{2}$

3.10. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$

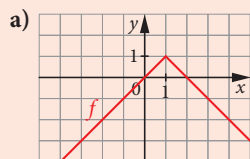
3.11. np. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

3.12. $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = 3,$
 $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 3;$

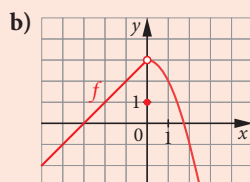
$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 2,$
 $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ nie istnieje;

$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -3,$
 $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ nie istnieje

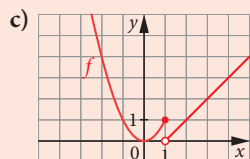
3.13.



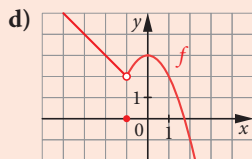
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$



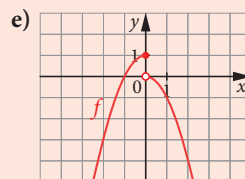
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$



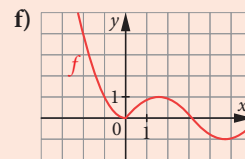
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0,$
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nie istnieje



$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2 =$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0,$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nie istnieje



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

3.9. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3}-1}{2x+4}$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1 - \sqrt{x+4}}{x+3}$

3.10. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin 2x$

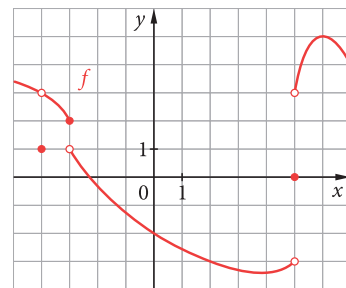
c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos 2x + \sin x)$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\sin x - 2 \cos x)$

3.11. Podaj przykład funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która w żadnym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ nie ma granicy.

3.12. Odczytaj z wykresu granice jednostronne funkcji f w punktach $x = -4$, $x = -3$ i $x = 5$. Zbadaj istnienie granicy funkcji w każdym z tych punktów.



3.13. Naskicuj wykres funkcji f . Oblicz granice jednostronne tej funkcji w podanym punkcie x_0 i odpowiedz na pytanie, czy istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leq 1 \\ 2-x & \text{dla } x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \\ -x^2+3 & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ x-1 & \text{dla } x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{dla } x < -1 \\ 0 & \text{dla } x = -1 \\ 3-x^2 & \text{dla } x > -1 \end{cases} \quad x_0 = -1$

e) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \\ -x^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 0 \\ \sin x & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

3.14. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{3x + \sqrt{2x+6}}{x^2 + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4^-} (\sqrt{4-x} + 2x + 3)$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{2-x} + 7x + 2}{x - 4\sqrt{4-2x}}$

Prosto do matury**1. Oceń prawdziwość podanych zdań.**

A. Funkcja $h(x) = f(x) + g(x)$ ma granicę w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje f i g mają granice w punkcie x_0 .

B. Funkcja $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ma granicę w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje f i g mają granice w punkcie x_0 i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.

C. Jeżeli $f(x) > 0$ dla $x \in (a; b)$, $x_0 \in (a; b)$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$, to $g > 0$.

2. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 13x^2 + 47x - 35}{x^3 - 5x^2 + 4x - 20}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{2x - 6}$

3. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{dla } x < 1 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \\ 1 - 2x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

Oblicz granice jednostronne tej funkcji w punkcie $x_0 = 1$ i odpowiedz na pytanie, czy istnieje $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

D**4. Wykaż, że funkcja**

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x < \pi \\ \cos x & \text{dla } x \geq \pi \end{cases}$$

nie ma granicy w punkcie $x_0 = \pi$.

D**5. Skorzystaj z definicji i wykaż, że funkcja $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ ma granicę w punkcie $x_0 = -2$.**

4. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x < \pi \\ \cos x & \text{dla } x \geq \pi \end{cases}, x_0 = \pi$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin x = \sin \pi = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \cos x = \cos \pi = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \text{ więc } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ nie istnieje.}$$

5. Niech (x_n) oznacza ciąg argumentów funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ zbieżnych do $x_0 = -2$, których wyrazy różnią się od x_0 .

$$\text{Wtedy } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n^2 + 3} = \sqrt{(-2)^2 + 3} = \sqrt{7}, \text{ zatem } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt{7}.$$

3.14. a) 0 b) $-\frac{9}{10}$ c) 11 d) 8

Prosto do matury**1. F, F, F. Wskazówka:**

A. Dla $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = -\frac{1}{x}$

mamy $f(x) + g(x) = 0$,

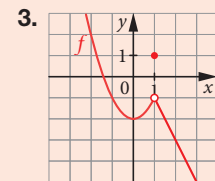
zatem nie istnieje $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

i nie istnieje $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, natomiast

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Wynikanie w drugą stronę jest prawdziwe.

2. a) $-\frac{8}{29}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{4}$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned}$$

4. Granice niewłaściwe

Umiejętności:

- obliczanie granic funkcji

Umiemy na podstawie wykresu funkcji podać jej podstawowe własności – wskazać dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności itd.

Aby precyzyjnie opisać funkcję w niektórych charakterystycznych punktach oraz na końcach przedziałów, w których jest określona, wprowadzimy pojęcie granicy niewłaściwej.

Definicja

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}$ albo przedział liczbowy, albo suma przedziałów. Mówimy, że **funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą nieskończoność (minus nieskończoność)** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach różnych od x_0 i zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest rozbieżny do nieskończoności (minus nieskończoności).

Zapisujemy to:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Przykład 1

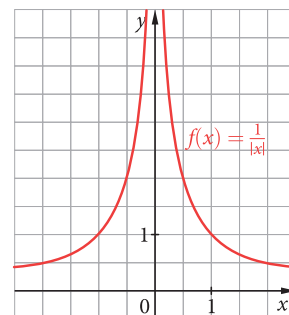
Niech $f(x) = \frac{1}{|x|}$.

Funkcja f jest określona dla wszystkich $x \neq 0$, a jej wykres jest przedstawiony obok.

Dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach różnych od zera i zbieżnego do zera odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest rozbieżny do ∞ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} = \infty \quad \leftarrow \text{dodatni mianownik dąży do } 0$$

$$\text{Zatem } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty.$$



Zauważmy, że jeżeli ciąg (x_n) dąży do 0, to ciąg $\left(\frac{1}{|x_n|}\right)$ jest rozbieżny do ∞ . Na przykład:

jeśli $x_n = \frac{1}{n}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$; jeśli $x_n = -\frac{2}{n^2}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2} = \infty$.

ZZ i MKP

tematy 4.4, 4.5

Multiteka

- Asymptoty pionowe funkcji
- Asymptoty poziome funkcji
- Wybrane krzywe i ich asymptoty

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.4

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 2

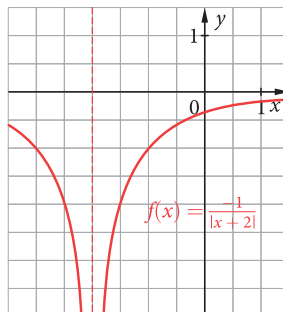
Wykres funkcji $f(x) = \frac{-1}{|x+2|}$ jest przedstawiony obok.

Dziedziną f jest $\mathbf{R} - \{-2\}$. Badamy granicę:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-1}{|x+2|}$$

W tym wypadku dodatni mianownik dąży do 0, ale licznik ułamka jest ujemny, zatem wartości funkcji dążą do minus nieskończoności.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-1}{|x+2|} = -\infty$$

**Definicja**

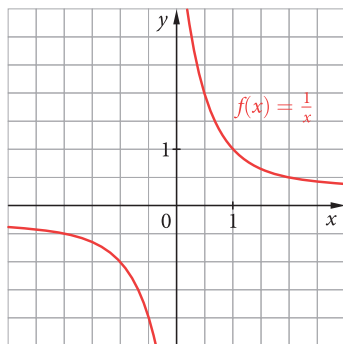
Dana jest funkcja $y = f(x)$ określona na przedziale $(a; b)$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie a **granicę prawostronną niewłaściwą** ∞ ($-\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach należących do przedziału $(a; b)$ i zbieżnego do a odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest rozbieżny do ∞ ($-\infty$).

Zapisujemy to:

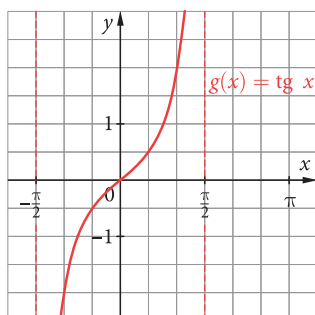
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \right)$$

Analogicznie definiujemy granicę **lewostronną niewłaściwą**:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty \quad \text{ i } \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$$

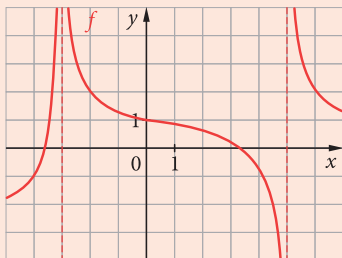
Przykład 3

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty$$

◀ 4.4. Odczytaj z podanego wykresu granice funkcji $y = f(x)$ w punktach $x = -3$ i $x = 5$.



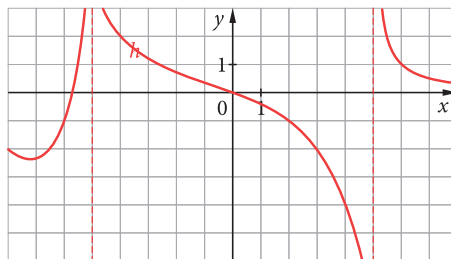
Odp.: $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \infty$
 $= \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty,$

$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty,$

$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \infty$

Przykład 4 zad. 4.4

Odczytamy z wykresu funkcji h odpowiednie granice niewłaściwe.



$\lim_{x \rightarrow -5} h(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} h(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} h(x) = -\infty$

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 granicę jednostronną niewłaściwą, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową** wykresu funkcji.

Definicja

Dana jest funkcja $y = f(x)$ określona na przedziale $(a; \infty)$.

Mówimy, że **funkcja f dąży do ∞ ($-\infty$) przy x dążącym do ∞** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach należących do przedziału $(a; \infty)$ i rozbieżnego do ∞ odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest rozbieżny do ∞ ($-\infty$).

Zapisujemy to:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \right)$$

Analogicznie formułujemy definicje granic niewłaściwych:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Przykład 5

Porównamy granice: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x + 3)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 3)$.

Rozwiązanie

- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x + 3) = \infty$, bo dla każdego ciągu argumentów (x_n) rozbieżnego do ∞ odpowiadający mu ciąg wartości jest rozbieżny do ∞ : $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n + 3) = \infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 3) = ?$$

O ile w pierwszym przypadku nie ma wątpliwości (suma dąży do ∞), o tyle w drugim sytuacja jest już niejednoznaczna: $x_n^2 \rightarrow \infty$, ale drugi składnik $x_n \rightarrow -\infty$.

Zbadamy to dokładniej.

Niech ciąg argumentów (x_n) będzie rozbieżny do $-\infty$, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n + 3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n^2 \left(1 + \frac{1}{x_n} + \frac{3}{x_n^2} \right) \right) = \infty \quad \leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n} + \frac{3}{x_n^2} \right) = 1$$

$$\text{Zatem } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right) \right) = \infty.$$

W kolejnych przykładach od razu wykorzystamy przekształcenia odwołujące się do twierdzeń o działaniach na granicach.

Podczas wyznaczania granic niewłaściwych istotne jest poprawne określenie, czy wyrażenie dąży do plus nieskończoności, czy do minus nieskończoności. Przydatne tu może być badanie znaków wartości funkcji. Prześledźmy to na przykładzie.

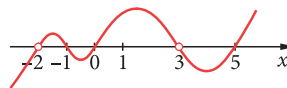


Przykład 6 ◀ zad. 4.6

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x(x+1)(x-5)}{(x+2)(x-3)}$. Określmy jej dziedzinę, miejsca zerowe, zrobimy pomocniczy wykres do odczytania znaków wartości funkcji, a następnie wyznaczmy granice funkcji f na końcach przedziałów, w których jest określona.

Rozwiązanie

- $D = \mathbb{R} - \{-2, 3\} = (-\infty; -2) \cup (-2; 3) \cup (3; \infty)$
- Miejscami zerowymi funkcji są $-1, 0, 5$.
- Rysujemy wykres znaków wartości funkcji.
- Wyznaczamy granice na końcach przedziałów $(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; \infty)$.



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x+1)(x-5)}{(x+2)(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \left(1 - \frac{5}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} \right) \left(1 - \frac{3}{x} \right)} = -\infty \end{aligned}$$

Funkcja wymierna ma w nieskończoności granicę niewłaściwą wtedy i tylko wtedy, gdy stopień wielomianu z licznika jest wyższy od stopnia wielomianu z mianownika. Znak tej granicy zależy od tego, czy, mówiąc poglądowo, wartości funkcji są w badanej nieskończoności dodatnie czy ujemne.

◀ 4.6. Wyznacz granice funkcji $y = f(x)$ na końcach przedziałów, w których jest ona określona.

a) $f(x) = \frac{x+7}{x-11}$

c) $f(x) = \frac{x^2+6x+5}{x^2-5x-14}$

b) $f(x) = \frac{2-x}{x^2-25}$

d) $f(x) = \frac{x^2(x^2-7x-8)}{(x+3)(6-x)}$

Odp.: a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 11^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 11^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x(x+1)(x-5)}{(x+2)(x-3)} = -\infty \quad \leftarrow \text{mianownik dąży do 0, wartości funkcji dla } x \rightarrow -2^- \text{ są ujemne}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty \quad \leftarrow \text{mianownik dąży do 0, wartości funkcji dla } x \rightarrow -2^+ \text{ są dodatnie}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \infty \quad \leftarrow \text{mianownik dąży do 0, wartości funkcji dla } x \rightarrow 3^- \text{ są dodatnie}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \quad \leftarrow \text{mianownik dąży do 0, wartości funkcji dla } x \rightarrow 3^+ \text{ są ujemne}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \leftarrow \text{wartości funkcji dla } x \rightarrow \infty \text{ są dodatnie}$$

Definicja

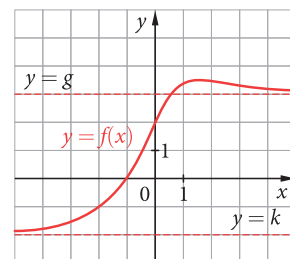
Dana jest funkcja $y = f(x)$ określona w przedziale $(a; \infty)$. Mówimy, że **funkcja f ma granicę równą g przy x dążącym do ∞** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach należących do przedziału $(a; \infty)$ i rozbieżnego do ∞ odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest zbieżny do g . Zapisujemy to:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$$

Analogicznie formułujemy definicję $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$.

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$, to prostą $y = g$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w nieskończoności.

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$, to prostą $y = k$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w minus nieskończoności.



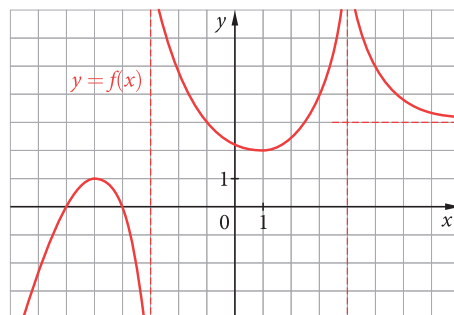
◀ 4.12. Patrz s. 305.

Przykład 7 ◀ zad. 4.12

Opiszemy własności funkcji na podstawie jej wykresu.

Rozwiązanie

- $D = (-\infty; -3) \cup (-3; 4) \cup (4; \infty)$
- $ZW = (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$
- Miejsca zerowe: $-6, -4$.



- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-6; -4) \cup (-3; 4) \cup (4; \infty)$
 $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -6) \cup (-4; -3)$
- Funkcja nie jest monotoniczna w całej dziedzinie, natomiast jest monotoniczna w przedziałach. Będziemy stosować następujący opis: $\searrow$ jako oznaczenie funkcji malejącej i $\nearrow$ dla funkcji rosnącej.

przedziały	$(-\infty; -5)$	$(-5; -3)$	$(-3; 1)$	$(1; 4)$	$(4; \infty)$
monotoniczność	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

- Granice funkcji na końcach przedziałów określoności:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \infty$,
 $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$
- Asymptoty pionowe wykresu funkcji: $x = -3$, $x = 4$.
- Asymptota pozioma wykresu funkcji w nieskończoności: $y = 3$.
- Równanie $f(x) = m$:
nie ma rozwiązań dla $m \in (1; 2)$,
ma jedno rozwiązanie dla $m \in \{1, 2\}$,
ma dwa rozwiązania dla $m \in (-\infty; 1) \cup (2; 3)$,
ma trzy rozwiązania dla $m \in (3; \infty)$.

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2x^2}{|x|}$. Dla tej funkcji

- A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$. B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$. D. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$.

4.2. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x+2}{(x+7)(x-4)}$. Wskaż zdanie fałszywe.

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ B. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$ C. $\lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = -\infty$ D. $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \infty$

4.3. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{dla } x \neq -1 \\ 1 & \text{dla } x = -1 \end{cases}$. Dla tej funkcji

- A. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2$. B. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -4$. C. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$. D. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$.

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. C

4.2. C

4.3. A

$$4.4. \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \infty$$

$$4.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty,$$

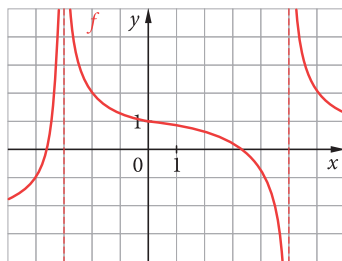
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty,$$

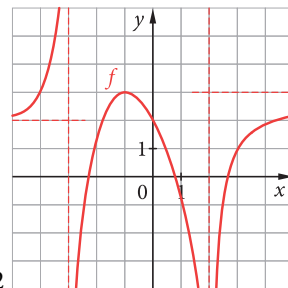
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$$

4.4. Odczytaj z podanego wykresu (rys. 1) granice funkcji $y = f(x)$ w punktach $x = -3$ i $x = 5$.

4.5. Odczytaj z podanego wykresu (rys. 2) granice funkcji $y = f(x)$ na końcach przedziałów, w których jest ona określona.



Rys. 1



Rys. 2

4.6. Wyznacz granice funkcji $y = f(x)$ na końcach przedziałów, w których jest ona określona.

a) $f(x) = \frac{x+7}{x-11}$

c) $f(x) = \frac{x^2+6x+5}{x^2-5x-14}$

b) $f(x) = \frac{2-x}{x^2-25}$

d) $f(x) = \frac{x^2(x^2-7x-8)}{(x+3)(6-x)}$

4.7. a) ∞ b) $-\infty$ c) ∞
d) $-\infty$

4.7. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{|x-2|}$

b) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x}{|x+6|}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-2}{|4-x|}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{|x-1|}$

4.8. a) $x = -\sqrt{5}$, $x = \sqrt{5}$

b) $x = 1$, $x = 2$

c) $x = 7$

d) brak asymptot pionowych

4.8. Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji $y = f(x)$, o ile istnieją.

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2-5}$

c) $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-4x-21}$

b) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-3x+2}$

d) $f(x) = \frac{x^2+3x-28}{2x+14}$

4.9. a) w ∞ i $-\infty$: $y = 0$

b) brak asymptot poziomych

c) w ∞ i $-\infty$: $y = -1$

d) w $-\infty$: $y = -2$, w ∞ : $y = 3$

4.9. Wyznacz asymptoty poziome wykresu funkcji $y = f(x)$, o ile istnieją.

a) $f(x) = \frac{2x^2-3x+2}{x^4-1}$

c) $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-5}$

b) $f(x) = \frac{x^3-5x+8}{2x^2+5}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-4x}{2x-5} & \text{dla } x < 1 \\ \frac{3x}{x+2} & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

4.6. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 11^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 11^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

4.10. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}$

4.11. Oblicz.

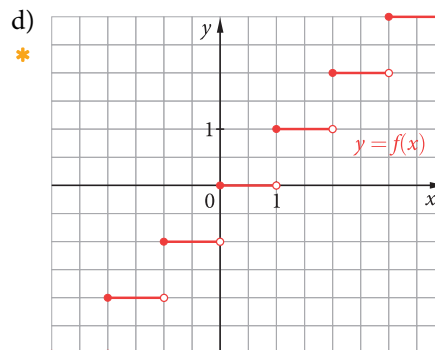
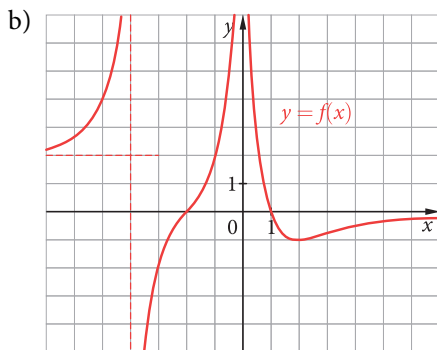
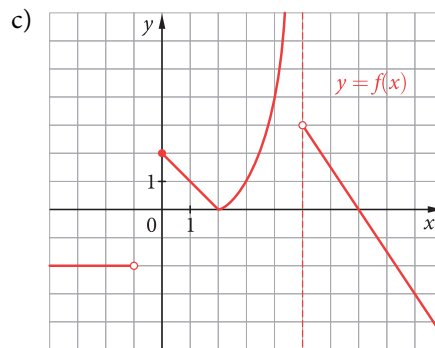
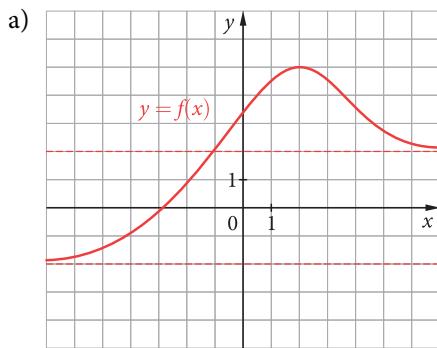
a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{\sqrt{x} - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4-x}{x\sqrt{x^2+7}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+5}{x\sqrt{x^2+3x+11}}$

4.12. Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ określ: jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne), przedziały monotoniczności, granice funkcji na końcach przedziałów określoności, równania asymptot oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od m .



Uwaga: Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

4.10. a) 0 b) ∞ c) ∞ d) -1

4.11. a) ∞ b) ∞
c) $-\infty$ d) $-\infty$

4.12. a) $D = \mathbb{R}$, $ZW = (-2; 5)$;
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$,
 $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; \infty)$,
 $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3)$;
funkcja nie jest monotoniczna – jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$, malejąca w przedziale $(2; \infty)$;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$;
brak asymptot pionowych,
asymptoty poziome: w $-\infty$ prosta $y = -2$, w ∞ prosta $y = 2$;
 $f(x) = m$ nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2) \cup (5; \infty)$, ma jedno rozwiązanie dla $m \in (-2; 2) \cup \{5\}$, dwa rozwiązania dla $m \in (2; 5)$;
b) $D = (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; \infty)$, $ZW = \mathbb{R}$;
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ lub $x = 1$,
 $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 0) \cup (0; 1)$,
 $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4; -2) \cup (1; \infty)$;
funkcja nie jest monotoniczna – jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -4)$, $(-4; 0)$ i $(2; \infty)$, malejąca w przedziale $(0; 2)$;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$;
asymptoty pionowe: $x = -4$,
 $x = 0$, asymptoty poziome: w $-\infty$ prosta $y = 2$, w ∞ prosta $y = 0$;
 $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -1)$, dwa rozwiązania dla $m \in \langle 0; 2 \rangle \cup \{-1\}$, trzy rozwiązania dla $m \in (-1; 0) \cup (2; \infty)$

4.12. c) $D = (-\infty; -1) \cup \langle 0; 5 \rangle \cup (5; \infty)$, $ZW = \mathbb{R}$;

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ lub $x = 7$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle 0; 2 \rangle \cup (2; 5) \cup (5; 7)$,

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (7; \infty)$;

funkcja nie jest monotoniczna – jest stała w przedziale $(-\infty; -1)$, malejąca w każdym z przedziałów $\langle 0; 2 \rangle$ i $(5; \infty)$, rosnąca w przedziale $\langle 2; 5 \rangle$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$;

asymptota pionowa: $x = 5$, asymptota pozioma: w $-\infty$ prosta $y = -2$;

$f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup \langle 3; \infty \rangle$, dwa rozwiązania dla $m \in (2; 3) \cup \{0\}$,

trzy rozwiązania dla $m \in (0; 2)$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = -2$

d) $D = \mathbb{R}$, $ZW = \mathbb{Z}$;

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \langle 0; 1 \rangle$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle 1; \infty \rangle$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0)$;

funkcja niemalejąca – jest stała w każdym z przedziałów postaci $\langle k; k+1 \rangle$ dla $k \in \mathbb{Z}$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, dla $k \in \mathbb{Z}$: $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = k-1$, $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = k$; brak asymptot;

$f(x) = m$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $m \in \mathbb{Z}$, nie ma rozwiązań dla $m \notin \mathbb{Z}$



Prosto do matury

1. F, P, F

2. a) $-\infty$ b) ∞ c) ∞

3. asymptoty pionowe: $x = -3$,
 $x = 0$, asymptota pozioma w ∞
 i $-\infty$: $y = -2$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow 0,5^-} f(x) = \infty$,
 $\lim_{x \rightarrow 0,5^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \infty$,
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Dla każdych dwóch funkcji f, g takich, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$, zachodzi równość

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = 0$.

