Maciej Antek
Krzysztof Belka
Piotr Grabowski

Prosto do matury

1

Podręcznik do matematyki
dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy i rozszerzony

nowa era
Twoje mocne strony

Prosto do matury

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:
dr Moniki Fabijańczyk, dr. Zenona Krzemianowskiego i dr hab. Anny Cegieły.

Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony
Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: ponadpodstawowa (liceum ogólnokształcące i technikum)
Rok dopuszczenia: 2019

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 1013/1/2019

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Piotra Grabowskiego.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na **www.legalnakultura.pl**

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiejkolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024
ISBN 978-83-267-5118-9

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Magdalena Spalińska
Współpraca redakcyjna: Jan Baranowski, Urszula Cielniak, Anna Dubiel, Marcin Minda, Elżbieta Zięcina
Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak
Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Robert Pysiak
Redakcja językowa: Marta Zuchowicz
Korekta językowa: Anna Wesołowska
Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak
Projekt graficzny: Sławomir Włodarczyk, Ewa Kaletyn, Diana Gawronkiewicz/Podpunkt
Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn
Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska
Rysunki merytoryczne: Andrzej Oziębło
Ilustracje: Krzysztof Mrawiński
Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Enzo Di Giacomo, Ewa Pawińska
Realizacja projektu graficznego: BOP s.c.

Fotografia na okładce: Getty Images/Moment/Marco Bottigelli.
Fotografie: Archiwum NE s. 85 (Kochański); BE&W: Alamy Stock Photo - AF Fotografie s. 8 (Euklides), Getty Images/Icon Sportswire s. 292-293 (deskorolkarze); Panther Media GmbH s. 199 (działowa 3), Mary Evans Picture Library s. 87 (John Neper); Shutterstock: Alexandre Rotenberg s. 183, cozyta s. 333 (działowa 4), Franck Boston s. 84-85 (kwadratowe pomarańcze), Jiri Pavlik s. 403 (latarka), Joe Ferrer s. 401 (działowa 5), Josef Mohyla s. 447 (trzykrotka), Khram s. 7 (działowa 1), LianeM s. 446 (ziemniaki), LilKar s. 447 (plaster miodu), Leszek Glasner s. 266 (armatka śnieżna), Mr Brown s. 259 (żniwa), Netfalls Remy Musser s. 446 (jacht), Norman Chan s. 101 (działowa 2), Orhan Cam s. 433 (działowa 6) pixelman s. 447 (rozgwiazda), Shutterstock s. 447 (płatek śniegu); Siemens s. 293 (litotryptor); Thinkstock/Getty Images: iStockphoto s. 426-427, iStockphoto - erlucho s. 259 (ratrak), Sharon Meredith s. 403 (antena).

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl, Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Drukarnia Orthdruk

Spis treści

Wstęp 5
Wykaz używanych oznaczeń matematycznych 6

Dział 1. Liczby

1. Język matematyki 8
2. Warto powtórzyć – wyrażenia algebraiczne 16
3. Wzory skróconego mnożenia 21
4. Liczby pierwsze i złożone 31
5. Liczby wymierne. Liczby niewymierne 40
6. Warto powtórzyć – działania w zbiorze liczb rzeczywistych 52
7. Potęga o wykładniku całkowitym 59
8. Warto powtórzyć – pierwiastki kwadratowe i sześcienne 65
9. Pierwiastki wyższych stopni 69
10. Potęga o wykładniku wymiernym 76
11. Pojęcie logarytmu 86
12. Powtórzenie 93

Dział 2. Równania i nierówności

1. Warto powtórzyć – rozwiązywanie równań liniowych z jedną niewiadomą 102
2. Nierówności pierwszego stopnia 106
3. Przedziały liczbowe 114
4. Działania na zbiorach 121
5. Wartość bezwzględna liczby 128
6. Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej 134
7. Równania i nierówności z wartością bezwzględną 143
8. Równanie liniowe i nierówność liniowa z parametrami 154
9. Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi – wprowadzenie 165
10. Rozwiązywanie układu równań liniowych 173
11. Powtórzenie 191

Dział 3. Funkcje

1. Pojęcie funkcji 200
2. Wyznaczanie dziedziny funkcji 207
3. Zbiór wartości funkcji 213
4. Warto powtórzyć – układ współrzędnych 218
5. Wykres funkcji 221
6. Odczytywanie argumentów oraz wartości funkcji z wykresu 228

7. Miejsce zerowe funkcji 239
8. Znak i monotoniczność funkcji 246
9. Ważna funkcja – proporcjonalność odwrotna 258
10. Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu 268
11. Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż osi 277
12. Wykresy funkcji $y = -f(x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(-x)$ 283
13. Wektory 294
14. Wektory w układzie współrzędnych 303
15. Przekształcanie wykresów funkcji 315
16. Powtórzenie 322

Dział 4. Funkcja liniowa

1. Od proporcjonalności prostej do funkcji $y = ax$ 334
2. Funkcja liniowa i jej wykres 344
3. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty 355
4. Rysowanie wykresów funkcji przedziałami liniowych 363
5. Równanie prostej w postaci ogólnej 371
6. Położenie dwóch prostych na płaszczyźnie 380
7. Geometryczna interpretacja układów równań 386
8. Powtórzenie 393

Dział 5. Funkcja kwadratowa

1. Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2$ 402
2. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej 410
3. Postać ogólna funkcji kwadratowej 418
4. Powtórzenie 428

Dział 6. Figury na płaszczyźnie

1. Warto powtórzyć – kąty i ich własności 434
2. Wielokąty i ich własności 437
3. Figury przystające 448
4. Powtórzenie 456

Odpowiedzi 461
Skorowidz 496

Wstęp

Napisany przez nas podręcznik jest dostosowany do podstawy programowej obowiązującej w liceum od września 2019 r. i obejmuje treści z zakresu podstawowego oraz rozszerzonego.

Książka zawiera prawie dwa tysiące zadań do samodzielnego rozwiązania. To wystarczy do gruntownego przećwiczenia umiejętności nabytych podczas lekcji. Zadania trudniejsze oznaczone są * lub **, zadania typu „Udowodnij, że…" poprzedzone zostały znakiem D, natomiast zadania, do których rozwiązania przydatny jest kalkulator – znakiem .

Podręcznik dostosowany jest do samodzielnej nauki, co może być cenne na przykład w razie nieobecności w szkole. Wprowadzane pojęcia ilustrujemy przykładami rozwiązanych zadań. W zrozumieniu materiału bardzo pomogą kolorowe rysunki merytoryczne. Wybrane rozwiązane zadania typu maturalnego zostały oznaczone znakiem . Podręcznik zawiera również krótkie powtórzenie najważniejszych pojęć oraz dodatkowe zadania utrwalające materiał ze szkoły podstawowej.

Różowym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

Po każdym rozdziale proponujemy zestaw pięciu zadań zatytułowanych *Prosto do matury*. Warto, by po omówieniu każdego rozdziału uczniowie próbowali rozwiązywać je samodzielnie. Będzie to sprawdzianem umiejętności potrzebnych na maturze.

Odpowiedzi do pytań, poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Mamy nadzieję, że nowa seria naszych podręczników nie tylko rzetelnie przygotuje Was do matury, lecz także umożliwi rozwinięcie zdolności matematycznych i zachęci do dalszego studiowania matematyki.

Autorzy

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

$x \in A;\ x \notin A$	x należy do zbioru A; x nie należy do zbioru A
$\{a, b, c\}$	zbiór, którego elementami są a, b, c
N, **Z**, **Q**, **R**	zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych
$\emptyset$	zbiór pusty
$A \subset B$	zbiór A jest podzbiorem zbioru B
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek stopnia n z liczby a
$\log_a b$	logarytm przy podstawie a liczby b
$\log b$	logarytm przy podstawie 10 liczby b
$a < b\ \ (a > b)$	liczba a jest mniejsza (większa) od liczby b
$a \leqslant b$	liczba a jest nie większa, tzn. równa lub mniejsza od liczby b
$a \geqslant b$	liczba a jest nie mniejsza, tzn. równa lub większa od liczby b
$(a; b)$	przedział otwarty, zbiór liczb większych od a i mniejszych od b
$\langle a; b\rangle$	przedział domknięty (zamknięty)
$\langle a; b)$	przedział lewostronnie domknięty
$(a; b\rangle$	przedział prawostronnie domknięty
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A - B$	różnica zbiorów A i B
$\lvert a\rvert$	wartość bezwzględna liczby a
$f(x)$	wartość funkcji f dla argumentu x
D	dziedzina funkcji
ZW	zbiór wartości funkcji
$A = (a, b)$	punkt A o współrzędnych a (tzw. odcięta) i b (tzw. rzędna)
AB	odcinek o końcach A i B
$\lvert AB\rvert$	długość odcinka AB
$\overrightarrow{AB}$	wektor o początku A i końcu B
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	długość wektora $\overrightarrow{AB}$
$\vec{u} = [a, b]$	wektor $\vec{u}$ o współrzędnych a i b
$a \parallel b$	prosta a jest równoległa do prostej b
$a \perp b$	prosta a jest prostopadła do prostej b
$\sphericalangle ABC$	kąt o wierzchołku B i ramionach: półprostej BA i półprostej BC
$\triangle ABC$	trójkąt ABC
$F_1 \equiv F_2$	figura F_1 jest przystająca do figury F_2

Liczby

1

1. Język matematyki

Umiejętności:

- korzystanie z podstawowych pojęć i symboli matematycznych
- posługiwanie się pojęciem zbioru i jego oznaczeniami
- wyróżnianie w twierdzeniach założeń i tezy

Matematyka posługuje się precyzyjnym językiem. Podczas nauki w szkole średniej będziemy używać pewnych pojęć, które teraz krótko omówimy.

Definicja

Definicja to wyjaśnienie znaczenia wprowadzanego pojęcia za pomocą poznanych (zdefiniowanych) wcześniej obiektów.

Aby nie objaśniać w nieskończoność, przyjmuje się, że w każdej teorii istnieją **pojęcia pierwotne**, których się nie definiuje. W geometrii nazywanej od imienia jej twórcy euklidesową pojęciami pierwotnymi są np. punkt, prosta, płaszczyzna.

Przykłady definicji:

- Wyrażenie będące iloczynem liczb i zmiennych nazywamy jednomianem.
- Skończoną sumę jednomianów nazywamy sumą algebraiczną.
- Okrąg o środku w punkcie S i promieniu $r > 0$ to zbiór punktów płaszczyzny oddalonych od punktu S o odległość r.

Twierdzenie matematyczne

Twierdzenie matematyczne to zdanie orzekające prawdziwe, które można udowodnić na podstawie wcześniej udowodnionych twierdzeń i znanych definicji. Tu również teoria zaczyna się od stwierdzeń intuicyjnie oczywistych, przyjętych bez dowodu, tzw. **aksjomatów**. Przykładem aksjomatu w geometrii euklidesowej jest zdanie „Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi nieskończenie wiele prostych". Przyjrzyjmy się na przykładach budowie twierdzeń.



Euklides z Aleksandrii

(ok. 365 r. p.n.e. – ok. 270 r. p.n.e.) – matematyk grecki, jeden z pierwszych autorów teoretycznych prac matematycznych.
Najbardziej znane jego dzieło to *Elementy* (tytuł grecki *Stoicheía geōmetrías*). Usystematyzował w nim ówczesną wiedzę matematyczną w postaci aksjomatycznego wykładu.
Elementy były powszechnie używanym podręcznikiem geometrii jeszcze w początkach XX w. Pod względem liczby drukowanych wydań *Elementy* ustępują tylko Biblii.

- Suma miar kątów trójkąta jest równa 180°.

Aby udowodnić to twierdzenie, musimy wykazać, że **jeżeli** badany obiekt (figura geometryczna) jest trójkątem, **to** suma miar kątów tego obiektu wynosi 180°.

- Liczba podzielna przez 8 jest podzielna przez 4.

Jeżeli liczba jest podzielna przez 8, **to** jest podzielna przez 4.

- Dla dowolnych liczb a i b prawdziwy jest wzór $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Jeżeli a i b są liczbami, **to** prawdziwy jest wzór $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

- W trójkącie prostokątnym kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, **to** kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.

W podanych przykładach na pomarańczowo wyróżniono założenia, czyli warunki, w których twierdzenia mogą być stosowane. Kolorem zielonym oznaczono tezę, czyli prawdziwe (o ile zostaną udowodnione) wnioski wynikające z przyjętych założeń.

Zdanie zbudowane na wzór twierdzenia, ale nieudowodnione, nazywane jest **hipotezą**.

Większość twierdzeń rozpatrywanych w trakcie nauki w szkole średniej ma budowę:

Jeżeli założenie, **to** teza.

Inne będziemy omawiać w miarę potrzeby później.

Dowód twierdzenia to proces prowadzący do wykazania, że podane zdanie jest prawdziwe. Polega on na logicznym wnioskowaniu (dedukcji), wykorzystującym założenia oraz wcześniej udowodnione twierdzenia.

Dedukcja to rozumowanie, w którym z danych założeń wyprowadza się logicznie wniosek.

Przykłady twierdzeń wraz z ich dowodami omówimy w następnych rozdziałach.

Wniosek

Wniosek jest logiczną konsekwencją przeprowadzonego rozumowania, najczęściej wynika bezpośrednio z twierdzenia poprzedzającego dany wniosek.

Pojęcie zbioru

Zbiór to pojęcie używane w matematyce na określenie zestawu aktualnie interesujących nas liczb, figur, przedmiotów itd. Słowo „zbiór" można zastąpić wieloma innymi, np.: kolekcja, pakiet, zestaw, seria, zasób, wykaz.

Odpowiedzi na pytanie „co to jest zbiór?" nie ma. Pojęcie to przyjmujemy bez definiowania jako intuicyjnie oczywiste, czyli pojęcie pierwotne. Zawsze natomiast musimy znać odpowiedź na pytanie o to, **które elementy tworzą dany zbiór**.
Wyrażenie „zbiór dużych psów" użyte w języku potocznym nikogo nie razi. W matematyce budzi jednak sprzeciw, gdyż określenie „duży pies" jest bardzo nieprecyzyjne. Trudno może być stwierdzić, czy nasz ulubiony Ciapek należy do tego zbioru, czy nie. Przykładem dobrze określonego zbioru jest natomiast „zbiór psów".

Zbiory tradycyjnie oznaczamy dużymi literami, a ich elementy – małymi literami.

Zapis $a \in A$ czytamy „a należy do zbioru A" lub „a jest elementem zbioru A".

Zapis $a \notin A$ zastępuje zdanie „a nie należy do zbioru A".

Przykład 1 ◀ zad. 1.7

Przyjmijmy, że A jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 10. W takim razie zdanie: $5 \in A$ jest prawdziwe, ponieważ 5 jest liczbą naturalną mniejszą od 10. Prawdziwe są również zdania $12 \notin A$ oraz $3\frac{1}{2} \notin A$, gdyż 12 jest liczbą naturalną większą od 10, a $3\frac{1}{2}$ nie jest liczbą naturalną.

Jeżeli chcemy wypisać wszystkie elementy zbioru A, robimy to w następującej formie:

$$A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

czyli wypisujemy w nawiasach klamrowych wszystkie elementy, oddzielając je przecinkami.
Zbiór A ma dziesięć elementów, a więc skończoną ich liczbę. Dlatego jest **zbiorem skończonym**, dziesięcioelementowym.

Kolejność wypisywania elementów zbioru nie jest ważna. Nie powtarzamy tych samych elementów.

Przykład 2

Jeżeli B jest zbiorem liczb naturalnych dwucyfrowych, to $10 \in B$, $7 \notin B$, $98 \in B$, …
Zbiór B jest zbiorem skończonym, ale kłopotliwe (i niepotrzebne) byłoby wypisywanie wszystkich jego elementów. Można tu zastosować następujący sposób:

$$B = \{10,\ 11,\ 12,\ \ldots,\ 98,\ 99\}$$

Przykład 3 ◀ zad. 1.9

C jest zbiorem liczb naturalnych większych od 100. Zbiór C jest **nieskończony**, ma nieskończenie wiele elementów. Jedną z form zapisu tego zbioru jest:

$$C = \{101,\ 102,\ 103,\ \ldots\}$$

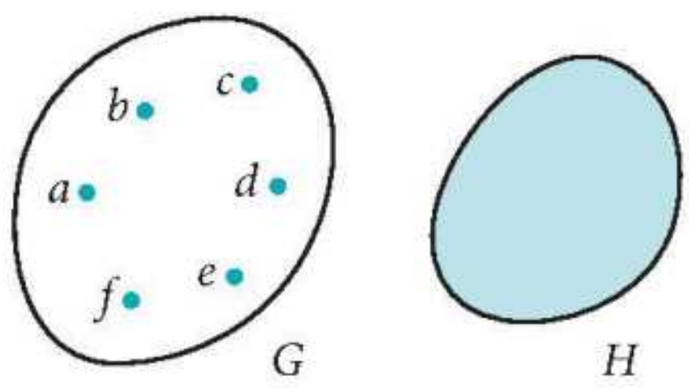
Przykład 4 ◀ zad. 1.10

Przyjmijmy, że D jest zbiorem rozwiązań równania $x^2 = -1$. Ponieważ równanie to nie ma rozwiązań, do zbioru D nie należy żaden element. W takiej sytuacji mówimy, że D jest **zbiorem pustym** i oznaczamy to symbolem $\emptyset$:

$$D = \emptyset$$

Przykład 5 ◀ zad. 1.18

Ilustracją zbioru może być rysunek. Wówczas $G = \{a, b, c, d, e, f\}$, a H jest pokolorowanym na niebiesko zbiorem punktów płaszczyzny.



Definicja

Zbiór B jest **podzbiorem** zbioru A, jeżeli każdy element zbioru B jest także elementem zbioru A. Sytuację taką zapisujemy symbolicznie:

$$B \subset A$$

i czytamy albo „B jest podzbiorem zbioru A", albo „B zawiera się w zbiorze A".

Uwaga:

- Przyjmujemy, że zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru: $\emptyset \subset A$.
- Każdy zbiór jest zawarty w sobie (każdy zbiór jest własnym podzbiorem): $A \subset A$.
- Dwa zbiory są równe wtedy, gdy mają te same elementy.

Przykład 6 ◀ zad. 1.20

Jeżeli oznaczymy zbiór kwadratów literą K, zbiór równoległoboków – literą R, a prostokątów – literą P, to prawdziwe są zdania:

- $K \subset P$, czyli K jest podzbiorem P ⟵ bo każdy kwadrat jest prostokątem
- $K \subset R$, czyli K jest podzbiorem R ⟵ bo każdy kwadrat jest równoległobokiem
- $P \subset R$, czyli P jest podzbiorem R ⟵ bo każdy prostokąt jest równoległobokiem

Przykład 7 ◀ zad. 1.21

Wypiszemy wszystkie podzbiory zbioru $A = \{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

Zbiór A ma osiem podzbiorów.

Zbiór liczb naturalnych

Za pomocą **liczb naturalnych**: 1, 2, 3, … od najdawniejszych czasów określano liczbę przedmiotów. W tym podręczniku przyjmujemy, że liczbą naturalną jest także 0. Tradycyjnie używanym przez matematyków symbolem określającym zbiór liczb naturalnych jest **N**.

$$\mathbf{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$$

Często liczbę naturalną oznaczamy literą n.
Za pomocą liczb naturalnych możemy definiować inne zbiory liczb.

Przykład 8

Zapis $F = \{x:\ x \in \mathbf{N}\ \text{i}\ x < 1000\}$ ⟵ znak : czytamy „takich, że”
czytamy: „F jest zbiorem elementów x takich, że x należy do zbioru liczb naturalnych i x jest mniejsze od 1000” lub „F jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 1000”.
Stosowane są też zapisy: $F = \{x \in \mathbf{N}:\ x < 1000\}$ oraz $F = \{x \in \mathbf{N}\ \text{i}\ x < 1000\}$.

Przykład 9

Zapis $X = \{x:\ x = 2n\ \text{i}\ n \in \mathbf{N}\}$ oznacza, że elementami zbioru X są liczby postaci $2n$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Podstawiamy na miejsce n kolejno liczby 0, 1, 2, 3 itd. i otrzymujemy wartości x. Zatem $X = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots\}$, czyli X jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych parzystych.
Podobnie $Y = \{y:\ y = 2n + 1\ \text{i}\ n \in \mathbf{N}\}$ jest zapisem zbioru liczb nieparzystych, bo $Y = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots\}$.

Przykład 10 ◀ zad. 1.22

Wypiszemy kilka elementów zbioru $A = \left\{x:\ x = \frac{1}{n}\ \text{i}\ n \in \mathbf{N}\ \text{i}\ n \neq 0\right\}$.

Rozwiązanie

Ponieważ **N** oznacza zbiór liczb naturalnych, do wyznaczenia elementów zbioru A będziemy podstawiać w miejsce litery n liczby 1, 2, 3, 4 itd.

jeżeli $n = 1$, to $x = \frac{1}{1} = 1$; jeżeli $n = 2$, to $x = \frac{1}{2}$;
jeżeli $n = 3$, to $x = \frac{1}{3}$; jeżeli $n = 4$, to $x = \frac{1}{4}$;
jeżeli $n = 5$, to $x = \frac{1}{5}$; jeżeli $n = 99$, to $x = \frac{1}{99}$.

Mamy więc $A = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{99},\ \ldots\right\}$. Na przykład liczba $\frac{1}{701}$ należy do zbioru A, a liczba $\frac{3}{5}$ do niego nie należy. Zbiór A jest zbiorem nieskończonym.

Zbiór liczb całkowitych

Zbiór liczb **całkowitych** powstaje przez dołączenie do zbioru liczb naturalnych wszystkich liczb do nich przeciwnych:

0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, 4, −4, …

Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą **Z** od niemieckiego słowa *Zahlen* (czyt. calen) – liczby.

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Już ok. V w. n.e. matematycy hinduscy używali liczb dodatnich i liczb ujemnych do określania stanu majątkowego oraz do rozliczeń handlowych.

Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Ile elementów ma zbiór $A = \{x:\ x = 2n \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } n < 5\}$?

A. 5 **B.** 6 **C.** 2 **D.** nieskończenie wiele

1.2. Wskaż zbiór $\left\{x:\ x = \frac{2}{n+1} \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } n < 3\right\}$.

A. $\left\{2,\ 1,\ \frac{2}{3}\right\}$

B. $\left\{2,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4}\right\}$

C. $\left\{0,\ 2,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4}\right\}$

D. $\left\{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3}\right\}$

1.3. Ile dwuelementowych podzbiorów ma zbiór $X = \{a,\ b,\ c,\ d\}$?

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 8

1.4. Liczby a, b i c są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $b - a < c - b$

B. $b - a > c - b$

C. $b - a = c - b$

D. Wielkości $b - a$ oraz $c - b$ nie da się porównać.

1.5. Odczytaj podany zapis.

a) $n \in B$

b) $x \notin F$

c) $x \in A$ i $x \notin B$

d) $y \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ 10\}$ i $y \notin \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

e) $5 \in \{1,\ 5,\ 10,\ 15\}$

f) $x \in \{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$ i $y \notin \{3,\ 9,\ 18\}$

1.6. Podaj pięć elementów zbioru wszystkich

a) planet Układu Słonecznego.

b) ułamków właściwych.

c) liczb całkowitych mniejszych od 10.

d) instrumentów muzycznych.

1.7. Wymień trzy liczby, które nie należą do zbioru

a) liczb dodatnich.

b) ułamków właściwych.

c) liczb całkowitych.

d) liczb mniejszych od trzech.