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$.

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$.

2. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+2}{|x+3|}$

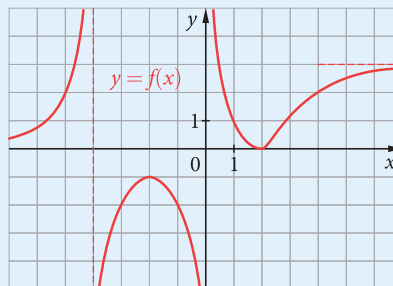
b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{4-x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 5x + 4}$

3. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{11x - 2x^2 - 5}{x^2 + 3x}$.

4. Wyznacz granice funkcji $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 - x + 6}{2x^2 - 7x + 3}$ na końcach przedziałów, w których jest określona.

5. Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ określ: jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne), przedziały monotoniczności, granice funkcji na końcach przedziałów określoności, równania asymptot oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .



5. $D = (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; \infty)$, $ZW = (-\infty; -1) \cup \{0; \infty\}$;
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (0; 2) \cup (2; \infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4; 0)$;
 funkcja nie jest monotoniczna – jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -4)$, $(-4; -2)$
 i $(2; \infty)$, malejąca w każdym z przedziałów $(-2; 0)$ i $(0; 2)$;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$; asymptoty pionowe: $x = -4$, $x = 0$;
 asymptoty poziome: w $-\infty$ prosta $y = 0$, w ∞ prosta $y = 3$;
 $f(x) = m$ nie ma rozwiązań dla $m \in (-1; 0)$, ma jedno rozwiązanie dla $m \in \{-1, 0\}$,
 dwa rozwiązania dla $m \in (-\infty; -1) \cup \{3; \infty\}$, trzy rozwiązania dla $m \in (0; 3)$

5. Funkcje ciągłe

Umiejętności:

- obliczanie granic funkcji
- badanie ciągłości funkcji

Definicja

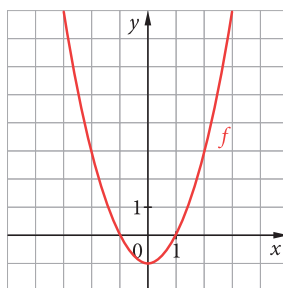
Funkcja $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in (a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:

- istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Zauważmy, że zgodnie z definicją ciągłość funkcji możemy badać tylko w punktach **należących do dziedziny** funkcji.

Przykład 1

Funkcja $f(x) = x^2 - 1$ jest w punkcie $x_0 = 2$ ciągła, ponieważ $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 3 = f(2)$.



Przykład 2 ◀ zad. 5.5

Zbadamy ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x < 1 \\ -(x-2)^2 + 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 1$ i naszkicujemy jej wykres.

Rozwiązanie

Obliczamy granice jednostronne w punkcie $x_0 = 1$.

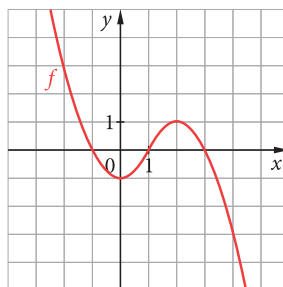
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-(x-2)^2 + 1) = 0$$

Zatem $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

$$f(1) = -(1-2)^2 + 1 = 0 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Odp.: Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$.



Uwagi metodyczne

Ciągłość funkcji jest jednym z głównych (obok pochodnej) pojęć analizy matematycznej. Zaczynamy od zdefiniowania ciągłości funkcji w punkcie. Zwracamy uwagę, że zgodnie z podaną definicją rozważamy ciągłość funkcji **tylko** w punktach należących do dziedziny tej funkcji.

Istotnym zastosowaniem pojęcia ciągłości funkcji jest badanie istnienia pierwiastków wielomianu w podanym przedziale.

◀ 5.5. Zbadaj ciągłość funkcji f w podanym punkcie x_0 .

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{dla } x \leq 1 \\ 4 - x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$
 $x_0 = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dla } x \leq 0 \\ -x^2 + 3 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$
 $x_0 = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x \leq 0 \\ \cos x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$
 $x_0 = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x \leq 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$
 $x_0 = 1$

Odp.: a), b), c), d) ciągła

ZZ i MKP

tematy 4.6, 4.7

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.5

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Zbadamy ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \leq 2 \\ 3-x & \text{dla } x > 2 \end{cases}$ w punkcie $x_0 = 2$ i naskicujemy jej wykres.

Rozwiązanie

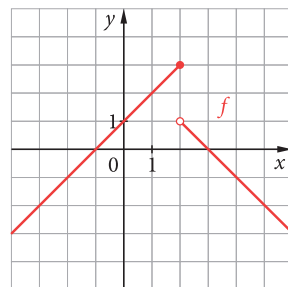
Obliczamy granice jednostronne w punkcie $x_0 = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3-x) = 1$$

Zatem $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ nie istnieje, więc funkcja nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.

Odp.: Funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.



◀5.6. Zbadaj ciągłość funkcji f w podanym punkcie x_0 .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-2x+1} & \text{dla } x \neq 1 \\ 0 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

$$x_0 = 1$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{9x^2-1}{3x+1} & \text{dla } x \neq -\frac{1}{3} \\ -2 & \text{dla } x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x_0 = -\frac{1}{3}$$

Odp.: a) nieciągła

b) ciągła

◀5.7. Zbadaj ciągłość funkcji f w podanym punkcie x_0 .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2+x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$x_0 = 0$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3} & \text{dla } x \geq 3 \\ x^2-9 & \text{dla } x < 3 \end{cases}$$

$$x_0 = 3$$

Odp.: a), b) ciągła

Przykład 4 ◀ zad. 5.6, 5.7

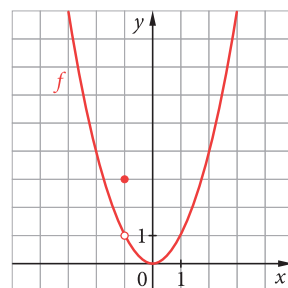
Zbadamy ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \neq -1 \\ 3 & \text{dla } x = -1 \end{cases}$ w punkcie $x_0 = -1$ i naskicujemy jej wykres.

Rozwiązanie

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1$$

$$f(-1) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

Odp.: Funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = -1$.

**Przykład 5** ◀ zad. 5.11

Zbadamy, dla jakich wartości parametru m funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x+3} & \text{dla } x \neq -3 \\ m & \text{dla } x = -3 \end{cases} \text{ jest ciągła w punkcie } x_0 = -3.$$

Rozwiązanie

Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = -3$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$m = f(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+x-6}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-2)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-2) = -5$$

Zatem powinna zachodzić równość $f(-3) = -5$.

Odp.: $m = -5$

◀5.11. Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = f(x)$ jest ciągła?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} m-x & \text{dla } x \leq -1 \\ 2x+1 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } x \leq 0 \\ x^2-2x-m & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} & \text{dla } x \in \langle -1; 0 \rangle \cup (0; \infty) \\ m & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+|x|}{|x|} & \text{dla } x \neq 0 \\ m & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Odp.: a) $m = -2$ b) $m = -1$ c) $m = -2$ d) $m = 1$

Twierdzenie

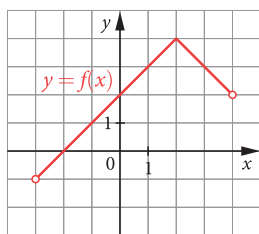
- Suma, różnica i iloczyn funkcji ciągłych w punkcie x_0 są ciągłe w punkcie x_0 .
- Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 oraz $g(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0 .

Twierdzeń tych nie dowodzimy – wynikają one z własności działań na granicach.

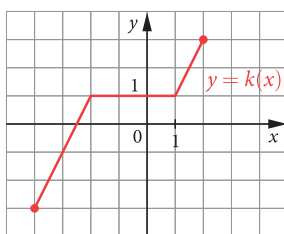
Definicja

Funkcję ciągłą w każdym punkcie jej dziedziny nazywamy **funkcją ciągłą**.

Uwaga: Jeżeli dziedziną funkcji f jest przedział domknięty $\langle a; b \rangle$, to powiemy, że f jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągła w przedziale $(a; b)$ oraz $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ i $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.



Funkcja f jest ciągła w $(-3; 4)$.



Funkcja k jest ciągła w $(-4; 2)$.

Jeżeli funkcja f nie jest ciągła w punkcie x_0 należącym do jej dziedziny, to mówimy też, że x_0 jest **punktem nieciągłości** funkcji f lub że f jest **nieciągła** w punkcie x_0 .

Własności funkcji ciągłych

Z poprzednich rozważań wynika, że **wielomiany**, **funkcje wymierne**, **funkcje trygonometryczne** oraz **funkcja** $f(x) = \sqrt[n]{x}$ są funkcjami ciągłymi.

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła, to ciągłe są funkcje:

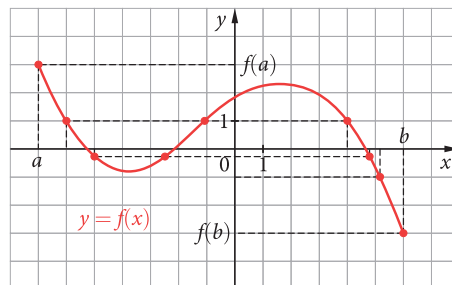
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

Podamy teraz dwa ważne twierdzenia (bez dowodów), które zilustrujemy odpowiednimi wykresami.

Twierdzenie**Twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich**

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$ i $f(a) \neq f(b)$, to funkcja przyjmuje każdą wartość pośrednią między wartościami przyjmowanymi na końcach przedziału.

Zauważmy, że wartości pośrednie mogą być przyjmowane wielokrotnie.



Prostą konsekwencją tego twierdzenia jest następujący wniosek.

Wniosek

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$ i jej wartości na końcach przedziału są liczbami o różnych znakach, to istnieje taki punkt $x_0 \in (a; b)$, że $f(x_0) = 0$.

◀5.12. Wykaż, że równanie ma w podanym przedziale co najmniej jedno rozwiązanie.

a) $x^2 + \frac{4}{x} = 10$, $\langle 2; 3 \rangle$

b) $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$, $\langle -1; 0 \rangle$

Rozwiązanie

a) Niech $f(x) = x^2 + \frac{4}{x} - 10$.

Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle 2; 3 \rangle$.

$$f(2) = 2^2 + \frac{4}{2} - 10 = -4 < 0$$

$$f(3) = 3^2 + \frac{4}{3} - 10 = \frac{1}{3} > 0$$

Zatem funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe w przedziale $\langle 2; 3 \rangle$, więc dane równanie ma przynajmniej jedno rozwiązanie w przedziale $\langle 2; 3 \rangle$.

b) Niech $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle -1; 0 \rangle$.

$$f(-1) = -1 - 2 - 1 + 1 = -3 < 0$$

$$f(0) = 1 > 0$$

Zatem funkcja f ma w przedziale $\langle -1; 0 \rangle$ co najmniej jedno miejsce zerowe, więc dane równanie ma przynajmniej jedno rozwiązanie w przedziale $\langle -1; 0 \rangle$.

Przykład 6 ◀ zad. 5.12

Wykażemy, że wielomian $W(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 1$ ma w przedziale $\langle -1; 0 \rangle$ przynajmniej jeden pierwiastek.

Dowód

$$W(-1) = -2 - 1 - 4 + 1 < 0$$

$$W(0) = 1 > 0$$

Wielomian jest funkcją ciągłą i na końcach przedziału $\langle -1; 0 \rangle$ przyjmuje wartości o przeciwnych znakach. Zatem na mocy wcześniej sformułowanego wniosku ma w przedziale $\langle -1; 0 \rangle$ co najmniej jeden pierwiastek. Mówiąc poglądowo, jego wykres przynajmniej raz musi przeciąć oś x .

Koniec dowodu

Twierdzenie

Twierdzenie Weierstrassa

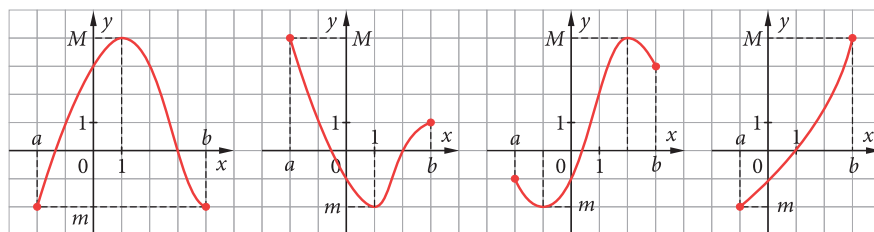
Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$, to w pewnym punkcie tego przedziału funkcja f przyjmuje wartość największą oraz w pewnym punkcie tego przedziału funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą.

Jeżeli oznaczymy wartość najmniejszą funkcji f literą m i wartość największą literą M , to:

$$f: \langle a; b \rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle m; M \rangle$$

Symbol $\xrightarrow{\text{na}}$ oznacza, że zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle m; M \rangle$.

Na rysunkach przedstawiono różne przykłady ilustrujące twierdzenie Weierstrassa.

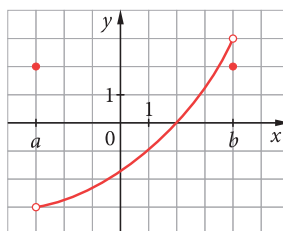


Konsekwencją powyższych twierdzeń jest również następujący wniosek.

Wniosek

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$ i jest rosnąca (malejąca) w przedziale $(a; b)$, to jest rosnąca (malejąca) w przedziale $\langle a; b \rangle$.

Zauważmy, że założenie ciągłości funkcji w przedziale **domkniętym** jest istotne. Funkcja przedstawiona na rysunku obok jest określona w przedziale $\langle a; b \rangle$, ciągła w $(a; b)$ i rosnąca w $(a; b)$. Nie jest jednak ciągła w $\langle a; b \rangle$ i nie jest rosnąca w $\langle a; b \rangle$.



Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. A

5.1. Funkcja $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{dla } x \neq -1 \\ m & \text{dla } x = -1 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x_0 = -1$

A. tylko dla $m = 1$.C. tylko dla $m = -1$.B. dla $m = \sqrt{\frac{1}{2}}$.D. dla $m = 2$ lub $m = -1$.

5.2. D

5.2. Funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{dla } x \in \mathbf{R} - \{1, 6\} \\ x + 2 & \text{dla } x \in \{1, 6\} \end{cases}$

A. ma dwa punkty nieciągłości.

C. ma jeden punkt nieciągłości.

B. spełnia warunek $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.D. jest ciągła w zbiorze $\mathbf{R}$.

5.3. D

5.3. Funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 0 \\ ax + b & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ jest ciągła

A. dla $a \neq 0$ i $b \neq 0$.C. tylko dla $a \neq 0$ i $b = 0$.B. dla $a = 0$ i $b \neq 0$.D. dla $a \in \mathbf{R}$ i $b = 0$.

5.4. P, P, P

5.4. Dziedziną funkcji ciągłej f jest $(-1; 1)$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zbiorem wartości funkcji f może być

A. $\mathbf{R}$.B. $\langle -3; 5 \rangle$.C. $(-\infty; 2)$.

5.5. a), b), c), d) ciągła

5.5. Zbadaj ciągłość funkcji f w podanym punkcie x_0 .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{dla } x \leq 1 \\ 4 - x & \text{dla } x > 1 \end{cases} \\ x_0 = 1$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x \leq 0 \\ \cos x & \text{dla } x > 0 \end{cases} \\ x_0 = 0$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dla } x \leq 0 \\ -x^2 + 3 & \text{dla } x > 0 \end{cases} \\ x_0 = 0$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x \leq 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{dla } x > 1 \end{cases} \\ x_0 = 1$$

5.6. a) nieciągła

b) ciągła

5.6. Zbadaj ciągłość funkcji f w podanym punkcie x_0 .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-2x+1} & \text{dla } x \neq 1 \\ 0 & \text{dla } x = 1 \end{cases} \\ x_0 = 1$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{9x^2-1}{3x+1} & \text{dla } x \neq -\frac{1}{3} \\ -2 & \text{dla } x = -\frac{1}{3} \end{cases} \\ x_0 = -\frac{1}{3}$$

5.12. Patrz s. 310.

D

5.12. Wykaż, że równanie ma w podanym przedziale co najmniej jedno rozwiązanie.

a) $x^2 + \frac{4}{x} = 10$, $\langle 2; 3 \rangle$

b) $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$, $\langle -1; 0 \rangle$

5.13. Wielomian W jest funkcją ciągłą.

$W(-1) = -1 - 5 + 1 + 1 = -4 < 0$

$W(0) = 1 > 0$

$W(1) = 1 - 5 - 1 + 1 = -4 < 0$

$W(5) = 125 - 125 - 5 + 1 = -4 < 0$

$W(6) = 216 - 180 - 6 + 1 = 31 > 0$

Na końcach przedziałów $\langle -1; 0 \rangle$, $\langle 0; 1 \rangle$, $\langle 5; 6 \rangle$ wielomian W ma wartości o różnych znakach, więc wewnątrz każdego z tych przedziałów ma miejsce zerowe.

5.14. Patrz s. 313.

D

5.13. Wykaż, że wielomian $W(x) = x^3 - 5x^2 - x + 1$ ma trzy pierwiastki $x_1 < x_2 < x_3$ takie, że $x_1 \in \langle -1; 0 \rangle$, $x_2 \in \langle 0; 1 \rangle$ oraz $x_3 \in \langle 5; 6 \rangle$.5.14. Naskicuj przykładowy wykres funkcji ciągłej f , która spełnia podany warunek.

a) $f: \langle 2; 5 \rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle -1; 1 \rangle$

c) $f: (-3; 5) \xrightarrow{\text{na}} \langle 2; \infty \rangle$

b) $f: (-3; 5) \xrightarrow{\text{na}} \mathbf{R}$

d) $f: (-3; -1) \cup (2; 4) \xrightarrow{\text{na}} \langle -2; 5 \rangle$

5.15. Naskicuj przykładowy wykres funkcji ciągłej określonej w przedziale $(-3; 4)$, której zbiorem wartości jest podany przedział liczbowy.

a) $\langle -2; 5 \rangle$

c) $(-\infty; 3)$

e) $(-\infty; 6)$

b) $(1; \infty)$

d) $(-7; 2)$

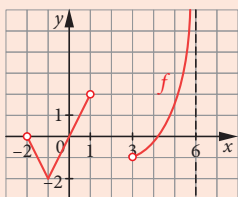
f) $\langle -4; 5 \rangle$

Prosto do matury

1. P, F, P

2. ciągła

3. np.



4. $m = \frac{1}{4}$

5. Niech $f(x) = x^2 - 2x + \frac{4}{x-2} - 6$.Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle -4; -1 \rangle$.

$f(-4) = 16 + 8 + \frac{4}{-6} - 6 =$

$= 17\frac{1}{3} > 0$

$f(-1) = 1 + 2 + \frac{4}{-1-2} - 6 = -4\frac{1}{3} < 0$

Zatem w przedziale $\langle -4; -1 \rangle$ funkcja f ma miejsce zerowe, co oznacza, że dane równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie w przedziale $\langle -4; -1 \rangle$.

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Suma dwóch funkcji nieciągłych

A. może być funkcją nieciągłą.

B. jest zawsze funkcją nieciągłą.

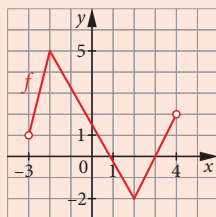
C. może być funkcją ciągłą.

2. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x < 2 \\ x^2-1 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$ w punkcie $x_0 = 2$.3. Naskicuj przykładowy wykres funkcji ciągłej $f: (-2; 1) \cup (3; 6) \xrightarrow{\text{na}} \langle -2; \infty \rangle$, która ma dwa miejsca zerowe: $-1, 4$.4. Dla jakich wartości parametru m funkcja

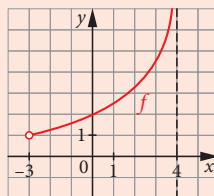
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-1}{2x+4} & \text{dla } x \neq -2 \text{ i } x \geq -3 \\ m & \text{dla } x = -2 \end{cases}$$
 jest ciągła?

5. Wykaż, że równanie $x^2 - 2x + \frac{4}{x-2} = 6$ ma w przedziale $\langle -4; -1 \rangle$ co najmniej jedno rozwiązanie.

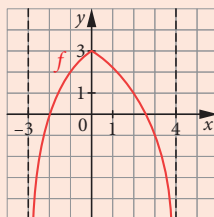
5.15. a) np.



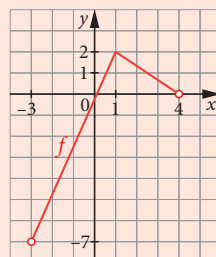
b) np.



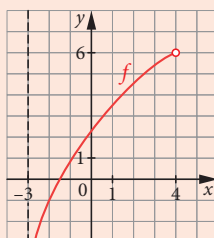
c) np.



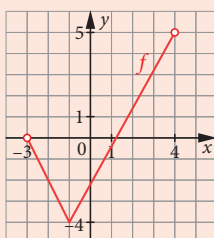
d) np.



e) np.



f) np.



6. Pochodna funkcji w punkcie

Umiejętności:

- stosowanie definicji pochodnej funkcji w punkcie
- korzystanie z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej

Założmy, że funkcja f jest określona w pewnym przedziale $(a; b)$. Wybierzmy punkt $x_0 \in (a; b)$. Oznaczmy literą h taką liczbę dodatnią lub ujemną, że $x_0 + h \in (a; b)$. Liczbę h nazywamy **przyrostem argumentu** funkcji. Przyrostowi argumentu odpowiada **przyrost wartości** funkcji równy różnicy $f(x_0 + h) - f(x_0)$.

Iloraz $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, dla $h \neq 0$, nazywamy **ilorazem różnicowym**.

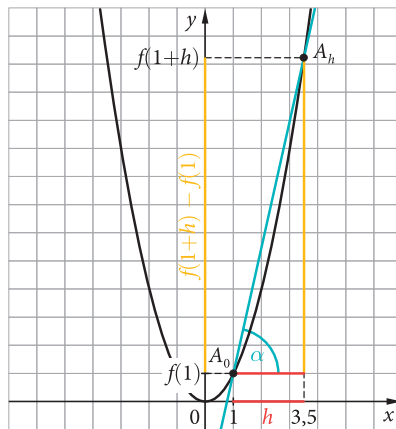
Przykład 1

Niech $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$. Obliczymy wartość ilorazu różnicowego dla $h = 2,5$, a następnie podamy geometryczną interpretację otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(1 + 2,5) - f(1)}{2,5} = \frac{3,5^2 - 1}{2,5} = 4,5$$

Przyjrzyjmy się rysunkowi.



Na wykresie funkcji zaznaczony jest punkt $A_0 = (x_0, f(x_0))$, czyli $A_0 = (1, 1)$.

Punkt A_h ma współrzędne $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, czyli $A_h = (3\frac{1}{2}, 12\frac{1}{4})$.

Iloraz różnicowy jest równy tangensowi kąta α , jest zatem współczynnikiem kierunkowym prostej przechodzącej przez punkty A_0 i A_h .

Uwagi metodyczne

W tematach 6 i 7 omawiamy pojęcie pochodnej funkcji: w punkcie (wraz z interpretacją fizyczną i geometryczną) oraz pochodnej jako funkcji.

Wprowadzamy pojęcie stycznej do wykresu funkcji różniczkowalnej. Zwróćmy uwagę na istotną różnicę między znaną uczniom od dawna styczną do okręgu (prostą, która ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny) a styczną do wykresu funkcji, która może mieć z tym wykresem wiele punktów wspólnych innych od punktu styczności.

Za pomocą stycznej do wykresu funkcji możemy zdefiniować pojęcie kąta między wykresami – czyli uogólnienie pojęcia kąta między prostymi.

ZZ i MKP

tematy 4.8, 4.12

Multiteka

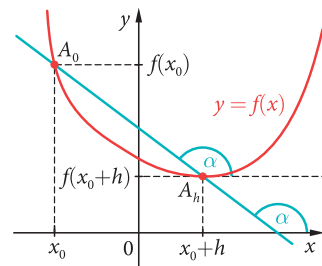
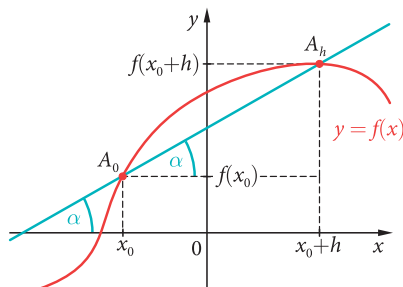
- Pochodna funkcji w punkcie
- Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie
- Interpretacja fizyczna pochodnej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.6

Sieczna wykresu funkcji

Prostą, która przecina wykres funkcji w co najmniej dwóch punktach, nazywamy **sieczną** wykresu funkcji.