1.8. Ile elementów ma podany zbiór?

a) $T = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

b) $S = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$

c) zbiór rozwiązań równania $2x - 5 = 1$

d) zbiór dodatnich, nieskracalnych ułamków właściwych o mianowniku 8

e) $X = \{0, 1, 2, \ldots, 125\}$

f) $Y = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

g) zbiór dodatnich dzielników liczby 42

h) $P = \emptyset$

1.9. Które z wymienionych zbiorów są zbiorami skończonymi?

A – zbiór liczb naturalnych

B – zbiór ułamków właściwych

C – zbiór dzielników liczby 152

D – zbiór rozwiązań równania $5x - 3 = 2$

E – zbiór punktów odcinka o długości 3 cm

1.10. Które z wymienionych zbiorów są zbiorami pustymi?

A – zbiór rozwiązań równania $5x - 1 = 4$

B – zbiór rozwiązań równania $x^2 + 4 = 0$

C – zbiór prostokątnych trójkątów równoramiennych

D – zbiór rozwartokątnych trójkątów równobocznych

1.11. Podaj wszystkie elementy zbioru.

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \text{ i } x \leqslant 8\}$

b) $B = \{x \in \mathbf{N} \text{ i } 1 < x \text{ i } x < 7\}$

c) $C = \{x\colon x = 2n - 1 \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } n < 3\}$

d) $D = \left\{x\colon x = \frac{1}{n+1} \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } n < 9\right\}$

e) $E = \left\{x \in \mathbf{N} \text{ i } x = \frac{3-n}{2} \text{ i } n \in \mathbf{N}\right\}$

f) $F = \{x \in \mathbf{Z} \text{ i } -2 < x \text{ i } x < 3\}$

g) $G = \left\{x \in \mathbf{Z} \text{ i } -8\frac{2}{3} \leqslant x \text{ i } x \leqslant -2\frac{1}{3}\right\}$

h) $H = \left\{x\colon x = \frac{1}{n^2+1} \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } n < 5\right\}$

1.12. Które z podanych zbiorów są skończone?

$A = \left\{x \in \mathbf{N} \text{ i } x \leqslant 10^{30}\right\}$

$B = \{x \in \mathbf{Z} \text{ i } x < 100\}$

$C = \left\{x\colon x = n^2 \text{ i } n \in \mathbf{N}\right\}$

$D = \{n \in \mathbf{N} \text{ i } n - 5 = 0\}$

$E = \left\{x\colon x = \frac{1}{n+3} \text{ i } n \in \mathbf{N}\right\}$

$F = \left\{x \in \mathbf{N} \text{ i } x > \sqrt{5}\right\}$

1.13. Podaj pięć przykładów zbiorów skończonych.

1.14. Podaj pięć przykładów zbiorów nieskończonych.

1.15. Podaj przykład pięcioelementowego podzbioru zbioru liczb
a) naturalnych parzystych.
b) całkowitych ujemnych.
c) całkowitych podzielnych przez 7.
d) całkowitych ujemnych i podzielnych przez 4.

1.16. Określ, który z wymienionych poniżej zbiorów jest podzbiorem innego.
A jest zbiorem liczb parzystych,
B jest zbiorem liczb podzielnych przez 3,
C jest zbiorem liczb podzielnych przez 4,
D jest zbiorem liczb podzielnych przez 9,
E jest zbiorem liczb podzielnych przez 8,
F jest zbiorem liczb podzielnych przez 24.

1.17. Sprawdź, czy zbiór A jest podzbiorem zbioru B.
a) $A = \{-3, 0, 1\}$ i $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
b) $A = \left\{x: x \in \mathbf{N} \text{ i } x > 10^{10}\right\}$ i $B = \{x: x \in \mathbf{N} \text{ i } x > 10\}$
c) $A = \left\{x: x = \frac{1}{n+1} \text{ i } n \in \mathbf{N}\right\}$ i B – zbiór wszystkich liczb większych od $\frac{1}{4}$

1.18. Sporządź rysunek ilustrujący zdanie: „Jeżeli $A \subset B$ i $B \subset C$, to $A \subset C$".

1.19. Podaj dwa przykłady trzech zbiorów liczbowych A, B, C spełniających warunek $A \subset B \subset C$.

1.20. Dane są zbiory: A – zbiór prostokątów, B – zbiór trapezów, C – zbiór czworokątów, D – zbiór równoległoboków, E – zbiór kwadratów. Czy prawdziwe jest zdanie $A \subset B \subset C \subset D \subset E$? Jeżeli nie, to przestaw litery tak, aby otrzymane zdanie było prawdziwe.

1.21. A jest zbiorem wszystkich dodatnich dzielników liczby 35. Wypisz wszystkie trzyelementowe podzbiory zbioru A. Ile ich jest?

1.22. A jest zbiorem parzystych, dwucyfrowych liczb naturalnych. Oceń prawdziwość zdania.
a) $12 \in A$ b) $4 \notin A$ c) $15 \notin A$ d) $90 \notin A$ e) $3{,}5 \in A$ f) $\sqrt{3} \notin A$

2. Warto powtórzyć – wyrażenia algebraiczne

Wyrażenie, w którym liczby (stałe) i litery (zmienne) połączone są znakami działań: dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia lub pierwiastkowania oraz nawiasami, nazywamy **wyrażeniem algebraicznym**. Przykłady wyrażeń algebraicznych:

$$ab, \quad 3(x-y), \quad (c+5)^3, \quad \frac{x+y}{x-y}, \quad \sqrt{7ac}$$

Wartość liczbową wyrażenia algebraicznego obliczamy, podstawiając liczby w miejsce liter.

Pojedyncze zmienne lub liczby, lub ich iloczyny nazywamy **jednomianami**.

Przykłady:

$$3, \quad 2x, \quad \sqrt{5}xy, \quad -x^3yz, \quad \frac{3}{11}xyt^8$$

Iloczyn liczb występujących w jednomianie nazywamy jego **współczynnikiem**, np. współczynnikiem jednomianu $\sqrt{5}xy$ jest $\sqrt{5}$, współczynnikiem jednomianu x^2 jest 1, a współczynnikiem jednomianu $3xy^4 \cdot 2z$ jest 6.

Jednomiany zapisujemy w postaci **uporządkowanej**, czyli bez znaku mnożenia, z czynnikiem liczbowym na początku, z literami występującymi w dowolnej kolejności – najczęściej alfabetycznej.

Dwa jednomiany różniące się jedynie współczynnikami nazywamy **jednomianami podobnymi**. Przykłady jednomianów podobnych:

- $3x^2, \quad -5x^2, \quad \sqrt{3}x^2, \quad \frac{2}{7}x^2$
- $-2xy^3z^2, \quad \sqrt{55}xy^3z^2, \quad \frac{9}{13}xy^3z^2, \quad -\pi xy^3z^2$

Skończoną sumę jednomianów nazywamy **sumą algebraiczną**, a składniki tej sumy – jej **wyrazami**. Zamiast określenia „suma algebraiczna” używa się również określenia **wielomian**.

Przykłady sum algebraicznych:

$$x+y, \quad 3x^2+2x-1, \quad xy+x^3yt-5y-4, \quad x^5-\sqrt{7}z$$

Jeżeli wyrazy sumy algebraicznej (dwa lub więcej) są jednomianami podobnymi, to możemy je dodać. Czynność tę nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.

Mnożenie sum algebraicznych

- Aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, należy pomnożyć każdy wyraz sumy przez ten jednomian.

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

- Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy wyraz jednej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Przykład 1 ◂ zad. 2.4

Wykonamy działania i zredukujemy wyrazy podobne.

a) $2x^2 - 4x + x^2 + 3x - 7 = 3x^2 - x - 7$

b) $xy^2 - x^2y + 4x - 3xy^2 - x^2y + 1 - xy^2 + 2x^2y = -3xy^2 + 4x + 1$

c) $2x - (4x - 5y + 2) - (x - 2y - 1) = 2x - 4x + 5y - 2 - x + 2y + 1 = -3x + 7y - 1$

d) $5x^2 + 2(3x - 4) - 3\left(2x^2 - 5x + 1\right) = 5x^2 + 6x - 8 - 6x^2 + 15x - 3 = -x^2 + 21x - 11$

e) $(3a - 5)(5a - 2) = 3a \cdot 5a + 3a \cdot (-2) - 5 \cdot 5a - 5 \cdot (-2) = 15a^2 - 6a - 25a + 10 =$
$= 15a^2 - 31a + 10$

Przykład 2 ◂ zad. 2.10

Zapiszemy w prostszej postaci wyrażenie:

$$2[-3(a + b - c) + 7] + 3[2(a - b - 2c) - 1]$$

i obliczymy jego wartość dla $a = -2\frac{1}{3}$, $b = 1\frac{1}{3}$, $c = -\frac{2}{3}$.

Rozwiązanie

$$2[-3(a + b - c) + 7] + 3[2(a - b - 2c) - 1] = -6a - 6b + 6c + 14 + 6a - 6b - 12c - 3 =$$
$$= -12b - 6c + 11$$

Podczas przekształceń zmienna a została zredukowana, zatem wartość wyrażenia nie zależy od jej wartości. Natomiast po podstawieniu wartości zmiennych b i c otrzymujemy:

$$-12 \cdot 1\frac{1}{3} - 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 11 = -16 + 4 + 11 = -1$$

Za pomocą wyrażeń algebraicznych zapisujemy różne wzory i zależności, występujące np. w opisie zjawisk fizycznych lub chemicznych. Przykładem tego jest wzór $s = v \cdot t$ – mówimy, że droga jest iloczynem prędkości i czasu.

Przykład 3 ◂ zad. 2.13

Pani Zofia kupiła i zmieszała x kg cukierków owocowych w cenie 13,20 zł za kilogram oraz y kg cukierków czekoladowych w cenie 15,60 zł za kilogram. Zapiszemy cenę 1 kg mieszanki w postaci wyrażenia algebraicznego.

Rozwiązanie

$13{,}2x$ ⟵ wartość kupionych cukierków owocowych

$15{,}6y$ ⟵ wartość kupionych cukierków czekoladowych

$13{,}2x + 15{,}6y$ ⟵ wartość mieszanki

$x + y$ ⟵ masa mieszanki w kg

$\dfrac{13{,}2x + 15{,}6y}{x + y}$ ⟵ cena w złotych 1 kg mieszanki

Odp.: Cena 1 kg mieszanki jest równa $\dfrac{13{,}2x + 15{,}6y}{x + y}$ zł.

Zadania

2.1. Dane są liczby: x, y, z, w. Zapisz symbolicznie liczbę, która jest

a) iloczynem sumy dwóch pierwszych i różnicy dwóch ostatnich.

b) różnicą iloczynu dwóch ostatnich i sumy trzech pierwszych.

c) iloczynem pierwszej liczby i sumy trzech ostatnich.

d) ilorazem iloczynu pierwszej i ostatniej przez sumę wszystkich liczb.

2.2. Uporządkuj jednomian.

a) $(-3) \cdot 2a \cdot \left(-1\frac{2}{3}\right)$

b) $1{,}6 \cdot \left(-\frac{5}{8}a\right) \cdot (-a)$

c) $\frac{1}{3}x \cdot x \cdot (-6y) \cdot y$

d) $-1\frac{1}{2} \cdot 2a^2(-3b) \cdot \frac{1}{3}ab$

2.3. Oblicz wartość jednomianu dla podanych wartości zmiennych.

a) $2ab^2$ dla $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{3}{4}$

b) $5a^2b$ dla $a = -\frac{3}{5}$, $b = 2\frac{1}{2}$

c) $-3xy^2z^3$ dla $x = 1\frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{5}$, $z = -5$

d) $\frac{7}{8}xy^5\sqrt{z}$ dla $x = \frac{5}{6}$, $y = 3\frac{1}{9}$, $z = 0$

2.4. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $5x + 2 - 3x + 1$

b) $-2a + 3b + b^2 - 7b + 5a - 1$

c) $4x + \frac{7}{8} - 1\frac{1}{3}y - 3x + \frac{1}{3}y + 0{,}125$

d) $2x - 5xy + 3y + 2xy - x + 2y$

e) $xy^2 + 2xy - 7xy^2 - xy + 2xy^2 + 4xy^2$

f) $8xyz - 2x^2yz + 11x^2yz - 4xyz + 5xyz^2 - 9x^2yz$

g) $-1\frac{1}{3}x^2y^2z^2 + 2\frac{1}{2}x^2yz^2 - \frac{2}{3}x^2y^2z^2 - 1\frac{1}{2}x^2yz^2 + 2x^2y^2z^2$

2.5. Dodaj podane sumy algebraiczne, przedstaw wynik w najprostszej postaci.

a) $7x^2 - 4x + 2$ i $3x^2 + 10x - 8$

b) $3ab + 2a - 5b + 1$ i $2ab - a + 3b + 2$

c) $\frac{3}{5}m^2 - \frac{2}{3}n^2 + 2$ i $0{,}4m^2 + 1\frac{2}{3}n^2 - 1$

d) $3x^2 + 2px + p^2$ i $2x^2 - 4px - 2p^2$

2.6. Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne.

a) $3(2x - 5y)$

b) $-2x(x + 3y)$

c) $(x - 5)(2x + 5)$

d) $(-3x + 7y)(-2x - 3y)$

e) $5(x + 1) + 7(x - 1) - 3\left(x^2 + x\right)$

f) $2\left(3x^2 - 3\right) + (2x + 1)(2 - x)$

g) $7x\left(\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}\right) - \frac{1}{5}(5x + 5)(x - 1)$

h) $(5x - 2)(3x - 1) - 3(x - 1)(2x + 3)$

2.7. Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne.

a) $\left(3x^3 - 5x^2 + 7x - 1\right) - \left(-4x^3 + 2x^2 - x + 5\right)$

b) $\left(2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x + 3\right) - \left(x^5 + 4x^3 + 2x - 1\right)$

c) $\left(-3x^2 + 5x - 1\right) \cdot (2x + 1)$

d) $\left(7x^3 + 2x^2 - 3x + 2\right) \cdot (3x + 2)$

e) $\left(2x^2 + 3x - 5\right) \cdot \left(-x^2 + x + 2\right)$

f) $\left(3x^3 + 2x^2 + 1\right) \cdot \left(-2x^3 + x - 3\right)$

2.8. Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne.

a) $2xy + 3x^2 - 2\left(x^2 + 7xy - y^2\right) + 10xy - 2y^2$

b) $3x^2 + 2y^2 - \left(2x^2y - 2xy - 4xy^2\right) - \left(2xy + 7x^2y\right) + 9x^2y - 2y^2$

c) $7\left(xy - y^2\right) + 2\left(xy - x^2\right) + 5xy + 3\left(x^2 - 5xy\right) + 7y^2$

d) $2x^2 - y^2 - 3\left(2xy - x^2 - y^2\right) + 2\left(x^2y - x^2\right) - \left(y^2 + 2x^2y\right) + 6xy$

2.9. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $\left(x^4 + xy + y^4\right)(x - y)$

b) $\left(3x^2y + 6y^3\right)\left(5x^2 - y\right)$

c) $\left(x^2 - 3xy + 7y^2\right)\left(x^2 + 5y^2\right)$

d) $\left(x^2 + 2xy - y^2\right)(3x + y)$

e) $\left(x^3 + 2x^2y - 3xy^2 + y^3\right)(x + y)$

f) $\left(2x^2 - 3xy\right)\left(3x^2 - xy\right)$

2.10. Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $2x^2y - 3xy + 1$ dla $x = -2,\ y = 3$

b) $-4x^3 + 2y^2 - 4xy + x$ dla $x = -1,\ y = -2$

c) $10 - ab + \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{4}b^2$ dla $a = 4,\ b = -2$

d) $2xyz^4 - 3z^2 + xy - 9$ dla $x = 1,\ y = -2,\ z = \sqrt{2}$

2.11. Banany kosztują b zł za kilogram, a pomarańcze p zł za kilogram. Ile zapłacimy za 2,5 kg bananów i 3 kg pomarańczy?

2.12. Na półce w bibliotece stoi k książek. Połowa z nich ma x cm grubości, a druga połowa to książki dwa razy grubsze. Ile centymetrów długości ma półka, jeżeli książki stoją ciasno jedna obok drugiej i zajmują całą półkę?

2.13. Dużym samochodem osobowym może podróżować 5 osób, a małym mogą jechać 4 osoby. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile osób może podróżować m dużymi samochodami i trzy razy większą liczbą małych samochodów osobowych.

2.14. Bartek ma 10 zł i chce kupić x ołówków po n zł i y zeszytów po m zł. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile złotych reszty otrzyma od sprzedawcy.

2.15. Grupa m uczniów i 2 nauczycieli przeprawia się promem wraz z autokarem, którym podróżują. Jaki jest koszt przeprawy całej grupy, jeżeli za przeprawę autokaru (razem z biletem kierowcy) trzeba zapłacić p zł, a za przeprawę każdego pasażera k zł?

2.16. Biuro przewoźników dysponuje k autokarami i dwa razy mniejszą liczbą mikrobusów. Autokary można wynajmować po m zł za 100 km jazdy, a mikrobusy o 50 zł taniej. Ile pieniędzy wpłynie do kasy tego biura za wynajem wszystkich autokarów i mikrobusów na trasę 800 km?

2.17. W kasie jest a złotych w banknotach 100-złotowych, b zł w banknotach 50-złotowych i c zł w banknotach 20-złotowych. Ile banknotów jest w kasie?

2.18. Samochód spala przeciętnie b litrów benzyny na 100 km. Ile kosztuje benzyna potrzebna do przejechania n kilometrów, jeśli litr benzyny kosztuje k zł?

2.19. Podstawa trójkąta równa p jest o 20% dłuższa od wysokości opuszczonej na tę podstawę. Wyznacz pole trójkąta.

2.20. Owczarek niemiecki zjada m g karmy dziennie, a dzienna porcja jedzenia dla kota waży k g. Cena psiej karmy jest równa p zł za 15 kg, a kociej – t zł za 5 kg. Ile kosztuje tygodniowe wyżywienie obydwu zwierząt?

3. Wzory skróconego mnożenia

Umiejętności:

- wyłączanie czynnika poza nawias
- używanie wzorów skróconego mnożenia: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2

Wyłączanie czynnika poza nawias

Czynnością odwrotną do mnożenia sumy algebraicznej przez jednomian jest wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias.

Przykład 1 ◂ zad. 3.4

Z podanej sumy algebraicznej wyłączymy wspólny czynnik poza nawias.

a) $2x-8=\underline{2}\cdot x-\underline{2}\cdot 4=2(x-4)$

b) $4a^2+a=\underline{a}\cdot 4a+\underline{a}\cdot 1=a(4a+1)$

c) $3x-\sqrt{5}x=3\cdot\underline{x}-\sqrt{5}\cdot\underline{x}=x\left(3-\sqrt{5}\right)$

d) $3xz-12zy=\underline{3z}\cdot x-\underline{3z}\cdot 4y=3z(x-4y)$

e) $7ab^2+21a^3b=\underline{7ab}\cdot b+\underline{7ab}\cdot 3a^2=7ab\left(b+3a^2\right)$

f) $2x^2y-10xyz+4xy^3z^2=\underline{2xy}\cdot x-\underline{2xy}\cdot 5z+\underline{2xy}\cdot 2y^2z^2=2xy\left(x-5z+2y^2z^2\right)$

Wyłączony czynnik może być zapisany przed nawiasem albo po nawiasie. Wynika to z prawa przemienności mnożenia.

Przykład 2 ◂ zad. 3.9

Z podanego wyrażenia wyłączymy przed nawias taki czynnik, aby współczynniki wszystkich wyrazów pozostałej w nawiasie sumy algebraicznej były liczbami całkowitymi.

a) $\frac{1}{3}x^3y-\frac{2}{3}xy^2+\frac{1}{3}x-2y=$

$=\frac{1}{3}x^3y-\frac{2}{3}xy^2+\frac{1}{3}x-2\cdot\frac{3}{3}y=$

$=\frac{1}{3}\left(x^3y-2xy^2+x-6y\right)$

b) $0{,}7x^5+3x^4-0{,}2x^3-x^2+1{,}1x-7=$

$=0{,}1\left(7x^5+30x^4-2x^3-10x^2+11x-70\right)$

Aby sprawdzić, czy otrzymany wynik jest poprawny, wystarczy pomnożyć wyrażenie w nawiasie przez wyłączony czynnik.

Wspólnym czynnikiem może być również suma algebraiczna.

Przykład 3

Dane wyrażenie zapiszemy w postaci iloczynu, wyłączając wspólny czynnik przed nawias.

a) $2\underline{(x-y)} + 3a\underline{(x-y)} = (x-y)(2+3a)$

b) $\frac{1}{2}x\underline{\left(2x^2+3\right)} - 2\underline{\left(2x^2+3\right)} = \left(2x^2+3\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right)$

c) $3x^2(x-1) + 2x(x-1) = 3x \cdot x(x-1) + 2 \cdot x(x-1) = x(x-1)(3x+2)$

d) $2ab^2\underline{(a-3b)} - 3a^2\underline{(a-3b)} + \frac{1}{2}ab\underline{(a-3b)} = a(a-3b)\left(2b^2 - 3a + \frac{1}{2}b\right)$

Wzory skróconego mnożenia

Wyrażenie $(a+b)^2$ nazywamy **kwadratem sumy** wyrażeń a i b.
Przekształćmy je, wykonując mnożenie:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Otrzymaliśmy **wzór skróconego mnożenia**.

Twierdzenie

Wzór na **kwadrat sumy** dwóch wyrażeń:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie: kwadrat pierwszego wyrażenia plus podwojony iloczyn pierwszego i drugiego wyrażenia plus kwadrat drugiego wyrażenia.

Przykład 4 ◀ zad. 3.10 a, e

Zapiszemy podane wyrażenie w postaci sumy, stosując wzór na kwadrat sumy.

a) $(2+x)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + x^2 = x^2 + 4x + 4$

b) $(k+5m)^2 = k^2 + 2 \cdot k \cdot 5m + (5m)^2 = k^2 + 10km + 25m^2$

Stosowanie wzoru na kwadrat sumy dwóch wyrażeń nie wymaga, by były one dodatnie. Jeżeli chcemy obliczyć kwadrat różnicy dwóch wyrażeń, np. $(a-1)^2$, możemy zapisać to wyrażenie w postaci $(a+(-1))^2$. Wtedy:

$$(a-1)^2 = (a+(-1))^2 = a^2 + 2a(-1) + (-1)^2 = a^2 - 2a + 1$$

Wygodniej jest posłużyć się wzorem na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Otrzymaliśmy kolejny wzór skróconego mnożenia.

Twierdzenie

Wzór na **kwadrat różnicy** dwóch wyrażeń:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń jest równy sumie: kwadrat pierwszego wyrażenia minus podwojony iloczyn pierwszego i drugiego wyrażenia plus kwadrat drugiego wyrażenia.

Przykład 5 ◂ zad. 3.10 b, d

Przekształcimy podane wyrażenie, stosując wzór na kwadrat różnicy.

a) $(-x+3)^2 = (3-x)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + x^2 = x^2 - 6x + 9$

b) $(5-2x)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2x + (2x)^2 = 25 - 20x + 4x^2$

Przykład 6 ◂ zad. 3.11

Wzory na kwadrat sumy i kwadrat różnicy można stosować do obliczania (bez używania kalkulatora) kwadratów niektórych liczb naturalnych.

a) $101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201$

b) $23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529$

c) $99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9801$

d) $28^2 = (30-2)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2 = 900 - 120 + 4 = 784$

Przykład 7

Uprościmy wyrażenie $(2x-5)^2 - 4(3+x)^2$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}
&(2x-5)^2 - 4(3+x)^2 = \\
&= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 - 4\left(3^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + x^2\right) = \\
&= 4x^2 - 20x + 25 - 4\left(9 + 6x + x^2\right) = \\
&= 4x^2 - 20x + 25 - 36 - 24x - 4x^2 = -44x - 11
\end{aligned}$$

Stosowanie wzorów skróconego mnożenia przy zamianie iloczynów na sumy zazwyczaj upraszcza rachunki. Ważniejsze jednak jest stosowanie tych wzorów w drugą stronę, tzn. podczas przekształcania sum algebraicznych do postaci iloczynu. Taką operację często wykonuje się podczas rozwiązywania równań.