Przyjrzyjmy się rysunkom.



Prosta A_0A_h jest sieczną wykresu funkcji, a iloraz różnicowy $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ jest tangensem kąta nachylenia tej siecznej do osi x . Inaczej mówiąc, **iloraz różnicowy jest współczynnikiem kierunkowym siecznej A_0A_h** .

Przykład 2 ◀ zad. 6.4

Napiszemy równanie siecznej A_0A_h narysowanej w przykładzie 1.

Rozwiązanie

Prosta A_0A_h ma równanie postaci $y = ax + b$, w którym współczynnik kierunkowy $a = 4,5$ (korzystamy z obliczeń z przykładu 1). Ponadto sieczna przechodzi przez punkt $A_0 = (1, 1)$, zatem:

$$\begin{aligned} y &= 4,5x + b \\ 1 &= 4,5 + b \\ b &= -3,5 \end{aligned}$$

Odp.: Prosta A_0A_h ma równanie: $y = 4,5x - 3,5$.

Do znalezienia równania siecznej można oczywiście wykorzystać współrzędne obydwu punktów, które ją wyznaczają.

Prędkość średnia

Przyjmijmy, że funkcja $y = s(t)$ opisuje drogę przebytą w czasie t przez poruszające się ciało. Jeśli h oznacza przyrost czasu od chwili t_0 , to $s(t_0+h) - s(t_0)$ oznacza odpowiadający mu przyrost drogi, a **iloraz różnicowy $\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$ jest prędkością średnią** ciała mierzoną w odpowiednich jednostkach.

◀ 6.4.

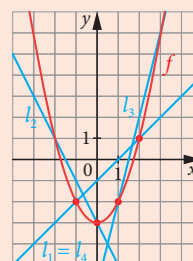
Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 3$. Naskicuj jej wykres. Dla danego argumentu x_0 oblicz przyrost wartości funkcji odpowiadający podanemu przyrostowi h argumentu i poprowadź odpowiednią sieczną.

Odp.:

x_0	-1	0	1	2
$f(x_0+h) - f(x_0)$	3	4	8	-3

$$l_1 = l_4: y = x - 1, \quad l_2: y = -2x - 3, \quad l_3: y = 4x - 6$$

np.



Przykład 3

Niech $s(t) = 3t + 2$, gdzie s oznacza drogę w centymetrach, t – czas w sekundach. Obliczmy prędkość średnią v_{sr} od chwili $t_0 = 2$ do chwili $t_0 + 5$.

Rozwiązanie

$$v_{\text{sr}} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} = \frac{s(7) - s(2)}{5} = \frac{23 - 8}{5} = 3$$

Odp.: $v_{\text{sr}} = 3 \text{ cm/s}$

Jeżeli samochód od godziny 9.00 do godziny 11.00 przebył 140 km, to jego średnia prędkość wynosiła 70 km/h. Na tej podstawie nie możemy jednak nic powiedzieć na temat prędkości samochodu np. o godzinie 9.43.00. Aby ją obliczyć, musielibyśmy rozważyć o wiele mniejszy przedział czasu. Jeżeli np. zmierzmy drogę przebytą przez samochód od 9.42.59 do 9.43.01, to uzyskana na tej drodze prędkość średnia będzie już zapewne bliska prędkości chwilowej o godzinie 9.43.00.

Pochodna funkcji, którą teraz zdefiniujemy, odpowiada właśnie prędkości chwilowej.

Definicja

Dane są funkcja f określona na przedziale $(a; b)$ i jej argument x_0 .

Jeżeli istnieje granica właściwa

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

to nazywamy ją **pochodną funkcji f w punkcie x_0** i oznaczamy $f'(x_0)$.

Funkcję f nazywamy wtedy **różniczkowalną** w punkcie x_0 .

Jeżeli granica, o której mowa w definicji, nie istnieje lub jest niewłaściwa, to mówimy, że funkcja f **nie jest różniczkowalna** w punkcie x_0 (inaczej – nie ma pochodnej w punkcie x_0).

Granice właściwą $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ nazywamy **pochodną lewostronną**, a gra-

nicę właściwą $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ – **pochodną prawostronną**.

Zgodnie z twierdzeniem o istnieniu granicy funkcja jest różniczkowalna w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją i są równe pochodne jednostronne w tym punkcie.

◀6.5. Oblicz pochodną funkcji $y = f(x)$ w podanym punkcie x_0 .

a) $f(x) = -5x - 1$, $x_0 = 7$

b) $f(x) = 2x^2$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = 3\sqrt{x}$, $x_0 = 4$

d) $f(x) = -x^2$, $x_0 = -3$

Odp.: a) $f'(7) = -5$

b) $f'(0) = 0$

c) $f'(4) = \frac{3}{4}$

d) $f'(-3) = 6$

Przykład 4 ◀ zad. 6.5

Obliczmy pochodną funkcji $f(x) = 3x - 2$ w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie

Zgodnie z definicją pochodnej funkcji w punkcie należy obliczyć granicę odpowiedniego ilorazu różnicowego.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2 + h) - 2 - (3 \cdot 2 - 2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 + 3h - 6}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3\end{aligned}$$

Zatem $f'(2) = 3$.

Odp.: Pochodna funkcji $f(x) = 3x - 2$ w punkcie $x_0 = 2$ jest równa 3.

Przykład 5 ◀ zad. 6.5

Obliczmy pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = -3$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3 + h)^2 - (-3)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 - 6h + h^2 - 9}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-6 + h) = -6\end{aligned}$$

Odp.: $f'(-3) = -6$



Przykład 6 ◀ zad. 6.8

Wykażemy, że funkcja $f(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

Dowód

Mamy wykazać, że nie istnieje granica ilorazu różnicowego w punkcie 0.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

Rzeczywiście – obliczamy pochodne jednostronne i mamy:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \quad \leftarrow h \rightarrow 0^-, \text{ więc } h < 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \leftarrow h \rightarrow 0^+, \text{ więc } h > 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}, \text{ czyli nie istnieje } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}.$$

Zatem funkcja $f(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

Koniec dowodu

◀6.8. Wykaż, że funkcja $f(x) = x + |x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

Rozwiązanie

Mamy wykazać, że nie istnieje granica ilorazu różnicowego w punkcie 0.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{0 + h + |0 + h| - (0 + |0|)}{h} = 1 + \frac{|h|}{h}$$

Obliczamy pochodne jednostronne:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{-h}{h}\right) = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{h}{h}\right) = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Zatem $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ nie istnieją, czyli funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

Przykład 7 ◀ zad. 6.10

Sprawdźmy, czy funkcja $f(x) = 2x|x| + 3$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

Rozwiązanie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h|h| + 3 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2|h| = 0$$

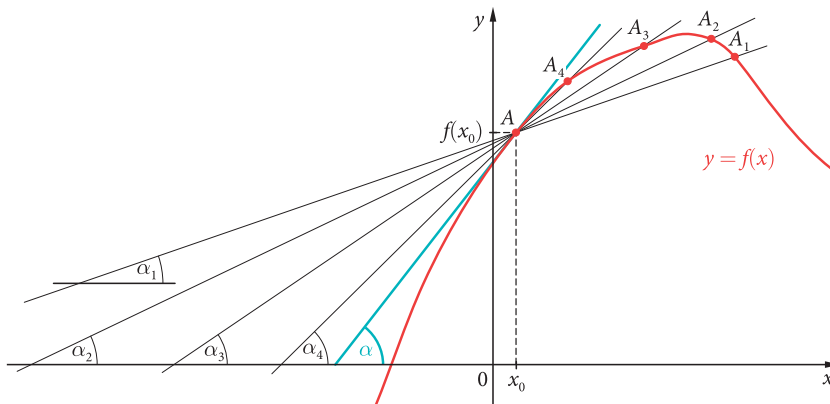
Zatem $f'(0) = 0$.

Odp.: Funkcja $f(x) = 2x|x| + 3$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

Uwaga: Można udowodnić, że jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest w tym punkcie ciągła. Natomiast twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe – na przykład rozważana wcześniej funkcja $f(x) = |x|$ jest w punkcie $x_0 = 0$ ciągła, ale nie ma w tym punkcie pochodnej.

Geometryczna interpretacja pochodnej

Przyjrzyjmy się rysunkowi.



Na wykresie funkcji $y = f(x)$ zaznaczony jest punkt $A = (x_0, f(x_0))$ oraz kilka siecznych: AA_1 , AA_2 itd. Aby rysunek był bardziej przejrzysty, punkty A_n ($n = 1, \dots, 4$) zaznaczone są po prawej stronie punktu A , zatem odpowiadają one dodatnim przyrostom argumentów. Wiemy, że odpowiednie ilorazy różnicowe są równe współczynnikom kierunkowym siecznych, czyli tangensom zaznaczonych kątów α_n ($n = 1, \dots, 4$). Wyobraźmy sobie, że kolejne sieczne prowadzimy przez punkt A i punkty A_n ($n \rightarrow \infty$) „zbiegające” po wykresie do punktu A . Ciąg siecznych będzie wówczas dążył do położenia, które ilustruje prosta zaznaczona kolorem niebieskim. Odpowiednio kąty α_n będą dążyły do kąta α . Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to $f'(x_0) = \tan \alpha$.

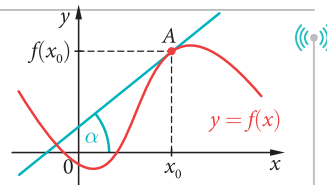
◀6.10. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x) = |x + 1| \cdot x$ w punkcie $x_0 = -1$.

Odp.: Nie jest różniczkowalna.

Definicja

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to **styczną do wykresu** funkcji w punkcie $A = (x_0, f(x_0))$ nazywamy prostą przechodzącą przez punkt A taką, że jej współczynnik kierunkowy jest równy $f'(x_0)$.

Zauważmy, że definicja stycznej do wykresu funkcji istotnie różni się od definicji stycznej do okręgu – czyli prostej mającej jeden punkt wspólny z tym okręgiem. Styczna do wykresu może mieć z tym wykresem wiele innych punktów wspólnych, a równocześnie prosta mająca z wykresem jeden punkt wspólny nie musi być do niego styczna.



◀6.11. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = -x^2 + 2$ w punkcie o odciętej $x_0 = 0$.

Odp.: $y = 2$

Przykład 8 ◀ zad. 6.11

Napiszemy równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie o odciętej $x_0 = -3$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy obliczenia z przykładu 5, czyli informację, że $f'(-3) = -6$.

Równanie stycznej:

$$y = ax + b$$

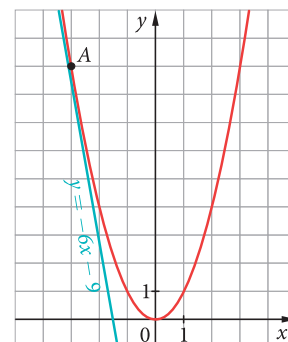
$$a = f'(-3) = -6$$

$$y = -6x + b$$

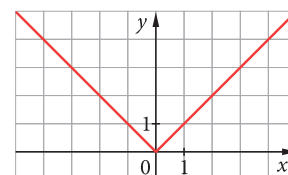
Styczna przechodzi przez punkt $A = (-3, 9)$, zatem:

$$9 = 18 + b$$

Odp.: Równanie stycznej: $y = -6x - 9$.



W przykładzie 6 udowodniliśmy, że funkcja $f(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$. Przyjrzyjmy się wykresowi tej funkcji. Jeśli weźmiemy pod uwagę geometryczną interpretację pochodnej, wykorzystującą sieczne, łatwo sobie wyobrazimy, że wykres w punkcie z takim „ostрым zakończeniem” nie ma stycznej.



Kąt przecięcia wykresów dwóch funkcji

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w x_0 , a ich wykresy przecinają się w punkcie $A = (x_0, y_0)$, to kąt ostry lub prosty między stycznymi do wykresów w punkcie A nazywamy **kątem przecięcia** wykresów funkcji f i g .

Przykład 9 ◀ zad. 6.13

Obliczmy (z dokładnością do 1°) kąt, pod jakim przecinają się wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = x^4$.

Rozwiązanie

Krok 1: Rozwiązujemy równanie $f(x) = g(x)$, aby znaleźć punkt przecięcia wykresów funkcji f i g .

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x^4 \text{ i } x \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Wykresy funkcji f i g przecinają się w punkcie $A = (1, 1)$.

Krok 2: Sprawdzamy, czy funkcje f i g są różniczkowalne w $x_0 = 1$. W tym celu obliczamy granice odpowiednich ilorazów różnicowych.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (1+h)}{h(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{1+h} = -1$$

Zatem $f'(1) = -1$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^4 - 1^4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (4 + 6h + 4h^2 + h^3) = 4 \end{aligned}$$

Zatem $g'(1) = 4$.

Krok 3: Wyznaczamy szukany kąt.

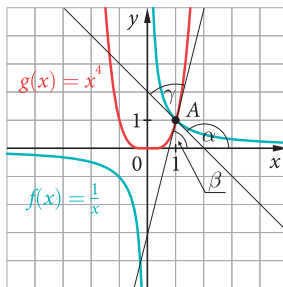
I sposób

Znajdujemy miary kątów, pod jakimi nachylone są do osi x styczne.

$\operatorname{tg} \alpha = f'(1) = -1$, więc styczna do wykresu funkcji f w punkcie A jest nachylona do osi x pod kątem $\alpha = 135^\circ$.

$\operatorname{tg} \beta = g'(1) = 4$, więc styczna do wykresu funkcji g w punkcie A jest nachylona do osi x pod kątem $\beta = 76^\circ$.

Kąt między stycznymi: $\gamma = \alpha - \beta = 135^\circ - 76^\circ = 59^\circ$.



◀ **6.13.** Oblicz z dokładnością do 1° kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$. Przedstaw ilustrację geometryczną rozwiązania w układzie współrzędnych.

a) $f(x) = -x + 8$, $g(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$

Odp.: a) 36° lub 59°

b) 72°

II sposób

Znamy wartości $\operatorname{tg} \alpha = -1$ oraz $\operatorname{tg} \beta = 4$, więc korzystamy ze wzoru:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = |\operatorname{tg}(\alpha - \beta)| = \left| \frac{-1 - 4}{1 - 4} \right| = \frac{5}{3} \approx 1,6667$$

Teraz odczytujemy z tablic miarę kąta: $\gamma = 59^\circ$.

Odp.: Wykresy funkcji f i g przecinają się w punkcie $A = (1, 1)$ pod kątem $\gamma = 59^\circ$.

Prędkość chwilowa

Przypomnijmy:

Gdy funkcja $y = s(t)$ opisuje drogę przebytą w czasie t przez poruszające się ciało, to iloraz różnicowy $\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$ jest prędkością średnią mierzoną w odpowiednich jednostkach, przy czym $h \neq 0$ oznacza przyrost czasu od chwili t_0 .

Granice $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$ nazywamy **prędkością chwilową** $v(t_0)$ w chwili t_0 .

Z tego określenia wynika, że prędkość $v(t_0)$ poruszającego się ciała w chwili t_0 jest równa pochodnej funkcji s w punkcie t_0 .

$$v(t_0) = s'(t_0)$$

Przykład 10

Droga przebyta przez poruszające się ciało dana jest wzorem $s(t) = 1 + t + t^2$. Droga s mierzona jest w metrach, czas t – w sekundach. Obliczmy prędkość chwilową $v(t_0)$ tego ciała w chwili $t_0 = 3$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} v(t_0) &= s'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(3 + h) - s(3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 3 + h + 9 + 6h + h^2 - 13}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (7 + h) = 7 \end{aligned}$$

Odp.: $v(t_0) = 7$ m/s

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Wskaż wartość pochodnej funkcji $f(x) = -\sqrt{3}x + \sqrt{5}$ w punkcie $x_0 = \sqrt{3}$.

- A. 0 B. $\sqrt{3}$ C. -3 D. $-\sqrt{3}$

6.2. W którym punkcie x_0 pochodna funkcji $f(x) = x^2$ równa się -4?

- A. $x_0 = 2$ C. $x_0 = -2$ lub $x_0 = 2$
B. $x_0 = -2$ D. Nie ma takiego punktu.

6.3. Wskaż kąt, pod którym przecinają się wykresy funkcji $f(x) = 3$

oraz $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \pi$.

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. 27° C. $\frac{\pi}{6}$ D. 90°

6.4. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 3$. Naszkicuj jej wykres. Dla danego argumentu x_0 oblicz przyrost wartości funkcji odpowiadający podanemu przyrostowi h argumentu i poprowadź odpowiednią sieczną.

x_0	-1	0	1	2
h	3	-2	2	-3

6.5. Oblicz pochodną funkcji $y = f(x)$ w podanym punkcie x_0 .

- a) $f(x) = -5x - 1$ $x_0 = 7$
b) $f(x) = 2x^2$ $x_0 = 0$
c) $f(x) = 3\sqrt{x}$ $x_0 = 4$
d) $f(x) = -x^2$ $x_0 = -3$

6.6. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Oblicz pochodną tej funkcji w punkcie $x_0 = 3$.

6.7. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{3x-1}{2x+5}$. Oblicz pochodną tej funkcji w punkcie $x_0 = -2$.

D

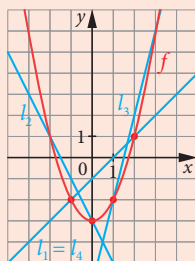
6.8. Wykaż, że funkcja $f(x) = x + |x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

6.4.

x_0	-1	0	1	2
$f(x_0 + h) - f(x_0)$	3	4	8	-3

$$l_1 = l_4: y = x - 1, \quad l_2: y = -2x - 3, \quad l_3: y = 4x - 6$$

np.



Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. D

6.2. B

6.3. C

6.5. a) $f'(7) = -5$

b) $f'(0) = 0$

c) $f'(4) = \frac{3}{4}$

d) $f'(-3) = 6$

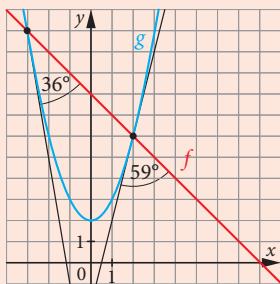
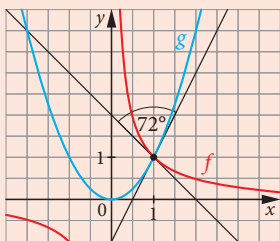
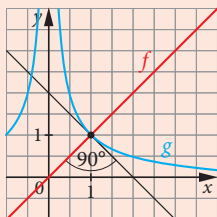
6.6. $D = (0; \infty)$, $f'(3) = -\frac{1}{6\sqrt{3}}$

6.7. $D = \mathbf{R} - \left\{-\frac{5}{2}\right\}$, $f'(-2) = 17$

6.8. Patrz s. 318.

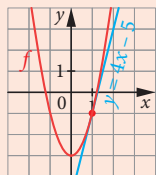
D

6.10. Nie jest różniczkowalna.

6.11. $y = 2$ 6.12. $y = 3x - 1$ 6.13. a) 36° lub 59° b) 72° 6.14. 90° 

Prosto do matury

1. P, P, F

2. $f'(-2) = 12$ 3. $y = 4x - 5$ 4. w punkcie $(1, -4)$ kąt $\alpha = 63^\circ$,
w punkcie $(3, 0)$ kąt $\beta = 13^\circ$ 6.9. Wykaż, że funkcja $f(x) = |x^3|$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.6.10. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x) = |x + 1| \cdot x$ w punkcie $x_0 = -1$.6.11. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = -x^2 + 2$ w punkcie o odciętej $x_0 = 0$.6.12. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 5x$ w punkcie o odciętej $x_0 = -1$.6.13. Oblicz z dokładnością do 1° kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$. Przedstaw ilustrację geometryczną rozwiązania w układzie współrzędnych.

a) $f(x) = -x + 8$ $g(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = x^2$

6.14. Oblicz kąt, pod jakim przecinają się wykresy funkcji $f(x) = x$ oraz $g(x) = \frac{1}{|x|}$. Przedstaw ilustrację geometryczną rozwiązania w układzie współrzędnych.

Prosto do matury

1. Funkcja $y = f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a; b)$ oraz $f'(x_0) = 0$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Styczna do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi x .
 B. Styczna do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ może mieć z wykresem funkcji nieskończenie wiele punktów wspólnych.
 C. Punkt x_0 jest miejscem zerowym funkcji f .

2. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $x_0 = -2$.3. Dana jest funkcja $f(x) = 2x^2 - 3$. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej $x_0 = 1$ i narysuj wykres funkcji oraz tę styczną.4. Oblicz z dokładnością do 1° kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji $f(x) = 2x - 6$ oraz $g(x) = x^2 - 2x - 3$. Przedstaw ilustrację geometryczną rozwiązania w układzie współrzędnych.

D

5. Wykaż, że funkcja $f(x) = x + |x - 1|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 1$.

6.9. Mamy wykazać, że istnieje granica ilorazu różnicowego w punkcie 0.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(0+h)^3| - |0^3|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h^3|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^2 |h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 |h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h |h|) = 0,$$

czyli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

5. Mamy wykazać, że nie istnieje granica ilorazu różnicowego w punkcie 1.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{1 + h + |1 + h - 1| - 1}{h} = \frac{h + |h|}{h} = 1 + \frac{|h|}{h}$$

Obliczamy pochodne jednostronne:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{|h|}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{-h}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow 0^-} 0 = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{|h|}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{h}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} 2 = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Zatem $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ nie istnieje, czyli funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 1$.

7. Pochodna jako funkcja

Umiejętności:

- stosowanie twierdzeń o działaniach na pochodnych
- obliczanie pochodnych funkcji wymiernych
- korzystanie z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej

Zdefiniowana wcześniej pochodna funkcji w punkcie jest liczbą rzeczywistą. Załóżmy, że funkcja jest różniczkowalna w każdym punkcie dziedziny lub pewnego jej podzbioru. Możemy określić funkcję, która każdemu takiemu argumentowi przypisuje odpowiadającą mu wartość pochodnej.

Definicja

Jeżeli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie zbioru A , to funkcję f' , która każdemu elementowi $x \in A$ przyporządkowuje liczbę $f'(x)$, nazywamy **funkcją pochodną** (krócej – pochodną) funkcji f w zbiorze A . Funkcję f nazywamy wtedy **różniczkowalną w zbiorze A** .

Określenia „pochodna” używa się więc w dwóch znaczeniach. Z kontekstu na ogół jasno wynika, czy mamy do czynienia z liczbą rzeczywistą, czy funkcją.

Często stosowanym zapisem funkcji pochodnej jest również $(f(x))'$,

np. jeśli $f(x) = 3x + 5$, to $f'(x) = (3x + 5)'$.

Wprowadzimy oznaczenia:

D – dziedzina funkcji f , D' – dziedzina funkcji pochodnej f' .

Twierdzenie

Pochodne funkcji elementarnych

Lp.	Funkcja	Pochodna
1.	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
2.	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
3.	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
4.	$f(x) = \frac{1}{x}$, $D = \mathbf{R} - \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $D' = \mathbf{R} - \{0\}$
5.	$f(x) = \sqrt{x}$, $D = \langle 0; \infty \rangle$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $D' = (0; \infty)$

ZZ i MKP

tematy 4.9, 4.10

Multiteka

- Wykres funkcji i jej pochodnej

dlauczyciela.pl | Kartkówka 4.7

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Dowód

1. $f(x) = c$, $D = \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Dla każdego $x_0 \in \mathbf{R}$ jest $f'(x_0) = 0$. Zatem $(c)' = 0$.

2. $f(x) = ax + b$, $D = \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h) + b - (ax_0 + b)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0 + ah + b - ax_0 - b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a = a \end{aligned}$$

Dla każdego $x_0 \in \mathbf{R}$ jest $f'(x_0) = a$. Zatem $(ax + b)' = a$.

3. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $D = \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c] - [ax_0^2 + bx_0 + c]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ax_0h + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2ax_0 + ah + b) = 2ax_0 + b \end{aligned}$$

Dla każdego $x_0 \in \mathbf{R}$ jest $f'(x_0) = 2ax_0 + b$. Zatem $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$.

4. $f(x) = \frac{1}{x}$, $D = \mathbf{R} - \{0\}$, $x_0 \in \mathbf{R} - \{0\}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x_0 - (x_0 + h)}{(x_0 + h)x_0}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{(x_0 + h)x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x_0 + h)x_0} = -\frac{1}{x_0^2} \end{aligned}$$

Dla każdego $x_0 \in \mathbf{R} - \{0\}$ jest $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$. Zatem $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

5. $f(x) = \sqrt{x}$, $D = \langle 0; \infty \rangle$, $x_0 \in (0; \infty)$ – funkcja nie jest różniczkowalna w punkcie 0, bo nie istnieje żadne otoczenie tego punktu zawarte w dziedzinie funkcji.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

Dla każdego $x_0 \in (0; \infty)$ jest $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Zatem $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Koniec dowodu

Przykład 1 ◀ zad. 7.4

Obliczymy wartości pochodnej danej funkcji f w punktach należących do zbioru A .

a) $f(x) = 3x^2 + x + \sqrt{6}$, $A = \{-\sqrt{2}, \frac{1}{3}, 4\}$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $A = \{2, \frac{1}{2}, 25\}$

Rozwiązanie

a) $f(x) = 3x^2 + x + \sqrt{6}$, więc:

$$f'(x) = 6x + 1$$

$$f'(-\sqrt{2}) = -6\sqrt{2} + 1$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2 + 1 = 3$$

$$f'(4) = 25$$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, więc:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$$

W dalszych rozważaniach określenia „pochodna” będziemy zazwyczaj używać w odniesieniu do funkcji. Jeżeli natomiast będzie nam potrzebna wartość pochodnej w pewnym punkcie, wyraźnie to zaznaczymy.