Przykład 8 ◂ zad. 3.17

Zapiszemy podaną sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

a) $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ ⟵ kwadrat sumy: $25 = 5^2$, $10x = 2 \cdot x \cdot 5$

b) $16a^2 - 8a + 1 = (4a - 1)^2$ ⟵ kwadrat różnicy: $16a^2 = (4a)^2$, $1 = 1^2$, $8a = 2 \cdot 4a \cdot 1$

c) $49m^2 - 7mt + \frac{1}{4}t^2 = \left(7m - \frac{1}{2}t\right)^2$ ⟵ $49m^2 = (7m)^2$, $\frac{1}{4}t^2 = \left(\frac{1}{2}t\right)^2$, $2 \cdot 7m \cdot \frac{1}{2}t = 7mt$

Obliczmy iloczyn sumy i różnicy dwóch wyrażeń:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Otrzymaliśmy następny wzór skróconego mnożenia.

Twierdzenie

Wzór na **różnicę kwadratów** dwóch wyrażeń:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Różnica kwadratów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi sumy tych wyrażeń i ich różnicy.

Przykład 9 ◂ zad. 3.16

Zapiszemy dane wyrażenie algebraiczne w postaci iloczynu.

a) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$

b) $1 - 100y^2 = 1^2 - (10y)^2 = (1 + 10y)(1 - 10y)$

c) $4a^2 - 25b^2 = (2a)^2 - (5b)^2 = (2a + 5b)(2a - 5b)$

d) $-0{,}25c^2 + 0{,}01d^2 = (0{,}1d)^2 - (0{,}5c)^2 = (0{,}1d + 0{,}5c)(0{,}1d - 0{,}5c)$

Przykład 10 ◂ zad. 3.19

Zapiszemy podaną sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

a) $2x^2 - 4xy + 2y^2 =$

$= 2\left(x^2 - 2xy + y^2\right) =$ ⟵ wyłączamy 2 przed nawias

$= 2(x - y)^2$ ⟵ wzór na kwadrat różnicy

b) $3mx^2 + 6mxy + 3my^2 =$
$= 3m\left(x^2 + 2xy + y^2\right) =$ ⟵ wyłączamy $3m$ przed nawias
$= 3m(x + y)^2$ ⟵ wzór na kwadrat sumy

Przykład 11

Dane wyrażenie algebraiczne przedstawimy w postaci iloczynu.

a) $3x^2 - 12x + 12 = 3\left(x^2 - 4x + 4\right) = 3(x - 2)^2$ ⟵ wzór na kwadrat różnicy

b) $3x^2 - 27 = 3\left(x^2 - 9\right) = 3(x - 3)(x + 3)$ ⟵ wzór na różnicę kwadratów

c) $(2x - 4)^2 - (2 - 3x)^2 =$ ⟵ wzór na różnicę kwadratów
$= [(2x - 4) + (2 - 3x)] \cdot [(2x - 4) - (2 - 3x)] =$
$= [2x - 4 + 2 - 3x] \cdot [2x - 4 - 2 + 3x] =$
$= (-x - 2)(5x - 6)$

d) $2a^3b + 12a^2b^2 + 18ab^3 = 2ab\left(a^2 + 6ab + 9b^2\right) =$ ⟵ wzór na kwadrat sumy
$= 2ab(a + 3b)^2$

Przykład 12 ◀ zad. 3.15

Uprościmy wyrażenie:

$$(5x - 7)^2 + (3 - 4x)(3 + 4x) - (3x + 10)^2$$

i obliczymy jego wartość dla $x = -\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

$(5x - 7)^2 + (3 - 4x)(3 + 4x) - (3x + 10)^2 =$
$= 25x^2 - 70x + 49 + 9 - 16x^2 - 9x^2 - 60x - 100 = -130x - 42$

Podstawiamy $x = -\frac{1}{2}$ i otrzymujemy wynik 23.

Przykład 13

Wskaż wartość wyrażenia $\frac{1}{4}(2x - 1)^2 - \frac{1}{9}(3x - 1)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right)$ dla $x = 4$.

A. -1 **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** 4 **D.** 1

Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy na dwa sposoby.

I sposób

$$\frac{1}{4}\cdot(8-1)^2-\frac{1}{9}\cdot(12-1)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(4+\frac{1}{3}\right)= \quad \longleftarrow \text{do wyrażenia podstawiamy } x=4$$

$$=\frac{49}{4}-\frac{121}{9}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{13}{3}\right)=\frac{49}{4}-\frac{121}{9}+\frac{13}{9}= \quad \longleftarrow \text{wykonujemy obliczenia}$$

$$=\frac{49}{4}-\frac{108}{9}=12\frac{1}{4}-12=\frac{1}{4}$$

Zatem poprawna jest odpowiedź B.

II sposób

$$\frac{1}{4}(2x-1)^2-\frac{1}{9}(3x-1)^2+\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)= \quad \longleftarrow \text{wykonujemy działania}$$

$$=\frac{1}{4}\left(4x^2-4x+1\right)-\frac{1}{9}\left(9x^2-6x+1\right)+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}=$$

$$=x^2-x+\frac{1}{4}-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}=$$

$$=-x+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x=\frac{1}{4}$$

Zauważmy przy okazji, że II sposób, choć pozornie dłuższy, jest uniwersalny – wskazuje, że wartość podanego wyrażenia nie zależy od wartości zmiennej.

Odp.: B

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Różnica dwóch liczb jest równa 5. Różnica ich kwadratów wynosi 95. Ile jest równa suma tych liczb?

A. 90 **B.** 25 **C.** 19 **D.** 24

3.2. Wskaż wyrażenie równe wyrażeniu $(6a-5b)^2$.

A. $36a^2+25b^2$ **C.** $6a^2-60b+5b^2$

B. $36a^2-25b^2$ **D.** $36a^2-60ab+25b^2$

3.3. Wskaż postać iloczynową wyrażenia $27x^2-18xy+3y^2$.

A. $3(9x+2)^2$ **B.** $(3x-3y)^2$ **C.** $3(3x+y)^2$ **D.** $3(3x-y)^2$

3.4. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $16p-12$ c) $15m^2-75n$

b) $4p^2-10pr$ d) $32m+24n-160$

3.5. Wyłącz z wyrażenia podany czynnik.

a) $10a^2b - 14ab^2$ $2a$

b) $72a^3b^2 + 18a^2b^2$ $6ab$

c) $90a^2b^2c + 30ab^2c$ abc

d) $180p^2q^2 - 90pqr + 135$ 45

3.6. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $2abc - 6abd + 14abcd$

b) $-5x^2y + 20x^3y^2$

c) $6mk^2p - 6mkp^2 + m^2k^2p^2$

d) $\frac{tu}{2} + \frac{uw}{4} - tuw$

e) $\frac{2}{3}x^4 - \frac{7}{8}x^3 + \frac{1}{5}x^2$

f) $\frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{8}x^3$

3.7. Z podanego wyrażenia wyłącz czynnik -2.

a) $-10a^3b + 14a^2b^2 - 12ab^3$

b) $2am - 4bm - 3cm$

c) $0{,}2pq + p^2q^2 - 0{,}5$

d) $-\frac{2}{3}m^2 - \frac{1}{7}n^2 - 1\frac{3}{5}$

3.8. Z podanego wyrażenia wyłącz czynnik $\frac{1}{2}$.

a) $10x^2 - 8x + 3$

b) $-4x^3 + 3x^2 - 2$

c) $9x^4 - x^2 - 5$

d) $-1\frac{1}{2}x^5 - 11x^3 + 7$

3.9. Z podanego wyrażenia wyłącz przed nawias taki czynnik, aby współczynniki wszystkich wyrazów pozostałej w nawiasie sumy algebraicznej były liczbami całkowitymi.

a) $\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{5}xy^2 + 2\frac{1}{5}y^3 - 5{,}2$

b) $1\frac{1}{4}x^4 + 2\frac{3}{4}x^3 - 7\frac{1}{2}x - 2$

c) $-2\frac{2}{9}xy + 1\frac{2}{3}xyz + 3\frac{1}{3}x^2y^2z^2 + 2\frac{4}{9}$

d) $2{,}5x^7 - 3{,}25x^5 + 1{,}75x^3 + 2x - 1$

3.10. Przedstaw wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a) $(3c + 2)^2$

b) $(10 - 4b)^2$

c) $(-2f - g)^2$

d) $(-7 + 2z)^2$

e) $\left(\frac{1}{2}z + \sqrt{3}\right)^2$

f) $(-5k + 4m)^2$

g) $(-5 - 6w)^2$

h) $\left(a\sqrt{2} - b\sqrt{5}\right)^2$

3.11. Stosując wzory na kwadrat sumy lub kwadrat różnicy, oblicz kwadraty następujących liczb naturalnych: 49, 51, 82, 39. Nie korzystaj z kalkulatora.

3.12. Wykonaj działania.

a) $3(2-x)^2+2(x-3)(x+3)-(2x-3)^2$

b) $2(2x-3)(2x+3)-3(x+5)^2+\frac{1}{2}(2x-1)^2+32\left(x+1\frac{1}{2}\right)$

c) $15-4(x-1)(x+1)+(3x-2)^2-(x+2)^2-4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$

d) $(5-x)^2+3(x-2)(2+x)-4\left(x-2\frac{1}{2}\right)^2-10(x-1)$

3.13. Wykonaj działania.

a) $(x+2y)^2-(x+2y)(x-2y)+2(x-2y)^2+4xy$

b) $(a-2b)(3a+b)-3(a-b)^2$

c) $(5a+1)^2+(5a-1)^2-(5a+1)(5a-1)-25a^2$

d) $(x+3y)(3y-x)-2(x-2)^2+3\left(x^2-3y^2\right)$

3.14. Oblicz wartość wyrażenia $2(x-3y)^2-3(x-2y)\cdot(x+2y)+12xy$ dla $x=\sqrt{6}$ i $y=-\sqrt{2}$.

3.15. Wykonaj działania i doprowadź wyrażenie do prostszej postaci. Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $(x+3y)(x-3y)+(x+2y)^2-\left(2x^2-5y^2\right)$ dla $x=\sqrt{8}$ i $y=\sqrt{2}$

b) $(2xy+5)^2-(4+3xy)(3xy-4)+5x^2y^2$ dla $x=1\frac{1}{3}$ i $y=-5\frac{1}{4}$

3.16. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu.

a) $49-9k^2$

b) $2\frac{1}{4}x^2-1\frac{7}{9}y^2$

c) $-z^2+25w^2$

d) $25-2x^2$

e) $5p^2-4q^2$

f) $13-y^2$

g) $\frac{1}{9}x^2y^2-\frac{4}{25}x^2$

h) $x^4-\frac{25}{49}$

3.17. Przedstaw wyrażenie w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy.

a) $4a^2+12a+9$

b) $16-8y+y^2$

c) $5m^2-4\sqrt{5}m+4$

d) z^4+6z^2+9

e) $2\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+0{,}25$

f) $\frac{3}{49}x^2+\frac{\sqrt{3}}{7}x+\frac{1}{4}$

3.18. Jaki składnik należy wstawić w miejsce ?, aby otrzymana suma algebraiczna była równa kwadratowi sumy lub kwadratowi różnicy dwóch wyrażeń?

a) $25z^2 - 10z + ?$
b) $4y^2 + ? + 9z^2$
c) $81x^2 + 36xy + ?$
d) $2p^2 - ? + 9$
e) $? - 6x^2y + y^2$
f) $5x^4 - ? + 3y^2$

3.19. Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu. Najpierw wyłącz wspólny czynnik poza nawias, a następnie skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $3x^2 - 12x + 12$
b) $2x^2 + 4xy + 2y^2$
c) $4\frac{1}{2}x^2 + 6x + 2$
d) $12x^2 - 36xy + 27y^2$
e) $18p^3 + 48p^2q + 32pq^2$
f) $12k^4 - 60k^2m + 75m^2$

3.20. Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

a) $(a-1)^2 - (b+2)^2$
b) $1 - (a-2b)^2$
c) $a^2 - 4ab + 4b^2 - 9$
d) $81 - c^2 - 6cd - 9d^2$
e) $81 - x^2 - 2xy - y^2$
f) $64 - 16x^2 + 8xy - y^2$

3.21. Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias, a następnie skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $4y^2(x-7) + 9(x-7) + 12y(x-7)$
b) $4z^2(x+1) + 4z(x+1) + x + 1$
c) $(x-2) - 10x(x-2) + 25x^2(x-2)$
d) $x^4(x+1) - 16x - 16$

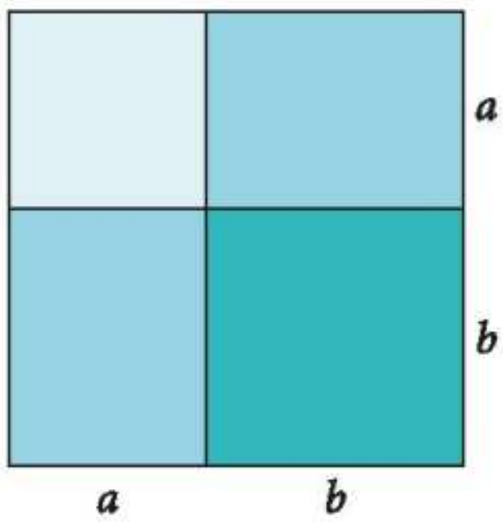
3.22. Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

a) $4x^2 + 12x - 9y^2 - 12y + 5$
b) $25x^2 - 10x - 49y^2 - 28y - 3$
c) $16x^2 - 4y^2 - 24x + 4y + 8$
d) $4x^2 - y^2 - 20x + 25$

3.23. Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

a) $x^2 - 2x - 3$
b) $y^2 - 4y - 5$
c) $z^2 - 2x^2$
d) $3 - w^2 - 2w$

D **3.24.** Uzasadnij geometrycznie wzór na kwadrat sumy. Skorzystaj z zamieszczonego obok rysunku.



D **3.25.** Wykaż, że wartość wyrażenia $(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x) - \frac{1}{2}(1-2x^2)$ nie zależy od wartości zmiennej x.

D ✱ **3.26.** Wykaż, że $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$, a następnie zapisz podane wyrażenie w postaci kwadratu wyrażenia algebraicznego.

a) $x^2+4y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz$

b) $k^2+m^2+p^2-2km-2kp+2mp$

c) $4t^2+u^2+\frac{1}{4}z^2-4tu+2tz-uz$

d) $2a^2+3b^2+4c^2+2\sqrt{6}ab-4\sqrt{2}ac-4\sqrt{3}bc$

✱ **3.27.** Wiadomo, że $x+y=27$ i $x^2+y^2=715$. Oblicz xy.

✱ **3.28.** Wiadomo, że $x-y=8$ i $xy=88$. Oblicz x^2+y^2.

D ✱ **3.29.** Wykaż, że liczba $1800 \cdot 2202$ jest różnicą kwadratów pewnych dwóch liczb całkowitych.

D ✱ **3.30.** Wykaż, że liczba 1 012 202 jest sumą kwadratów pewnych dwóch liczb całkowitych.

D ✱ **3.31.** Wykaż, że liczba $1\underbrace{000\ldots0}_{100\text{ cyfr}}4\underbrace{000\ldots0}_{100\text{ cyfr}}4$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Prosto do matury

1. Dane jest wyrażenie $100x^2-49y^2$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $100x^2-49y^2=(-7y+10x)(10x+7y)$

B. $100x^2-49y^2=(7y+10x)(7y-10x)$

C. Dla dowolnych wartości zmiennych x i y wartość wyrażenia $100x^2-49y^2$ jest dodatnia.

2. Doprowadź do prostszej postaci wyrażenie $(3-2x)(3+2x)+(2x-1)^2$ i oblicz jego wartość dla $x=\frac{10+3\sqrt{2}}{4}$.

3. Doprowadź do prostszej postaci wyrażenie $(3x-4)^2-2(2x+5)^2-(x-8)(8+x)$ i oblicz jego wartość dla $x=\frac{11}{16}$.

4. Doprowadź do prostszej postaci wyrażenie $(x-2y)^2-(x-2y)(x+2y)-4y(2y-1)$ i oblicz jego wartość dla $x=1$ i $y=\frac{13}{257}$.

D **5.** Wykaż, że dla dowolnych wartości a i b prawdziwy jest wzór $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.

4. Liczby pierwsze i złożone

Umiejętności:

- dowodzenie prostych twierdzeń dotyczących własności liczb naturalnych i liczb całkowitych
- wyróżnianie w twierdzeniach założeń i tezy

Podzielność w zbiorze liczb naturalnych

Przypomnijmy pojęcie naturalnego dzielnika liczby naturalnej, znane ze szkoły podstawowej.

Definicja

Jeżeli różne od zera liczby naturalne n, m i k spełniają równość $n = m \cdot k$, to mówimy, że liczba n **jest podzielna** przez m i przez k. Liczby m i k nazywamy **dzielnikami** liczby n. Liczbę n nazywamy **wielokrotnością** każdej z liczb m i k.

Przykład 1

Dzielnikami liczby 12 są 3 i 4, bo $12 = 3 \cdot 4$, ale są nimi również 2, 6, 1 i 12.
Liczba 12 ma sześć dzielników.

Przykład 2 ◂ zad. 4.12

Wyznaczymy wszystkie naturalne wartości n, dla których wartość wyrażenia $\frac{3n-8}{n}$ jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że n nie może być równe 0 (zera nie możemy wstawiać do mianownika).

Z. $n \neq 0$ ⟵ w ten sposób można zapisać założenia wynikające z treści zadania

Przekształcamy wyrażenie do innej postaci:

$$\frac{3n-8}{n} = \frac{3n}{n} - \frac{8}{n} = 3 - \frac{8}{n}$$

Teraz widać, że aby wartość wyrażenia mogła być liczbą naturalną, n musi być dzielnikiem 8, czyli jedną z liczb: 1, 2, 4, 8. Podstawiamy każdą z nich do wyrażenia i sprawdzamy wyniki. Warunki zadania spełniają 4 i 8, bo dla 1 i 2 wartości wyrażenia są liczbami ujemnymi.

Odp.: $n = 4$ lub $n = 8$

Definicja

Liczbą pierwszą nazywamy liczbę naturalną $k > 1$, która ma dokładnie dwa różne dzielniki: 1 i k.

Liczby naturalne większe od 1, które nie są liczbami pierwszymi, nazywamy **liczbami złożonymi**.

Liczby 0 oraz 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi.

Każdą liczbę złożoną możemy rozłożyć na czynniki pierwsze, tzn. zapisać ją w postaci iloczynu liczb pierwszych. Rozkład taki jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności występujących czynników.

Liczba 0 ma nieskończenie wiele dzielników – każda liczba naturalna różna od 0 jest jej dzielnikiem. Liczba 1 ma tylko jeden dzielnik naturalny. Jest on równy 1.

Przykład 3 ◀ zad. 4.5

Rozłożymy na czynniki pierwsze kilka liczb złożonych.

$4 = 2 \cdot 2$

$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

$20 = 2 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

$120 = 2 \cdot 60 = 2 \cdot 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Cechy podzielności

Przy rozkładzie liczby naturalnej na czynniki warto korzystać z twierdzeń zwanych **cechami podzielności**.

Liczba naturalna jest podzielna przez:

2	jeśli jest liczbą parzystą, czyli jej ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6, 8.
3	jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 3.
4	jeśli jej ostatnie dwie cyfry to 00, 04, 08 lub cyfry tworzące liczbę podzielną przez 4.
5	jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.
6	jeśli jest liczbą parzystą podzielną przez 3.
9	jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 9.
10	jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0.

Udowodnimy cechę podzielności przez 9 dla liczb trzycyfrowych.

Twierdzenie

Liczba naturalna trzycyfrowa n jest podzielna przez 9, jeżeli suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

Liczbę trzycyfrową o cyfrze setek a, cyfrze dziesiątek b i cyfrze jedności c możemy zapisać w postaci $n = 100a + 10b + c$.

Założenia

$n = 100a + 10b + c$
a, b, c są cyframi
$a \neq 0$ ⟵ cyfra setek musi być różna od zera, żeby liczba była trzycyfrowa
$a + b + c = 9k,\ k \in \mathbf{N}$ ⟵ na pewno istnieje takie k, bo suma cyfr jest podzielna przez 9

Teza

Istnieje takie $l \in \mathbf{N}$, że $n = 9l$. ⟵ takiego l szukamy

Dowód

$$n = 100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c = 9(11a + b) + (a + b + c) =$$
$$= 9(11a + b) + 9k = 9(11a + b + k)$$

$(11a + b + k) \in \mathbf{N}$ ⟵ wszystkie składniki w nawiasie są liczbami naturalnymi, więc $(11a + b + k) = l$

Mamy zatem:

$n = 9l$, gdzie $l \in \mathbf{N}$

Koniec dowodu

Udowodnimy cechę podzielności przez 4.

Twierdzenie

Liczba naturalna n, co najmniej trzycyfrowa, jest podzielna przez 4, jeżeli jej ostatnie dwie cyfry to 00, 04, 08 lub cyfry tworzące liczbę podzielną przez 4.

Założenia

$n = a \cdot 100 + b,\ a \in \mathbf{N},\ b \in \mathbf{N}$ ⟵ np. $2764 = 27 \cdot 100 + 64$
b oznacza ostatnie dwie cyfry liczby n, czyli 00, 04, 08 lub liczbę dwucyfrową podzielną przez 4

Teza

Liczba n jest podzielna przez 4.

Dowód

Rozpatrzymy dwa przypadki.

I. Zakładamy, że dwie ostatnie cyfry liczby n to 00, 04 lub 08,
czyli $b = 0 \cdot 10 + d$, gdzie d jest równe 0, 4 lub 8.
Wtedy:
$n = a \cdot 100 + b = a \cdot 100 + d$
Liczba n jest podzielna przez 4, bo każdy składnik sumy jest podzielny przez 4.

II. Zakładamy, że dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4
(np. $2764 = 2 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 64$).
Oznacza to, że liczbę b można zapisać w postaci:
$b = 4c$ i $c \in \mathbf{N}$ ⟵ istnieje takie c, bo b jest podzielne przez 4
Zatem:
$n = a \cdot 100 + b = 4 \cdot 25 \cdot a + 4c = 4(25a + c)$ ⟵ wyłączamy 4 przed nawias
Liczba otrzymana w nawiasie jest naturalna, więc liczba n jest podzielna przez 4.

Koniec dowodu

Przykład 4 ◀ zad. 4.11

Liczba 7560 jest podzielna przez:
2 – ponieważ jest parzysta,
3 – ponieważ suma jej cyfr wynosi $7 + 5 + 6 + 0 = 18$, czyli jest podzielna przez 3,
4 – ponieważ liczba 60 jest podzielna przez 4 $(60 = 4 \cdot 15)$,
5 – ponieważ jej ostatnią cyfrą jest 0,
6 – ponieważ jest parzysta i podzielna przez 3,
9 – ponieważ suma jej cyfr (równa 18) jest podzielna przez 9,
10 – ponieważ jej ostatnią cyfrą jest 0.

Ile jest liczb pierwszych?

Czy w nieskończonym ciągu liczb naturalnych liczby pierwsze pojawiają się tylko do pewnego, być może bardzo odległego miejsca, czy jest ich nieskończenie wiele? Odpowiedzi na to pytanie udzielił ponad 300 lat p.n.e. Euklides. Prześledźmy tok jego rozumowania.