Zwróćmy uwagę na pewną prawidłowość występującą w wyprowadzonych wzorach.

$$f(x) = x = x^1$$

$$f'(x) = 1$$

$$g(x) = x^2$$

$$g'(x) = 2x$$

$$h(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

$$t(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$t'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Obserwacja zależności między funkcjami i ich pochodnymi prowadzi do sformułowania twierdzenia, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Dana jest funkcja $f(x) = x^k$, gdzie k jest ustaloną liczbą rzeczywistą.

Dla każdego $k \neq 0$ i $k \neq 1$ pochodna funkcji f jest równa $f'(x) = kx^{k-1}$.

◀7.4. Wyznacz pochodną funkcji f . Oblicz $f'(-1)$, $f'(0)$ i $f'(1)$.

a) $f(x) = -\sqrt{3}x$

b) $f(x) = x^2 - \sqrt{3}$

c) $f(x) = \sqrt{3}$

d) $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x + \pi$

Odp.: a) $f'(x) = -\sqrt{3}$;

$$f'(-1) = -\sqrt{3}, \quad f'(0) = -\sqrt{3},$$

$$f'(1) = -\sqrt{3}$$

b) $f'(x) = 2x$; $f'(-1) = -2$,

$$f'(0) = 0, \quad f'(1) = 2$$

c) $f'(x) = 0$; $f'(-1) = 0$,

$$f'(0) = 0, \quad f'(1) = 0$$

d) $f'(x) = 2x - \sqrt{3}$;

$$f'(-1) = -2 - \sqrt{3}, \quad f'(0) = -\sqrt{3},$$

$$f'(1) = 2 - \sqrt{3}$$

Przykład 2

Obliczmy pochodną funkcji $f(x) = x^{\sqrt[3]{x}}$ dla $x > 0$.

Rozwiązanie

Zapiszmy wzór funkcji w postaci $f(x) = x^k$.

$$f(x) = x^{\sqrt[3]{x}} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$$

Stosujemy teraz twierdzenie.

$$f'(x) = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$$

Twierdzenie**Działania na pochodnych**

Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi w pewnym zbiorze A . Prawdziwe są wzory:

1. $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ dla $k \in \mathbf{R}$
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
3. $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
4. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$, jeżeli $g(x) \neq 0$

Dowód

Udowodnimy trzy z podanych wzorów. Skorzystamy z twierdzeń o działaniach na granicach funkcji podanych w temacie 3 (zobacz: twierdzenie na s. 290).

$$\begin{aligned} 1. (k \cdot f(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = \\ &= k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot f'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) \cdot g(x) - g(x+h) \cdot f(x)}{g(x+h) \cdot g(x)}}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - g(x+h) \cdot f(x)}{g(x+h) \cdot g(x)}}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(f(x+h) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+h) - g(x))}{g(x+h) \cdot g(x)}}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(f(x+h) - f(x))g(x)}{h} - \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}}{g(x+h) \cdot g(x)} = \\
&= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} (g(x+h) \cdot g(x))} = \\
&= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}$$

Udowodnienie pozostałych wzorów pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania.

Koniec dowodu

Wniosek

Funkcja wymierna postaci $f(x) = \frac{W(x)}{Q(x)}$ (W i Q są wielomianami zmiennej x) jest różniczkowalna w każdym punkcie x takim, że $Q(x) \neq 0$, czyli $D = D'$.

Przykład 3

Obliczmy pochodną funkcji $f(x) = 3x^6 - 5x^4 + 7$.

Rozwiązanie

Korzystamy kilkakrotnie ze wzorów podanych w twierdzeniu.

$$\begin{aligned}
(3x^6 - 5x^4 + 7)' &= (3x^6)' - (5x^4)' + 7' = 3(x^6)' - 5(x^4)' + 0 = \\
&= 3 \cdot 6x^5 - 5 \cdot 4x^3 = 18x^5 - 20x^3
\end{aligned}$$

Odp.: $f'(x) = 18x^5 - 20x^3$

◀ 7.5. Wyznacz pochodną funkcji.

- a) $f(x) = 5x^2 - 7x - 2$
 b) $f(x) = -3x^4 - \sqrt{7}$
 c) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x$
 d) $f(x) = \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^4}{2}$
 e) $f(x) = (2x+3)(x-1)$
 f) $f(x) = (x^2-1)(4x+5)$
 g) $f(x) = (x^2-5x+7) \cdot (x^2-3x+1)$
 h) $f(x) = (9-x^4)(x^2+6x)$
- Odp.: a) $f'(x) = 10x - 7$
 b) $f'(x) = -12x^3$
 c) $f'(x) = x^4 - x^2 + 1$
 d) $f'(x) = 2x^9 - 2x^7 + 2x^5 - 2x^3$
 e) $f'(x) = 4x + 1$
 f) $f'(x) = 12x^2 + 10x - 4$
 g) $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 46x - 26$
 h) $f'(x) = -6x^5 - 30x^4 + 18x + 54$

Przykład 4

Obliczmy pochodne funkcji: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 5$, $h(x) = x^2 + \frac{3}{4}$.

Rozwiązanie

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = 2x, \quad h'(x) = 2x.$$

Zauważmy, że różne funkcje f , g i h mają tę samą funkcję pochodną.

Przykład 5 ◀ zad. 7.5

Wyznamy pochodną funkcji zapisanej w postaci iloczynu.

- a) $f(x) = (2x^2 + 1)(3x - 7)$
 b) $f(x) = (1 + \sqrt{x})(x - 2)$ dla $x \geq 0$
 c) $f(x) = (x^2 - 1)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ dla $x \neq 0$

Rozwiązanie

Możemy albo wykonać mnożenie i potem obliczyć pochodną, albo wykorzystać wzór na pochodną iloczynu. Zastosujemy obydwa sposoby.

a) I sposób

$$f(x) = (2x^2 + 1)(3x - 7) = 6x^3 - 14x^2 + 3x - 7$$

$$f'(x) = 18x^2 - 28x + 3$$

II sposób

$$f'(x) = 4x(3x - 7) + 3(2x^2 + 1) = 12x^2 - 28x + 6x^2 + 3 = 18x^2 - 28x + 3$$

b) I sposób

$$f(x) = (1 + \sqrt{x})(x - 2) = x - 2 + x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = x - 2 + x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} \quad \text{dla } x > 0$$

II sposób

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x - 2) + (1 + \sqrt{x}) = \frac{x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 + \sqrt{x} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} \quad \text{dla } x > 0$$

c) I sposób

$$f(x) = (x^2 - 1)\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2 + x - 1 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2} \quad \text{dla } x \neq 0$$

II sposób

$$f'(x) = 2x\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}(x^2 - 1) = 2x + 2 - 1 + \frac{1}{x^2} = 2x + 1 + \frac{1}{x^2} \quad \text{dla } x \neq 0$$

◀ 7.7. Wyznacz pochodną funkcji. Podaj dziedzinę D funkcji i dziedzinę D' jej pochodnej.

a) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

d) $f(x) = -\frac{1}{x^4 + 2x^2 + 5}$

g) $f(x) = \frac{x}{2x-3}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

e) $f(x) = \frac{1}{2x^2-x-3}$

h) $f(x) = -\frac{3-5x}{4x+3}$

c) $f(x) = \frac{3}{x^2+2x+3}$

f) $f(x) = \frac{2x-5}{3x-1}$

Odp.: a) $f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{-3\}$ b) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

c) $f'(x) = -\frac{6x+6}{(x^2+2x+3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R}$ d) $f'(x) = \frac{4x^3+4x}{(x^4+2x^2+5)^2}$, $D = D' = \mathbf{R}$

e) $f'(x) = -\frac{4x-1}{(2x^2-x-3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$ f) $f'(x) = \frac{13}{(3x-1)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

g) $f'(x) = -\frac{3}{(2x-3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ h) $f'(x) = \frac{27}{(4x+3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \left\{-\frac{3}{4}\right\}$

Przykład 6 ◀ zad. 7.6–7.8

Obliczmy pochodną funkcji

a) $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{4x - 1}$ dla $x \neq \frac{1}{4}$.

b) $g(x) = 2x + \frac{5}{(x+3)^2}$ dla $x \neq -3$.

Rozwiązanie

a) Skorzystamy ze wzoru na pochodną ilorazu.

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 - 5x + 3}{4x - 1} \right)' = \frac{(2x^2 - 5x + 3)'(4x - 1) - (2x^2 - 5x + 3)(4x - 1)'}{(4x - 1)^2} =$$

$$= \frac{(4x - 5)(4x - 1) - (2x^2 - 5x + 3) \cdot 4}{(4x - 1)^2} = \frac{16x^2 - 24x + 5 - 8x^2 + 20x - 12}{(4x - 1)^2} = \frac{8x^2 - 4x - 7}{(4x - 1)^2}$$

b) Skorzystamy ze wzorów na pochodną sumy i na pochodną ilorazu.

$$g'(x) = (2x)' + \left(\frac{5}{x^2 + 6x + 9} \right)' = 2 + \frac{0 - 5(2x + 6)}{(x + 3)^4} = 2 - \frac{10}{(x + 3)^3}$$

Odp.: a) $f'(x) = \frac{8x^2 - 4x - 7}{(4x - 1)^2}$ b) $g'(x) = 2 - \frac{10}{(x + 3)^3}$

Przykład 7 ◀ zad. 7.10Wyznamy równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 2$.**Rozwiązanie**

$$D = D' = \mathbf{R} - \{3\}$$

Równanie stycznej ma postać $y = ax + b$. Punktem styczności jest $A = (2, f(2)) = (2, -3)$, a współczynnik kierunkowy $a = f'(2)$.

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)'(x - 3) - (2x - 1)(x - 3)'}{(x - 3)^2} = \frac{2(x - 3) - (2x - 1)}{(x - 3)^2} = \frac{-5}{(x - 3)^2}$$

$$a = f'(2) = \frac{-5}{(2 - 3)^2} = -5$$

$$y = -5x + b$$

$$-3 = -10 + b$$

$$b = 7$$

$$y = -5x + 7$$

Odp.: Styczna do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 2$ ma równanie $y = -5x + 7$.

◀ **7.10.** Wyznamy równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie o podanej odciętej x_0 .

a) $f(x) = x^2 - x - 1$, $x_0 = 3$

b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + \frac{1}{2x^2} - 1\frac{1}{6}$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 2}$, $x_0 = 0$

Odp.: a) $y = 5x - 10$ b) $y = -x - 1$ c) $y = -2x$

7.6. Wyznamy pochodną funkcji.Podaj dziedzinę D funkcjii dziedzinę D' jej pochodnej.

a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

b) $f(x) = -\frac{3}{5x^5}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^6}$

d) $f(x) = \frac{2}{5}x^3 - 3 + \frac{3}{2x^2}$

e) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

f) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

g) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

h) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{x \cdot \sqrt[5]{x^2}}$

i) $f(x) = x^{-2} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot x^4$

Odp.: a) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$,

$D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$

b) $f'(x) = \frac{3}{x^6}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$

c) $f'(x) = -\frac{5}{x^6} + \frac{6}{x^7}$,

$D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$

d) $f'(x) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{3}{x^3}$,

$D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$

e) $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, $D = \langle 0; \infty \rangle$,

$D' = (0; \infty)$

f) $f'(x) = \frac{5x\sqrt{x}}{2}$, $D = \langle 0; \infty \rangle$,

$D' = (0; \infty)$

g) $f'(x) = -\frac{5}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$,

$D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$

h) $f'(x) = -\frac{13}{20x \cdot \sqrt[20]{x^{13}}}$,

$D = D' = (0; \infty)$

i) $f'(x) = \frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}}$,

$D = D' = (0; \infty)$

7.7. Patrz s. 330.**7.8.** Patrz s. 334.

◀ 7.15. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x-3}{x}$ prostopadłych do prostej o równaniu $y = -3x - 5$.

Odp.: $y = \frac{1}{3}x$, $y = \frac{1}{3}x + 4$



Przykład 8 ◀ zad. 7.15

Wyznamy równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 4$ równoległych do prostej $y = -3x - 5$.

Rozwiązanie

$$D = D' = \mathbb{R}$$

Styczne mają równania postaci $y = -3x + b$.

Współczynnik b zależy od punktu styczności. Szukamy zatem takich punktów $(x_0, f(x_0))$ należących do wykresu funkcji f , dla których spełniony jest warunek $f'(x_0) = -3$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 6$$

Rozwiązujemy równanie $f'(x) = -3$.

$$3x^2 - 12x + 6 = -3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 3$$

Równanie ma dwa rozwiązania, zatem istnieją dwie styczne spełniające warunki zadania. Obliczamy współrzędne punktów styczności A i B .

$$f(1) = 1 - 6 + 6 + 4 = 5, \text{ czyli } A = (1, 5)$$

$$f(3) = 27 - 54 + 18 + 4 = -5, \text{ czyli } B = (3, -5)$$

Do równania $y = -3x + b$ podstawiamy współrzędne wyznaczonych punktów.

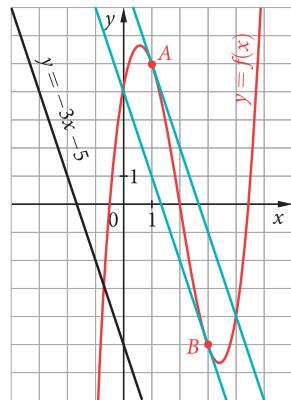
Dla punktu A mamy:

$$5 = -3 \cdot 1 + b, \text{ stąd } b = 8, \text{ zatem styczna w punkcie } A \text{ ma równanie } y = -3x + 8.$$

Dla punktu B otrzymujemy:

$$-5 = -3 \cdot 3 + b, \text{ stąd } b = 4, \text{ zatem styczna w punkcie } B \text{ ma równanie } y = -3x + 4.$$

Odp.: Styczne do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 4$ równoległe do prostej $y = -3x - 5$ mają równania $y = -3x + 8$ i $y = -3x + 4$.



Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Wskaż wartość pochodnej funkcji $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ w punkcie $x_0 = -2$.

A. 0

B. 1

C. -4

D. 5

Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. D

7.2. Wskaż liczbę punktów, w których pochodna funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 7$ jest równa 0.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. nieskończenie wiele

7.3. Wskaż współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 0$.

- A. 1 B. -1 C. 0 D. $\frac{1}{2}$

7.4. Wyznacz pochodną funkcji f . Oblicz $f'(-1)$, $f'(0)$ i $f'(1)$.

- a) $f(x) = -\sqrt{3}x$ c) $f(x) = \sqrt{3}$
b) $f(x) = x^2 - \sqrt{3}$ d) $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x + \pi$

7.5. Wyznacz pochodną funkcji.

- a) $f(x) = 5x^2 - 7x - 2$ e) $f(x) = (2x+3)(x-1)$
b) $f(x) = -3x^4 - \sqrt{7}$ f) $f(x) = (x^2 - 1)(4x+5)$
c) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x$ g) $f(x) = (x^2 - 5x + 7)(x^2 - 3x + 1)$
d) $f(x) = \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^4}{2}$ h) $f(x) = (9 - x^4)(x^2 + 6x)$

7.6. Wyznacz pochodną funkcji. Podaj dziedzinę D funkcji i dziedzinę D' jej pochodnej.

- a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ d) $f(x) = \frac{2}{5}x^3 - 3 + \frac{3}{2x^2}$ g) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}$
b) $f(x) = -\frac{3}{5x^5}$ e) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ h) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{x \cdot \sqrt[5]{x^2}}$
c) $f(x) = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^6}$ f) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$ i) $f(x) = x^{-2} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot x^4$

7.7. Wyznacz pochodną funkcji. Podaj dziedzinę D funkcji i dziedzinę D' jej pochodnej.

- a) $f(x) = \frac{1}{x+3}$ e) $f(x) = \frac{1}{2x^2 - x - 3}$
b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ f) $f(x) = \frac{2x-5}{3x-1}$
c) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 2x + 3}$ g) $f(x) = \frac{x}{2x-3}$
d) $f(x) = -\frac{1}{x^4 + 2x^2 + 5}$ h) $f(x) = -\frac{3-5x}{4x+3}$

7.7. a) $f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{-3\}$

b) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

c) $f'(x) = -\frac{6x+6}{(x^2+2x+3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R}$

d) $f'(x) = \frac{4x^3+4x}{(x^4+2x^2+5)^2}$, $D = D' = \mathbf{R}$

e) $f'(x) = -\frac{4x-1}{(2x^2-x-3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$

f) $f'(x) = \frac{13}{(3x-1)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

g) $f'(x) = -\frac{3}{(2x-3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

h) $f'(x) = \frac{27}{(4x+3)^2}$, $D = D' = \mathbf{R} - \left\{-\frac{3}{4}\right\}$

7.2. C

7.3. A

7.4. a) $f'(x) = -\sqrt{3}$;
 $f'(-1) = -\sqrt{3}$, $f'(0) = -\sqrt{3}$,
 $f'(1) = -\sqrt{3}$
b) $f'(x) = 2x$; $f'(-1) = -2$,
 $f'(0) = 0$, $f'(1) = 2$
c) $f'(x) = 0$; $f'(-1) = 0$,
 $f'(0) = 0$, $f'(1) = 0$
d) $f'(x) = 2x - \sqrt{3}$;
 $f'(-1) = -2 - \sqrt{3}$, $f'(0) = -\sqrt{3}$,
 $f'(1) = 2 - \sqrt{3}$

7.5. a) $f'(x) = 10x - 7$
b) $f'(x) = -12x^3$
c) $f'(x) = x^4 - x^2 + 1$
d) $f'(x) = 2x^9 - 2x^7 + 2x^5 - 2x^3$
e) $f'(x) = 4x + 1$
f) $f'(x) = 12x^2 + 10x - 4$
g) $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 46x - 26$
h) $f'(x) = -6x^5 - 30x^4 + 18x + 54$

7.6. a) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$,
 $D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$
b) $f'(x) = \frac{3}{x^6}$, $D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$
c) $f'(x) = -\frac{5}{x^6} + \frac{6}{x^7}$,
 $D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$
d) $f'(x) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{3}{x^3}$,
 $D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$
e) $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, $D = \langle 0; \infty \rangle$,
 $D' = (0; \infty)$

f) $f'(x) = \frac{5x\sqrt{x}}{2}$, $D = \langle 0; \infty \rangle$,
 $D' = (0; \infty)$

g) $f'(x) = -\frac{5}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$,
 $D = D' = \mathbf{R} - \{0\}$

h) $f'(x) = -\frac{13}{20x \cdot \sqrt[20]{x^{13}}}$,
 $D = D' = (0; \infty)$

i) $f'(x) = \frac{9}{4}x^4\sqrt{x}$,
 $D = D' = (0; \infty)$

7.8. a) $f'(x) = \frac{-3x^2 + 4x + 13}{(x^2 + 2x + 3)^2},$

$D = D' = \mathbf{R}$

b) $f'(x) = \frac{10x}{(x^2 + 3)^2}, D = D' = \mathbf{R}$

c) $f'(x) = \frac{3(x^2 + 2x - 1)}{(2x^2 + x + 3)^2},$

$D = D' = \mathbf{R}$

d) $f'(x) = \frac{6x^2 + 10x - 3}{(x^2 + 3x + 3)^2},$

$D = D' = \mathbf{R}$

e) $f'(x) = \frac{-10x}{(x^2 - 4)^2},$

$D = D' = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$

f) $f'(x) = \frac{8x}{(2 - x)^3},$

$D = D' = \mathbf{R} - \{2\}$

g) $f'(x) = \frac{-x^2(x^2 - 12)}{2(4 - x^2)^2},$

$D = D' = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$

h) $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 - 7x + 10)^2},$

$D = D' = \mathbf{R} - \{2, 5\}$

7.9. $D = D' = \mathbf{R} - \{0, 1\},$

$f'(x) = \frac{-3x^2 + 4x - 2}{(x^2 - x)^2}$

7.10. a) $y = 5x - 10$

b) $y = -x - 1$

c) $y = -2x$

7.11. $y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$

7.12. $y = -6x - 6, y = 6x - 6$

7.13. $y = x$

7.14. $y = 7x - 1, y = -5x - 7$

7.15. $y = \frac{1}{3}x, y = \frac{1}{3}x + 4$

7.8. Wyznacz pochodną funkcji. Podaj dziedzinę D funkcji i dziedzinę D' jej pochodnej.

a) $f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 + 2x + 3}$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 3}$

f) $f(x) = \frac{2x^2}{(2 - x)^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - x}{2x^2 + x + 3}$

g) $f(x) = \frac{x^3}{2(4 - x^2)}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x + 3}$

h) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 7x + 10}$

7.9. Wyznacz dziedzinę i oblicz pochodną funkcji $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - x} + \frac{2x}{x - 1}$. Zapisz wynik w postaci ilorazu dwóch wielomianów.

7.10. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie o podanej odciętej x_0 .

a) $f(x) = x^2 - x - 1$ $x_0 = 3$

b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + \frac{1}{2x^2} - 1\frac{1}{6}$ $x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 2}$ $x_0 = 0$

7.11. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x} - 1$ w punkcie o rzędnej $y_0 = 2$.

7.12. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^4 + x^2 - 2$ w punktach, w których wykres funkcji przecina oś x .

7.13. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$ nachylonej do osi x pod kątem 45° .

7.14. Prosta o równaniu $y = x + 5$ przecina parabolę o równaniu $y = 2x^2 + 3x + 1$ w punktach A i B . Wyznacz równania stycznych do tej paraboli poprowadzonych w punktach A i B .

7.15. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x - 3}{x}$ prostopadłych do prostej o równaniu $y = -3x - 5$.

7.16. Punkt $P = (-1, 1)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x + b}$, $b \neq 1$.

Styczna do wykresu tej funkcji poprowadzona w punkcie P jest prostopadła do prostej o równaniu $y = 2x + 3$. Wyznacz a i b .

7.17. Dana jest funkcja $f(x) = 2mx^2 - (m+1)x - 1$. Dla jakiej wartości parametru m styczna do wykresu funkcji f poprowadzona w punkcie o odciętej 1 jest równoległa do prostej o równaniu $y = 8x$?

7.18. Dla jakich wartości parametru k oś x jest styczną do wykresu funkcji $f(x) = x^3 + kx - 2$?

* **7.19.** Dana jest funkcja $f(x) = 2x^2 + 1$. Wyznacz współrzędne takich punktów A i B należących do wykresu funkcji f , aby styczne do wykresu poprowadzone w tych punktach przecinały się na osi rzędnych pod kątem prostym.

Prosto do matury



1. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2x+5}{x+3}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dla każdego $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$ zachodzi $f'(x) < 0$.

B. $f'(0) < f'(1)$

C. $f'(0) > f'(-4)$

2. Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 1}$.

3. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$$

w punkcie o odciętej $x_0 = 1$.

4. Wyznacz równanie stycznej do paraboli o równaniu $y = 2x^2 - 4x + 3$ równoległej do prostej o równaniu $y = 2x$.

5. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 4$, które przechodzą przez początek układu współrzędnych.

7.16. $a = 4$, $b = -1$

7.17. $m = 3$

7.18. $k = -3$

Prosto do matury

1. F, F, F

2. $f'(x) = \frac{6x^2 - 3}{(2x^2 + 1)^2}$

3. $y = -3x + 4$

4. $y = 2x - \frac{3}{2}$

5. $y = -4x$, $y = 4x$

7.19. Z faktu, że oś y jest osią symetrii wykresu funkcji f , wynika, że punkty A i B są symetryczne względem osi y i są nachylone do osi x pod kątami 45° i 135° . Szukamy takiego x_0 , że $f'(x_0) = \tan 45^\circ = 1$.

$$f'(x) = (2x^2 + 1)' = 4x, \quad 4x_0 = 1 \quad \text{dla} \quad x_0 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Wtedy} \quad f(x_0) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 = 1\frac{1}{8}.$$

$$\text{Odp.:} \left(\frac{1}{4}, 1\frac{1}{8}\right) \text{ i } \left(-\frac{1}{4}, 1\frac{1}{8}\right)$$

Najszybszy człowiek świata

Jamajczyk Usain Bolt to niekwestionowany król sprinterów – nikt na świecie nie biega tak szybko jak on. Nic więc dziwnego, że jest bohaterem wielu prac naukowych z różnych dziedzin, m.in. biomechaniki, kinematyki, antropometrii. Jak szybko może on biec?

Dane z najszybszego biegu

Rekordową prędkość Bolt osiągnął w 2009 r. na mistrzostwach świata w Berlinie. Ustanowił tam aktualny rekord świata w biegu na 100 m wynikiem 9,58 s.

Oto międzyczasy Bolta po każdym 10-metrowym odcinku:

Droga s [m]	Czas t [s]
10	1,88
20	2,88
30	3,78
40	4,64
50	5,47
60	6,29
70	7,10
80	7,92
90	8,74
100	9,58

Do wyznaczenia prędkości maksymalnej potrzebowalibyśmy danych z ciągłego pomiaru prędkości, a takimi nie dysponujemy. Spróbujemy więc odtworzyć zależność prędkości od czasu na podstawie tych 10 pomiarów.



Kłopotliwy nadmiar informacji

Podczas omawianego biegu laserowy pomiar odległości umożliwił zebranie danych z częstotliwością 100 klatek na sekundę, czyli ok. 1000 pomiarów. Na ich podstawie, wykorzystując rachunek pochodnych, stworzono wykres zależności prędkości Usaina Bolta od przebytej drogi (niebieska krzywa na wykresie). Pomiary były tak precyzyjne, że rejestro-

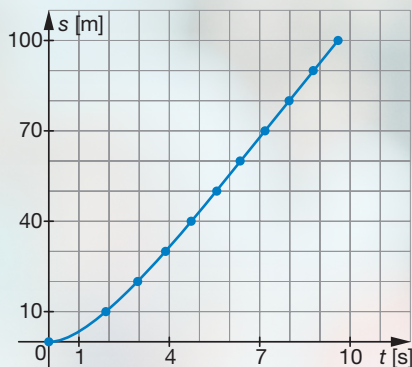
wały m.in. zmiany prędkości w różnych fazach kroków stawianych przez biegacza, co utrudniało interpretację wyników. Dlatego naukowcy za pomocą metod statystycznych znaleźli wygładzoną krzywą prędkości, wyciszczoną z tych wahań (czerwona krzywa na wykresie). Dopiero z takiej krzywej odczytali m.in. maksymalną prędkość Bolta: 12,29 m/s.

Wyznaczanie prędkości maksymalnej

- 1 Zaczynamy od znalezienia wzoru funkcji, która jak najlepiej pasuje do danych z tabeli. Skorzystamy z narzędzi, które oferuje dział matematyki zwany **modelowaniem statystycznym**.

Poszukiwania zawężymy do funkcji wielomianowych jak najniższego stopnia, by obliczenia nie były zbyt uciążliwe.

Za pomocą programu komputerowego znajdujemy wielomian szóstego stopnia, który ze wszystkich takich wielomianów jest najlepszym przybliżeniem nieznanej krzywej obrazującej zależność drogi od czasu.



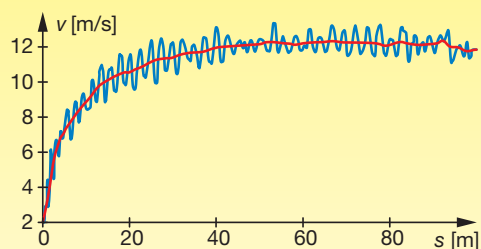
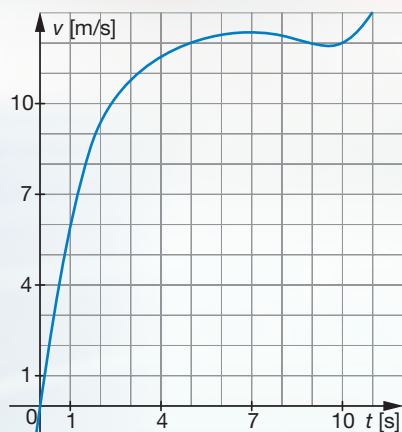
$$s(t) = 2,058827322 \cdot 10^{-4}t^6 - 7,567145067 \cdot 10^{-3}t^5 + 1,133345484 \cdot 10^{-1}t^4 - 9,142029249 \cdot 10^{-1}t^3 + 4,406474759t^2 - 3,942043457 \cdot 10^{-1}t - 3,943176944 \cdot 10^{-4}$$

- 2 Z zależności drogi od czasu wyprowadzamy wzór na prędkość. Pochodna drogi jako funkcji czasu to właśnie prędkość: $v(t) = s'(t)$.

W naszym przypadku:

$$v(t) = s'(t) = 0,0012352963932t^5 - 0,0378357253350t^4 + 0,4533381936000t^3 - 2,7426087747000t^2 + 8,8129495180000t - 0,3942043457000$$

- 3 Teraz wystarczy wyznaczyć maksimum lokalne funkcji v . Program komputerowy podaje, że maksimum lokalne, równe w przybliżeniu 12,32 m/s, funkcja v przyjmuje dla $t \approx 6,89$ s. Zgodnie z naszym modelem statystycznym Usain Bolt największą prędkość równą 12,32 m/s osiągnął w siódmej sekundzie biegu.



Źródło: www.worldathletics.org

Uwaga. Oś pozioma to droga, a nie czas (jak w naszym modelu).



Uwagi metodyczne

Pochodna funkcji złożonej to pojęcie, którego nie było w poprzedniej podstawie programowej.

Najpierw wprowadzamy – opisowo, bez nadmiernego formalizmu – pojęcie funkcji złożonej. Zwracamy przy tym szczególną uwagę na dziedzinę składanych funkcji.

Następnie podajemy twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej i wykorzystujemy je do znajdowania pochodnych funkcji typu $f(x) = (x^5 + x^2 + 1)^{50}$,
 $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.

8. Pochodna funkcji złożonej

Umiejętności:

- wyznaczanie dziedziny funkcji złożonej
- obliczanie pochodnych funkcji złożonych

Pojęcie funkcji złożonej

Niech $F(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 8}$.

Dla każdego $x \in \mathbf{R}$ mamy $x^2 + 2x + 8 > 0$, więc dziedziną funkcji F jest zbiór liczb rzeczywistych, co zapiszemy, tym razem z wyraźnym wskazaniem funkcji: $D_F = \mathbf{R}$.

Obliczmy wartość funkcji F na przykład dla $x_0 = 2$:

$$F(2) = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 + 8} = \sqrt{16} = 4$$

Zauważmy, że czynność tę wykonujemy w dwóch krokach.

Krok 1: Wyznaczamy wartość wielomianu $u = f(x) = x^2 + 2x + 8$.

$$u_0 = f(2) = 16$$

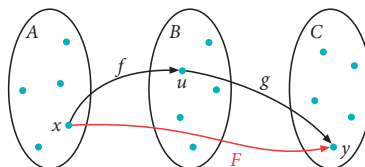
Krok 2: Wyznaczamy wartość pierwiastka zmiennej u , czyli $y = g(u) = \sqrt{u}$.

$$y_0 = g(16) = \sqrt{16} = 4, \text{ inaczej: } y_0 = g(f(2)) = \sqrt{16} = 4$$

Na funkcję F składają się zatem dwie funkcje: f i g o dziedzinach $D_f = \mathbf{R}$ i $D_g = \langle 0; \infty \rangle$.

Opisaną wyżej sytuację przedstawimy teraz ogólnie. Niech dane będą trzy zbiory: A, B i C . Elementy zbioru A nazwiemy x , zbioru B – u , a zbioru C – y .

Na zbiorze A określona jest funkcja f , której wartości należą do zbioru B , a na zbiorze B określona jest z kolei funkcja g , której wartości należą do zbioru C . Funkcje zostały określone w taki sposób, że każdemu $x \in A$ odpowiada element $u = f(x)$ należący do zbioru B , któremu z kolei odpowiada element $y = g(u)$ w zbiorze C .



Zatem każdemu $x \in A$ odpowiada dokładnie jeden element $y = g(f(x)) \in C$. Inaczej mówiąc, na zbiorze A została określona (na rysunku oznaczona kolorem czerwonym) funkcja $F(x) = g(f(x))$.

ZZ i MKP

temat 4.11

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.8

Generator
testów i sprawdzianów

Funkcję $F(x) = g(f(x))$ nazywamy **funkcją złożoną** z funkcji f i g oraz zapisujemy krótko $F = g \circ f$. Taki zapis oznacza, że, mówiąc potocznie, pierwszą działającą funkcją (nazywaną **funkcją wewnętrzną**) jest funkcja f , a następną (**funkcją zewnętrzną**) – funkcja g .

Omówiliśmy przykład złożenia dwóch funkcji. W podobny sposób można określić złożenie trzech i większej liczby funkcji.

Przykład 1 ◀ zad. 8.4

Określmy dziedzinę podanej funkcji złożonej oraz rozłożymy tę funkcję na funkcje: wewnętrzną f i zewnętrzną g .

a) $F(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ c) $F(x) = \sin^2 x$ e) $F(x) = \log(1 - x^2)$

b) $F(x) = \sqrt{4x - x^2 - 6}$ d) $F(x) = \sin x^2$ f) $F(x) = \sqrt{\log_2 x}$

Rozwiązanie

a) $F(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$

$$x^2 - x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup \langle 3; \infty), \text{ więc } D_F = (-\infty; -2] \cup \langle 3; \infty)$$

$$F = g \circ f, \text{ gdzie } u = f(x) = x^2 - x - 6, g(u) = \sqrt{u}$$

b) $F(x) = \sqrt{4x - x^2 - 6}$

Dla trójkątnianu $4x - x^2 - 6$ mamy $\Delta < 0$, więc dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi $4x - x^2 - 6 < 0$. Zatem dziedzina tak określonej funkcji F jest zbiorem pustym – co oznacza, że taka funkcja nie istnieje.

c) $F(x) = \sin^2 x$

$$D_F = \mathbf{R}, u = f(x) = \sin x, g(u) = u^2$$

d) $F(x) = \sin x^2$

$$D_F = \mathbf{R}, u = f(x) = x^2, g(u) = \sin u$$

e) $F(x) = \log(1 - x^2)$

$$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1)$$

$$D_F = (-1; 1), u = f(x) = 1 - x^2, g(u) = \log u$$

f) $F(x) = \sqrt{\log_2 x}$

$$x > 0 \text{ i } \log_2 x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle 1; \infty)$$

$$D_F = \langle 1; \infty), u = f(x) = \log_2 x, g(u) = \sqrt{u}$$

Podamy jeszcze twierdzenie, którego dowód pominiemy.

◀ 8.4. Określ dziedzinę funkcji F , rozłóż F na funkcje: wewnętrzną i zewnętrzną.

a) $F(x) = (3x - 1)^5$

b) $F(x) = \sqrt{4x - 3}$

c) $F(x) = (2x^2 - 4x + 11)^7$

d) $F(x) = \sqrt{6x^2 + 18x}$

e) $F(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 5}$

f) $F(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - 15x}$

g) $F(x) = \sqrt{-x^2 - 5x + 14}$

h) $F(x) = \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 7x}$

Odp.: a) $D_F = \mathbf{R}$,

$$u = f(x) = 3x - 1, g(u) = u^5$$

b) $D_F = \left\langle \frac{3}{4}; \infty \right\rangle$,

$$u = f(x) = 4x - 3, g(u) = \sqrt{u}$$

c) $D_F = \mathbf{R}$,

$$u = f(x) = 2x^2 - 4x + 11,$$

$$g(u) = u^7$$

d) $D_F = (-\infty; -3] \cup \langle 0; \infty)$,

$$u = f(x) = 6x^2 + 18x, g(u) = \sqrt{u}$$

e) Dziedziną funkcji F jest zbiór pusty.

f) $D_F = \langle -5; 0 \rangle \cup \langle 3; \infty)$,

$$u = f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x,$$

$$g(u) = \sqrt{u}$$

g) $D_F = \langle -7; 2 \rangle$,

$$u = f(x) = -x^2 - 5x + 14,$$

$$g(u) = \sqrt{u}$$

h) $D_F = \langle 0; \infty)$,

$$u = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x,$$

$$g(u) = \sqrt{u}$$

Twierdzenie

Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Pochodna funkcji złożonej

Do obliczania pochodnej funkcji złożonej wykorzystamy twierdzenie, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Jeżeli w danej funkcji złożonej $F = g \circ f$ funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną $f'(x_0)$, a funkcja g ma w punkcie $u_0 = f(x_0)$ pochodną $g'(u_0)$, to funkcja złożona ma w punkcie x_0 pochodną $F'(x_0)$ równą iloczynowi $g'(u_0) \cdot f'(x_0)$.

$$F'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Twierdzenie to uogólnimy na funkcje pochodne, przy założeniu, że funkcje f i g są różniczkowalne odpowiednio na zbiorach $D_{f'}$ i $D_{g'}$, i zapiszemy w postaci wzoru:

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Zatem pochodna funkcji złożonej równa się iloczynowi pochodnej funkcji zewnętrznej i pochodnej funkcji wewnętrznej.

Przykład 2 ◀ zad. 8.5

Obliczymy pochodną danej funkcji złożonej F .

$$\text{a) } F(x) = (x^3 + 2x^2 - 1)^{12} \quad \text{b) } F(x) = \sqrt{3x^4 + 5}$$

Rozwiązanie

Najpierw rozkładamy funkcję F na funkcje: wewnętrzną i zewnętrzną. Następnie korzystamy z twierdzenia i wyznaczamy pochodną F' .

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) &= (x^3 + 2x^2 - 1)^{12}, \quad D_F = \mathbf{R} \\ u &= f(x) = x^3 + 2x^2 - 1, \quad g(u) = u^{12} \\ f'(x) &= 3x^2 + 4x, \quad D_{f'} = \mathbf{R} & \leftarrow \text{funkcja } f \text{ jest wielomianem i jest różniczkowalna na } \mathbf{R} \\ g'(u) &= 12u^{11}, \quad D_{g'} = \mathbf{R} & \leftarrow \text{funkcja } g \text{ jest różniczkowalna na } \mathbf{R} \end{aligned}$$

Zatem zgodnie z twierdzeniem, $F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, czyli:

$$F'(x) = 12(x^3 + 2x^2 - 1)^{11} \cdot (3x^2 + 4x) \quad \leftarrow \text{we wzorze } g'(u) = 12u^{11} \text{ wracamy do zależności } u = x^3 + 2x^2 - 1$$

◀ 8.5. Rozłóż funkcję F na funkcje: wewnętrzną i zewnętrzną, oblicz pochodną F' .

$$\text{a) } F(x) = (x^2 - 8x + 17)^{15}$$

$$\text{b) } F(x) = \sqrt{x^2 + 14x}$$

$$\text{c) } F(x) = \sqrt{x^4 - x^3 + 4x^2}$$

$$\text{d) } F(x) = \sqrt{12 + 6x - 4x^2 - 2x^3}$$

$$\text{Odp.: a) } F'(x) = 30(x^2 - 8x + 17)^{14} \cdot (x - 4),$$

$$D_F = D_{F'} = \mathbf{R}$$

$$\text{b) } F'(x) = \frac{x+7}{\sqrt{x^2+14x}},$$

$$D_F = (-\infty; -14) \cup \langle 0; \infty \rangle,$$

$$D_{F'} = (-\infty; -14) \cup (0; \infty)$$

$$\text{c) } F'(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 + 8x}{2\sqrt{x^4 - x^3 + 4x^2}},$$

$$D_F = \mathbf{R}, \quad D_{F'} = \mathbf{R} - \{0\}$$

$$\text{d) } F'(x) = \frac{3 - 4x - 3x^2}{\sqrt{12 + 6x - 4x^2 - 2x^3}},$$

$$D_F = (-\infty; -2) \cup \langle -\sqrt{3}; \sqrt{3} \rangle,$$

$$D_{F'} = (-\infty; -2) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } F(x) &= \sqrt{3x^4 + 5}, D_F = \mathbf{R} && \leftarrow 3x^4 + 5 > 0 \text{ dla każdego } x \in \mathbf{R} \\
 u &= f(x) = 3x^4 + 5, g(u) = \sqrt{u} \\
 f'(x) &= 12x^3, D_{f'} = \mathbf{R} && \leftarrow \text{funkcja } f \text{ jest wielomianem i jest różniczkowalna na } \mathbf{R} \\
 g'(u) &= \frac{1}{2\sqrt{u}}, D_{g'} = (0; \infty) && \leftarrow \text{funkcja } g \text{ jest różniczkowalna na } (0; \infty)
 \end{aligned}$$

Zatem zgodnie z twierdzeniem, $F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, czyli:

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^4 + 5}} \cdot 12x^3 = \frac{6x^3}{\sqrt{3x^4 + 5}} \quad \leftarrow \text{we wzorze } g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ wracamy do zależności } u = 3x^4 + 5$$

Przykład 3 zad. 8.6, 8.7

Wyznamy dziedziny D, D' funkcji f i f' , a następnie obliczymy wartość pochodnej f' w punkcie $x_0 \in D'$.

$$\text{a) } f(x) = (x^7 - x^5 + x^2 + 2)^3, x_0 = 1 \qquad \text{b) } f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}, x_0 = -2$$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= (x^7 - x^5 + x^2 + 2)^3, D = \mathbf{R} \\
 f'(x) &= 3(x^7 - x^5 + x^2 + 2)^2 \cdot (7x^6 - 5x^4 + 2x), D' = \mathbf{R} \\
 f'(1) &= 3 \cdot (1 - 1 + 1 + 2)^2 \cdot (7 - 5 + 2) = 108
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } f(x) &= \sqrt{x^2 - 6x + 8}, D = (-\infty; 2) \cup (4; \infty) \\
 f'(x) &= (2x - 6) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 6x + 8}} = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}, D' = (-\infty; 2) \cup (4; \infty) \\
 f'(-2) &= \frac{-2 - 3}{\sqrt{4 + 12 + 8}} = -\frac{5}{2\sqrt{6}}
 \end{aligned}$$



Przykład 4 zad. 8.8

Napiszemy równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ poprowadzonej w punkcie o pierwszej współrzędnej $x_0 = 1$.

Rozwiązanie

$$D = \mathbf{R}$$

Funkcja f jest różniczkowalna i $D' = \mathbf{R}$, więc istnieje styczna do wykresu funkcji f w punkcie o pierwszej współrzędnej $x_0 = 1$. Styczna ma równanie postaci $y = ax + b$, gdzie $a = f'(1)$. Ponadto styczna przechodzi przez punkt $(x_0, f(x_0)) = (1, 2)$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} \\
 a = f'(1) &= \frac{1}{2}, \text{ więc } y = \frac{1}{2}x + b
 \end{aligned}$$

◀8.8. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ poprowadzonej w punkcie o pierwszej współrzędnej x_0 .

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= (3x + 1)^4, x_0 = -\frac{2}{3} & \text{c) } f(x) &= \sqrt{x^2 - x - 2}, x_0 = 3 \\
 \text{b) } f(x) &= \left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right)^3, x_0 = 2 & \text{d) } f(x) &= \sqrt{x^4 + 3x^3}, x_0 = 1
 \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: a) } y = -12x - 7 \quad \text{b) } y = 3x - 7 \quad \text{c) } 5x - 4y - 7 = 0 \quad \text{d) } 13x - 4y - 5 = 0$$

◀8.6. Wyznamy dziedziny D i D' funkcji f i f' , a następnie obliczymy wartość pochodnej f' w punkcie $x_0 \in D'$.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= (x^2 + 2x - 2)^4, x_0 = -2 \\
 \text{b) } f(x) &= (x^5 - 2x^3 + x^2 + 4x + 1)^3, x_0 = -1 \\
 \text{c) } f(x) &= \left(x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}\right)^5, x_0 = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: a) } D = D' = \mathbf{R}, f'(-2) = 64$$

$$\text{b) } D = D' = \mathbf{R}, f'(-1) = 3$$

$$\text{c) } D = D' = \mathbf{R}, f'(\sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

◀8.7. Wyznamy dziedziny D i D' funkcji f i f' , a następnie obliczymy wartość pochodnej f' w punkcie $x_0 \in D'$.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= \sqrt{x^2 - 2x - 8}, x_0 = -3 \\
 \text{b) } f(x) &= \sqrt{1 - x - 2x^2}, x_0 = -\frac{1}{2} \\
 \text{c) } f(x) &= 6\sqrt{x^3 - 4x}, x_0 = -1 \\
 \text{d) } f(x) &= \sqrt{x^2 - 4x^4}, x_0 = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: a) } D = (-\infty; -2) \cup (4; \infty), D' = (-\infty; -2) \cup (4; \infty),$$

$$f'(-3) = -\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{b) } D = \left\langle -1; \frac{1}{2} \right\rangle, D' = \left(-1; \frac{1}{2}\right), f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } D = \langle -2; 0 \rangle \cup (2; \infty), D' = (-2; 0) \cup (2; \infty), f'(-1) = -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } D &= \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle, D' = \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right), f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$2 = \frac{1}{2} + b$$

← punkt (1, 2) należy do stycznej

$$b = 1\frac{1}{2}, \text{ czyli równanie stycznej: } y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} \text{ (lub } x - 2y + 3 = 0).$$

$$\text{Odp.: } x - 2y + 3 = 0$$

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytce.

Odpowiedzi i rozwiązania

8.1. D

8.2. B

8.3. B

8.4. a) $D_F = \mathbf{R}$, $u = f(x) = 3x - 1$,
 $g(u) = u^5$

b) $D_F = \left\langle \frac{3}{4}; \infty \right\rangle$,

$u = f(x) = 4x - 3$, $g(u) = \sqrt{u}$

c) $D_F = \mathbf{R}$,

$u = f(x) = 2x^2 - 4x + 11$,

$g(u) = u^7$

d) $D_F = (-\infty; -3) \cup \langle 0; \infty \rangle$,

$u = f(x) = 6x^2 + 18x$, $g(u) = \sqrt{u}$

e) Dziedziną funkcji F jest zbiór pusty.

f) $D_F = \langle -5; 0 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$,

$u = f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$,

$g(u) = \sqrt{u}$

g) $D_F = \langle -7; 2 \rangle$,

$u = f(x) = -x^2 - 5x + 14$,

$g(u) = \sqrt{u}$

h) $D_F = \langle 0; \infty \rangle$,

$u = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x$,

$g(u) = \sqrt{u}$

8.1. Wskaż dziedzinę funkcji złożonej $F(x) = \cos(\log x)$.

A. $\mathbf{R}$

B. $\langle -1; 1 \rangle$

C. $\langle 0; \infty \rangle$

D. $\langle 0; \infty \rangle$

8.2. Wskaż funkcję zewnętrzną funkcji złożonej $F(x) = \log^3 x$.

A. $g(u) = u$

B. $g(u) = u^3$

C. $g(u) = \log u$

D. $g(u) = 3u$

8.3. Wskaż dziedzinę funkcji pochodnej $D_{f'}$ dla funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$.

A. $D_{f'} = \langle -5; 2 \rangle$

C. $D_{f'} = (-\infty; -5) \cup \langle 2; \infty \rangle$

B. $D_{f'} = (-\infty; -5) \cup \langle 2; \infty \rangle$

D. $D_{f'} = (-5; 2)$

8.4. Określ dziedzinę funkcji F , rozłóż F na funkcje: wewnętrzną i zewnętrzną.

a) $F(x) = (3x - 1)^5$

e) $F(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 5}$

b) $F(x) = \sqrt{4x - 3}$

f) $F(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - 15x}$

c) $F(x) = (2x^2 - 4x + 11)^7$

g) $F(x) = \sqrt{-x^2 - 5x + 14}$

d) $F(x) = \sqrt{6x^2 + 18x}$

h) $F(x) = \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 7x}$

8.5. Rozłóż funkcję F na funkcje: wewnętrzną i zewnętrzną, oblicz pochodną F' .

a) $F(x) = (x^2 - 8x + 17)^{15}$

c) $F(x) = \sqrt{x^4 - x^3 + 4x^2}$

b) $F(x) = \sqrt{x^2 + 14x}$

d) $F(x) = \sqrt{12 + 6x - 4x^2 - 2x^3}$

8.6. Wyznacz dziedziny D i D' funkcji f i f' , a następnie oblicz wartość pochodnej f' w punkcie $x_0 \in D'$.

a) $f(x) = (x^2 + 2x - 2)^4$ $x_0 = -2$

b) $f(x) = (x^5 - 2x^3 + x^2 + 4x + 1)^3$ $x_0 = -1$

c) $f(x) = \left(x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}\right)^5$ $x_0 = \sqrt{2}$

8.5. a) $F'(x) = 30(x^2 - 8x + 17)^{14} \cdot (x - 4)$, $D_F = D_{F'} = \mathbf{R}$

b) $F'(x) = \frac{x+7}{\sqrt{x^2+14x}}$, $D_F = (-\infty; -14) \cup \langle 0; \infty \rangle$, $D_{F'} = (-\infty; -14) \cup \langle 0; \infty \rangle$

c) $F'(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 + 8x}{2\sqrt{x^4 - x^3 + 4x^2}}$, $D_F = \mathbf{R}$, $D_{F'} = \mathbf{R} - \{0\}$

d) $F'(x) = \frac{3-4x-3x^2}{\sqrt{12+6x-4x^2-2x^3}}$, $D_F = (-\infty; -2) \cup \langle -\sqrt{3}; \sqrt{3} \rangle$, $D_{F'} = (-\infty; -2) \cup \langle -\sqrt{3}; \sqrt{3} \rangle$

8.6. a) $D = D' = \mathbf{R}$, $f'(-2) = 64$

b) $D = D' = \mathbf{R}$, $f'(-1) = 3$

c) $D = D' = \mathbf{R}$, $f'(\sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{2}}{4}$

8.7. Wyznacz dziedziny D i D' funkcji f i f' , a następnie oblicz wartość pochodnej f' w punkcie $x_0 \in D'$.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$, $x_0 = -3$ c) $f(x) = 6\sqrt{x^3 - 4x}$, $x_0 = -1$
 b) $f(x) = \sqrt{1 - x - 2x^2}$, $x_0 = -\frac{1}{2}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x^4}$, $x_0 = \frac{1}{4}$

8.8. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ poprowadzonej w punkcie o pierwszej współrzędnej x_0 .

a) $f(x) = (3x + 1)^4$, $x_0 = -\frac{2}{3}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$, $x_0 = 3$
 b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right)^3$, $x_0 = 2$ d) $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^3}$, $x_0 = 1$

8.9. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 9}$ w punkcie o rzędnej $y_0 = 3$.