Najpierw próbnie zakładamy, że jest ich skończona liczba, np. że jest k takich liczb. Można je zatem oznaczyć np. literą p i ponumerować od 1 do k:

$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \ldots, p_k$ ⟵ p_k jest tu ostatnią, czyli największą liczbą pierwszą

Rozważamy teraz liczbę:

$$A = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$$

będącą iloczynem tych hipotetycznie wszystkich liczb pierwszych zwiększonym o 1.
Liczba A jest większa od każdego czynnika z iloczynu $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k$, więc jest liczbą złożoną. Jednak w jej rozkładzie na czynniki pierwsze nie może pojawić się żadna z liczb $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, bo przy dzieleniu A przez dowolną z nich otrzymamy resztę równą 1.
Otrzymaliśmy sprzeczność, bo z jednej strony A jest liczbą złożoną, a z drugiej – nie można jej rozłożyć na istniejące (wszystkie!) czynniki pierwsze.
Założenie, że liczb pierwszych jest skończona liczba, okazało się fałszywe, a zatem prawdą jest, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

W ciągu liczb naturalnych większych od 2 co druga jest złożona, bo jest parzysta. A jak są rozmieszczone liczby pierwsze? Może być tak, że pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi jest bardzo dużo liczb złożonych. Mogą też, jak 3 i 5 lub 11 i 13, być oddzielone tylko jedną liczbą złożoną. Takie pary zostały nazwane **liczbami pierwszymi bliźniaczymi**. Do dziś nie udowodniono, czy liczb bliźniaczych jest nieskończenie wiele. W 2016 r. największą znalezioną parą liczb bliźniaczych były:

$$2996863034895 \cdot 2^{1290000} - 1$$
$$2996863034895 \cdot 2^{1290000} + 1$$

Twierdzenie

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Jest wiele powodów, dla których naukowcy (i nie tylko!) pilnie śledzą rozwój badań nad wyszukiwaniem kolejnych liczb pierwszych, ich rozmieszczeniem na osi itp. Jedną z przyczyn jest powszechne zastosowanie, jakie liczby pierwsze mają w algorytmach szyfrujących, używanych do zabezpieczania różnych baz danych. Takie szyfrowanie polega, najogólniej mówiąc, na dobraniu dostatecznie dużych liczb pierwszych p i q oraz utworzeniu ich iloczynu $k = p \cdot q$. Liczba k jest kluczem publicznym, natomiast liczby p i q są utajnione – stanowią części klucza prywatnego. Aby odczytać zaszyfrowaną wiadomość, trzeba znać te liczby, czyli znać rozkład liczby k na czynniki pierwsze. To zadanie przy dużych wartościach liczb p i q jest obecnie praktycznie niewykonalne, nawet dla komputerów o dużej mocy obliczeniowej.

Dowód twierdzenia o istnieniu nieskończenie wielu liczb pierwszych, podany przez Euklidesa, jest wzorem rozumowania matematycznego, które nazywa się **metodą dowodzenia nie wprost** (czasem metodą sprowadzania do niedorzeczności). Polega ona na sprawdzeniu, co by było, gdyby podana teza była fałszywa. Jeśli w toku rozumowania pokażemy, że fałszywe są założenia, to oznacza, że ta teza jest jednak prawdziwa. Z metody dowodzenia nie wprost będziemy wielokrotnie korzystać podczas nauki matematyki w szkole średniej.

Podzielność w zbiorze liczb całkowitych

Na początku tego rozdziału podaliśmy definicję naturalnego dzielnika liczby naturalnej. Analogicznie definiujemy całkowite dzielniki liczb całkowitych.

Definicja

Jeżeli różne od zera liczby całkowite n, m i k spełniają równość $n = m \cdot k$, to mówimy, że liczba n **jest podzielna** przez m i przez k. Liczby m i k nazywamy **dzielnikami** liczby n.

Przykład 5

Zbiór naturalnych dzielników liczby 6 to zbiór $\{1, 2, 3, 6\}$.
Zbiór całkowitych dzielników liczby 6 to zbiór $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$.
Zbiór całkowitych dzielników liczby -6 to zbiór $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$.

Największy wspólny dzielnik oraz najmniejsza wspólna wielokrotność liczb naturalnych to pojęcia znane ze szkoły podstawowej. Nie będziemy ich powtarzać. Wprowadzimy natomiast jeszcze jedną definicję dotyczącą dzielników.

Definicja

Dwie liczby całkowite, których największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 1, nazywamy **liczbami względnie pierwszymi**.

Liczbami względnie pierwszymi są np.: 14 i 15, 19 i 20, 35 i 47, -6 i 101.

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest równa 130. Wskaż środkową z nich.

A. 25 **B.** 26 **C.** 27 **D.** 28

4.2. Niech n oznacza nieparzystą liczbę naturalną. Które z podanych wyrażeń określa liczbę parzystą?

A. $n^2 + n$ **B.** $n^2 + 4$ **C.** n^2 **D.** $n - 2$

4.3. Wskaż najmniejszą liczbę pierwszą.
A. -2 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

4.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Liczby 21 i 91 są względnie pierwsze.
B. Liczby 21 i 101 są względnie pierwsze.
C. Liczby 21 i 119 są względnie pierwsze.

4.5. Rozłóż na czynniki pierwsze następujące liczby:
39, 94, 108, 510, 1156, 3420, 4830, 8550.

4.6. Którą z wymienionych liczb można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych: 35, 77, 81, 335, 333, 63, 103, 73?

4.7. Wyznacz wspólne dzielniki naturalne podanej pary liczb.
a) 28 i 42 b) 66 i 88 c) 105 i 84 d) 280 i 135

4.8. Wyznacz największy wspólny dzielnik (NWD) podanej pary liczb.
a) 90 i 126 b) 198 i 693 c) 300 i 822 d) 570 i 266

4.9. Wyznacz najmniejszą wspólną wielokrotność (NWW) podanej pary liczb.
a) 28 i 12 b) 26 i 6 c) 13 i 5 d) 45 i 30

4.10. Jaką cyfrę należy wstawić w miejsce litery a, aby liczba
a) $115a0$ była podzielna przez 5 i przez 3?
b) $94a$ była podzielna przez 5 i niepodzielna przez 2?
c) $333a$ była podzielna przez 5 i niepodzielna przez 3?
d) $17a6$ była podzielna przez 3 i przez 4?

4.11. Jaką cyfrą można zastąpić $*$, aby otrzymane zdanie było prawdziwe?
a) Liczba $1567*$ jest podzielna przez 2 i przez 9.
b) Liczba $222*34$ jest podzielna przez 9.
c) Liczba $40*$ jest podzielna przez 5 i przez 9.
d) Liczba $13579*$ jest podzielna przez 6.
e) Liczba $22222*$ jest podzielna przez 12.
f) Liczba $1234*$ jest podzielna przez 15.

4.12. Wyznacz wszystkie naturalne wartości n, dla których wartość wyrażenia $\frac{5n+6}{n}$ jest liczbą naturalną.

4.13. Wyznacz wszystkie całkowite wartości n, dla których wartość wyrażenia $\frac{7n-9}{n}$ jest liczbą naturalną.

4.14. Wyznacz wszystkie całkowite wartości n, dla których wartość wyrażenia $\frac{n-10}{n}$ jest liczbą całkowitą.

* **4.15.** Wyznacz wszystkie liczby całkowite a, dla których wartość wyrażenia $\frac{a+1}{a+3}$ jest liczbą naturalną.

* **4.16.** Wyznacz wszystkie liczby całkowite a, dla których wartość wyrażenia $\frac{a+1}{a-2}$ jest liczbą całkowitą.

4.17. Wyznacz cztery kolejne liczby parzyste, których suma pomniejszona o różnicę ostatniej i pierwszej jest równa 54.

D **4.18.** Udowodnij cechę podzielności przez 3 dla liczb trzycyfrowych.

D **4.19.** Udowodnij cechę podzielności przez 9 dla liczb czterocyfrowych.

4.20. Podaj najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez 6, 9 i 15.

D **4.21.** Udowodnij, że jeżeli liczba d jest dzielnikiem każdej z liczb a i b, to jest również dzielnikiem
a) sumy $a + b$.
b) różnicy $a - b$.

4.22. Zabytkowy wahadłowy zegar ścienny spóźnia się 12 minut każdego dnia. Jeżeli pierwszego kwietnia w południe wskazał poprawnie godzinę 12, to po ilu dniach znów pokaże prawidłową godzinę?

* **4.23.** Podaj przykład takiego sześcioelementowego zbioru liczb naturalnych, aby suma
a) dwóch dowolnych liczb z tego zbioru była parzysta.
b) dwóch dowolnych liczb z tego zbioru była nieparzysta.
c) trzech dowolnych liczb z tego zbioru była parzysta.
d) trzech dowolnych liczb z tego zbioru była nieparzysta.

4.24. Ile zer na końcu ma liczba będąca iloczynem pięćdziesięciu kolejnych liczb naturalnych: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 49 \cdot 50$?

4.25. Podaj przykład dwóch takich liczb pierwszych a i b, aby również $a+b$ i $a-b$ były liczbami pierwszymi.

4.26. Wyznacz wszystkie naturalne wartości n, dla których wartość wyrażenia $\frac{30}{n}+2$ jest liczbą pierwszą.

4.27. Czy można wskazać dwie kolejne liczby naturalne złożone i równocześnie względnie pierwsze?

4.28. Ze zbioru $\{9, 15, 21, 27, 28, 33, 39, 51, 56\}$ wypisz pary liczb względnie pierwszych.

D **4.29.** Wykaż, że dwie kolejne liczby całkowite nieparzyste są względnie pierwsze.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Każda liczba podzielna przez 21 jest podzielna przez 7.
B. Każda liczba podzielna przez 7 jest podzielna przez 21.
C. Istnieją liczby podzielne przez 7 i przez 21.

2. Ze zbioru $\{10, 13, 21, 25, 26, 33, 39\}$ wypisz pary liczb względnie pierwszych.

3. Wyznacz cyfrę, którą należy wstawić w miejsce litery a, aby liczba $13579a$ była podzielna przez 6.

4. Suma dwóch liczb naturalnych jest równa 78, a ich największym wspólnym dzielnikiem jest 13. Wyznacz te liczby.

D **5.** Niech $a = \frac{15+2n}{n}$, gdzie n jest dodatnią liczbą naturalną. Wykaż, że dla tych wartości n, dla których a jest liczbą naturalną, a jest równocześnie liczbą pierwszą.

5. Liczby wymierne. Liczby niewymierne

Umiejętności:

- zapisywanie liczb rzeczywistych w różnych postaciach

Każdą liczbę, którą można zapisać w postaci ułamka $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi oraz $n \neq 0$, nazywamy **liczbą wymierną**.

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci ułamka na nieskończenie wiele sposobów, np.:

- $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$
- $-\frac{5}{7} = -\frac{10}{14} = -\frac{25}{35} = \ldots$

Każda liczba całkowita jest liczbą wymierną, np. $-4 = -\frac{4}{1}$.

Liczbę, której nie można zapisać w postaci ułamka $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi oraz $n \neq 0$, nazywamy **liczbą niewymierną**.

Przykładami liczb niewymiernych są: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}+2$, π, $\frac{\sqrt{7}-1}{3}$.

Odkrycie liczb niewymiernych przypisuje się pitagorejczykom. Założony (ok. 530 r. p.n.e.) przez Pitagorasa związek filozoficzno-polityczny ma w dorobku liczne osiągnięcia naukowe, zwłaszcza matematyczne. Pitagorejczycy byli zafascynowani liczbami, które uznawali za istotę świata. Motto filozofii związku brzmiało: „wszystko jest liczbą". Liczby przedstawiali w formie figur geometrycznych, układali je z kamyków i odkrywali ich własności. Najważniejsze były liczby naturalne, ale znano i stosowano w tamtych czasach również ułamki. Prawdopodobnie pojęcie liczby niewymiernej pojawiło się wtedy, gdy odkryto, że nie można zmierzyć długości przekątnej kwadratu za pomocą ustalonej jednostki.

Zanim podamy uzasadnienie, że np. $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, przeanalizujmy sposób konstruowania odcinków o wymiernej długości.

Przykład 1

Odcinek o długości 3,7 danej jednostki powstaje w ten sposób, że najpierw odcinek o długości jednej jednostki (odcinek jednostkowy) dzielimy na 10 równych części i otrzymujemy odcinki o długości $\frac{1}{10}$ jednostki.

Z siedmiu takich części otrzymujemy odcinek o długości 0,7 jednostki. Szukany odcinek będzie się składał z trzech odcinków jednostkowych i odcinka o długości 0,7 jednostki, odłożonych kolejno na prostej. Dokładną konstrukcję podziału odcinka jednostkowego na 10 części przedstawimy w klasie drugiej, gdyż wymaga ona znajomości bardziej zaawansowanej matematyki.

Opisanym w przykładzie sposobem możemy odmierzyć każdą długość, która jest dodatnią liczbę wymierną, tj. ułamek $\frac{k}{m}$. Odcinek jednostkowy dzielimy na m równych części i odkładamy kolejno k takich części.

Podobnie wyznaczamy na osi liczbowej punkty o wymiernych współrzędnych.

Do czasów Pitagorasa uważano, że zawsze można wykonać operację odwrotną, tzn. mając konkretny odcinek i ustaloną jednostkę – zmierzyć jego długość w opisany wyżej sposób. Tymczasem długości przekątnej „jednostkowego" kwadratu nie da się zapisać w postaci ułamka $\frac{k}{m}$.

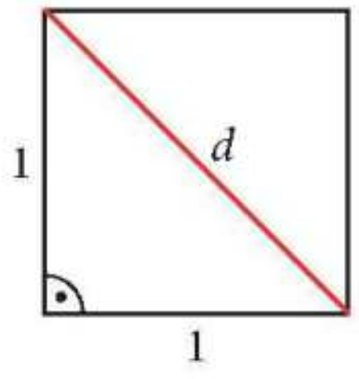
Udowodnimy twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli bok kwadratu ma długość 1, to długość przekątnej tego kwadratu jest liczbą niewymierną.

Założenie

Dany jest kwadrat o boku 1 i przekątnej d.



Teza

Liczba d jest niewymierna.

Dowód

Na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy równość $d^2 = 1^2 + 1^2$, czyli $d^2 = 2$.

Przyjmijmy, że liczba d jest wymierna, czyli istnieją $k \in \mathbf{N}$ i $m \in \mathbf{N}$ takie, że $d = \frac{k}{m}$.

Wtedy prawdziwe musiałyby być następujące równości:

$$\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 2, \text{ więc } \frac{k^2}{m^2} = 2, \text{ stąd } k^2 = 2 \cdot m^2, \text{ czyli}$$

$$k \cdot k = 2 \cdot m \cdot m$$

Ostatnia równość nie może zajść, ponieważ będą różne liczby dwójek po rozłożeniu na czynniki pierwsze liczb k i m. Po lewej stronie, w iloczynie $k \cdot k$, będzie ich zawsze parzysta liczba (tzn. albo 0, albo 2, 4, 6 itd.), a po prawej stronie, w iloczynie $2 \cdot m \cdot m$, nieparzysta liczba (albo 1, albo 3, 5 itd.).

Zatem liczby d nie zapiszemy w postaci ułamka zwykłego, czyli jest ona liczbą niewymierną.

Koniec dowodu

Przedstawione rozumowanie jest kolejnym przykładem dowodzenia **metodą nie wprost.**

To odkrycie odegrało ważną rolę w dalszym rozwoju matematyki.
Długość przekątnej d w kwadracie o boku 1 nazwano pierwiastkiem kwadratowym z liczby 2 i oznaczono symbolem $\sqrt{2}$.

Zbiór utworzony z wszystkich liczb wymiernych oraz liczb niewymiernych nazywamy **zbiorem liczb rzeczywistych**. Inaczej mówiąc, każda liczba rzeczywista jest albo liczbą wymierną, albo liczbą niewymierną.
Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy symbolem **R** (od angielskiego *real* – rzeczywisty), a zbiór liczb wymiernych symbolem **Q** (od angielskiego słowa *quotient* – iloraz).
Nie będziemy wprowadzać dodatkowego oznaczenia na zbiór liczb niewymiernych.
Aby zapisać, że jakaś liczba jest niewymierna, użyjemy zaprzeczenia, np.: $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Zapis dziesiętny liczby rzeczywistej

Przykład 2

Zapiszemy liczbę wymierną w postaci dziesiętnej, wykonując odpowiednie dzielenie.

a) $\frac{1}{4} = 0{,}25$, ponieważ:

$$\begin{array}{r|l} 0{,}25 & \\ \hline 10 & 1:4 \\ -8 & \\ \hline 20 & \\ -20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

b) $\frac{2}{3} = 0{,}666666\ldots$, ponieważ:

$$\begin{array}{r|l} 0{,}66\ldots & \\ \hline 20 & 2:3 \\ -18 & \\ \hline 20 & \longleftarrow \text{od tego miejsca dzielenie się powtarza} \\ -18 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

c) $1\frac{3}{11} = \frac{14}{11} = 1{,}2727272727\ldots$, ponieważ:

$$\begin{array}{r|l} 1{,}2727\ldots & \\ \hline 14 & 11 \\ -11 & \\ \hline 30 & \\ -22 & \\ \hline 80 & \\ -77 & \\ \hline 30 & \longleftarrow \text{od tego miejsca dzielenie się powtarza} \\ -22 & \\ \hline 8 & \end{array}$$

Powtarzającą się nieskończenie wiele razy tę samą cyfrę lub grupę cyfr w rozwinięciu dziesiętnym liczby nazywamy **okresem rozwinięcia**. Okres składający się z najmniejszej liczby cyfr nazywamy **okresem zasadniczym** i zapisujemy w nawiasie okrągłym.
Zatem: $\frac{2}{3} = 0{,}(6)$, $\frac{14}{11} = 1{,}(27)$, $\frac{8}{7} = 1{,}(142857)$.
Ułamek $\frac{1}{4}$ ma rozwinięcie dziesiętne skończone: $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Przyjrzyjmy się dzieleniu liczby 8 przez 7.
Pod kolejnymi kreskami pojawiają się reszty (1, 3, 2, 6, 4, 5, 1 itd.), które są dodatnimi liczbami naturalnymi mniejszymi od 7. Takich liczb jest 6, więc najpóźniej po siódmym kroku dzielenia jedna z nich musi wystąpić ponownie i słupek dzielenia zaczyna się powtarzać.

```
 1,142857
 8 : 7
-7
 10
 -7
  30
 -28
  20
 -14
   60
 -56
   40
 -35
    50
 -49
     1
```

W dzieleniu liczby 14 przez 11 reszta równa 3 pojawiła się ponownie już po trzecim dzieleniu (zob. przykład 2c). Dlatego okres zasadniczy tego ułamka dziesiętnego jest dwucyfrowy.

W dzieleniu liczby 1 przez 4 po drugim kroku dzielenia pojawia się reszta 0. Dlatego ten ułamek dziesiętny jest skończony.

Uogólnijmy:
Reszty, które pojawiają się po kolejnych etapach dzielenia m przez n, mogą być równe:

$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$

Wniosek

Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe.

Umiemy znaleźć rozwinięcie dziesiętne dowolnego ułamka zwykłego. Pokażemy na przykładach, jak postąpić, aby rozwiązać zadanie odwrotne, tzn. nieskończony ułamek okresowy zamienić na zwykły.

Przykład 3

Zamienimy nieskończony ułamek okresowy na ułamek zwykły.
a) $0,(1)$ b) $0,(01)$ c) $0,(001)$

Rozwiązanie

a) $0,(1) = 0,11111\ldots$

Oznaczmy ten ułamek nieskończony okresowy literą x.

$x = 0,1111\ldots$ ⟵ mnożymy obie strony równania przez 10
$10x = 1,1111\ldots$
$10x = 1 + 0,1111\ldots$ ⟵ podstawiamy $0,1111\ldots = x$
$10x = 1 + x$, stąd $9x = 1$, zatem $x = \frac{1}{9}$

Odp.: $0,(1) = \frac{1}{9}$

b) $0,(01) = 0,010101\ldots$

$x = 0,010101\ldots$ ⟵ mnożymy obie strony równania przez 100

$100x = 1,0101010\ldots$

$100x = 1 + 0,010101\ldots$

$100x = 1 + x$, stąd $99x = 1$, zatem $x = \frac{1}{99}$

Odp.: $0,(01) = \frac{1}{99}$

c) $0,(001) = 0,001001001\ldots$

$x = 0,001001\ldots$ ⟵ mnożymy obie strony równania przez 1000

$1000x = 1,001001001\ldots$

$1000x = 1 + 0,001001\ldots$

$1000x = 1 + x$, stąd $999x = 1$, zatem $x = \frac{1}{999}$

Odp.: $0,(001) = \frac{1}{999}$

Uogólnijmy rozumowanie z przykładu 3.

Wniosek

$$0,(\underbrace{00\ldots01}_{n \text{ cyfr}}) = \frac{1}{\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ cyfr}}}$$

Przykład 4 ◀ zad. 5.5 b

Zamienimy nieskończony ułamek okresowy na ułamek zwykły.

a) $0,(3)$ b) $-0,(27)$ c) $0,(9)$ d) $0,1(2)$

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że np.:

$0,(3) = 3 \cdot 0,(1)$

$0,(27) = 27 \cdot 0,(01)$

a) $0,(3) = 3 \cdot 0,(1) = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Odp.: $0,(3) = \frac{1}{3}$

b) $0,(27) = 27 \cdot 0,(01) = 27 \cdot \frac{1}{99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$

Odp.: $-0,(27) = -\frac{3}{11}$

c) $0,(9) = 9 \cdot 0,(1) = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$

Mamy dwie możliwości dziesiętnego zapisu liczby 1: $0,(9)$ lub 1 (ew. $1,0000\ldots$).

Odp.: $0,(9) = 1$

d) $0,1(2) = 0,12222222\ldots$

Oznaczamy tę liczbę literą x.

$x = 0,1(2)$

$10x = 1,(2)$ ⟵ mnożymy obie strony równania przez 10

$10x = 1 + 0,(2)$

$10x = 1 + \frac{2}{9}$

$10x = \frac{11}{9}$

$x = \frac{11}{90}$

Odp.: $0,1(2) = \frac{11}{90}$

Twierdzenie

- Jeżeli liczba rzeczywista ma rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe, to jest liczbą **wymierną**.
- Jeżeli liczba rzeczywista ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone i nieokresowe, to liczba ta jest **niewymierna**.

Bardziej skomplikowane jest udowodnienie twierdzenia, że każda liczba niewymierna ma rozwinięcie dziesiętne. Przyjmiemy to twierdzenie bez dowodu.

$\sqrt{2}$ jako liczba niewymierna ma nieskończone i nieokresowe rozwinięcie dziesiętne:

$\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$

Przykład 5 ◀ zad. 5.8

Obliczymy sumę $0,8(3) + 0,3(18)$.

Rozwiązanie

Obydwa ułamki dziesiętne okresowe zamieniamy najpierw opisaną wcześniej metodą na ułamki zwykłe.

$0,8(3) + 0,3(18) =$

$= \frac{5}{6} + \frac{7}{22} = \frac{55 + 21}{66} =$ ⟵ wykonujemy dodawanie ułamków zwykłych

$= \frac{76}{66} = \frac{38}{33} =$

$= 1,(15)$ ⟵ zapisujemy wynik w postaci ułamka dziesiętnego okresowego

Odp.: $1,(15)$

Przykład 6 ◂ zad. 5.4

Ocenimy prawdziwość podanych zdań.
Jeżeli liczby dodatnie a i b nie mają skończonego rozwinięcia dziesiętnego, to nie ma skończonego rozwinięcia dziesiętnego również

A. suma $a + b$. **B.** iloczyn $a \cdot b$. **C.** iloraz $\frac{a}{b}$.

Rozwiązanie

Każde z podanych zdań jest fałszywe, gdyż do każdego z nich możemy podać kontrprzykład (czyli przykład takich liczb a i b, które nie spełniają podanego warunku).

A. Jeśli $a = \frac{1}{3}$ i $b = \frac{5}{3}$, to $a = 0,(3)$ i $b = 1,(6)$, ale $a + b = 2$.

B. Jeśli $a = \frac{11}{3}$ i $b = \frac{3}{11}$, to $a = 3,(66)$ i $b = 0,(27)$, ale $a \cdot b = 1$.

C. Jeśli $a = \frac{1}{3}$ i $b = \frac{5}{3}$, to $a = 0,(3)$ i $b = 1,(6)$, ale $\frac{a}{b} = \frac{1}{5} = 0,2$.

Odp.: Zdania A, B i C są fałszywe.

Zastosowanie rozwinięć dziesiętnych liczb rzeczywistych wymaga użycia przybliżeń, a zwłaszcza jeśli działania wykonuje się na kalkulatorach lub w komputerach.

Zasada zaokrąglania rozwinięć dziesiętnych liczb rzeczywistych

- Jeżeli pierwsza z odrzuconych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest mniejsza od 5, to ostatnią zachowaną cyfrę pozostawiamy bez zmian.
  Jest to tzw. **przybliżenie z niedomiarem**.
- Jeżeli pierwsza z odrzuconych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest równa 5 lub większa od 5, to ostatnią zachowaną cyfrę zwiększamy o 1.
  Jest to tzw. **przybliżenie z nadmiarem**.

Przykład 7

Wyznaczymy kilka przybliżeń dziesiętnych podanej liczby.

a) $\frac{3}{7} = 0,428571428\ldots$

$\frac{3}{7} \approx 0,4$ ⟵ przybliżenie z niedomiarem – pierwszą odrzuconą cyfrą jest 2 $(0,4 < 0,428571428\ldots)$

$\frac{3}{7} \approx 0,43$ ⟵ przybliżenie z nadmiarem – pierwszą odrzuconą cyfrą jest 8 $(0,43 > 0,428571428\ldots)$

$\frac{3}{7} \approx 0,429$ ⟵ przybliżenie z nadmiarem – pierwszą odrzuconą cyfrą jest 5 $(0,429 > 0,428571428\ldots)$

b) $\sqrt{29} = 5{,}38516480\ldots$

$\sqrt{29} \approx 5{,}4$ ⟵ przybliżenie z nadmiarem

$\sqrt{29} \approx 5{,}39$ ⟵ przybliżenie z nadmiarem

$\sqrt{29} \approx 5{,}385$ ⟵ przybliżenie z niedomiarem

$\sqrt{29} \approx 5{,}3852$ ⟵ przybliżenie z nadmiarem

Jeżeli przybliżenie liczby a ma dwie cyfry po przecinku, to mówimy, że a jest przybliżone z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku lub do części setnych; jeżeli trzy cyfry po przecinku, to z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku itd.

Przykład 8 ◂ zad. 5.28

Podamy przykłady liczb wymiernych leżących na osi liczbowej pomiędzy $\sqrt{11}$ i $2\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Za pomocą kalkulatora znajdujemy:

$\sqrt{11} = 3{,}316624\ldots$
$2\sqrt{3} = 3{,}464101\ldots$

Odp.: Liczbami wymiernymi leżącymi pomiędzy $\sqrt{11}$ i $2\sqrt{3}$ są np.: 3,32, 3,317, 3,316(67), 3,4(2). Liczb spełniających warunek zadania jest nieskończenie wiele.

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Która z podanych liczb jest rozwinięciem dziesiętnym liczby $\frac{1}{60}$?

A. 1,(6) **B.** 0,1(6) **C.** 0,01(6) **D.** 0,001(6)

5.2. Wskaż liczbę, która nie jest przybliżeniem liczby $\sqrt{10} = 3{,}1622\ldots$

A. 3 **B.** 3,1 **C.** 3,16 **D.** 3,162

5.3. Która z podanych liczb jest różna od każdej z pozostałych?

A. $\frac{1}{3} + \frac{2}{9}$ **B.** $\frac{4}{5} + \frac{1}{4}$ **C.** 0,(5) **D.** $\frac{1}{9} + \frac{4}{9}$

5.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Suma dwóch liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną.

B. Iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną.

C. Iloczyn dwóch liczb wymiernych jest liczbą wymierną.

5.5. Przedstaw liczby w postaci ułamków zwykłych nieskracalnych.

a) $\frac{25}{75}$, $\frac{91}{105}$, $\frac{132}{156}$, $\frac{144}{126}$, $\frac{112}{144}$, $\frac{245}{525}$

b) $-2,(7)$, $-7,(8)$, $1,2(6)$, $3,(15)$

c) $3,0(54)$, $-2,(324)$, $8,0(135)$, $1,00(18)$

5.6. Uporządkuj liczby malejąco: $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{13}{15}$.

5.7. Uporządkuj liczby rosnąco.

a) $\frac{4}{11}$, $1,(75)$, $\frac{2}{9}$, $1,0(15)$, $\frac{21}{33}$

b) $1,(33)$, $\frac{7}{33}$, $1,(90)$, $\frac{13}{9}$, $\frac{34}{33}$

5.8. Oblicz.

a) $0,(3) + \frac{1}{7}$ b) $0,(4) + 0,(5)$ c) $0,1(2) + 0,2(1)$ d) $1,(09) + 0,(90)$

5.9. Oblicz.

a) $2,(4) - 0,(8)$

b) $3,(21) - 1,(37)$

c) $2,(3) + 1,0(3) - 0,00(3)$

d) $5,(6) - 2,(42) - 1,(21)$

e) $3 \cdot 0,4(8) - 1,1(7)$

f) $\frac{2 \cdot 0,2(6) + 1,(3)}{0,0(4)}$

5.10. Porównaj liczby x i y.

a) $x = \frac{7}{12}$ $y = 0,(36)$

b) $x = \frac{7}{11}$ $y = 0,(45) + 0,(18)$

c) $x = 0,(6)$ $y = 0,8(3) + 0,1(6)$

d) $x = 0,6(36)$ $y = 0,(45) + 0,0(8)$

e) $x = 0,(78) - 0,(6)$ $y = 0,(51) + 0,(3)$

f) $x = 0,8(6) + 0,7(3)$ $y = 0,9(3) - 0,4(6)$

5.11. Oblicz.

a) $\frac{3}{7} - 3\frac{1}{3} + 2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{9}$

b) $\left[\left(-2\frac{3}{5}\right) : \left(-1\frac{1}{20}\right) + \frac{1,32}{1,98}\right] \cdot 2\frac{1}{3}$

c) $\frac{4,75 - \left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)}{30,25 + 3\frac{1}{8}} : 1\frac{3}{4}$

d) $(2,2 - 0,22 : 5,5) \cdot \left(3\frac{3}{4} - 1\frac{1}{8}\right) : 2\frac{5}{8}$

e) $\frac{0,216}{0,15} - \frac{1,96}{1,75} - \frac{0,88}{2,75}$

f) $\left(\frac{0,15}{0,216} + \frac{1,75}{1,5}\right) : 11\frac{1}{6}$

5.12. Czy suma dwóch ułamków dziesiętnych okresowych może być liczbą niewymierną?

5.13. Podaj przykład dwóch liczb o nieskończonych okresowych rozwinięciach dziesiętnych, których suma jest liczbą
a) całkowitą.
b) niecałkowitą o skończonym rozwinięciu dziesiętnym.
c) o nieskończonym rozwinięciu dziesiętnym.

5.14. Podaj przykład liczby zapisanej w postaci rozwinięcia okresowego wyłącznie cyframi 0 i 1, która jest
a) dodatnia i mniejsza od $\frac{1}{20}$.
b) większa od $\frac{1}{10}$ i mniejsza od 1.

5.15. Który znak: $<$, $=$ czy $>$ należy wstawić w miejsce $\boxed{?}$, aby otrzymać zależność prawdziwą?
a) $\frac{13}{15} \boxed{?} 0{,}8723$
b) $3\frac{1}{7} \boxed{?} 3\frac{2}{11}$
c) $2\frac{7}{9} \boxed{?} 2{,}(7)$
d) $4{,}823 \boxed{?} 4\frac{16}{21}$

5.16. Podaj trzydziestą piątą oraz tysięczną cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby.
a) $\frac{23}{37}$
b) $\frac{5}{11}$
c) $\frac{17}{55}$

5.17. Podaj przykład liczby wymiernej leżącej na osi liczbowej pomiędzy danymi liczbami.
a) $\frac{2}{7}$ i $\frac{3}{7}$
b) $2\frac{3}{11}$ i $2\frac{4}{11}$
c) $-1\frac{3}{17}$ i $-1\frac{4}{17}$
d) 0,23 i 0,24

5.18. Podaj przykład dwóch liczb leżących na osi liczbowej pomiędzy danymi liczbami.
a) $\frac{13}{5}$ i $\frac{14}{5}$
b) $\frac{7}{17}$ i $\frac{8}{17}$
c) $\frac{2}{3}$ i 1
d) $\frac{3}{22}$ i $\frac{2}{11}$

5.19. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę naturalną n, dla której ułamek $\frac{n}{1234}$ ma skończone rozwinięcie dziesiętne.

5.20. Podaj przykład liczby o nieskończonym rozwinięciu dziesiętnym, zapisanej wyłącznie za pomocą cyfr 0 i 1, która jest
a) wymierna.
b) niewymierna.

5.21. Czy podana liczba jest wymierna (zakładamy, że rozwinięcie jest nieskończone i zachowana jest reguła pisania kolejnych cyfr)?
a) 0,303003000300000300000…
b) 0,12345678910111213141 5… ⟵ po przecinku piszemy kolejne liczby naturalne
c) −1,0515253545556575859510 5115…

5.22. Które z podanych liczb są wymierne?

$0{,}151515\ldots$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $-\sqrt[3]{64}$, $2{,}0202202220\ldots$,
$0{,}0(3)$, $1\frac{5}{12}$, $-0{,}002313131313\ldots$, $13{,}25262728292102112\ldots$

5.23. Które z podanych liczb są niewymierne?

$\sqrt{3}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{39}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{7}$, $\left(2+\sqrt{16}\right)$, $5\sqrt{18}$,
$\left(3\sqrt{4}-2\sqrt{36}\right)$, $\left(7\sqrt{7}-7\right)$

5.24. Dane liczby uporządkuj rosnąco: $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$.

5.25. Dane liczby uporządkuj malejąco.

$\left(1-\sqrt{5}\right)$, $\sqrt{17}$, $\left(\sqrt{8}+2\right)$, $-\sqrt{121}$, $\frac{\sqrt{20}}{3}$

5.26. Który znak: $<$, $=$ czy $>$ należy wstawić w miejsce ? ?

a) $\frac{3\sqrt{5}-1}{4}$? $\frac{5\sqrt{3}-1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}}$? $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}-1}$ c) $\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$? $\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

5.27. Podaj przykład liczby niewymiernej leżącej na osi liczbowej pomiędzy danymi liczbami.

a) 1 i 2 b) $\frac{2}{5}$ i $\frac{1}{2}$ c) -2 i -1 d) $2\frac{1}{5}$ i $2\frac{1}{3}$

5.28. Podaj przykład liczby wymiernej leżącej na osi liczbowej pomiędzy danymi liczbami.

a) 0 i 0,(3) b) $-\sqrt{3}$ i $-\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$ i 3 d) $\sqrt{8}$ i $\sqrt{10}$

5.29. Podaj przykład dwóch liczb niewymiernych leżących na osi liczbowej pomiędzy danymi liczbami.

a) $\sqrt{6}$ i $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{11}$ i $\sqrt{12}$ c) $-\sqrt{14}$ i $-\sqrt{13}$ d) $\sqrt{8}$ i π

5.30. Przed wyjazdem na konferencję pani Anna wymieniła 2000 zł na dolary kanadyjskie po kursie 1 CAD = 2,82 PLN. Ile dolarów otrzymała? Gdy wróciła z wyjazdu, miała 120 dolarów kanadyjskich. Sprzedała je po kursie 1 PLN = 0,38 CAD. Ile złotych otrzymała? Ile pieniędzy straciła na wymianie 120 dolarów?

5.31. W automacie można kupić sok „Malinka" w różnych opakowaniach i cenach:

A. 0,20 l za 1,10 zł,
B. 0,25 l za 1,30 zł,
C. 0,33 l za 1,70 zł,
D. 0,50 l za 2,60 zł.

Którą ofertę należy wybrać, aby za 1 zł wypić najwięcej „Malinki"?

5.32. Dla każdej z liczb podaj jej przybliżenia dziesiętne do pierwszego, do drugiego i do trzeciego miejsca po przecinku.

$\frac{7}{16}$, $\frac{3}{19}$, $1\frac{9}{13}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{17}$, $-\frac{17}{2}$, $-3\frac{2}{21}$

5.33. Pięciu ekspertów zmierzyło szerokość spornej miedzy. Każdy z nich odczytał wynik z przyjętą przez siebie dokładnością:

50 cm, 47 cm, 47,6 cm, 47,64 cm, 47,638 cm

Tylko jeden z ekspertów podał zły wynik. Który wynik był błędny?

5.34. Długości boków prostokątnej działki zmierzono w metrach i centymetrach. Następnie zaokrąglono wyniki do pełnych metrów i otrzymano wymiary 6 m × 20 m. Jakie co najwyżej jest pole tej działki? Podaj wynik z dokładnością do 1 m^2.

Prosto do matury

1. W rozwinięciu dziesiętnym dodatniej i mniejszej od 1 liczby p nie występują cyfry inne niż 0 i 1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Liczba p nie może być wymierna.

B. Liczba p może być niewymierna.

C. Liczba p jest mniejsza od $\frac{1}{6}$.

2. Oblicz.

a) $0,(3) + \frac{2}{7} - 0,(2)$ b) $2 \cdot 3,(1) - 1,(5) - 4,(6)$

3. Sylwia kupiła pasek za 2,19 euro, ale następnego dnia wymieniła go na inny, za 2,89 euro. Dała sprzedawcy jedno euro. Ile reszty powinna otrzymać?

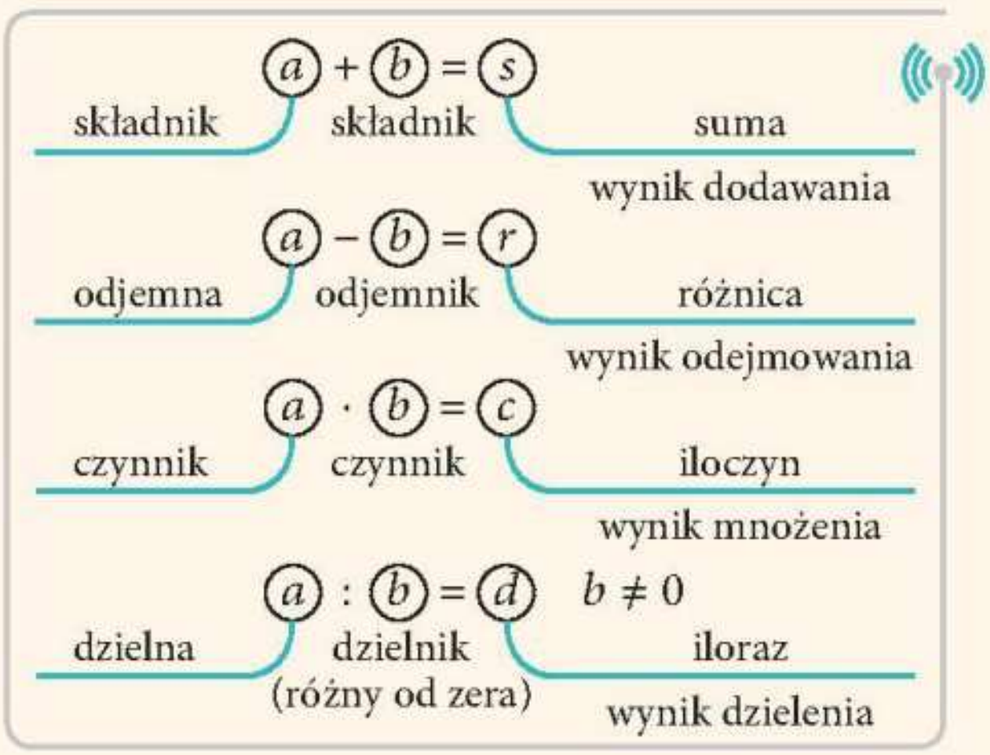
4. Stawka za godzinę pracy wynosi 14,70 zł i jest naliczana za każdą przepracowaną minutę. Ile zarobił robotnik, jeśli pracował od 7^{40} do 16^{10}?

5. Podaj przykład liczby, która leży na osi liczbowej pomiędzy $\frac{1}{20}$ a $\frac{1}{19}$ i ma rozwinięcie dziesiętne

a) skończone. b) nieskończone okresowe. c) nieskończone nieokresowe.

6. Warto powtórzyć – działania w zbiorze liczb rzeczywistych

Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb to cztery podstawowe działania określone w zbiorze liczb rzeczywistych. Jedynym ograniczeniem jest niewykonalność dzielenia przez zero.



W tabeli przypominamy podstawowe własności dodawania i mnożenia.

Własności dodawania	
jest łączne	$(a + b) + c = a + (b + c)$
jest przemienne	$a + b = b + a$
ma element neutralny: 0	$a + 0 = 0 + a = a$
dla każdej liczby a istnieje liczba przeciwna: $-a$	$a + (-a) = 0$
Własności mnożenia	
jest łączne	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
jest przemienne	$a \cdot b = b \cdot a$
ma element neutralny: 1	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
dla każdej liczby $a \neq 0$ istnieje liczba odwrotna: $\frac{1}{a}$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$
Własność wiążąca dodawanie z mnożeniem	
rozdzielność mnożenia względem dodawania	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Kolejność wykonywania działań

- Najpierw wykonujemy **działania w nawiasach**, w których nie ma już żadnego innego nawiasu.
- Jeżeli mamy kilka działań (bez nawiasów), to najpierw obliczamy **potęgi** i **pierwiastki**, potem wykonujemy **mnożenia** i **dzielenia** – w tej kolejności, w której występują, a następnie **dodawania** i **odejmowania** również w takiej kolejności, w jakiej występują.

Przykład 1 ◂ zad. 6.3

Wykonamy działania.

$$21 \cdot \{3 \cdot (18 - 15) + 7 \cdot (33 - 34)\} : 2 : 3 - 7 + 5 \cdot 3 : (2 + 15 : 5) =$$
$$= 21 \cdot \{3 \cdot 3 + 7 \cdot (-1)\} : 2 : 3 - 7 + 15 : 5 = 21 \cdot (9 - 7) : 2 : 3 - 7 + 3 =$$
$$= 21 \cdot 2 : 2 : 3 - 7 + 3 = 21 : 3 - 7 + 3 = 7 - 7 + 3 = 3$$

Z własności działań na liczbach rzeczywistych wynikają następujące wnioski:

- Różnicę dwóch liczb możemy zastąpić sumą odjemnej i liczby przeciwnej do odjemnika:
  $a - b = a + (-b)$
- Iloraz dwóch liczb możemy zastąpić iloczynem dzielnej i liczby odwrotnej do dzielnika (krócej: odwrotności dzielnika):
  $a : b = a \cdot \frac{1}{b}, \quad b \neq 0$
- Jeżeli iloczyn kilku czynników jest równy 0, to przynajmniej jeden z czynników musi być równy 0, w szczególności:
  jeśli $a \cdot b = 0$, to $a = 0$ lub $b = 0$

Ostatnia własność jest kluczem do rozwiązywania wielu równań. Jeżeli wiemy, że
$(x - 2)(x - 5)(x + 7) = 0$,
to znaczy, że $x - 2 = 0$ lub $x - 5 = 0$, lub $x + 7 = 0$.
Rozwiązaniami tego równania są liczby 2, 5, −7.

Przykład 2 ◂ zad. 6.4

Wykonamy działania.

a) $\frac{1}{3} + 0{,}3 = \frac{1}{3} + \frac{3}{10} = \frac{10}{30} + \frac{9}{30} = \frac{19}{30}$

b) $\frac{4}{5} \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

c) $\frac{5}{7} : 1\frac{4}{21} = \frac{5}{7} : \frac{25}{21} = \frac{5}{7} \cdot \frac{21}{25} = \frac{3}{5}$

Potęga o wykładniku naturalnym

Definicja

Jeżeli wykładnik potęgi n jest dodatnią liczbą naturalną i podstawa potęgi a jest dowolną liczbą rzeczywistą, to:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Dla dowolnej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość:

$$a^1 = a$$

Ponadto $1^n = 1$.

Własności działań na potęgach		
Działanie	**Wzór**	**Założenia**
iloczyn potęg o tej samej podstawie	$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$	n, k – dodatnie liczby naturalne
iloraz potęg o tej samej podstawie	$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$	$a \neq 0$, n, k – dodatnie liczby naturalne, $n > k$
potęga potęgi	$\left(a^n\right)^k = a^{n \cdot k}$	n, k – dodatnie liczby naturalne
potęga iloczynu	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	n – dodatnia liczba naturalna
potęga ilorazu	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$b \neq 0$, n – dodatnia liczba naturalna

Przykład 3

Wykonamy działania i zapiszemy wynik w prostszej postaci.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{1}{128}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^6 : \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

d) $\left[2^3 \cdot \left(2^3\right)^2\right] : \left[\left(2^4\right)^3 : \left(2^3\right)^2\right] = \left[2^3 \cdot 2^6\right] : \left[2^{12} : 2^6\right] = 2^9 : 2^6 = 2^3 = 8$

e) $\left[\left(a^5 \cdot a^2\right)^4 : \left(a^2\right)^3\right] \cdot \left[\left(a^7\right)^2 : \left(a^5\right)^2\right] = \left[a^{28} : a^6\right] \cdot \left[a^{14} : a^{10}\right] = a^{22} \cdot a^4 = a^{26}$, $a \neq 0$

f) $\left(-\frac{4a^5b^5}{3a^2}\right)^2 = \frac{4^2\left(a^5\right)^2\left(b^5\right)^2}{3^2(a^2)^2} = \frac{16a^{10}b^{10}}{9a^4} = \frac{16}{9} \cdot \frac{a^{10}}{a^4} \cdot b^{10} = 1\frac{7}{9}a^6b^{10}$, $a \neq 0$

Przykład 4 ◂ zad. 6.9

Wykonamy działania i zapiszemy wynik w prostszej postaci.

a) $\frac{\left(3^5 + 3^3\right) \cdot 2^3}{\left(3^3 + 7 \cdot 3^2\right) \cdot 2^2} = \frac{\left(3^3 \cdot 3^2 + 3^3\right) \cdot 2}{3^2 \cdot 3 + 7 \cdot 3^2} = \frac{3^3 \cdot \left(3^2 + 1\right) \cdot 2}{3^2 \cdot (3 + 7)} = \frac{3(9 + 1) \cdot 2}{10} = \frac{6 \cdot 10}{10} = 6$

b) $\dfrac{180 \cdot 6^3 - 29 \cdot 6^4}{72 + 6^3} =$

I sposób

$= \dfrac{180 \cdot 6^3 - 29 \cdot 6^3 \cdot 6}{2 \cdot 36 + 6^3} = \dfrac{6^3 \cdot (180 - 29 \cdot 6)}{2 \cdot 6^2 + 6^2 \cdot 6} = \dfrac{6^3 \cdot (6 \cdot 30 - 29 \cdot 6)}{6^2 \cdot (2 + 6)} =$

$= \dfrac{6 \cdot 6(30 - 29)}{8} = \dfrac{36 \cdot 1}{8} = \dfrac{36}{8} = 4\dfrac{4}{8} = 4\dfrac{1}{2}$

II sposób

$= \dfrac{6 \cdot 30 \cdot 6^3 - 29 \cdot 6^4}{6^2 \cdot 2 + 6^3} = \dfrac{30 \cdot 6^4 - 29 \cdot 6^4}{6^2 \cdot (2 + 6)} = \dfrac{6^4 \cdot (30 - 29)}{6^2 \cdot 8} =$

$= \dfrac{6^4}{6^2} \cdot \dfrac{1}{8} = 6^2 \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{36}{8} = \dfrac{9}{2} = 4\dfrac{1}{2}$

Warto pamiętać kolejne potęgi liczb 2, 3, 5:

$2^1 = 2$	$3^1 = 3$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$
$2^6 = 64$	
$2^7 = 128$	$5^1 = 5$
$2^8 = 256$	$5^2 = 25$
$2^9 = 512$	$5^3 = 125$
$2^{10} = 1024$	$5^4 = 625$

Notacja wykładnicza

W naukach przyrodniczych: fizyce, astronomii, chemii itd., często operujemy wielkościami bardzo małymi albo bardzo dużymi. W takiej sytuacji wygodnie jest użyć tzw. **notacji wykładniczej**, tzn. zapisać liczbę w postaci $k \cdot 10^n$, gdzie n jest liczbą całkowitą i $1 \leqslant k < 10$ (dla k dodatnich) lub $-10 < k \leqslant -1$ (dla k ujemnych).
Najpierw rozszerzamy definicję potęgi.