8.10. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = (x^3 - 1)^7$ w punktach, w których wykres funkcji przecina oś x .

8.11. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 18}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 3$ i podaj kąt nachylenia tej stycznej do osi x .

Prosto do matury



- Dana jest funkcja $F(x) = \log_2 \sin x$. Oceń prawdziwość podanych zdań.
 A. $D_F = (0; \infty)$
 B. Funkcja F jest funkcją złożoną i $f(x) = \sin x$ jest funkcją wewnętrzną funkcji F .
 C. Dla każdego $x \in D_F$ zachodzi $F(x) \leq 0$.
- Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = 3x\sqrt{x^4 + 1}$.
- Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = (x^4 + 1)^5$ w punkcie o odciętej $x_0 = 0$.
- Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 3$.
- Wyznacz z dokładnością do 1° kąt, pod jakim przecinają się wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ oraz $g(x) = x^2$. Podaj współrzędne punktu przecięcia obydwu wykresów.

Prosto do matury

1. F, P, P

2. $f'(x) = \frac{9x^4 + 3}{\sqrt{x^4 + 1}}$

3. $y = 1$

4. $y = \frac{1}{3}x + 2$

5. 72° , $(1, 1)$

8.7. a) $D = (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$,
 $D' = (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$,
 $f'(-3) = -\frac{4\sqrt{7}}{7}$

b) $D = \left\langle -1; \frac{1}{2} \right\rangle$, $D' = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$,
 $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

c) $D = \langle -2; 0 \rangle \cup (2; \infty)$,
 $D' = (-2; 0) \cup (2; \infty)$,
 $f'(-1) = -\sqrt{3}$

d) $D = \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$,
 $D' = \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$,
 $f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

8.8. a) $y = -12x - 7$

b) $y = 3x - 7$

c) $5x - 4y - 7 = 0$

d) $13x - 4y - 5 = 0$

8.9. $D_f = \mathbf{R}$, $2x - 3y + 9 = 0$ lub
 $2x + 3y - 1 = 0$

8.10. $D_f = \mathbf{R}$, $y = 0$

8.11. $D_f = \mathbf{R}$,
 $\sqrt{3}x - 3y + 6\sqrt{3} = 0$, 30°

9. Monotoniczność i ekstrema funkcji różniczkowalnej

Umiejętności:

- korzystanie z własności pochodnej do znajdowania przedziałów monotoniczności funkcji
- wyznaczanie wartości ekstremalnych funkcji

Pochodną funkcji będziemy stosować do badania monotoniczności funkcji. Zaczniemy od wskazania związku między znakiem ilorazu różnicowego a faktem, że funkcja jest rosnąca lub jest malejąca.

Twierdzenie

- Funkcja $f: (a; b) \rightarrow \mathbf{R}$ jest rosnąca w przedziale $(a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary liczb $x_0, h \neq 0$ takich, że $x_0 \in (a; b)$ i $x_0 + h \in (a; b)$ prawdziwa jest nierówność $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$.
- Funkcja $f: (a; b) \rightarrow \mathbf{R}$ jest malejąca w przedziale $(a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary liczb $x_0, h \neq 0$ takich, że $x_0 \in (a; b)$ i $x_0 + h \in (a; b)$ prawdziwa jest nierówność $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0$.

Dowód

- Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary argumentów należących do tego przedziału większą wartość przyporządkowuje większemu z nich. Oznacza to, że liczby h oraz $f(x_0 + h) - f(x_0)$ mają ten sam znak, czyli spełniona jest nierówność $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$.
- Funkcja f jest malejąca w przedziale $(a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary argumentów należących do $(a; b)$ większą wartość przyporządkowuje mniejszemu z nich. Oznacza to, że liczby h oraz $f(x_0 + h) - f(x_0)$ mają przeciwne znaki, czyli spełniona jest nierówność $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0$.

Koniec dowodu

Zauważmy, że dowód twierdzenia nie zmieni się, jeżeli przedział $(a; b)$ zastąpimy przedziałem $(a; \infty)$ lub przedziałem $(-\infty; b)$, lub zbiorem $\mathbf{R}$.

ZZ i MKP

tematy 4.13, 4.14, 4.17

Multiteka

- Monotoniczność funkcji a jej pochodna
- Ekstrema funkcji

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.9

Generator
testów i sprawdzianów

Pochodna $f'(x_0)$ jest granicą ilorazu różnicowego $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Przyjmijmy, że pochodna w punkcie x_0 jest dodatnia. Wynika z tego, że dla dostatecznie małych wartości h iloraz różnicowy też przyjmuje wartości dodatnie. Jeśli nierówność $f'(x_0) > 0$ jest spełniona dla każdego punktu $x_0 \in (a; b)$, to funkcja f jest w przedziale $(a; b)$ rosnąca.

Analogiczne rozumowanie prowadzimy dla ujemnej pochodnej w punkcie x_0 i funkcji malejącej.

Podsumowaniem tych rozważań jest twierdzenie, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Dana jest funkcja f określona i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$.

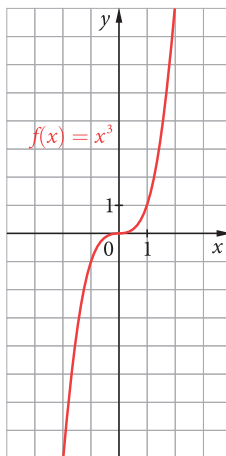
- Jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a; b)$, to funkcja f jest w tym przedziale **rosnąca**.
- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a; b)$, to funkcja f jest w tym przedziale **malejąca**.

Uwaga: Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Na przykład funkcja $f(x) = x^3$ jest rosnąca w zbiorze liczb rzeczywistych, a jej pochodna $f'(x) = 3x^2$ ma miejsce zerowe równe 0.

Można udowodnić twierdzenia słabsze:

- Jeśli funkcja f jest w przedziale $(a; b)$ rosnąca i różniczkowalna, to dla każdego $x \in (a; b)$ prawdziwa jest nierówność $f'(x) \geq 0$.
- Jeśli funkcja f jest w przedziale $(a; b)$ malejąca i różniczkowalna, to dla każdego $x \in (a; b)$ prawdziwa jest nierówność $f'(x) \leq 0$.



Przypomnijmy:

Jeśli granicą ciągu jest liczba dodatnia, to prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Podobnie – jeśli granicą ciągu jest liczba ujemna, to prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są ujemne.



Przykład 1

Zbadamy monotoniczność funkcji $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 11$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji f : $f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $D = D' = \mathbf{R}$.

Badamy znak pochodnej. Rozwiązujemy nierówność $f'(x) > 0$.

$$3x^2 - 2x + 5 > 0, \quad \Delta = -56$$

$f'(x) > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, zatem funkcja f jest rosnąca w całej dziedzinie.

Odp.: Funkcja $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 11$ jest rosnąca w $\mathbf{R}$.

W temacie 5 omówiliśmy własności funkcji ciągłych. Przypomnijmy niektóre z nich.

- Wielomiany, funkcje wymierne, trygonometryczne oraz $f(x) = \sqrt[n]{x}$ są funkcjami ciągłymi.
- Jeżeli $y = f(x)$ jest ciągła, to ciągłe są funkcje: $y = -f(x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(-x)$.
- Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$ i jest rosnąca (malejąca) w przedziale $(a; b)$, to jest rosnąca (malejąca) w przedziale $\langle a; b \rangle$.

Przykład 2 ◀ zad. 9.4–9.6

Wyznaczmy przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Rozwiązanie

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}, \quad D = D' = \mathbf{R}$$

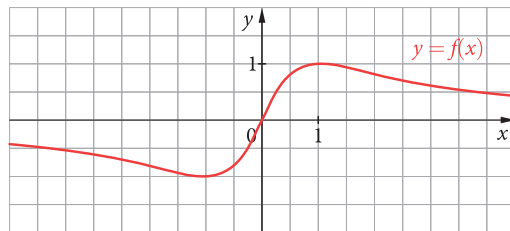
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow -2(x+1)(x-1) > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in (-1; 1)$

Zatem w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$ funkcja f jest rosnąca.

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

W każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$ oraz $(1; \infty)$ funkcja f jest malejąca.

Przypomnijmy: z tego, że funkcja $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$, $\langle 1; \infty \rangle$, **nie wynika**, że jest malejąca w zbiorze $(-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle$. Można się o tym przekonać, przyglądając się wykresowi tej funkcji, który prezentujemy obok.



Odp.: Funkcja $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$, rosnąca w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 1; \infty \rangle$.

◀9.4. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

c) $f(x) = \frac{x^2}{(x+2)^2}$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{2 - x}$

Odp.: a) rosnąca w $\mathbf{R}$

b) rosnąca w $(-\infty; 0)$,

malejąca w $\langle 0; 2 \rangle$,

rosnąca w $\langle 2; \infty \rangle$

c) rosnąca w $(-\infty; -2)$,

malejąca w $(-2; 0)$,

rosnąca w $\langle 0; \infty \rangle$

d) malejąca w $(-\infty; -1)$,

rosnąca w $\langle -1; 2 \rangle$,

rosnąca w $\langle 2; 5 \rangle$,

malejąca w $\langle 5; \infty \rangle$

◀9.5. Wyznacz przedziały, w których funkcja

$$f(x) = \frac{x^3}{2(4 - x^2)}$$

jest malejąca.

Odp.: $(-\infty; -2\sqrt{3})$ i $\langle 2\sqrt{3}; \infty \rangle$

◀9.6. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}.$$

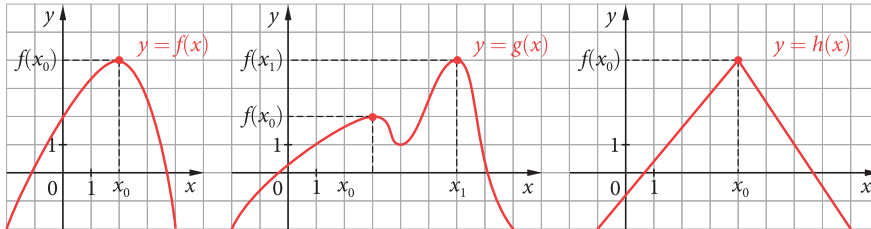
Odp.: rosnąca w $\langle -2; 2 \rangle$,

malejąca w $\langle 2; 6 \rangle$

Ekstrema funkcji

Kiedy badamy własności różnych funkcji, często szukamy wartości maksymalnych i minimalnych przyjmowanych w określonym przedziale. Zagadnieniem tym dokładniej zajmiemy się w następnym temacie, natomiast teraz zdefiniujemy pojęcia, z których będziemy korzystać.

Przyjrzyjmy się rysunkom.

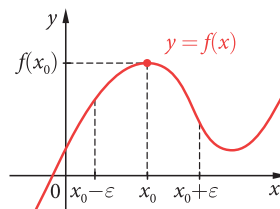


Zwróćmy uwagę na punkt x_0 , w którym każda z funkcji f , g i h **lokalnie** przyjmuje wartość największą. Funkcja g również w punkcie x_1 ma lokalnie wartość największą.

Definicja

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D$ **maksimum** $f(x_0)$, jeśli istnieje takie otoczenie punktu x_0 zawarte w D , że dla wszystkich $x \neq x_0$ z tego otoczenia zachodzi nierówność:

$$f(x) < f(x_0)$$

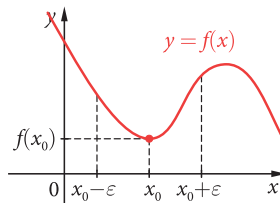


Podobnie określamy minimum funkcji w punkcie.

Definicja

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D$ **minimum** $f(x_0)$, jeśli istnieje takie otoczenie punktu x_0 zawarte w D , że dla wszystkich $x \neq x_0$ z tego otoczenia zachodzi nierówność:

$$f(x) > f(x_0)$$

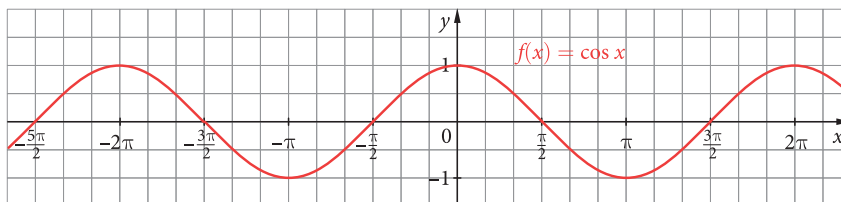


Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 **ekstremum**, jeżeli ma w tym punkcie maksimum lub minimum.

Zauważmy, że funkcja może przyjmować ekstremum w nieskończenie wielu punktach należących do dziedziny.

Na przykład funkcja $f(x) = \cos x$:

- we wszystkich punktach postaci $x_k = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ma maksimum równe 1,
- we wszystkich punktach postaci $x_k = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ma minimum równe -1 .



Funkcja nie musi być różniczkowalna w punkcie, w którym ma ekstremum, np. nieposiadająca w $x_0 = 0$ pochodnej funkcja $f(x) = |x|$ ma w tym punkcie minimum.

Natomiast jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie, w którym ma ekstremum, to styczna do wykresu w tym punkcie jest równoległa do osi x . Zachodzi zatem następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f określona i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ ma ekstremum w punkcie $x_0 \in (a; b)$, to $f'(x_0) = 0$.

Dowód

Zgodnie z definicją funkcja f ma w punkcie $x_0 \in (a; b)$ maksimum wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie U punktu x_0 , że dla wszystkich punktów $x \neq x_0$ z tego otoczenia zachodzi $f(x) < f(x_0)$, a więc $f(x) - f(x_0) < 0$. Aby skorzystać z definicji pochodnej, zapiszemy x w postaci $x = x_0 + h$, gdzie $x_0 + h \in U$ i $h \neq 0$. Mamy więc $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$ dla $h \neq 0$ i $x_0 + h \in U$.

Jeżeli $h < 0$, to $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$, a gdy $h > 0$, to $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0$.

Wynika stąd, że:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \text{ i } \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

Z założenia wiemy, że pochodna $f'(x_0)$ istnieje, więc obydwie pochodne jednostronne muszą być jej równe. Zatem z otrzymanych nierówności $f'(x_0) \geq 0$ i $f'(x_0) \leq 0$ mamy $f'(x_0) = 0$.

Dowód twierdzenia w przypadku, gdy f ma w punkcie $x_0 \in (a; b)$ minimum, przebiega analogicznie.

Koniec dowodu

Warunek podany w twierdzeniu jest **warunkiem koniecznym**, ale nie wystarczającym, by funkcja miała ekstremum. Na przykład funkcja $f(x) = x^3$ nie ma ekstremum w punkcie 0, chociaż $f'(0) = 0$. Dlatego do wyznaczania ekstremów funkcji stosuje się inne twierdzenie – **warunek wystarczający** do tego, by funkcja różniczkowalna miała ekstremum w punkcie x_0 .

Twierdzenie

Dana jest funkcja f określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ punktu x_0 i różniczkowalna w punkcie x_0 .

Jeżeli spełnione są warunki

- $f'(x_0) = 0$,
- $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$,

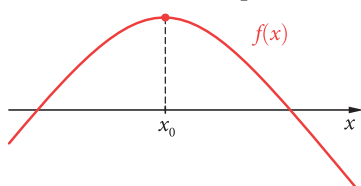
to funkcja f ma w punkcie x_0 **maksimum**.

Jeżeli natomiast spełnione są warunki

- $f'(x_0) = 0$,
- $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$,

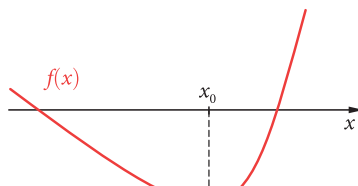
to funkcja f ma w punkcie x_0 **minimum**.

Warunki podane w twierdzeniu oznaczają, że w punkcie, w którym funkcja różniczkowalna ma ekstremum, pochodna tej funkcji **zmienia znak**.



W punkcie x_0 funkcja f ma maksimum:

- dla $x < x_0$ jest $f'(x) > 0$,
- dla $x > x_0$ jest $f'(x) < 0$.



W punkcie x_0 funkcja f ma minimum:

- dla $x < x_0$ jest $f'(x) < 0$,
- dla $x > x_0$ jest $f'(x) > 0$.

◀9.7. Wykaż, że funkcja $y = f(x)$ jest monotoniczna w zbiorze liczb rzeczywistych.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$

b) $f(x) = -x^5 - 3x^3 - 5x + 3$

Rozwiązanie

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x + 5$

$D = D' = \mathbf{R}$

$\Delta = 36 - 4 \cdot 6 \cdot 5 < 0$

Zatem $f'(x) > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$,

a więc funkcja f jest rosnąca w $\mathbf{R}$.

b) $f'(x) = -5x^4 - 9x^2 - 5$

$D = D' = \mathbf{R}$

$f'(x) = -5x^4 - 9x^2 - 5 < 0$

dla $x \in \mathbf{R}$

Zatem funkcja f jest malejąca w $\mathbf{R}$.

◀9.8. Wyznacz ekstrema funkcji.

a) $f(x) = (x^2 - 8)(x^2 - 10)$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = -2x^4 + 8x^3 - 24$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$

e) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$

f) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{1 - x}$

Odp.: a) maksimum: 80 dla $x = 0$,
minimum: -1 dla $x = -3$ i $x = 3$

b) maksimum: $-\frac{1}{4}$ dla $x = 0$

c) maksimum: 30 dla $x = 3$

d) maksimum: -8 dla $x = -2$,
minimum: 0 dla $x = 2$

e) maksimum: -1 dla $x = 2$,
minimum: $-\frac{1}{9}$ dla $x = -2$

f) maksimum: -11 dla $x = 4$,
minimum: 1 dla $x = -2$

Przykład 3 ◀ zad. 9.7

Zbadamy, czy funkcja $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ ma w jakimś punkcie ekstremum. Jeśli tak, to określimy, czy jest to minimum, czy maksimum oraz obliczymy jego wartość.

Rozwiązanie

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2), \quad D = D' = \mathbf{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ lub $x = 0, \quad f(-2) = -8 + 12 + 5 = 9, \quad f(0) = 5$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 0)$

Zebrane informacje zestawiamy w tabeli. W drugim wierszu zapisujemy własności pochodnej – jej znak w odpowiednich przedziałach oraz miejsca zerowe. W trzecim – własności funkcji: odpowiedni znak monotoniczności, nazwę ekstremum (o ile wystąpiło) i jego wartość.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	9 maks	$\searrow$	5 min	$\nearrow$

Odp.: W punkcie $x = -2$ funkcja f ma maksimum równe 9, a w punkcie $x = 0$ ma minimum równe 5.

Przykład 4 ◀ zad. 9.8

Wyznamy ekstrema funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

Rozwiązanie

$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}, \quad D = D' = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad f(0) = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x > 0$ i $x \in D' \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	+	nie istnieje	+	0	-	nie istnieje	-
$f(x)$	$\nearrow$	nie istnieje	$\nearrow$	0 maks	$\searrow$	nie istnieje	$\searrow$

Odp.: W punkcie $x = 0$ funkcja f ma maksimum równe 0.

**Przykład 5** ◀ zad. 9.12

Dla jakiej wartości parametru m funkcja $f(x) = \frac{x^2 + mx}{x^2 + 2}$ ma maksimum w punkcie 2?

Rozwiązanie

$$f'(x) = \frac{(2x + m) \cdot (x^2 + 2) - (x^2 + mx) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-mx^2 + 4x + 2m}{(x^2 + 2)^2}, \quad D = D' = \mathbf{R}$$

Aby funkcja f miała ekstremum w $x = 2$, musi być spełniony warunek $f'(2) = 0$.

$$\frac{-m \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 2m}{(2^2 + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow -2m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = 4$$

Jeżeli $m = 4$, to $f'(x) = \frac{-4x^2 + 4x + 8}{(x^2 + 2)^2}$.

Zbadamy znak pochodnej, żeby sprawdzić, czy w punkcie $x = 2$ funkcja f rzeczywiście ma maksimum.

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 4x + 8}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-4(x^2 - x - 2)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-4(x + 1)(x - 2)}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 2), \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty).$$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 2)$	2	$(2; \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	maks	$\searrow$

Odp.: Dla $m = 4$.

Przykład 6 ◀ zad. 9.16

Zbadamy własności funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$ i naszkicujemy jej wykres.

Takie zadanie nazywamy badaniem przebiegu zmienności funkcji.

Obliczenia zostawiamy do samodzielnego wykonania.

Rozwiązanie

$$1. D = D' = \mathbf{R} - \{-3, 1\} \quad \leftarrow x^2 + 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3 \text{ i } x \neq 1$$

2. Zauważmy, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi $x^2 - 2x + 3 > 0$, zatem:

- funkcja f nie ma miejsc zerowych,
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty), \quad f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3; 1).$

3. Wyznaczamy granice funkcji na końcach przedziałów określoności.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

◀9.12. Funkcja

$$f(x) = \frac{ax + b}{(x-1)(x-4)} \quad \text{ma}$$

ekstremum w punkcie $x = 2$.

Ponadto wiadomo, że $f(2) = -1$.

Wyznacz a i b .

Odp.: $a = 1, b = 0$

◀9.16. Zbadaj przebieg zmienności funkcji f i naszkicuj jej wykres.

$$\text{a) } f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

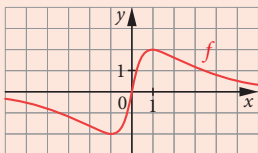
$$\text{c) } f(x) = \frac{4}{(x-2)^2} + x - 3$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x^2 + 4}{(x-2)^2}$$

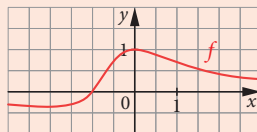
$$\text{e) } f(x) = \frac{x-1}{x^2-7x+10}$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{4x^2 - 8x + 3}{x^2 - 2x}$$

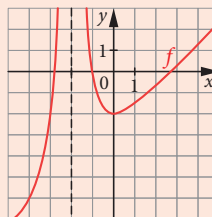
◀9.16. Odp.: a)



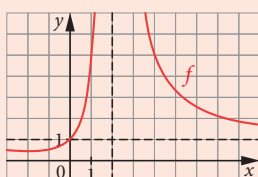
b)



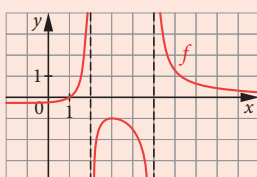
c)



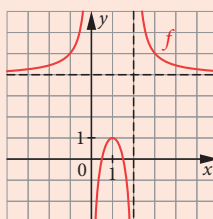
d)



e)



f)



4. Asymptotą poziomą w $\pm\infty$ jest prosta $y = 1$, asymptotami pionowymi są proste: $x = -3$, $x = 1$.

5. Wyznaczamy pochodną funkcji: $f'(x) = \frac{4x(x-3)}{(x^2+2x-3)^2}$.

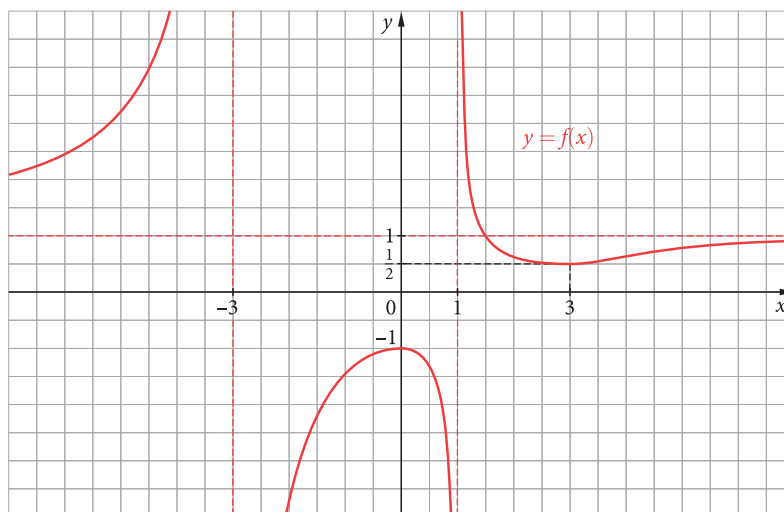
6. Po uwzględnieniu dziedziny pochodnej mamy:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ lub $x = 3$,
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (3; \infty)$,
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; 3)$.