Definicja

- Jeżeli $a \neq 0$ i n jest dodatnią liczbą naturalną, to:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Jeżeli $a \neq 0$, to $a^0 = 1$.

Przykład 5

a) $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$

b) $10^{-5} = \dfrac{1}{10^5} = \dfrac{1}{100000} = 0{,}00001$

c) $0{,}0000000000001 = \dfrac{1}{100000000000000} = \dfrac{1}{10^{14}} = 10^{-14}$

d) $0{,}00000001 = 10^{-8}$

e) $10^0 = 1$

Uwaga – działania na potęgach o wykładnikach ujemnych podlegają tym samym prawom co działania na potęgach o wykładnikach naturalnych.

Przykład 6 ◀ zad. 6.12

Wykonamy działania i zapiszemy wynik w notacji wykładniczej.

$$3{,}6 \cdot 10^{-22} : \left(9 \cdot 10^{-7}\right) + 8{,}3 \cdot 10^{-16} =$$
$$= 0{,}4 \cdot 10^{-22} : 10^{-7} + 8{,}3 \cdot 10^{-16} =$$
$$= 0{,}4 \cdot 10^{-15} + 8{,}3 \cdot 10^{-16} =$$
$$= 4 \cdot 10^{-16} + 8{,}3 \cdot 10^{-16} = 12{,}3 \cdot 10^{-16} =$$
$$= 1{,}23 \cdot 10^{-15}$$

⟵ to nie jest zapis w notacji wykładniczej, ponieważ $12{,}3 > 10$

W notacji wykładniczej wykładnik potęgi liczby 10 wyznaczamy szybko w następujący sposób:

$$3\,700\,000 = 3{,}7 \cdot 10^{6}$$

Przecinek przesunął się o 6 miejsc w lewo, czyli wykładnik równa się 6.

$$0{,}000000297 = 2{,}97 \cdot 10^{-7}$$

Przecinek przesunął się o 7 miejsc w prawo, czyli wykładnik równa się -7.

Przykład 7 ◀ zad. 6.15

Powierzchnia Słońca wynosi 6,09 bilionów km^2, czyli 6 090 000 000 000 km^2. Można tę wielkość zapisać w notacji wykładniczej jako $6{,}09 \cdot 10^{12}\ \text{km}^2$.

Powierzchnia małej diody może wynosić około 1 mm^2. Obliczymy, ile razy większa jest powierzchnia Słońca od powierzchni takiej diody.

Rozwiązanie

$$\frac{6 \cdot 10^{12}\ \text{km}^2}{1\ \text{mm}^2} = \frac{6 \cdot 10^{12} \cdot (10^{6}\ \text{mm})^2}{1\ \text{mm}^2} = \frac{6 \cdot 10^{12} \cdot 10^{12}\ \text{mm}^2}{1\ \text{mm}^2} = 6 \cdot 10^{24}$$

Odp.: Powierzchnia Słońca jest około $6 \cdot 10^{24}$ razy większa od powierzchni diody.

Zadania

6.1. Oblicz.

a) $2{,}35 + 13{,}17 + 41{,}28 + 5{,}27$

b) $1128{,}33 + 2076 + 315{,}54 + 981{,}46$

c) $777{,}57 + 28{,}31 + 348{,}21 + 56{,}56 + 2012{,}77$

d) $0{,}28 + 13{,}39 + 0{,}025 + 0{,}305$

6.2. Oblicz.

a) $278{,}31 + 13{,}75 - 213{,}07 + 3{,}05 - 78{,}28$

b) $451{,}21 - 22{,}33 - 175{,}28 + 31 - 415{,}27$

c) $81{,}03 + 21{,}37 - 45{,}06 - 17{,}03 + 28{,}90$

d) $23{,}001 + 41{,}205 - 28{,}017 + 0{,}811$

6.3. Oblicz.

a) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right):1\frac{5}{6}+\frac{1}{2}$

b) $\left[\left(5\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}\right):2\frac{1}{4}+7\frac{5}{8}\right]:2\frac{7}{8}$

c) $\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+\left(2\frac{1}{2}-1\frac{7}{8}\right):\frac{1}{8}-2\frac{1}{4}$

d) $\left(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}\right):\frac{5}{6}-\left(3\frac{1}{3}-1\frac{1}{4}\right):2\frac{1}{12}$

6.4. Oblicz.

a) $\dfrac{8:\left(-1\frac{3}{5}\right)-\left(4\frac{1}{2}\cdot 1\frac{2}{3}-3\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{2}}$

b) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}:\left(1\frac{2}{3}-2\frac{1}{5}\right)}{\frac{2}{3}\cdot 1\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}$

c) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\cdot 2{,}7-\frac{7}{15}:\frac{1}{3}\right):\frac{1}{25}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)}{\frac{8}{15}+0{,}3}$

d) $\dfrac{\left(\frac{1}{5}+1{,}3\right):\frac{3}{2}-\left(18\frac{3}{4}-4{,}95\right):2\frac{3}{10}}{1\frac{1}{5}:0{,}6-2\frac{2}{5}\cdot 1{,}25}$

6.5. Oblicz.

a) $\dfrac{\left(1\frac{1}{3}+1\frac{2}{3}\cdot 1{,}2\right):1\frac{2}{3}-\left(1{,}75:1\frac{1}{8}-2\frac{1}{3}:5{,}25\right)\cdot 0{,}9}{\left(5\frac{5}{6}-5{,}5\right)\cdot 0{,}3}$

b) $\dfrac{\left(10-2\frac{1}{2}\right):1{,}5-1{,}75\cdot\left(2\frac{2}{7}-5\frac{6}{7}\right)}{2{,}25\cdot\left(2{,}5-2\frac{1}{4}\right)}$

c) $\dfrac{\left(16{,}5-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{33}+2\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{8}{33}-\frac{1}{11}\right)+\frac{2}{11}}{\left(6\frac{3}{4}+5{,}5\right)\cdot\frac{1}{7}-\frac{3}{4}}$

d) $\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot\left[5-\left(2\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)\right]}{3\frac{2}{3}+\frac{3}{8}:\left(3\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)}\cdot 6\frac{4}{5}$

6.6. Oblicz.

a) $1^3,\ (-1)^2,\ 1^2,\ (-1)^5$

b) $2^0,\ 2^2,\ (-2)^3,\ 2^5,\ 2^3,\ 2^6,\ (-2)^4$

c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2,\ \left(-\frac{2}{3}\right)^1,\ \left(\frac{3}{2}\right)^3$

d) $0{,}1^2,\ 0{,}2^3,\ 0{,}4^2,\ 0{,}05^1$

6.7. Przedstaw iloczyn w postaci potęgi.

a) $2^3\cdot 2^2$

b) $2^1\cdot 2^2\cdot 2^3$

c) $3^2\cdot 3^3\cdot 3^0$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6$

e) $(-2)^2\cdot(-2)^3\cdot(-2)^4$

f) $10\cdot 10^2\cdot 10^3$

g) $(-10)\cdot(-10)^3\cdot(-10)^5$

h) $0{,}2\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}2^4$

6.8. Dane liczby przedstaw w postaci potęgi lub iloczynu potęg.

a) 216, 576, 243, 392, 125

b) $2\frac{7}{9}$, $-3\frac{3}{8}$, $6\frac{1}{4}$, $-2\frac{10}{27}$, $5\frac{1}{16}$

6.9. Oblicz.

a) $\frac{5^{27}}{5^{27}-5^{26}}$

b) $\frac{2^{13}+2^{15}}{2^{11}-2^{10}}$

c) $\frac{3^{117}\cdot 2^{115}}{3^{116}\cdot 2^{117}+6^{115}}$

d) $\frac{32^7\cdot\left(27^6+81^5\right)}{64^6\cdot\left(9^9+243^4\right)}$

6.10. Która z liczb jest większa?

a) $2^{(3^4)}$ czy $4^{(3^2)}$

b) 4^{20} czy 2^{40}

c) 10^{100} czy 100^{10}

* d) 2^{30} czy 3^{20}

6.11. Przedstaw podaną liczbę w notacji wykładniczej.

a) 144 350 000 b) 0,0054 c) $20{,}31\cdot 10^3$ d) $321{,}4\cdot 10^4$

6.12. Oblicz. Wynik podaj w notacji wykładniczej.

a) $2\cdot 10^{15}\cdot 7\cdot 10^9$

b) $1{,}44\cdot 10^{12}:\left(1{,}2\cdot 10^5\right)$

c) $3\cdot 10^{10}+3{,}5\cdot 10^9$

d) $5{,}2\cdot 10^{-20}\cdot 3\cdot 10^{21}$

e) $2{,}2\cdot 10^{-5}+6\cdot 10^{-4}-8\cdot 10^{-3}$

f) $1{,}7\cdot 10^{-11}+5\cdot 10^{-7}\cdot 3\cdot 10^{-5}$

6.13. Przedstaw podaną wielkość w notacji wykładniczej.

a) prędkość światła – 300 000 000 m/s

b) masa atomu węgla – 0,000000000000000000000000166 kg

c) średnica ziarenka piasku – 0,000625 cm

d) grubość kartki papieru – 0,08 cm

e) masa wody w oceanach – ok. 1 350 000 000 000 000 000 ton

f) masa Księżyca – 73 490 000 000 000 000 000 000 kg

6.14. Przedstaw podaną wielkość w notacji wykładniczej.

a) trzynaście miliardów

b) sto pięć milionów

c) siedem dziesięciomilionowych

d) dziewiętnaście stutysięcznych

e) dwieście osiemdziesiąt milionowych

f) trzy tysiące dwieście stumilionowych

6.15. Odległość od Ziemi do Słońca wynosi około 150 mln km. Oblicz, ile minut zajęłoby pokonanie takiej drogi ślimakowi poruszającemu się z prędkością 5 cm/min. Wynik zapisz w notacji wykładniczej. Oszacuj, ile to lat. Przyjmij, że 1 rok to około pół miliona minut.

7. Potęga o wykładniku całkowitym

Umiejętności:

- obliczanie potęg o wykładniku całkowitym

Zauważmy, że $2^3 : 2^3 = 1$, a ogólniej, jeśli $a \neq 0$, to $a^n : a^n = 1$. Gdybyśmy zastosowali wzór na iloraz potęg, otrzymalibyśmy równość:

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

Dlatego naturalne jest przyjęcie następującej definicji potęgi o wykładniku zerowym.

Definicja

Jeżeli $a \neq 0$, to:

$$a^0 = 1$$

Podobna sytuacja jest przy określaniu potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym.

$$2^3 : 2^6 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}$$

Gdybyśmy i w tym przypadku zastosowali wzór na iloraz potęg, to otrzymalibyśmy równość $2^3 : 2^6 = 2^{3-6} = 2^{-3}$. Zatem $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

Definicja

Jeżeli $a \neq 0$ i $n \in \mathbf{N}$, to:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Jeżeli n jest dodatnią liczbą naturalną, to $0^n = 0$. Założenie, że podstawa potęgi jest różna od zera, potrzebne jest wtedy, gdy wykładnik jest zerem lub ujemną liczbą całkowitą.

Przykład 1 ◀ zad. 7.3

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}, \qquad \left(\frac{5}{11}\right)^{-2} = \left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{121}{25}$$

Własności działań na potęgach		
Działanie	**Wzór**	**Założenia**
iloczyn potęg o tej samej podstawie	$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$	$a \neq 0,\ n, k$ – liczby całkowite
iloraz potęg o tej samej podstawie	$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$	$a \neq 0,\ n, k$ – liczby całkowite
potęga potęgi	$\left(a^n\right)^k = a^{n \cdot k}$	$a \neq 0,\ n, k$ – liczby całkowite
potęga iloczynu	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$a \neq 0,\ \ b \neq 0,\ n$ – liczba całkowita
potęga ilorazu	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$a \neq 0,\ \ b \neq 0,\ n$ – liczba całkowita

Udowodnimy wzór $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$. Zakładamy, że $a \neq 0,\ n, k$ – liczby całkowite. Z wcześniejszej nauki wiemy, że wzór jest prawdziwy dla wykładników n i k naturalnych i większych od zera. Jeżeli $n = 0$ lub $k = 0$, to na mocy definicji $a^0 = 1$ i wzór jest prawdziwy. Rozpatrzymy teraz dwa przypadki (w pierwszym dla ułatwienia w prawej kolumnie tabeli podajemy odpowiednio dobrane przykłady).

I. Tylko jedna z liczb n i k jest ujemna, np. $n > 0,\ \ k < 0$.

Oznaczmy $k = -m$. Wówczas $a^n \cdot a^k = a^n \cdot a^{-m} = \frac{a^n}{a^m}$ na mocy definicji.

a) $n > m$. Wówczas istnieje takie $p > 0$, że $n = m + p$.	
$a^n \cdot a^{-m} = \frac{a^n}{a^m} = \frac{a^{m+p}}{a^m} = \frac{a^m \cdot a^p}{a^m} =$ $= a^p = a^{n-m} = a^{n+(-m)}$	$n = 7,\ \ m = 3$. Zatem $p = 4$. $a^7 \cdot a^{-3} = \frac{a^7}{a^3} = \frac{a^{3+4}}{a^3} = \frac{a^3 \cdot a^4}{a^3} =$ $= a^4 = a^{7-3} = a^{7+(-3)}$
b) $n = m$	
$a^n \cdot a^{-m} = \frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^n} = 1 = a^0 = a^{n-m} = a^{n+(-m)}$	$a^7 \cdot a^{-7} = \frac{a^7}{a^7} = 1 = a^0 = a^{7-7} = a^{7+(-7)}$
c) $n < m$. Wówczas istnieje takie $p > 0$, że $m = n + p$.	
$a^n \cdot a^{-m} = \frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^{n+p}} = \frac{a^n}{a^n \cdot a^p} = \frac{1}{a^p} =$ $= a^{-p} = a^{n-m} = a^{n+(-m)}$	$n = 2,\ \ m = 5$. Zatem $p = 3$. $a^2 \cdot a^{-5} = \frac{a^2}{a^5} = \frac{a^2}{a^{2+3}} = \frac{a^2}{a^2 \cdot a^3} = \frac{1}{a^3} =$ $= a^{-3} = a^{2-5} = a^{2+(-5)}$

II. Obydwie liczby n i k są ujemne. Przyjmujemy oznaczenia $n = -r$ oraz $k = -m$.

$$a^{-r} \cdot a^{-m} = \frac{1}{a^r} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^r \cdot a^m} = \frac{1}{a^{r+m}} = a^{-(r+m)} = a^{-r-m} = a^{(-r)+(-m)}$$

Zatem rozpatrywany wzór jest prawdziwy.

Podobnie dowodzi się prawdziwości pozostałych wzorów. Przeprowadźcie te dowody samodzielnie jako dodatkowe ćwiczenie.

Przykład 2 ◀ zad. 7.7

Które z wyrażeń jest zapisem większej liczby: $\left(\frac{3}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{4}$ czy $\left(2\frac{3}{5}\right)^{11} \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^{-9}$?

Rozwiązanie

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{4} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-6+4} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^{2} = \frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}$$

$$\left(2\frac{3}{5}\right)^{11} \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^{-9} = \left(\frac{13}{5}\right)^{11} \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^{-9} = \left(\frac{13}{5}\right)^{11-9} = \left(\frac{13}{5}\right)^{2} = \frac{169}{25} = 6\frac{19}{25}$$

Odp.: $\left(2\frac{3}{5}\right)^{11} \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^{-9} > \left(\frac{3}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{4}$

Przykład 3 ◀ zad. 7.6

Zapiszemy podane wyrażenie w postaci potęgi Y^p, gdzie p jest liczbą całkowitą, a Y jest liczbą lub wyrażeniem.

a) $\frac{3^4}{3^8} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$

b) $\frac{(a-1)^3}{(a-1)^5} = (a-1)^{3-5} = (a-1)^{-2}$. Ten przykład wymaga założenia, że $a \neq 1$.

c) $(a+b)^3 \cdot (a+b)^{-3} = (a+b)^{3-3} = (a+b)^0 = 1$, przy założeniu, że $(a+b) \neq 0$

Przykład 4

Zapiszemy wyrażenia w prostszej postaci, podając potrzebne założenia.

a) $(c+d)^{1-n^2} \cdot (c+d)^{n^2} = (c+d)^{1-n^2+n^2} = c+d, \quad c+d \neq 0, \quad n \in \mathbf{Z}$

b) $\frac{(2x+5)^7}{(2x+5)^3} = (2x+5)^{7-3} = (2x+5)^4, \qquad x \neq -\frac{5}{2}$

Przykład 5 ◀ zad. 7.14

Zapiszemy wyrażenie $\left(\frac{x^{-2}}{1+x^{-2}}\right) \cdot \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{-1}$ w prostszej postaci, a następnie obliczymy jego wartość dla $x = -3$.

Rozwiązanie

Zakładamy, że $x \neq 0$.

$$\left(\frac{x^{-2}}{1+x^{-2}}\right)\cdot\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{-1} = \left(\frac{x^{-2}}{1+x^{-2}}\right)\cdot\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \frac{x^{-2}\cdot\left(x^2+1\right)}{\left(1+x^{-2}\right)\cdot x} =$$

$$= \frac{1+x^{-2}}{\left(1+x^{-2}\right)\cdot x} = \frac{1}{x} \qquad \longleftarrow \text{zauważmy, że } x^{-2}\cdot\left(x^2+1\right) = x^{-2+2}+x^{-2} = x^0+x^{-2}$$

Wartość wyrażenia dla $x=-3$ jest zatem równa $-\frac{1}{3}$.

Odp.: $\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{3}$, $x \neq 0$

Zadania

W każdym z zadań 7.1 i 7.2 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Wskaż liczbę równą liczbie $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}\right]^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$.

A. $\frac{5}{3}$ **B.** 1 **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{9}{25}$

7.2. Wskaż największą liczbę.

A. $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$ **B.** $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **C.** $\left(-3\frac{1}{5}\right)^{0}$ **D.** $\left(-1\frac{1}{7}\right)^{-2}$

7.3. Oblicz.

a) 2^{-1}, 3^{-1}, $(-5)^{-1}$, 8^{-1}, $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$, $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$, $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(-2\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-4}$, $\left(3\frac{2}{5}\right)^{0}$, $\left(-1\frac{1}{5}\right)^{-2}$

c) $0{,}1^2$, $0{,}4^{-2}$, $0{,}05^{-1}$, $(-0{,}2)^{-3}$, $0{,}25^{-2}$, $(-0{,}125)^{-1}$, $2{,}5^{-2}$, $(-3{,}125)^{0}$

d) $\left(1\frac{1}{5}\right)^{-1}$, $\left(2\frac{1}{3}\right)^{2}$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}$, $\left(-\frac{1}{18}\right)^{0}$, $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}$, $(-3)^{-3}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$, $\left(-3\frac{1}{2}\right)^{-1}$

7.4. Oblicz potęgi; wyniki podaj z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku.

a) $3{,}2^2$, $1{,}6^3$, $0{,}4^4$, $2{,}8^2$, $0{,}7^3$, $3{,}1^4$

b) $1{,}52^2$, $0{,}08^3$, $3{,}14^2$, $(-5{,}2)^2$, $(-7{,}01)^2$, $(-0{,}112)^2$

7.5. Jeżeli $\frac{m\cdot m\cdot m}{m+m+m} = 5$, to ile jest równe m^2?

7.6. Zapisz iloraz w postaci potęgi.

a) $\frac{3^6}{3^4}$ b) $\frac{53^3}{53^4}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^5$ d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$

7.7. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

a) 2^3, 3^{-3}, 15^0, $(-2)^5$, 3^2

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(\frac{1}{15}\right)^{-1}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $(-5)^3$, $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}$

7.8. Oblicz.

a) $\frac{3^{21}}{9^{10}}$, $\frac{5^{19}}{25^{10}}$, $\frac{2^5 \cdot 3^4}{6^4}$, $\frac{2^{17}-2^{16}}{2^{15}}$

b) $\frac{3^{20}}{3^{22}-3^{21}}$, $\frac{6^{13}}{3^{14}} \cdot \frac{5^{10}}{10^{12}}$, $\frac{2^{19} \cdot 15^3 \cdot 3^{15}}{6^{18} \cdot 5^2}$

7.9. Oblicz.

a) $4^{-3} \cdot 0{,}125^{-3}$

b) $2{,}5^{-2} \cdot 0{,}2^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$

d) $2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^{-3}$

e) $5^{-7} \cdot 4^{-7} \cdot 0{,}05^{-7}$

f) $2^0 \cdot 5^0 : \left(\frac{1}{13}\right)^0$

7.10. Oblicz.

a) $5^{-2} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-2}$

b) $8^{-3} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{-3}$

c) $\left(3\frac{1}{7}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{7}{11}\right)^{-4}$

d) $\left(6\frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot (-0{,}2)^{-1}$

e) $4^{-2} \cdot 4^2$

f) $3^5 \cdot 3^{-8}$

g) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^4$

h) $\left(2\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^{-3}$

7.11. Oblicz.

a) $\left(2^{-3}\right)^{-4} : 2^6$

b) $\left(5^{-2}\right)^3 : \left(5^{-3}\right)^2$

c) $\left(3^{-5}\right)^0 : \left(3^2\right)^{-1}$

d) $\left(1\frac{1}{5}\right)^{-2} : 0{,}3^{-2}$

e) $(-0{,}1)^{-5} : 0{,}1^{-4}$

f) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-6} : (-0{,}2)^{-4}$

g) $(-0{,}25)^5 : \left(\frac{1}{4}\right)^3$

h) $\left(1\frac{2}{5}\right)^{-2} : 1{,}4^{-3}$

7.12. Oblicz.

a) $\frac{2^0 + 2^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 5 \cdot (-2)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} + \frac{3}{4}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \cdot 8^{-2} + \left(-64^{-1}\right)^{-2} \cdot 2^{-13} - 0{,}2^{-3} \cdot 125^{-1}$

c) $3 \cdot \left[5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^2 \cdot \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} + 3 \cdot 2^{-3}\right]^{-2}$

d) $\frac{\left[\left(\frac{1}{4^{-1}} + \frac{3}{9^{-1}}\right) - \left(\frac{1}{5^{-2}} - \frac{2}{3^{-2}}\right)\right] \cdot \left(5^0 - 5^{-2}\right)^{-1}}{\left(2 \cdot 5^{-1} - 5^{-2}\right)^{-1}}$

7.13. Rozwiąż równanie.

a) $2^{16}x + 8^5 \cdot 5 = 2^5 \cdot \left(4^5 x + 8^5\right)$

b) $27^5 x - 12 \cdot 9^6 = 81^3 \cdot (3x - 4)$

7.14. Oblicz wartość wyrażenia dla $a = -2$.

a) $a^0 \cdot a^{-1} \cdot a^2 \cdot a^{-3} \cdot a^4$

b) $\left(a \cdot a^{-3} \cdot a^5 \cdot a^{-7}\right)^{-1}$

c) $\dfrac{\left(a^2\right)^3 \cdot \left(a^3\right)^4}{\left(a^3\right)^5}$

d) $\dfrac{\left(a^{-3}\right)^2 \cdot \left(a^2\right)^{-1}}{\left(a^{-4}\right)^2 \cdot a^{-1}}$

D **7.15.** Wykaż, że zachodzi równość $\dfrac{5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} - 4^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}} = 2\frac{1}{3}$.