7. Zebrane informacje zestawiamy w tabeli.

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3; \infty)$
$f'(x)$	+	nie istnieje	+	0	-	nie istnieje	-	0	+
$f(x)$	$1 \nearrow \infty$	nie istnieje	$-\infty \nearrow$	-1 maks	$\searrow -\infty$	nie istnieje	$\infty \searrow$	$\frac{1}{2}$ min	$\nearrow 1$

8. Wykonujemy szkic wykresu funkcji.



9. Odczytujemy liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ zależnie od wartości parametru m : nie ma rozwiązań dla $m \in (-1; \frac{1}{2})$, ma jedno rozwiązanie dla $m \in \{-1, \frac{1}{2}, 1\}$, ma dwa rozwiązania dla $m \in (-\infty; -1) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; \infty)$.

10. Zbiorem wartości funkcji jest suma przedziałów $(-\infty; -1) \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$.

Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyście.

9.1. Wskaż punkt, w którym funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1989$ ma maksimum.

- A. $x = \frac{1}{6}$ B. $x = -1$ C. $x = 2$ D. $x = 0$

9.2. Wskaż punkt, w którym funkcja $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$ ma minimum.

- A. $x = 0$ B. $x = 1$ C. $x = 2$ D. $x = 3$

9.3. Wskaż zbiór, w którym funkcja $f(x) = 4 - x^4$ jest malejąca.

- A. $\langle -2; 2 \rangle$ B. $\langle -\sqrt{2}; \infty \rangle$ C. $(-\infty; 0)$ D. $\langle 0; \infty \rangle$

9.4. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji.

- a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$ c) $f(x) = \frac{x^2}{(x+2)^2}$
 b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ d) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{2 - x}$

9.5. Wyznacz przedziały, w których funkcja $f(x) = \frac{x^3}{2(4-x^2)}$ jest malejąca.

9.6. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$.

D 9.7. Wykaż, że funkcja $y = f(x)$ jest monotoniczna w zbiorze liczb rzeczywistych.

- a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ b) $f(x) = -x^5 - 3x^3 - 5x + 3$

9.8. Wyznacz ekstrema funkcji.

- a) $f(x) = (x^2 - 8)(x^2 - 10)$ d) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$
 b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ e) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$
 c) $f(x) = -2x^4 + 8x^3 - 24$ f) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{1 - x}$

9.9. Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = (x^3 - 3x)^2$.

9.7. a) $f'(x) = 6x^2 - 6x + 5$, $D = D' = \mathbf{R}$, $\Delta = 36 - 4 \cdot 6 \cdot 5 < 0$

Zatem $f'(x) > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, a więc funkcja f jest rosnąca w $\mathbf{R}$.

b) $f'(x) = -5x^4 - 9x^2 - 5$, $D = D' = \mathbf{R}$

$f'(x) = -5x^4 - 9x^2 - 5 < 0$ dla $x \in \mathbf{R}$

Zatem funkcja f jest malejąca w $\mathbf{R}$.

9.1. B

9.2. D

9.3. D

9.4. a) rosnąca w $\mathbf{R}$

b) rosnąca w $(-\infty; 0)$,

malejąca w $\langle 0; 2 \rangle$,

rosnąca w $\langle 2; \infty \rangle$

c) rosnąca w $(-\infty; -2)$,

malejąca w $(-2; 0)$,

rosnąca w $\langle 0; \infty \rangle$

d) malejąca w $(-\infty; -1)$,

rosnąca w $\langle -1; 2 \rangle$,

rosnąca w $\langle 2; 5 \rangle$,

malejąca w $\langle 5; \infty \rangle$

9.5. $(-\infty; -2\sqrt{3})$ i $\langle 2\sqrt{3}; \infty \rangle$

9.6. rosnąca w $\langle -2; 2 \rangle$,

malejąca w $\langle 2; 6 \rangle$

9.8. a) maksimum: 80 dla $x = 0$,
minimum: -1 dla $x = -3$ i $x = 3$

b) maksimum: $-\frac{1}{4}$ dla $x = 0$

c) maksimum: 30 dla $x = 3$

d) maksimum: -8 dla $x = -2$,
minimum: 0 dla $x = 2$

e) maksimum: -1 dla $x = 2$,
minimum: $-\frac{1}{9}$ dla $x = -2$

f) maksimum: -11 dla $x = 4$,
minimum: 1 dla $x = -2$

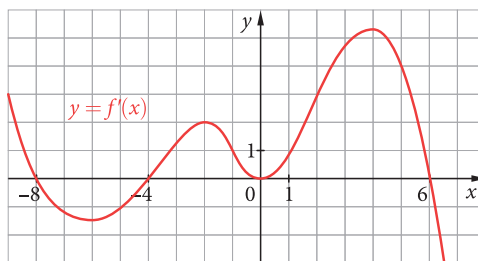
9.9. minimum: 0 dla $x = -\sqrt{3}$,

$x = 0$ i $x = \sqrt{3}$,

maksimum: 4 dla $x = -1$ i $x = 1$

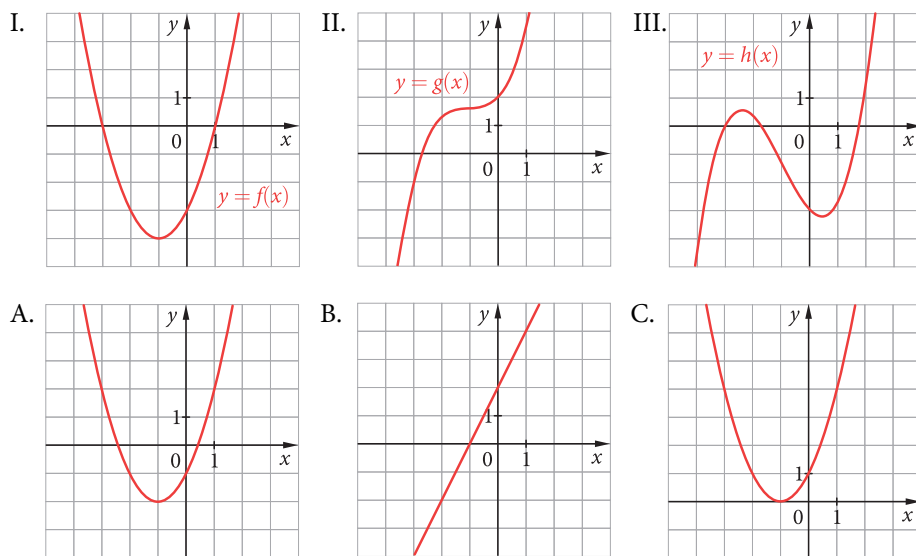
9.10. W punkcie $x = -8$ funkcja ma maksimum,
w $x = -4$ ma minimum,
w $x = 6$ ma maksimum.

9.10. Na rysunku przedstawiono wykres pochodnej f' funkcji f . Na podstawie tego wykresu wyznacz punkty, w których funkcja f ma ekstremum. Określ rodzaj każdego ekstremum.



9.11. I-B, II-C, III-A

9.11. Na rysunkach I, II i III przedstawiono wykresy funkcji f , g i h , a na rysunkach A, B i C – wykresy ich pochodnych f' , g' i h' . Dopasuj wykresy pochodnych do odpowiednich wykresów funkcji.



9.12. $a = 1$, $b = 0$

9.12. Funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$ ma ekstremum w punkcie $x = 2$. Ponadto wiadomo, że $f(2) = -1$. Wyznacz a i b .

9.13. $a = 2$, $b = 0$

9.13. Funkcja $f(x) = \frac{ax^2+b}{(2-x)^2}$ ma ekstremum w punkcie $x = 0$. Prosta $y = 2$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji. Wyznacz a i b .

9.14. Dla jakich wartości parametru m funkcja

$$f(x) = \frac{m-2}{3}x^3 + (2m-3)x^2 + (5m-6)x \text{ jest rosnąca w zbiorze } \mathbb{R}?$$

9.15. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{dla } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$.

Zbadaj jej ciągłość i różniczkowalność, wyznacz przedziały monotoniczności oraz ekstrema. Naskicuj wykres tej funkcji.

9.16. Zbadaj przebieg zmienności funkcji f i naskicuj jej wykres.

a) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ c) $f(x) = \frac{4}{(x+2)^2} + x - 3$ e) $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 7x + 10}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + x + 1}$ d) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{(x-2)^2}$ f) $f(x) = \frac{4x^2 - 8x + 3}{x^2 - 2x}$

Prosto do matury



1. Funkcja $y = f(x)$ jest różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ oraz w pewnym punkcie $x_0 \in (a; b)$ jej pochodna ma wartość $f'(x_0) = 0$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Z podanych informacji wynika, że

- A. styczna do wykresu funkcji f w punkcie x_0 jest równoległa do osi x .
- B. funkcja f może być malejąca w przedziale $(a; b)$.
- C. funkcja f jest niemonotoniczna w przedziale $(a; b)$.

2. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 3x + 3}$.

3. Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x}$.

4. Dla jakiej wartości parametru m funkcja $f(x) = \frac{-x^2 + mx + 3}{x^2 - 2x}$ ma ekstremum w punkcie $x = 1$? Jakie to ekstremum i jaką ma wartość?

D

5. Funkcja $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ma ekstrema w punktach x_1 i x_2 . Do wykresu funkcji f poprowadzono styczne w punktach o odciętych $-2, 2, x_1$ i x_2 . Wykaż, że czworokąt ograniczony tymi stycznymi ma środek symetrii. Wyznacz współrzędne tego środka.

5. $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$, więc $f'(x) = 0$ dla $x \in \{-1, 1\}$. Pochodna zmienia znak w punktach $x = -1$ i $x = 1$, więc ma w tych punktach ekstrema. Wyznaczamy równania stycznych w punktach o odciętych $-2, -1, 1, 2$.

- $f'(-2) = 9$, $f(-2) = 0 \Rightarrow y = 9x + b$ – równanie stycznej, $0 = 9 \cdot (-2) + b$, $b = 18$, stąd $y = 9x + 18$.
- $f'(-1) = 0$, $f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$, $y = 4$ – równanie stycznej
- $f'(2) = 9$, $f(2) = 4 \Rightarrow y = 9x + c$ – równanie stycznej, $4 = 9 \cdot 2 + c$, $c = -14$, stąd $y = 9x - 14$.
- $f'(1) = 0$, $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, $y = 0$ – równanie stycznej

Proste $y = 0$ i $y = 4$ oraz $y = 9x + 18$ i $y = 9x - 14$ to pary prostych równoległych, więc wyznaczają one równoległobok, czyli czworokąt mający środek symetrii. Wyznaczamy parę przeciwległych wierzchołków (oznaczamy je literami A i C):

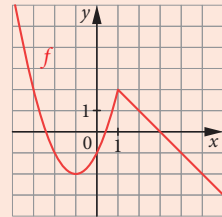
$$\begin{cases} y = 4 \\ y = 9x + 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{14}{9} \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A = \left(-\frac{14}{9}, 4\right), \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = 9x - 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{9} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{14}{9}, 0\right)$$

S – środek przekątnej AC, czyli $S = (0, 2)$.

Odp.: $(0, 2)$

9.14. $m \in \langle 3; \infty \rangle$

9.15. ciągła w $\mathbb{R}$, różniczkowalna w $\mathbb{R} - \{1\}$; malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$ i $\langle 1; \infty \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$; minimum: -2 dla $x = -1$, maksimum: 2 dla $x = 1$



9.16. Patrz s. 351.

Prosto do matury

1. P, P, F

2. malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $\langle 2; \infty \rangle$, rosnąca w przedziale $(0; 2)$

3. maksimum: 0 dla $x = -3$, minimum: 12 dla $x = 3$

4. Dla $m = 2$ funkcja ma w $x = 1$ maksimum równe -4 .

Uwagi metodyczne

Ostatni temat w dziale poświęcamy na zebranie poznanych pojęć dotyczących analizy matematycznej i własności funkcji różniczkowalnych – wykorzystujemy je do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych.

10. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji

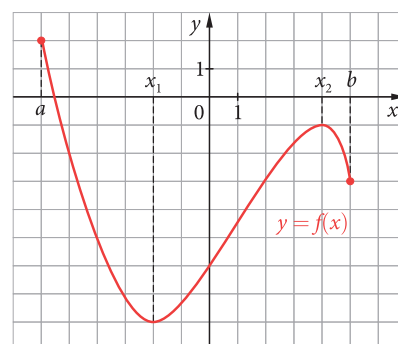
Umiejętności:

- wyznaczanie wartości największej i wartości najmniejszej funkcji w przedziale domkniętym
- stosowanie pochodnych do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych

W pierwszej klasie określaliśmy wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji na podstawie jej wykresu. Rozważaliśmy wtedy funkcję w całej dziedzinie albo w pewnym jej podzbiorze. W drugiej klasie wyznaczaliśmy wartości największe (najmniejsze) funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym. To zadanie sprowadzało się do porównania wartości funkcji na końcach tego przedziału oraz w wierzchołku paraboli. Teraz będziemy szukać wartości największej i wartości najmniejszej funkcji wymiernej. Wykorzystamy do tego pochodną.

Zwróćmy uwagę, że maksimum lokalne nie musi być wartością największą funkcji w całej jej dziedzinie. Podobnie minimum lokalne nie musi być wartością najmniejszą.

Przyjrzyjmy się funkcji f , której wykres przedstawiono obok. Jej dziedziną jest przedział $\langle a; b \rangle$. W punkcie x_1 funkcja f ma minimum. Jest ono jednocześnie wartością najmniejszą tej funkcji. W punkcie x_2 funkcja f ma maksimum. Nie jest ono jednak wartością największą tej funkcji. Wartość największą funkcja f przyjmuje w punkcie a .

**Wniosek**

Dana jest funkcja f ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$ i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$. Aby wyznaczyć wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji w przedziale $\langle a; b \rangle$, musimy porównać wartości funkcji w punktach, w których ma ona ekstrema, oraz jej wartości na końcach przedziału $\langle a; b \rangle$.

ZZ i MKP

tematy 4.15, 4.16

Multiteka

- Zastosowanie rachunku różniczkowego – problem optymalizacyjny

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.10

Generator
 testów i sprawdzianów

Przykład 1 zad. 10.1

Wyznaczymy wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji

$$f(x) = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 3$$

w przedziale $\left\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\rangle$.**Rozwiązanie**

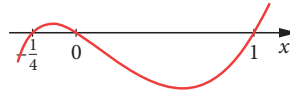
$$f'(x) = 8x^3 - 6x^2 - 2x$$

$$f'(x) = 2x(4x^2 - 3x - 1) = 8x\left(x + \frac{1}{4}\right)(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{4}, 0, 1\right\}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (1; \infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup (0; 1)$$

W tabeli uwzględniamy tylko przedział $\left\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\rangle$, więc obliczamy wartości funkcji tylko dla argumentów z tego przedziału.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{81} + 2 \cdot \frac{1}{27} - \frac{1}{9} + 3 = 2\frac{80}{81}$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{256} + 2 \cdot \frac{1}{64} - \frac{1}{16} + 3 = 2\frac{125}{128}$$

$$f(0) = 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 3 = 2\frac{5}{8}$$

x	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right)$	$-\frac{1}{4}$	$\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$	0	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	-	-	0	+	0	-	-
$f(x)$	$2\frac{80}{81}$	$\searrow$	$2\frac{125}{128}$ min	$\nearrow$	3 maks	$\searrow$	$2\frac{5}{8}$

Wartość największą równą 3 funkcja przyjmuje w $x = 0$. Jest to punkt, w którym funkcja ma maksimum.Wartość najmniejszą równą $2\frac{5}{8}$ funkcja przyjmuje w $x = \frac{1}{2}$. Jest to jeden z końców przedziału $\left\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\rangle$.**Odp.:** W przedziale $\left\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\rangle$ funkcja f przyjmuje wartość największą równą 3 dla $x = 0$ oraz wartość najmniejszą równą $2\frac{5}{8}$ dla $x = \frac{1}{2}$.**◀10.1.** Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ w przedziale $\langle -2; 4 \rangle$ oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.**Odp.:** wartość największa: $-\frac{14}{27}$ dla $x = \frac{1}{3}$,wartość najmniejsza: -35 dla $x = -2$

◀10.3. Liczbę 8 przedstaw w postaci sumy dwóch nieujemnych składników tak, aby suma sześcianu jednego z nich i kwadratu drugiego z nich była najmniejsza.

Odp.: $8 = 2 + 6$

◀10.6. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (1, 4)$ i odcinającej na dodatnich półosiach układu współrzędnych odcinki o wspólnym końcu $(0, 0)$, których suma długości jest najmniejsza.

Odp.: $y = -2x + 6$

Przykład 2 ◀ zad. 10.3

Liczbę 10 przedstawimy w postaci sumy dwóch nieujemnych składników tak, aby suma sześcianu jednego z nich i kwadratu drugiego z nich była najmniejsza.

Rozwiązanie

Oznaczmy literą x jeden ze składników sumy. Wówczas:

$$10 = x + (10 - x)$$

Z warunków zadania wynika, że $x \in \langle 0; 10 \rangle$, bo oba składniki muszą być nieujemne.

Określamy funkcję zgodnie z założeniami zadania:

$$f(x) = x^3 + (10 - x)^2 = x^3 + x^2 - 20x + 100, \quad D = \langle 0; 10 \rangle$$

Szukamy argumentu, dla którego funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 20, \quad D' = (0; 10)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 20 = 0 \text{ i } x \in D' \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{61}}{3}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\sqrt{61} - 1}{3}; 10 \right)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{\sqrt{61} - 1}{3} \right)$$

x	$\left(0; \frac{\sqrt{61} - 1}{3} \right)$	$\frac{\sqrt{61} - 1}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{61} - 1}{3}; 10 \right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Dla $x = \frac{\sqrt{61} - 1}{3}$ funkcja osiąga minimum. W przedziale $\left(0; \frac{\sqrt{61} - 1}{3} \right)$ funkcja maleje, a w przedziale $\left(\frac{\sqrt{61} - 1}{3}; 10 \right)$ rośnie, więc w punkcie $x = \frac{\sqrt{61} - 1}{3}$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą. Zatem składniki, na jakie należy rozłożyć liczbę 10, są równe $\frac{\sqrt{61} - 1}{3}$ i $10 - \frac{\sqrt{61} - 1}{3} = \frac{31 - \sqrt{61}}{3}$.

Odp.: Liczbę 10 należy zapisać w postaci sumy składników równych

$$\frac{\sqrt{61} - 1}{3} \text{ i } \frac{31 - \sqrt{61}}{3}.$$

Przykład 3 ◀ zad. 10.6

Przez punkt $P = (2, 3)$ przechodzą proste, które wraz z dodatnimi półosią układu współrzędnych ograniczają trójkąty o kącie prostym przy wierzchołku $O = (0, 0)$. Wyznamy równanie tej prostej, dla której pole takiego trójkąta jest najmniejsze.

Rozwiązanie

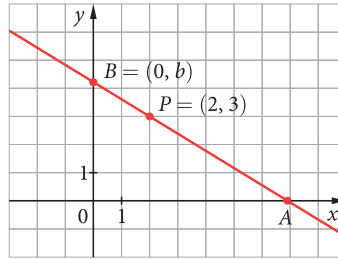
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wyznamy najpierw równanie prostej AB w zależności od parametru b .

$$y = ax + b$$

$$3 = 2a + b \quad \leftarrow P = (2, 3) \text{ należy do prostej } AB$$

$$a = \frac{3-b}{2}$$

$$y = \frac{3-b}{2}x + b$$



Do obliczenia pola trójkąta potrzebna jest pierwsza współrzędna punktu A .

$$\frac{3-b}{2}x + b = 0, \text{ więc } x = \frac{-2b}{3-b} = \frac{2b}{b-3}, \text{ czyli } A = \left(\frac{2b}{b-3}, 0 \right).$$

Z warunków zadania wynika, że $b > 3$, bo w przeciwnym razie prosta PB nie przecinałaby dodatniej półosi x układu współrzędnych.

Wyznaczamy długości odcinków OA i OB .

$$|OA| = \left| \frac{2b}{b-3} \right| = \frac{2b}{b-3} \quad \leftarrow b > 3$$

$$|OB| = |b| = b$$

Pole trójkąta OAB zapisujemy jako funkcję zmiennej b :

$$S(b) = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{b^2}{b-3}$$

Zatem interesuje nas najmniejsza wartość funkcji $S(b) = \frac{b^2}{b-3}$, $D = D' = (3; \infty)$.

$$S'(b) = \frac{2b(b-3) - b^2}{(b-3)^2} = \frac{b^2 - 6b}{(b-3)^2} = \frac{b(b-6)}{(b-3)^2}$$

$$S'(b) = 0 \Leftrightarrow \frac{b(b-6)}{(b-3)^2} = 0 \text{ i } b \in D' \Leftrightarrow b = 6$$

$$S'(b) < 0 \Leftrightarrow b \in (3; 6); \quad S'(b) > 0 \Leftrightarrow b \in (6; \infty)$$

b	$(3; 6)$	6	$(6; \infty)$
$S'(b)$	$-$	0	$+$
$S(b)$	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$

W $b = 6$ funkcja ma minimum. Jest ono najmniejszą wartością funkcji w dziedzinie.

Zatem $b = 6$, $a = \frac{3-6}{2} = -\frac{3}{2}$ i szukana prosta AB ma równanie $y = -\frac{3}{2}x + 6$.

Odp.: Prosta, która wyznacza trójkąt o najmniejszym polu, ma równanie $y = -\frac{3}{2}x + 6$.

◀10.8. W półkole o promieniu 1 wpisano prostokąt o największym możliwym polu. Wyznacz długości boków tego prostokąta.

Odp.: $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Przykład 4 ◀ zad. 10.8

W półkole o promieniu 1 wpisujemy trapezy, których dłuższa podstawa jest średnicą półkola. Znajdziemy największe możliwe pole takiego trapezu.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. S jest środkiem średnicy AB .

Niech $x = |KS| = \frac{1}{2}|CD|$. Z warunków zadania wynika, że $x \in (0; 1)$.

Z trójkąta prostokątnego KSD wyznaczamy wysokość trapezu $|KD| = \sqrt{1-x^2}$. Zatem pole dowolnego trapezu spełniającego warunki zadania możemy przedstawić jako funkcję zmiennej x :

$$P(x) = \frac{1}{2}(2 + 2x)\sqrt{1-x^2} = (1+x)\sqrt{1-x^2}, \quad D = (0; 1)$$

Szukamy największej wartości funkcji $P(x)$.

I sposób

Do obliczenia pochodnej funkcji $P(x)$ wykorzystamy wzory na pochodną iloczynu oraz pochodną funkcji złożonej.

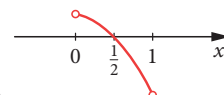
$$\begin{aligned} P'(x) &= \left[(1+x)\sqrt{1-x^2} \right]' = (1+x)' \cdot \sqrt{1-x^2} + (1+x) \cdot \left(\sqrt{1-x^2} \right)' = \\ &= \sqrt{1-x^2} + (1+x) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + \frac{-x-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D' = (0; 1) \end{aligned}$$

Mianownik jest dodatni w każdym punkcie dziedziny, zatem w dalszych rachunkach można go pominąć.

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 1 = 0 \text{ i } x \in (0; 1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$P'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 1 > 0 \text{ i } x \in (0; 1) \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$P'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 1 < 0 \text{ i } x \in (0; 1) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$$



x	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}; 1\right)$
$P'(x)$	+	0	-
$P(x)$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ maks	↘

W punkcie $x = \frac{1}{2}$ funkcja P ma maksimum. Jest ono jednocześnie największą wartością funkcji w przedziale $(0; 1)$.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

II sposób

Zapiszemy wzór funkcji w innej, równoważnej postaci. Dla $x \in (0; 1)$ wyrażenie $1 + x > 0$, zatem:

$$P(x) = \sqrt{(1+x)^2(1-x^2)} = \sqrt{(x^2+2x+1)(1-x^2)} = \sqrt{-x^4-2x^3+2x+1}$$

Funkcja $y = \sqrt{f}$ jest rosnąca, zatem funkcja $P(x) = \sqrt{g(x)}$ przyjmie wartość największą w punkcie, w którym wartość największą osiągnie funkcja $g(x)$.

Zbadamy monotoniczność funkcji $g(x) = -x^4 - 2x^3 + 2x + 1$ w przedziale $(0; 1)$.

$$g'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 2 = -2(x+1)(2x^2+x-1) = -4(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -4(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ i } x \in (0; 1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -4(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0 \text{ i } x \in (0; 1) \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow -4(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0 \text{ i } x \in (0; 1) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

x	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}; 1\right)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	maks	$\searrow$
$P(x) = \sqrt{g(x)}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ maks	$\searrow$

W punkcie $x = \frac{1}{2}$ funkcja g ma maksimum. Jest ono jednocześnie największą wartością funkcji g w przedziale $(0; 1)$. Taką samą własność ma funkcja $P(x) = \sqrt{g(x)}$.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Odp.: Największe pole trapezu spełniającego warunki zadania jest równe $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

◀10.9. Jaką największą objętość może mieć prostopadłościan o sumie długości wszystkich krawędzi równej 60, mający w podstawie prostokąt o stosunku długości boków 2 : 1?

Odp.: $\frac{1000}{9}$

Przykład 5 ◀ zad. 10.9

Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu o podstawie kwadratowej wynosi 84. Jaką wysokość ma prostopadłościan o podanych własnościach i największej możliwej objętości?

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku: a jest długością krawędzi podstawy, h – długością krawędzi bocznej, czyli wysokością prostopadłościanu.

$$V = a^2 \cdot h \quad (1) \quad \leftarrow \text{objętość prostopadłościanu}$$

Z warunków zadania mamy:

$$8a + 4h = 84$$

$$2a + h = 21$$

$$h = 21 - 2a \quad (2)$$

Zauważmy, że h i a , jako długości odcinków, przyjmują tylko wartości dodatnie.

Zatem w szczególności z warunku $h > 0$ wynika, że $a \in \left(0; \frac{21}{2}\right)$.

Wyrażoną zależność wysokości od wartości a podstawiamy do równości (1) i otrzymujemy objętość zależną już tylko od jednej zmiennej:

$$V(a) = a^2 \cdot (21 - 2a), \quad D = \left(0; \frac{21}{2}\right)$$

Zbadamy, dla jakich wartości a funkcja $V(a)$ przyjmuje wartość największą.

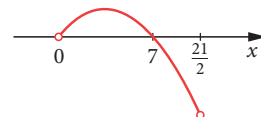
$$V(a) = a^2 \cdot (21 - 2a) = -2a^3 + 21a^2$$

$$V'(a) = -6a^2 + 42a = -6a(a - 7)$$

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 7 \quad \leftarrow a = 0 \text{ nie należy do dziedziny funkcji}$$

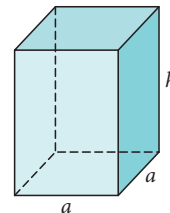
$$V'(a) > 0 \Leftrightarrow a \in (0; 7)$$

$$V'(a) < 0 \Leftrightarrow a \in \left(7; \frac{21}{2}\right)$$



a	$(0; 7)$	7	$\left(7; \frac{21}{2}\right)$
$V'(a)$	+	0	-
$V(a)$	↗	343 maks	↘

W punkcie $a = 7$ funkcja V ma maksimum. Jest ono jednocześnie największą wartością funkcji w przedziale $\left(0; \frac{21}{2}\right)$.



Pytanie w zadaniu dotyczyło wartości h , zatem $a = 7$ podstawiamy do zależności (2) i stąd:

$$h = 21 - 2 \cdot 7 = 7 \quad \leftarrow \text{prostokątnian jest wówczas sześciannem}$$

$$V(7) = 343$$

Odp.: Największą objętość ma prostokątnian o wysokości 7, czyli sześciann.

Zadania

10.1. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$$

w przedziale $\langle -2; 4 \rangle$ oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.

10.2. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 2}$ w przedziale $\langle -4; -1 \rangle$ oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.

10.3. Liczbę 8 przedstaw w postaci sumy dwóch nieujemnych składników tak, aby suma sześciannu jednego z nich i kwadratu drugiego z nich była najmniejsza.

10.4. Wyznacz współrzędne takiego punktu należącego do paraboli $y = x^2$, którego odległość od punktu $P = (-5, -1)$ jest najmniejsza.

10.5. Na hiperboli o równaniu $y = \frac{4}{x}$ wybrano punkty $A = (-1, -4)$ i $B = (-2, -2)$. Wyznacz współrzędne takiego punktu C o dodatniej odciętej należącego do tej hiperboli, aby pole trójkąta ABC było najmniejsze.

10.6. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (1, 4)$ i odcinającej na dodatnich półosiach układu współrzędnych odcinki o wspólnym końcu $(0, 0)$, których suma długości jest najmniejsza.

10.7. W figurę ograniczoną parabolą o równaniu $y = -x^2 - 6x + 27$ i osią odciętych wpisano prostokąt o największym możliwym polu. Oblicz to pole.

10.8. W półkole o promieniu 1 wpisano prostokąt o największym możliwym polu. Wyznacz długości boków tego prostokąta.

10.9. Jaką największą objętość może mieć prostokątnian o sumie długości wszystkich krawędzi równej 60, mający w podstawie prostokąt o stosunku długości boków $2 : 1$?

Odpowiedzi i rozwiązania

10.1. wartość największa: $-\frac{14}{27}$

dla $x = \frac{1}{3}$,

wartość najmniejsza: -35

dla $x = -2$

10.2. wartość najmniejsza: $\frac{5}{3}$

dla $x = -1$,

wartość największa: 2 dla $x = -2$

10.3. $8 = 2 + 6$

10.4. $(-1, 1)$

10.5. $C = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

10.6. $y = -2x + 6$

10.7. $P = 96\sqrt{3}$

10.8. $\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$

10.9. $\frac{1000}{9}$

10.10. $\frac{4}{3}$

10.11. a – długość krawędzi podstawy graniastopuła
 h – wysokość graniastopuła
 $8a + 4h = 12$, więc $2a + h = 3$,
 $h = 3 - 2a$
 $a > 0$ i $h > 0$, więc $a \in \left(0; 1\frac{1}{2}\right)$
 $V(a) = a^2 h = a^2(3 - 2a) = 3a^2 - 2a^3$
 – objętość graniastopuła
 $V'(a) = 6a - 6a^2 = 6a(1 - a)$
 $V'(a) > 0$ dla $a \in (0; 1)$
 $V'(a) < 0$ dla $a \in \left(1; 1\frac{1}{2}\right)$
 Zatem funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0; 1)$ i malejąca w przedziale $\left(1; 1\frac{1}{2}\right)$, więc największą wartość osiąga dla $a = 1$. Wtedy $h = 3 - 2 \cdot 1 = 1$. Zatem ten prostopadłościan jest sześcianem o krawędzi 1.

Prosto do matury

1. P, F, P

2. wartość najmniejsza: $-\frac{1}{18}$
 dla $x = -4$,
 wartość największa: 0 dla $x = 0$

3. -8

4. -1

5. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

10.10. Na podstawie ostrosłupa prawidłowego trójkątnego opisano okrąg. Suma wysokości ostrosłupa i promienia tego okręgu jest równa 2. Wyznacz promień okręgu, przy którym objętość ostrosłupa spełniającego podane warunki jest największa.

10.11. Wykaż, że ze wszystkich graniastopów prawidłowych czworokątnych o sumie długości krawędzi równej 12 największą objętość ma sześcian o krawędzi 1.

* 10.12. Wykaż, że ze wszystkich graniastopów prawidłowych trójkątnych o objętości V najmniejsze pole powierzchni całkowitej ma ten, którego krawędź podstawy jest równa $\sqrt[3]{4V}$.

Prosto do matury

1. Dana jest funkcja $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wartość największa funkcji f w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$ jest równa 7.

B. Wartość największa funkcji f w przedziale $\langle -1; 3 \rangle$ jest równa 7.

C. Wartość najmniejsza funkcji f w przedziale $\langle -3; 3 \rangle$ jest równa -9.

2. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 10x + 16}$$

w przedziale $\langle -6; 0 \rangle$. Podaj argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.

3. Różnica ciągu arytmetycznego (a_n) jest mniejsza od 1 i $a_{51} = 1$. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $\frac{a_1 \cdot a_{49}}{a_{50}}$.

4. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (2, 2)$, $B = (-2, 0)$, $C = (0, -2)$. Przez punkt $P = (1, 1)$ poprowadzono prostą k o ujemnym współczynniku kierunkowym. Prosta k przecina bok AB w punkcie M i bok AC w punkcie N . Wyznacz taką wartość współczynnika kierunkowego prostej k , dla której pole trójkąta AMN jest najmniejsze.

5. Suma długości wszystkich krawędzi graniastopuła prawidłowego trójkątnego jest równa 9. Jaką największą objętość może mieć taki graniastop?

10.12. a – długość krawędzi podstawy graniastopuła, h – wysokość graniastopuła

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} h, \text{ więc } h = \frac{4V}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}V}{3} \cdot \frac{1}{a^2}$$

$P(a)$ – pole powierzchni całkowitej

$$P(a) = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 3ah = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + 3a \cdot \frac{4\sqrt{3}V}{3} \cdot \frac{1}{a^2} = \sqrt{3} \left(\frac{a^2}{2} + \frac{4V}{a} \right), \quad a > 0$$

$$P'(a) = \sqrt{3} \left(a - \frac{4V}{a^2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{a^2} (a^3 - 4V)$$

$$P'(a) < 0 \text{ dla } a \in \left(0; \sqrt[3]{4V}\right)$$

$$P'(a) > 0 \text{ dla } a \in \left(\sqrt[3]{4V}; \infty\right)$$

Zatem funkcja P jest malejąca w przedziale $\left(0; \sqrt[3]{4V}\right)$ i rosnąca w przedziale $\left(\sqrt[3]{4V}; \infty\right)$, więc najmniejszą wartość osiąga dla $a = \sqrt[3]{4V}$.

11. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–15 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż ciąg zbieżny do liczby 3.

A. $a_n = \frac{3n-n}{n^2+1}$ B. $a_n = \frac{3n^3-n}{n^2+1}$ C. $a_n = \frac{n-3n^2}{n^2+1}$ D. $a_n = \frac{n-3n^3}{n^2-n^3}$

1. D

2. Wskaż wartość sumy szeregu geometrycznego $12 - 8 + \frac{16}{3} - \frac{32}{9} + \dots$

A. 4 B. $\frac{36}{5}$ C. 20 D. 36

2. B

3. Wskaż granicę ciągu $a_n = \frac{5^{n-1}}{6^n}$.

A. 0 B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{5}{36}$ D. ∞

3. A

4. Wskaż funkcję, dla której spełniony jest warunek $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$.

A. $f(x) = \frac{x^2-2}{x-2}$ B. $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-2}$ C. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ D. $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-2}$

4. B

5. Wskaż wartość $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$.

A. -2 B. 0 C. 2 D. π

5. A

6. Wskaż $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x-1}$.

A. $-\infty$ B. -1 C. 1 D. 0

6. C

7. Wskaż funkcję, dla której spełniony jest warunek $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$.

A. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ B. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ C. $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$ D. $f(x) = \frac{x^3}{|x+1|}$

7. C

8. Wskaż wartość m , dla której funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x-2} & \text{dla } x \neq 2 \\ m & \text{dla } x = 2 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.

A. -2 B. 2 C. 3 D. 5

8. D

- 9. C**
- 9.** Wskaż wzór funkcji różniczkowalnej w punkcie $x_0 = 0$.
 A. $f(x) = \frac{x^2}{x}$ B. $f(x) = \frac{|x|}{2}$ C. $f(x) = x|x|$ D. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
- 10. B**
- 10.** Wskaż pochodną funkcji $f(x) = x\sqrt{x}$.
 A. $f'(x) = \sqrt{x}$ B. $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$ C. $f'(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x}$ D. $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{x}$
- 11. D**
- 11.** Wskaż wartość pochodnej funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ w punkcie $x_0 = 2$.
 A. 2 B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{8}{9}$
- 12. D**
- 12.** Wskaż pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$.
 A. $f'(x) = \sqrt{2x - 3}$ C. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3x}}$
 B. $f'(x) = \frac{1}{4x - 6}$ D. $f'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}}$
- 13. A**
- 13.** Wskaż współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = (x^2 - x - 1)^3$ w punkcie o odciętej $x_0 = -1$.
 A. -9 B. -1 C. 1 D. 9
- 14. C**
- 14.** Wskaż wzór funkcji monotonicznej.
 A. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$ C. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$
 B. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$ D. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$
- 15. B**
- 15.** Wskaż liczbę ekstremów lokalnych funkcji $f(x) = x^4 + 2x^2$.
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- W zadaniach 16–26 oceń prawdziwość podanych zdań.**
- 16. F, P, P**
- 16.** Ciąg określony wzorem $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ jest
 A. rosnący. B. zbieżny. C. zbieżny do 0.
- 17. P, P, P**
- 17.** Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera jest zbieżny. Zatem ciąg $b_n = \frac{1}{a_n}$
 A. może być zbieżny.
 B. może być rozbieżny do nieskończoności.
 C. może być rozbieżny.

18. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q . Szereg geometryczny $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ jest zbieżny. Zatem ciąg (a_n)

- A. może być zbieżny do 1.
- B. może nie być monotoniczny.
- C. może być rozbieżny.

19. Funkcja określona wzorem $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

- A. jest ciągła w punkcie 0.
- B. jest różniczkowalna w punkcie 0.
- C. ma minimum lokalne w punkcie 0.

20. Pochodna funkcji $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 7$ może przyjąć wartość

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.

21. Prosta k o podanym wzorze jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = 1 - x^2$.

- A. $k: y = 2x + 2$
- B. $k: y = 1$
- C. $k: y = -4x + 4$

22. Prosta $y = ax + b$ jest styczna do wykresu funkcji różniczkowalnej $y = f(x)$.

Liczba rozwiązań układu równań $\begin{cases} y = ax + b \\ y = f(x) \end{cases}$ może być równa

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.

23. Istnieją takie funkcje $f(x)$ i $g(x)$, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$ oraz

- A. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = 1$.
- B. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.
- C. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$.

24. Funkcja $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4$

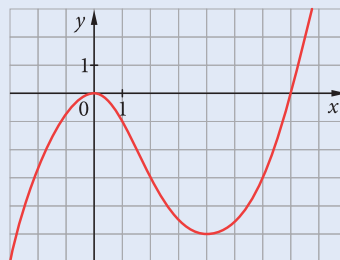
- A. ma ekstremum w punkcie 0.
- B. ma ekstremum w punkcie 1.
- C. jest rosnąca w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$.

25. Na rysunku obok przedstawiono wykres pochodnej f' funkcji f . Funkcja f ma ekstremum w punkcie

- A. 0.
- B. 4.
- C. 7.

26. Dla pewnej liczby m funkcja $f(x) = x^3 + mx$ ma maksimum w punkcie

- A. -1.
- B. 0.
- C. 1.



18. F, P, F

19. P, F, P

20. F, F, P

21. P, P, F

22. F, P, P

23. P, P, P

24. P, F, P

25. F, F, P

26. P, F, F

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

27. a) 10 b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) 128. a) 9 b) $8(2 - \sqrt{2})$
c) szereg rozbieżny d) $1 - \sqrt{3}$ 29. a) $\frac{20}{3}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $-\frac{1}{2}$ 30. a) ∞ b) $-\infty$ c) ∞ d) $-\infty$

31. tak

32. a) 39 b) -127
c) -19 d) $\frac{3}{4}$ 33. $y = 3x - 2$ 34. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ 27. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a_n = \frac{(n-3)(2n+5)(5n-1)}{n^3+1} & \text{c) } a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{5}{4}\right)^n \\ \text{b) } a_n = 10n^3 - \frac{n^4}{10} & \text{d) } a_n = \sqrt{n^2+2n+3} - n \end{array}$$

28. Oblicz sumę podanego szeregu geometrycznego, jeżeli ta suma istnieje.

$$\begin{array}{l} \text{a) } 3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \dots \\ \text{b) } 8 - 4\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} + \dots \\ \text{c) } -\frac{8}{21} - \frac{4}{7} - \frac{6}{7} - \frac{9}{7} - \dots \\ \text{d) } -1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3 - \dots \end{array}$$

29. Oblicz granicę.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 50}{3x - 15} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 2} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^4 - x^2 - 6}{x^4 - 2x^2 - 3} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1} \end{array}$$

30. Oblicz granicę niewłaściwą.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3}{|x - 2|} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3}{2x - 2} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 4x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - x}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}} \end{array}$$

31. Sprawdź, czy funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{dla } x \neq 1 \\ 3 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie 1.32. Oblicz pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = 2x^3 - 15x + \sqrt{2}, x_0 = -3 & \text{c) } f(x) = \frac{2x^2 - x}{x + 3}, x_0 = -2 \\ \text{b) } f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}, x_0 = \frac{1}{4} & \text{d) } f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 4}, x_0 = 0 \end{array}$$

33. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ w punkcie o odciętej 1.34. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ w punkcie o ujemnej odciętej i rzędnej 2.40. Niech $f(x) = 16x^5 - 5x + 5$.

$$f'(x) = 80x^4 - 5 = 5(16x^4 - 1) = 5(4x^2 - 1)(4x^2 + 1) = 5(4x^2 + 1)(2x + 1)(2x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ dla } x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \quad f'(x) > 0 \text{ dla } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right), \quad f'(x) < 0 \text{ dla } x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Zatem funkcja f rośnie w przedziałach $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ i $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$, a maleje w przedziale $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 5 = 7 > 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} + 5 = 3 > 0, \quad f(-1) = -16 + 5 + 5 = -6 < 0$$

Z powyższych równań wynika, że funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe (w przedziale $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$).Zatem równanie $16x^5 - 5x + 5 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.41. $f(x) = x^3 - x + 2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - (x+h) + 2 - (x^3 - x + 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h + 2 - x^3 + x - 2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 - 1 + 3xh + h^2) = 3x^2 - 1 + 3x \cdot 0 + 0^2 = 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

35. Rozwiąż równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots = \frac{x}{3} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{12} + \dots$, w którym obie strony są sumami zbieżnych szeregów geometrycznych.

36. W nieskończonym ciągu geometrycznym zbieżnym suma pierwszego i trzeciego wyrazu jest równa 15, a suma kwadratów tych wyrazów jest równa 153. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu.

37. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$. Podaj granice funkcji na końcach przedziałów, w których jest określona.

38. Sprawdź, czy istnieje taka wartość parametru m , dla której funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} & \text{dla } x \neq -1 \text{ i } x \neq 1 \\ -m & \text{dla } x = -1 \\ m & \text{dla } x = 1 \end{cases} \quad \text{jest ciągła w punktach } 1 \text{ i } -1.$$

D 39. Wykaż, że równanie $x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 = 0$ ma co najmniej dwa rozwiązania.

D 40. Wykaż, że równanie $16x^5 - 5x + 5 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

D 41. Wykaż na podstawie definicji, że pochodna funkcji $f(x) = x^3 - x + 2$ jest równa $f'(x) = 3x^2 - 1$.

42. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{(x - 5)^2}$. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie, w którym wykres przecina dodatnią półoś osi x .

43. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ równoległych do prostej o równaniu $3x - 4y = 0$.

44. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2 + 1}$.

45. Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} + \frac{8}{x^2 - 4}$ oraz argumenty, dla których są przyjmowane.

46. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + 1$.

52. $a + 2b = p$ – obwód trójkąta

$$b = \frac{p-a}{2} > \frac{a}{2}, \text{ więc } a < \frac{p}{2}. \quad h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{p-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 2ap}$$

$$P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 2ap} = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 p^2 - 2a^3 p}, \quad a \in \left(0; \frac{p}{2}\right)$$

Pole P jest największe, gdy największa jest wartość funkcji $f(a) = p^2 a^2 - 2pa^3$, $a \in \left(0; \frac{p}{2}\right)$.

$$f'(a) = 2p^2 a - 6pa^2 = 2pa(p - 3a) = 6pa\left(\frac{p}{3} - a\right), \quad f'(a) > 0 \text{ dla } a \in \left(0; \frac{p}{3}\right), \quad f'(a) < 0 \text{ dla } a \in \left(\frac{p}{3}; \frac{p}{2}\right)$$

Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $\left(0; \frac{p}{3}\right)$ i malejąca w przedziale $\left(\frac{p}{3}; \frac{p}{2}\right)$, więc osiąga ona największą wartość dla $a = \frac{p}{3}$.

Wtedy $b = \frac{p}{3}$. Zatem największe pole ma trójkąt równoboczny o boku $\frac{p}{3}$.

$$\mathbf{35.} \quad x = \frac{3}{2}$$

36. 8 lub 24

$$\mathbf{37.} \quad D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

38. nie

39. Niech $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$.

Funkcja f jest ciągła.

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = 1 - 2 - 1 + 1 = -1 < 0$$

$$f(3) = 81 - 54 - 9 + 1 = 19 > 0$$

Zatem funkcja f ma miejsca zerowe w przedziałach $(0; 1)$ i $(1; 3)$, czyli ma co najmniej dwa miejsca zerowe. Oznacza to, że równanie $x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 = 0$ ma co najmniej dwa rozwiązania.

40. Patrz s. 368.

41. Patrz s. 368.

$$\mathbf{42.} \quad y = \frac{5}{9}x - \frac{10}{9}$$

$$\mathbf{43.} \quad 3x - 4y + 9 = 0, \quad 3x - 4y + 1 = 0$$

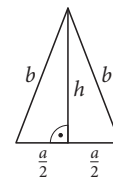
44. malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, rosnąca w przedziale $(0; \infty)$

45.

maksimum: $-3\sqrt{3}$ dla $x = -2\sqrt{3}$,

minimum: $3\sqrt{3}$ dla $x = 2\sqrt{3}$

$$\mathbf{46.} \quad ZW = \langle -11; \infty \rangle$$



47. wartość najmniejsza: $\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}$

dla $x = 1 - \sqrt{3}$, wartość
największa: $\frac{1}{7}$ dla $x = 2$

48. $a = 0$, $b = 1$; malejąca
w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$
i $(-1; 0)$, rosnąca w każdym
z przedziałów $(0; 1)$ i $(1; \infty)$

49. $a = 1$, $b = -3$, $c = -2$

50. wartość najmniejsza: $2\sqrt{2} - 2$
dla $x = 1 - \sqrt{2}$,
wartość największa: 3,4 dla $x = -4$

51. (1, 3)

52. Patrz s. 369.

53. $f(m) = \frac{m^2}{(m+2)^2}$,

$D = D' = (-3; -2) \cup (-2; 3)$;
malejąca w przedziale $(-2; 0)$,
rosnąca w każdym z przedziałów
 $(-3; -2)$ i $(0; 3)$; wartość
najmniejsza: 0 dla $m = 0$

54. $D = \left(-\infty; \frac{8}{3}\right)$, wartość
największa: 20

55. $\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

47. Wyznacz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji

$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}$ w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$ oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.

48. Funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{1-x^2}$ ma w punkcie $x = 0$ ekstremum równe 1. Oblicz współczynniki a i b , a następnie wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

49. Wykres funkcji $f(x) = ax^3 + bx + c$ przecina oś y w punkcie $P = (0, -2)$. Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji w punkcie P jest równy -3 . Dla $x = -1$ funkcja przyjmuje ekstremum. Oblicz a , b , c .

50. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji $f(x) = \frac{2}{1-x} - x - 1$ w przedziale $\langle -4; 0 \rangle$. Podaj argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.

51. Na paraboli o równaniu $y = 4 - x^2$ wyznacz punkt leżący najbliżej punktu $P = (3, 4)$.

D 52. Wykaż, że wśród wszystkich trójkątów równoramiennych o obwodzie p większe pole ma trójkąt równoboczny o boku $\frac{p}{3}$.

53. Dane jest równanie $(m+2)^2x^2 + 6(m+2)x + m^2 = 0$ zmiennej x z parametrem m . Funkcja $f(m)$ przyporządkowuje każdej wartości m , dla której istnieją dwa pierwiastki tego równania, iloczyn tych pierwiastków. Podaj wzór funkcji f , wyznacz jej przedziały monotoniczności oraz wartość najmniejszą.

54. Dane jest równanie $x^2 - mx + 3m - 8 = 0$ zmiennej x z parametrem m . Funkcja $f(m)$ przyporządkowuje każdej wartości m , dla której istnieją dwa pierwiastki tego równania o różnych znakach, sumę sześciątów tych pierwiastków. Wyznacz dziedzinę oraz wartość największą funkcji f .

55. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu wynosi 6, a stosunek długości krawędzi podstawy jest równy $2:3$. Jakie wymiary powinien mieć taki prostopadłościan, aby jego objętość była możliwie największa?

D 56. Wykaż, że wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych czworokątnych o objętości V najmniejsze pole powierzchni całkowitej ma sześcian o krawędzi $\sqrt[3]{V}$.

56. a – długość krawędzi podstawy graniastosłupa, h – wysokość graniastosłupa

$V = a^2h$, więc $h = \frac{V}{a^2}$, $a > 0$.

$P(a)$ – pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$P(a) = 2a^2 + 4ah = 2a^2 + 4a \cdot \frac{V}{a^2} = 2a^2 + \frac{4V}{a}$, $a \in (0; \infty)$, $P'(a) = 4a - \frac{4V}{a^2} = \frac{4a^3 - 4V}{a^2} = \frac{4(a^3 - V)}{a^2}$

$P'(a) < 0$ dla $a \in (0; \sqrt[3]{V})$, $P'(a) > 0$ dla $a \in (\sqrt[3]{V}; \infty)$

Zatem funkcja P jest malejąca w przedziale $(0; \sqrt[3]{V})$ i rosnąca w przedziale $(\sqrt[3]{V}; \infty)$, więc najmniejszą wartość osiąga dla $a = \sqrt[3]{V}$.

Wtedy $h = \frac{V}{(\sqrt[3]{V})^2} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{V^2}} = \sqrt[3]{V}$, czyli graniastosłupem o najmniejszym polu powierzchni całkowitej jest sześcian o krawędzi $\sqrt[3]{V}$.