D ✽ **7.16.** Wykaż, że podana liczba jest naturalna.

$$15^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-11} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-12} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-13} \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^{-14} + 7 \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^{-11} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-10} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^5$$

✽ **7.17.** Oblicz $\dfrac{5 \cdot 4^{-15} \cdot 9^{-9} - 4 \cdot 3^{-20} \cdot 8^{-9}}{3 \cdot 2^{-9} \cdot 6^{-19} - 2^{-29} \cdot 27^{-6}}$.

✽✽ **7.18.** Oblicz $\left(1 - 2^{-2}\right) \cdot \left(1 - 3^{-2}\right) \cdot \left(1 - 4^{-2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - 99^{-2}\right) \cdot \left(1 - 100^{-2}\right)$.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $5^{-2} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-2} = 25$ **B.** $\left(11^{-2}\right)^{-3} \cdot 11^{-4} > 11^2$ **C.** $\left(3^{-1}\right)^{-3} \cdot 3^{-5} < 1$

2. Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} - 7 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}}{\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} + 2\frac{1}{3}}$.

3. Uporządkuj liczby $0{,}25^{-2}$, $0{,}4^{-1}$, $(-0{,}1)^{-4}$, $0{,}5^{-3}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

4. Przedstaw wyrażenie $\left(\dfrac{a^{-2}}{1 + a^{-2}} - 1\right) : \left(a^2 + 1\right)^{-1}$ w prostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $a = -2$.

D **5.** Wykaż, że liczba $\left(8 - 6 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^0\right)^{-2}$ jest rozwiązaniem równania $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}(3x - 1) = 27(3 - x) - \left(\frac{1}{9}\right)^{-2}$.

8. Warto powtórzyć – pierwiastki kwadratowe i sześcienne

Definicja

- **Pierwiastkiem kwadratowym** (stopnia drugiego) z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b, która podniesiona do kwadratu jest równa a:

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0 \text{ i } b^2 = a$$

- **Pierwiastkiem sześciennym** (stopnia trzeciego) z liczby a nazywamy taką liczbę b, która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a:

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Liczbę a nazywamy **liczbą podpierwiastkową**.

Zwróćmy uwagę na dwa założenia w definicji pierwiastka kwadratowego, różniące ją od definicji pierwiastka sześciennego:

1. liczba pod pierwiastkiem kwadratowym jest nieujemna (gdyby np. $\sqrt{-2} = b$, to prawdziwa byłaby równość $b^2 = -2$, co nie jest możliwe),
2. wartość pierwiastka kwadratowego jest nieujemna (założenie zrobione po to, aby pierwiastkowanie było jednoznaczne – każdej nieujemnej liczbie przyporządkowany jest dokładnie jeden pierwiastek drugiego stopnia, np. na mocy definicji $\sqrt{4} = 2$, mimo że również $(-2)^2 = 4$).

Jeżeli $\sqrt{a} = x$, to $a \geqslant 0$ i $x \geqslant 0$.
$\sqrt{0} = 0,\ \sqrt{1} = 1$

Przykład 1 ◂ zad. 8.1, 8.2

Obliczymy podane pierwiastki.

a) $\sqrt{\frac{64}{121}} = \frac{8}{11}$, bo $\left(\frac{8}{11}\right)^2 = \frac{64}{121}$

b) $\sqrt{20\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$, bo $\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$

c) $\sqrt[3]{1000} = 10$, bo $10^3 = 1000$

d) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$, bo $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$

$\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Używając kalkulatora lub komputera, możemy znaleźć jej przybliżone rozwinięcie dziesiętne: $\sqrt{2} = 1{,}414213562373\ldots$
Podobnie $\sqrt[3]{7} = 1{,}912931182\ldots$
Rozwinięcia dziesiętne $\sqrt{2}$ i $\sqrt[3]{7}$ są nieskończone i nieokresowe.

Działania na pierwiastkach kwadratowych i sześciennych

Twierdzenie

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ dla $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$
- $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$

Iloczyn pierwiastków tego samego stopnia jest równy pierwiastkowi z iloczynu.

Przykład 2 ◀ zad. 8.4, 8.5

Wykonamy podane działania.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{128} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 32} = \sqrt{64 \cdot 4} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{4} = 8 \cdot 2 = 16$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 15} = \sqrt{15 \cdot 15} = 15$

c) $\sqrt{2 \cdot 18 \cdot 49} = \sqrt{36 \cdot 49} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{49} = 6 \cdot 7 = 42$

d) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \cdot 16} = \sqrt[3]{4 \cdot 4^2} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

Twierdzenie

- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ dla $a \geqslant 0$ i $b > 0$
- $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ dla $b \neq 0$

Iloraz pierwiastków tego samego stopnia jest równy pierwiastkowi z ilorazu.

Przykład 3 ◀ zad. 8.6

Wykonamy podane działania.

a) $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}$

b) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$

c) $\sqrt[3]{\frac{216}{512}} = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{512}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

d) $\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54 : 2} = \sqrt[3]{27} = 3$

Przykład 4

Obliczymy pierwiastki, rozkładając liczby podpierwiastkowe na czynniki.

a) $\sqrt{441} = \sqrt{9 \cdot 49} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{49} = 3 \cdot 7 = 21$ ⟵ 441 jest podzielne przez 9, bo suma cyfr jest podzielna przez 9

b) $\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{9 \cdot 192} = \sqrt[3]{9 \cdot 3 \cdot 64} =$ ⟵ 1728 jest podzielne przez 9

$= \sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$

c) $\sqrt{5\frac{19}{25}} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$

Praktycznym zastosowaniem obydwu podanych twierdzeń jest wyłączanie czynnika spod znaku pierwiastka. W tym celu sprawdzamy, czy liczba pod pierwiastkiem jest podzielna przez kwadraty liczb, a w wypadku pierwiastków sześciennych – sześciany liczb naturalnych.

Przykład 5 ◀ zad. 8.8

Wyłączymy czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$

b) $\sqrt{250} = \sqrt{25 \cdot 10} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{10} = 5\sqrt{10}$ ⟵ $\sqrt{10} = \sqrt{2 \cdot 5}$ jest liczbą niewymierną

c) $\sqrt{384} = \sqrt{4 \cdot 96} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 24} = \sqrt{4^2 \cdot 4 \cdot 6} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = 8\sqrt{6}$

d) $\sqrt[3]{96} = \sqrt[3]{8 \cdot 12} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{12} = 2\sqrt[3]{12}$

e) $\sqrt{2\frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 5}}{3} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$

f) $\sqrt{2{,}42} = \sqrt{2 \cdot 1{,}21} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1{,}21} = \sqrt{2} \cdot 1{,}1 = 1{,}1\sqrt{2}$

Przykład 6 ◀ zad. 8.9

Wyłączymy wspólny czynnik przed nawias i uprościmy ułamek.

a) $\frac{\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{3} - 1\right)}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{3} - 1$

b) $\frac{\sqrt[3]{192} + 4}{\sqrt[3]{3} + 1} = \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 64} + 4}{\sqrt[3]{3} + 1} = \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{64} + 4}{\sqrt[3]{3} + 1} = \frac{\sqrt[3]{3} \cdot 4 + 4}{\sqrt[3]{3} + 1} = \frac{4\left(\sqrt[3]{3} + 1\right)}{\sqrt[3]{3} + 1} = 4$

Zadania

8.1. Oblicz pierwiastki: $\sqrt{121}$, $\sqrt{324}$, $\sqrt{0{,}0016}$, $\sqrt{3{,}61}$, $\sqrt{5\frac{4}{9}}$, $\sqrt{1\frac{11}{25}}$, $\sqrt{3\frac{6}{25}}$.

8.2. Oblicz pierwiastki: $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{0{,}008}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{1728}$, $\sqrt[3]{-729}$, $\sqrt[3]{3375}$.

8.3. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

a) $\sqrt{9}$, $3 - \sqrt{4}$, $2\sqrt{35}$, $\sqrt{100}$, $1 - \sqrt{125}$

b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{3}$, $\sqrt{27}$, $1 - \sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{2} - 4$, $5 + \sqrt{3}$, $2\sqrt{3} - 2$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{7}$

8.4. Oblicz iloczyn pierwiastków.

a) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$

b) $\sqrt{147} \cdot \sqrt{3}$

c) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}$

d) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{64}$

e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{12}$

f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{18}$

g) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{8}$

h) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{20}$

i) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{12}$

8.5. Oblicz pierwiastki z iloczynów.

a) $\sqrt{3 \cdot 4 \cdot 12}$, $\sqrt{2 \cdot 9 \cdot 18}$, $\sqrt{7 \cdot 3 \cdot 21}$

b) $\sqrt{2 \cdot 6 \cdot 3}$, $\sqrt{2 \cdot 18 \cdot 9}$, $\sqrt{2 \cdot 8 \cdot 16}$

c) $\sqrt{25 \cdot 18 \cdot 2}$, $\sqrt{2 \cdot 25 \cdot 8}$, $\sqrt{3 \cdot 9 \cdot 12}$

d) $\sqrt{6 \cdot 12 \cdot 8}$, $\sqrt[3]{3 \cdot 9 \cdot 64}$, $\sqrt[3]{36 \cdot 30 \cdot 25}$

8.6. Oblicz iloraz pierwiastków.

a) $\sqrt{75} : \sqrt{3}$

b) $\sqrt{80} : \sqrt{5}$

c) $\sqrt{242} : \sqrt{2}$

d) $\sqrt{\frac{7}{16}} : \sqrt{\frac{28}{9}}$

e) $\sqrt{\frac{2}{9}} : \sqrt{\frac{8}{25}}$

f) $\sqrt{6\frac{6}{11}} : \sqrt{5\frac{1}{2}}$

g) $\sqrt[3]{\frac{2}{9}} : \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

h) $\sqrt[3]{1\frac{2}{3}} : \sqrt[3]{\frac{5}{81}}$

i) $\sqrt[3]{3\frac{1}{7}} : \sqrt[3]{134\frac{3}{4}}$

8.7. Oblicz.

a) $\sqrt{25} - \sqrt{9} - \sqrt{25 - 9}$

b) $\sqrt{225 - 144} + \sqrt{225} - \sqrt{144}$

c) $\sqrt{324} + \sqrt{576} - \sqrt{324 + 576}$

d) $\sqrt{144 + 256} - \sqrt{144} - \sqrt{256}$

8.8. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{48}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{80}$

b) $\sqrt{128}$, $\sqrt{294}$, $\sqrt{486}$, $\sqrt{405}$, $\sqrt{320}$

c) $\sqrt[3]{40}$, $\sqrt[3]{56}$, $\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{135}$, $\sqrt[3]{270}$, $\sqrt[3]{448}$

d) $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{-16}$, $\sqrt[3]{1\frac{13}{27}}$, $\sqrt[3]{-1\frac{34}{216}}$

8.9. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias i uprość ułamek.

a) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{27}}{5\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{45} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

c) $\frac{2\sqrt{7} + \sqrt{14}}{\sqrt{7}}$

d) $\frac{3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

8.10. Oblicz.

a) $\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{12}\right)$

b) $\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{32} - \sqrt{40{,}5} + \sqrt{0{,}5}\right)$

c) $\left(\sqrt{125} + \sqrt{80} - \sqrt{45}\right) : \sqrt{5}$

d) $\left(\sqrt{28} - \sqrt{112} + \sqrt{252}\right) : \sqrt{7}$

e) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{48} + \sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{-128}}{\sqrt[3]{2}}$

8.11. Oblicz.

a) $\sqrt{-2\sqrt[3]{-8}}$

b) $\sqrt[3]{2^5 \cdot 2^4 \cdot 2^3}$

c) $\frac{\sqrt[3]{-60} \cdot \sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}}$

d) $\sqrt{7\frac{1}{9} - \frac{\sqrt[3]{-0{,}027}}{0{,}3} - 2\frac{2}{3}}$

e) $\frac{\sqrt{1\frac{7}{9} - 2\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}}}{\sqrt[3]{-0{,}008}} - 2\sqrt{1}$

f) $\frac{\sqrt{1{,}21} + 5\sqrt[3]{0{,}008} - \sqrt{4{,}41}}{\sqrt{13}}$

9. Pierwiastki wyższych stopni

Umiejętności:
- posługiwanie się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia
- stosowanie praw działań na pierwiastkach
- przedstawianie liczb rzeczywistych w różnych postaciach
- znoszenie niewymierności z mianownika

Podobnie jak pierwiastki kwadratowe i sześcienne, nazywane inaczej pierwiastkami drugiego i trzeciego stopnia, definiujemy pierwiastki wyższych stopni.

Przypomnijmy, że w definicji pierwiastka kwadratowego:
- liczba pod pierwiastkiem jest nieujemna,
- wartość pierwiastka jest nieujemna.

Jeżeli $\sqrt{a} = x$, to $a \geqslant 0$ i $x \geqslant 0$.
$\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$

W definicji pierwiastka kwadratowego założenie, że liczba pod pierwiastkiem nie może być ujemna, wynika stąd, że w zbiorze liczb rzeczywistych nie ma przecież liczby, która podniesiona do kwadratu byłaby równa np. -64.

Inaczej wygląda sprawa, gdy przyjrzymy się podnoszeniu liczb do potęgi trzeciej. Na przykład $(-4)^3 = -64$, zatem $\sqrt[3]{-64} = -4$. Podobnie $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[3]{-1} = -1$ itd.

Takie same zastrzeżenia będą dotyczyły pierwiastków wyższych stopni. Dlatego w definicji odróżnimy pierwiastki stopnia parzystego i stopnia nieparzystego.

Definicja

- **Pierwiastkiem stopnia** n, gdy n jest **parzystą** liczbą naturalną większą od zera, z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b, która podniesiona do potęgi n jest równa a:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ i } n \text{ jest dodatnią liczbą naturalną parzystą,}$$
$$\text{gdy } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0 \text{ oraz } b^n = a$$

- **Pierwiastkiem stopnia** n, gdy n jest **nieparzystą** liczbą naturalną większą od 1, z liczby a nazywamy taką liczbę b, która podniesiona do potęgi n jest równa a:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ i } n \text{ jest liczbą naturalną nieparzystą większą od 1,}$$
$$\text{gdy } b^n = a$$

Przykład 1 ◀ zad. 9.4

a) $\left(\sqrt[5]{0}\right)^5 = 0$, $\left(\sqrt[6]{5}\right)^6 = 5$, $\left(\sqrt[16]{3}\right)^{16} = 3$,
$\left(\sqrt[4]{16}\right)^4 = 16$, $\left(\sqrt[7]{4}\right)^7 = 4$, $\left(\sqrt[23]{\pi}\right)^{23} = \pi$,
$\left(\sqrt[11]{-1}\right)^{11} = -1$, $\left(\sqrt[9]{-0{,}3}\right)^9 = -0{,}3$

b) $\sqrt[4]{16} = 2$, bo $2^4 = 16$
$\sqrt[5]{-243} = -3$, bo $(-3)^5 = -243$
$\sqrt[10]{1} = 1$, bo $1^{10} = 1$

W definicji pierwiastka stopnia parzystego przyjmujemy, że wartość pierwiastka jest nieujemna, po to, aby pierwiastkowanie było jednoznaczne. Przy takim bowiem założeniu każdej nieujemnej liczbie przyporządkowany jest dokładnie jeden pierwiastek danego stopnia.
Na przykład na mocy definicji $\sqrt[4]{16} = 2$, mimo że również $(-2)^4 = 16$.

Zauważmy, że jeśli do wzoru na iloczyn pierwiastków kwadratowych
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, gdzie $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$
w miejsce b podstawimy a, to otrzymamy równość: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2}$.
Przy iloczynie trzech pierwiastków mamy: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^3}$.
Czyli inaczej, prawdziwy jest wzór $\left(\sqrt{a}\right)^3 = \sqrt{a^3}$. Podobnie rozumując, wyprowadzamy wzór $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3}$.
Wzory te możemy uogólnić na n czynników w iloczynie pierwiastków (n-tą potęgę pierwiastka), czyli prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Dla liczb rzeczywistych a oraz $n \in \mathbf{N}$ i $n \neq 0$ prawdziwe są równości:
- $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$, przy czym $a \geqslant 0$,
- $\left(\sqrt[3]{a}\right)^n = \sqrt[3]{a^n}$.

Dowód tego twierdzenia pomijamy.

Przykład 2 ◀ zad. 9.9

Wykonamy podane działania.

a) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^5 = \sqrt[3]{3^5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3^2} = 3\sqrt[3]{9}$

b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \cdot 16} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

c) $\sqrt[3]{7^2 \cdot 7 \cdot 7^3} = \sqrt[3]{7^{2+1+3}} = \sqrt[3]{7^6} = \left(\sqrt[3]{7^3}\right)^2 = 7^2 = 49$
lub $\sqrt[3]{7^2 \cdot 7 \cdot 7^3} = \sqrt[3]{7^{2+1} \cdot 7^3} = \sqrt[3]{7^3 \cdot 7^3} = \sqrt[3]{7^3} \cdot \sqrt[3]{7^3} = 7 \cdot 7 = 49$

d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \left(\sqrt{8}\right)^3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5 \cdot 2} \cdot \sqrt{8^3} = 5 \cdot \sqrt{2 \cdot (2^3)^3} =$
$= 5 \cdot \sqrt{2 \cdot 2^9} = 5 \cdot \sqrt{2^{10}} = 5 \cdot 2^5 = 5 \cdot 32 = 160$

Odpowiednie wzory dla pierwiastków wyższych stopni przyjmują postać:

Wzór	Założenia	
	dla **parzystego** $n > 0$	dla **nieparzystego** $n > 1$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$	—
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$a \geqslant 0$ i $b > 0$	$b \neq 0$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$	$a > 0$ i $k \in \mathbf{Z}$	$a \neq 0$ i $k \in \mathbf{Z}$

Przykład 3 ◀ zad. 9.11

Uprościmy podane wyrażenie.

a) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{-2}} = \sqrt[5]{-\frac{64}{2}} = \sqrt[5]{-32} = -2$

b) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = 2$

c) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{7 \cdot 7^2} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

d) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2 = \sqrt[3]{\left(\sqrt{27}\right)^2} = \sqrt[3]{27} = 3$

Przykład 4 ◀ zad. 9.7

Wyłączymy wspólny czynnik przed nawias i uprościmy ułamek.

a) $\frac{\sqrt[5]{6} - \sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{\sqrt[5]{2}\left(\sqrt[5]{3} - 1\right)}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{3} - 1$

b) $\left(\frac{\sqrt[5]{12} - \sqrt[5]{6}}{\sqrt[5]{4} - \sqrt[5]{2}}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{6} - \sqrt[5]{6}}{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{2}}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt[5]{6}\left(\sqrt[5]{2} - 1\right)}{\sqrt[5]{2}\left(\sqrt[5]{2} - 1\right)}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt[5]{6}}{\sqrt[5]{2}}\right)^5 = \left(\sqrt[5]{3}\right)^5 = 3$

Usuwanie niewymierności z mianownika

W wielu operacjach matematycznych wygodniejszy jest taki zapis liczby rzeczywistej będącej ilorazem liczb rzeczywistych, w którym mianownik jest liczbą wymierną – o ile jest to możliwe. Aby do takiej postaci doprowadzić, czyli usunąć niewymierność z mianownika, najczęściej mnożymy licznik i mianownik przez odpowiednio dobrane wyrażenie. Wyjaśnimy to na przykładach.

Przykład 5 ◀ zad. 9.13

Usuniemy niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ⟵ licznik i mianownik pomnożyliśmy przez $\sqrt{5}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ ⟵ licznik i mianownik pomnożyliśmy przez $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $\frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{15} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ ⟵ licznik i mianownik pomnożyliśmy przez $\sqrt{3}$

Usuwając niewymierności z mianowników, często korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów zapisanego w postaci:

$$\left(\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)\cdot\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)=c-d \qquad (\text{dla } c\geqslant 0 \text{ i } d\geqslant 0)$$

Przykład 6 ◀ zad. 9.14

Usuniemy niewymierność z mianownika.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=$ ⟵ mnożymy licznik i mianownik przez $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

$=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2}=2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ ⟵ stosujemy wzór na różnicę kwadratów

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{1\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=$ ⟵ mnożymy licznik i mianownik przez $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ ⟵ stosujemy wzór na różnicę kwadratów

Często usuwamy niewymierność z mianownika, żeby ułatwić dodawanie i odejmowanie wyrażeń zawierających pierwiastki.

Przykład 7 ◀ zad. 9.15

Wykonamy działania.

$$\left(\frac{8}{3-\sqrt{5}}-\frac{10}{\sqrt{5}}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{8}{3-\sqrt{5}}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}-\frac{10}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^{-1}= \quad \longleftarrow \text{usuwamy niewymierności z mianowników}$$

$$=\left(\frac{8\left(3+\sqrt{5}\right)}{9-5}-\frac{10\sqrt{5}}{5}\right)^{-1}=\left[2\left(3+\sqrt{5}\right)-2\sqrt{5}\right]^{-1}=$$

$$=\left(6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}\right)^{-1}=6^{-1}=\frac{1}{6}$$

Usunięcie niewymierności z mianownika pozwala dokładniej szacować wartości wyrażeń zawierających pierwiastki.

Przykład 8

Wiadomo, że $\sqrt{2}\approx 1{,}41$. Oszacujemy wartość wyrażenia $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$ z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

Jeżeli w liczbie $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$ w miejsce $\sqrt{2}$ od razu podstawimy 1,41, to otrzymamy:

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1} \approx \frac{3}{0{,}41} \approx 7{,}32$$

Natomiast jeżeli liczbę 1,41 podstawimy po usunięciu niewymierności z mianownika, to otrzymamy:

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1} = 3\sqrt{2}+3 \approx 3 \cdot 1{,}41 + 3 = 7{,}23$$

Wartość wyrażenia $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$ odczytana z kalkulatora naukowego wynosi 7,24264…

W tym wypadku dokładniejszy wynik uzyskaliśmy po usunięciu niewymierności z mianownika.

Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

9.1. Wskaż zależność fałszywą.

A. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$ **B.** $\sqrt{15} : \sqrt{3} = \sqrt{5}$ **C.** $\sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{2}$

9.2. Wskaż liczbę równą liczbie $\sqrt{18} - \sqrt{8}$.

A. 10 **B.** $\sqrt{10}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $5\sqrt{2}$

9.3. Wskaż liczbę równą liczbie $\sqrt[5]{64}$.

A. $2\sqrt[5]{2}$ **B.** $\frac{\sqrt[5]{2}}{2}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 2

9.4. Oblicz pierwiastki.

a) $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$, $\sqrt[6]{64}$

b) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$, $\sqrt[4]{625}$, $\sqrt[5]{-\frac{243}{1024}}$

c) $\sqrt[10]{1024}$, $\sqrt[7]{\frac{128}{2187}}$, $\sqrt[6]{0{,}000064}$

d) $\sqrt[11]{\frac{1}{2048}}$, $\sqrt[5]{0{,}00243}$, $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$

9.5. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

a) $\sqrt[3]{216}$, $\sqrt[6]{729}$, $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$, $\sqrt[4]{625}$, $\sqrt[8]{256}$

b) $\sqrt[5]{243}$, $\sqrt[3]{1\frac{91}{125}}$, $\sqrt[4]{0{,}0081}$, $\sqrt[3]{-216}$, $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$

9.6. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt[4]{162}$, $\sqrt[5]{-160}$, $\sqrt[4]{0{,}0048}$ b) $\sqrt[5]{-\frac{243}{256}}$, $\sqrt[4]{405}$, $\sqrt[5]{192}$ c) $\sqrt[3]{-648}$, $\sqrt[5]{486}$, $\sqrt[7]{512}$

* **9.7.** Wyłącz wspólny czynnik przed nawias i uprość ułamek.

a) $\frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}}$ b) $\frac{\sqrt[4]{192}-\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{2}}$ c) $\left(\frac{\sqrt[5]{14}-\sqrt[5]{7}}{\sqrt[5]{6}-\sqrt[5]{3}}\right)^5$ d) $\left(\frac{\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}}\right)^3$

9.8. Oblicz.

a) $\sqrt[5]{-2}\cdot\sqrt[5]{16}$

b) $\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[4]{2}$

c) $\left(\sqrt[7]{-3}\right)^{14}$

d) $\sqrt[4]{2\sqrt{64}}$

e) $\sqrt[7]{-\sqrt[6]{-\sqrt[5]{-1}}}$

f) $\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{3}}\right)^3\right)^5$

g) $\sqrt[4]{4^3}\cdot\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{6^6}$

h) $\frac{\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{5}\cdot\sqrt[5]{6}}{\sqrt[5]{12}\cdot\sqrt[5]{10}\cdot\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{6}\cdot\sqrt[5]{4}}$

9.9. Oblicz.

a) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4$ b) $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{49}$ c) $\sqrt[3]{6^3\cdot6^2\cdot6}$ d) $\sqrt{11}\cdot\sqrt{33}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^3$

9.10. Oblicz.

a) $\left(\sqrt[8]{2}\right)^{11}$ b) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{125}$ c) $\sqrt[7]{3^6\cdot3^5\cdot3^3}$ d) $\left(\sqrt[5]{49}\right)^2\cdot\sqrt[5]{21}\cdot\sqrt[5]{81}$

9.11. Oblicz.

a) $\frac{\sqrt[4]{243}\cdot\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{81}}$

b) $\frac{\sqrt[5]{25}\cdot\sqrt[5]{625}}{\sqrt[5]{5}}$

c) $\frac{\sqrt[6]{128}\cdot\left(\sqrt[6]{8}\right)^3\cdot\sqrt[6]{3}}{\sqrt[6]{48}}$

d) $\left(\sqrt[10]{81\cdot\sqrt[3]{27}}\right)^2$

9.12. Uprość wyrażenie.

a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^4}$

b) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{c}}:\sqrt[4]{\frac{a}{c}}$, dla $a>0,\ b>0,\ c>0$

9.13. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\frac{15}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{14}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{3\sqrt{2}+6}{\sqrt{3}}$ e) $\frac{25-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ f) $\frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

9.14. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{3}{\sqrt{7}-2}$ b) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}}$ c) $\frac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$ d) $\frac{11}{1+2\sqrt{3}}$ e) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ f) $\frac{3\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

9.15. Wykonaj działania i doprowadź wynik do prostszej postaci.

a) $\frac{3}{\sqrt{7}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+3}-\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

c) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}-\frac{4}{\sqrt{5}+3}\right)^{-1}:\frac{2+\sqrt{5}}{3}$

d) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)^{-1}\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)$

9.16. Oblicz.

a) a, wiedząc, że $\sqrt{a}=b$ i $\sqrt{b}=3$

b) b, wiedząc, że $a^3=5$ i $b^2=a$

c) a, wiedząc, że $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}=2$

d) c, wiedząc, że $c^2=b$ i $b^2=a$ i $a^2=7$

D * **9.17.** Wykaż, że $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$.

* **9.18.** Wiedząc, że $\sqrt{2020}+\sqrt{1980}=a$, oblicz $\sqrt{2020}-\sqrt{1980}$.

** **9.19.** Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

b) $\frac{1+2\sqrt{15}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

Prosto do matury

1. Dana jest liczba $a=\left(\sqrt{2}\right)^3$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $a=\sqrt{8}$ **B.** $a=2\sqrt{2}$ **C.** $a=\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$

2. Sprawdź, czy prawdziwe jest zdanie $\frac{\sqrt[4]{96}-\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{6}-\sqrt[4]{4}}=2$.

3. Oblicz a, wiedząc, że $\sqrt{a}=b$ i $\sqrt[5]{b}=2$.

4. Oblicz $\left(\frac{\sqrt[7]{21}+\sqrt[7]{35}}{\sqrt[7]{12}+\sqrt[7]{20}}\right)^7\cdot\left(\frac{\sqrt[9]{14}+\sqrt[9]{56}}{\sqrt[9]{8}+\sqrt[9]{32}}\right)^{-9}$.

D **5.** Wykaż, że liczby $\frac{12}{3-\sqrt{3}}+\frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}$ i $18-4\sqrt{3}$ są równe.

10. Potęga o wykładniku wymiernym

Umiejętności:
- obliczanie potęg o wykładniku wymiernym
- stosowanie praw działań na potęgach o wykładniku wymiernym
- stosowanie praw działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym

Do tej pory wykonywaliśmy działania na potęgach o wykładnikach całkowitych. Korzystaliśmy ze zdefiniowanej wcześniej wielkości a^k, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. Dla wykładnika $k \leqslant 0$ potrzebne było założenie dotyczące podstawy potęgi, a mianowicie $a \neq 0$.

Teraz rozszerzymy definicję potęgi tak, aby:
- jej wykładnikiem mogła być dowolna liczba wymierna,
- zachowane zostały wszystkie własności działań na potęgach.

Zrobimy to w dwóch etapach, przy czym każdy z nich będzie wymagał dodatkowego założenia dla podstawy potęgi.

Definicja

Jeżeli $a \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, to:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5, \quad 4^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4}, \quad \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}, \quad 4 = \sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}},$$

$$3 = \sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt[3]{9} = 9^{\frac{1}{3}}, \quad 28^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{28}$$

Zauważmy teraz, że liczbę wymierną $\frac{k}{n}$, gdzie $n > 1$, $k \in \mathbf{Z}$, możemy zapisać w postaci $\frac{1}{n} \cdot k$, a jednocześnie $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, zatem naturalne jest rozszerzenie definicji potęgi w przedstawiony poniżej sposób.

Definicja

Jeżeli $a > 0$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, to:

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$$

Każdy z zapisów występujących w równościach:

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^k = \left(a^k\right)^{\frac{1}{n}}$$

(przy założeniu, że $a > 0$) oznacza to samo: pierwiastek stopnia n z liczby a^k.

Przykład 2

Zapiszemy podane liczby na różne sposoby.

Rozwiązanie

a) $3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2}$

b) $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$

c) $7^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{7^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$

d) $16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3} = \left(\sqrt{16}\right)^3 = 4^3 = 64$

e) $8^{1\frac{2}{3}} = 8^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$

f) $81^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^{-3}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^{-3} = 3^{-3} =$

$= \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

Pierwiastki stopnia nieparzystego można wyciągać również z liczb ujemnych.
Na przykład $\sqrt[3]{-8} = -2$. Zauważmy jednak, że w definicji potęgi $a^{\frac{k}{n}}$ konieczne jest założenie, że $a > 0$.
Przyjrzyjmy się równościom:

$$a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{3}{9}} = \ldots$$

lub tym samym równościom zapisanym inaczej:

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[9]{a^3} = \ldots$$

Równości te są prawdziwe dla dowolnej liczby $a > 0$. Natomiast dla $a = -8$ otrzymujemy:

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \text{ oraz } \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Przykład 3

Sprawdzimy, czy dla potęg $a^{\frac{3}{4}}$ i $a^{\frac{5}{7}}$ prawdziwy jest wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach, tzn. czy $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{7}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{5}{7}}$. Zakładamy, że $a > 0$.

Rozwiązanie

$a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{7}} = a^{\frac{3\cdot 7}{4\cdot 7}} \cdot a^{\frac{5\cdot 4}{7\cdot 4}} =$ ⟵ sprowadzamy ułamki w wykładnikach do wspólnego mianownika

$= a^{\frac{21}{28}} \cdot a^{\frac{20}{28}} = \sqrt[28]{a^{21}} \cdot \sqrt[28]{a^{20}} =$ ⟵ zapisujemy potęgi w postaci pierwiastków

$= \sqrt[28]{a^{21} \cdot a^{20}} =$ ⟵ $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

$= \sqrt[28]{a^{21+20}} = \sqrt[28]{a^{41}} = a^{\frac{41}{28}} = a^{\frac{21+20}{28}} = a^{\frac{21}{28}+\frac{20}{28}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{5}{7}}$

Ostatecznie otrzymujemy więc równość: $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{7}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{5}{7}}$.

Twierdzenie

Jeżeli a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, a p i r dowolnymi liczbami wymiernymi, to:

- $a^p \cdot a^r = a^{p+r}$ ⟵ iloczyn potęg o tych samych podstawach
- $\frac{a^p}{a^r} = a^{p-r}$ ⟵ iloraz potęg o tych samych podstawach
- $\left(a^p\right)^r = a^{p \cdot r}$ ⟵ potęga potęgi
- $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ ⟵ potęga iloczynu
- $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ ⟵ potęga ilorazu

Udowodnimy pierwszą tezę twierdzenia, pozostałe udowodnijcie samodzielnie jako dodatkowe ćwiczenie.

Założenia

Liczby a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi.
Liczby p i r są dowolnymi liczbami wymiernymi.

Teza

$a^p \cdot a^r = a^{p+r}$

Dowód

Skoro p i r są liczbami wymiernymi, to możemy je zapisać w postaci:

$$p = \frac{k}{n} \text{ i } r = \frac{l}{w}$$

gdzie n i w są dodatnimi liczbami naturalnymi, a k i l – liczbami całkowitymi. Dalsze postępowanie jest powtórzeniem przekształceń z przykładu 3.

$$a^p \cdot a^r = a^{\frac{k}{n}} \cdot a^{\frac{l}{w}} = a^{\frac{k \cdot w}{n \cdot w}} \cdot a^{\frac{l \cdot n}{w \cdot n}} = \quad \longleftarrow \text{sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika}$$

$$= \sqrt[n \cdot w]{a^{k \cdot w}} \cdot \sqrt[n \cdot w]{a^{l \cdot n}} = \quad \longleftarrow \text{zapisujemy potęgi w postaci pierwiastków}$$

$$= \sqrt[n \cdot w]{a^{k \cdot w} \cdot a^{l \cdot n}} = \quad \longleftarrow \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

$$= \sqrt[n \cdot w]{a^{k \cdot w + l \cdot n}} = \quad \longleftarrow x^n \cdot x^k = x^{n+k}$$

$$= a^{\frac{k \cdot w + l \cdot n}{n \cdot w}} = a^{\frac{k \cdot w}{n \cdot w} + \frac{l \cdot n}{n \cdot w}} = a^{\frac{k}{n} + \frac{l}{w}} = a^{p+r} \quad \longleftarrow \text{zapisujemy pierwiastki w postaci potęg}$$

Koniec dowodu

Przykład 4 ◀ zad. 10.6

Zapis pierwiastków w postaci potęg często ułatwia obliczenia.

a) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[15]{64} = 8^{\frac{1}{5}} \cdot 64^{\frac{1}{15}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(2^6\right)^{\frac{1}{15}} = 2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{6}{15}} = 2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}} = 2^{\frac{5}{5}} = 2$

b) $\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{5}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{9+5}{15}} = 2^{\frac{14}{15}} = \sqrt[15]{2^{14}}$

c) $\dfrac{2 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[15]{2^{12}}} = \dfrac{2 \cdot 2^{\frac{4}{5}}}{2^{\frac{12}{15}}} = \dfrac{2^{1+\frac{4}{5}}}{2^{\frac{4}{5}}} = 2^{1+\frac{4}{5}-\frac{4}{5}} = 2^1 = 2$

Potęga o wykładniku rzeczywistym

Wychodząc od definicji potęgi o wykładniku naturalnym, doszliśmy do definicji potęgi o dowolnym wykładniku wymiernym. Do wyznaczenia wartości takich potęg trzeba zwykle używać kalkulatora naukowego albo komputera, np.:

$$3^{-1,7} = \frac{1}{\sqrt[10]{3^{17}}} = 0{,}154487685\ldots$$

Nie będziemy dokładnie definiować potęgi o wykładniku niewymiernym – wymaga to bardziej zaawansowanej wiedzy matematycznej. Poprzestaniemy na intuicyjnie przyjętym stwierdzeniu, że liczba a^w jest dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby rzeczywistej w jednoznacznie określona.

Przyjmujemy również, że dla każdej liczby rzeczywistej w prawdziwa jest równość:

$$1^w = 1$$

Przykład 5

Na przykładzie potęgi $2^{\sqrt{3}}$ pokażemy, w jaki sposób można oszacować jej przybliżoną wartość. Liczba $\sqrt{3}$, jak każda liczba niewymierna, ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone i nieokresowe.

Odczytajmy z kalkulatora:

$\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$

Weźmy kolejne przybliżenia liczby $\sqrt{3}$. Mają one skończone rozwinięcia dziesiętne, zatem są liczbami wymiernymi. Ich wartości są zapisane w lewej kolumnie tabeli. Z kalkulatora odczytujemy przybliżone wartości potęg.

$\sqrt{3} \approx 2$	$2^2 = 4$
$\sqrt{3} \approx 1{,}7$	$2^{1,7} \approx 3{,}249009585$
$\sqrt{3} \approx 1{,}73$	$2^{1,73} \approx 3{,}317278183$
$\sqrt{3} \approx 1{,}732$	$2^{1,732} \approx 3{,}321880096$
$\sqrt{3} \approx 1{,}7321$	$2^{1,7321} \approx 3{,}32211036$
$\sqrt{3} \approx 1{,}73205$	$2^{1,73205} \approx 3{,}321995226$

Kolejne liczby występujące w prawej kolumnie są coraz dokładniejszymi przybliżeniami liczby $2^{\sqrt{3}}$. Taką operację możemy powtarzać np. za pomocą komputera i otrzymywać w ten sposób coraz dokładniejsze przybliżenie szukanej potęgi. Liczba $2^{\sqrt{3}}$ z dokładnością do 9. miejsca po przecinku jest równa 3,321997085.

Dla potęg o dowolnych wykładnikach rzeczywistych prawdziwe są wszystkie twierdzenia dotyczące potęg o wykładnikach wymiernych, czyli: jeżeli α i β są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz a i b dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to:

- $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$ ⟵ iloczyn potęg o tych samych podstawach
- $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$ ⟵ iloraz potęg o tych samych podstawach
- $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha \cdot \beta}$ ⟵ potęga potęgi
- $(a \cdot b)^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot b^{\alpha}$ ⟵ potęga iloczynu
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$ ⟵ potęga ilorazu

Dla $a > 0$ i $b > 0$ zachodzi równość:

$$\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) = a - b$$

Aby to sprawdzić, wystarczy zastosować wzór na różnicę kwadratów:

$$\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a - b$$

Przykład 6 ◂ zad. 10.9

Obliczymy wartość wyrażenia $\left(125^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{2}}\right)\left(5^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{3}{2}}\right)$.

Rozwiązanie

$$\left(125^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{2}}\right)\left(5^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{3}{2}}\right) = \left(125^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left(5^3\right)^{\frac{1}{2}} + \left(3^3\right)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \left(125^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{2}}\right)\left(125^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{1}{2}}\right) = 125 - 27 = 98 \quad \longleftarrow \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) = a - b$$

Odp.: 98

Zadania

W każdym z zadań 10.1–10.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

10.1. Wskaż liczbę, która jest równa liczbie $2^{\frac{3}{2}}$.

A. $4\sqrt{\frac{1}{2}}$ **B.** $\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$ **C.** $2\sqrt{8}$ **D.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

10.2. Wskaż liczbę, która jest równa liczbie $\sqrt{5\sqrt{5}}$.

A. $5^{\frac{1}{4}}$ **B.** $5^{\frac{3}{4}}$ **C.** $5^{\frac{3}{2}}$ **D.** $5^{\frac{5}{4}}$

10.3. Liczba 6,31 jest przybliżeniem liczby $10^{\frac{4}{5}}$. Wśród podanych liczb wskaż tę, która jest przybliżeniem liczby $10^{-\frac{1}{5}}$.

A. −6,31 **B.** 0,0631 **C.** 0,631 **D.** 3,69

10.4. Oblicz.

a) $4^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{3}{2}}$, $4^{\frac{5}{2}}$

b) $8^{\frac{1}{3}}$, $8^{\frac{2}{3}}$, $8^{\frac{4}{3}}$

c) $27^{\frac{1}{3}}$, $27^{\frac{2}{3}}$, $27^{1\frac{1}{3}}$

d) $81^{\frac{1}{4}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $81^{-\frac{1}{2}}$

e) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}$, $\left(\frac{25}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{8}{27}\right)^{-1\frac{1}{3}}$

f) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$, $\left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$

10.5. Oblicz.

a) $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(6\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

b) $64^{\frac{1}{6}}$, $\left(\frac{25}{49}\right)^{-0,5}$, $0,25^{-\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}$

c) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$, $\left(2\frac{93}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$, $\left(7\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$

d) $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{625}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(6\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$

e) $0,49^{-\frac{1}{2}}$, $0,125^{\frac{2}{3}}$, $0,027^{-\frac{2}{3}}$

f) $0,04^{\frac{3}{2}}$, $0,0001^{-1\frac{1}{4}}$, $0,125^{-\frac{1}{3}}$

10.6. Zapisz w postaci potęgi, bez użycia symbolu pierwiastka.

a) $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{3^3}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{7^{-5}}$

b) $5\sqrt{5}$, $3\sqrt{3^3}$, $2\sqrt[3]{2}$, $7\sqrt[4]{7^3}$, $9\sqrt[3]{9^2}$

c) $\sqrt{3\sqrt{27}}$, $\sqrt{3\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

d) $\left(2\sqrt{2}\right)^3$, $\left(9\sqrt[3]{3}\right)^2$, $9\sqrt{3}$, $8\sqrt[3]{2}$, $2\sqrt[3]{16}$

10.7. Przedstaw w postaci potęgi 2^p, $p \in \mathbf{Q}$.

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{1\frac{1}{2}} \cdot 2^{-1}$

b) $2^{-1} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$

c) $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{8}$

d) $\left(32^{-\frac{1}{2}} : 64^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{128}$

e) $\dfrac{3^{1\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1\frac{1}{2}}}{2^{2\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2\frac{2}{3}}}$

f) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^{-2} \cdot \sqrt[4]{4}}{64^{-\frac{3}{4}} \cdot 0{,}25}$

10.8. Podaj najprostszą postać wyrażenia.

a) $\sqrt[20]{3} \cdot \sqrt[12]{27}$

b) $\dfrac{3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}}{81^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}}$

c) $\dfrac{\left(5^2 - 2^2\right)\left(5^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}\right)}{5^{\frac{4}{3}} + 2 \cdot 5^{\frac{1}{3}} - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{4}{3}}}$

d) $\dfrac{2^{\frac{5}{4}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} - 2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(2^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}}\right)$

10.9. Wykonaj działania.

a) $\dfrac{\left(11^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(\sqrt{11} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{8}\right)^2}$

b) $\dfrac{5^{-2} \cdot 125^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2}{25^{-2\frac{1}{2}}}$

c) $\dfrac{0{,}2^{-2} \cdot 125^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2}{625^{-\frac{1}{2}} \cdot 25^{-1}}$

d) $\dfrac{\left(4 \cdot 7^{\frac{1}{2}} + 4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^2}{18 + 2 \cdot 56^{\frac{1}{2}}}$

10.10. Wyrażenie $\left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 0{,}25^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}\right)^{-1} : \left[\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot 0{,}81^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[5]{100}\right]^{-\frac{1}{3}}$ przedstaw w postaci potęgi 3^p, $p \in \mathbf{Q}$.

10.11. Przedstaw podane wyrażenie w postaci potęgi a^p, $(ab)^p$ lub $\left(\frac{a}{b}\right)^p$, $p \in \mathbf{Q}$, wiedząc, że $a > 0$ i $b > 0$.

a) $\dfrac{a^{1\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a}}{a^{1\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[6]{a^5}}$

b) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} : \dfrac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}\right)^{-3}$

c) $\left(\dfrac{a\sqrt{a} \cdot b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b}}\right)^{0{,}6}$

d) $\left(\dfrac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b}}}}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}\right)^3$

10.12. Zapisz wyrażenie w prostszej postaci, wiedząc, że $a > 0$ i $b > 0$.

a) $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[3]{a^2b^4}$

b) $\left(a\sqrt{b}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{ab}\right)^{-3}$

c) $\left(\sqrt{a} + \sqrt[4]{b^2}\right) \cdot \left(\sqrt{a} - \sqrt[4]{b^2}\right)$

d) $\sqrt[3]{2a^2} \cdot \sqrt[3]{4a^4}$

D **10.13.** Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a oraz dowolnych liczb wymiernych p i r prawdziwy jest wzór $\frac{a^p}{a^r} = a^{p-r}$.

D **10.14.** Wykaż, że podana równość jest prawdziwa.

$$\left(\left(2^{\frac{1}{2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} + \left(2^{\frac{1}{2}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2\left(2^{\frac{1}{2}} + 1\right)$$

D * **10.15.** Wykaż, że podana równość jest prawdziwa.

$$\left(\frac{3^{0,6} + 3^{-0,6}}{3^{0,6} - 3^{-0,6}} + \frac{3^{0,6} - 3^{-0,6}}{3^{0,6} + 3^{-0,6}} - 2\right)^{-1} = \frac{3^{\frac{12}{5}} - 1}{4}$$

D * **10.16.** Czy istnieje taka liczba niewymierna a, dla której liczba a^n

a) jest wymierna dla każdej liczby naturalnej $n > 1$? Odpowiedź uzasadnij.

b) jest wymierna dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n? Odpowiedź uzasadnij.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zależności.

A. $4^{1\frac{3}{5}} = 16^{\frac{2}{5}}$

B. $\left(2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{5}{2}$

C. $\left(2^{\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

2. Oblicz.

a) $16^{\frac{1}{4}} \cdot 27^{\frac{2}{3}} : 25^{-0,5}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[5]{27} : \sqrt[15]{81}$

3. Oblicz.

$$\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}}{4^{-1} \cdot \sqrt{8}}$$

4. Zapisz wyrażenie $\frac{a^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} \cdot a^{-0,6}$ w postaci potęgi liczby a, wiedząc, że $a > 0$.

D **5.** Wykaż, że liczba $\left(\left(2 - 3^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(2 + 3^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^2$ jest całkowita.

Kwadratura koła

Zwrot „kwadratura koła” stał się dziś symbolem czegoś niemożliwego do wykonania. Jednak zanim udowodniono tę „niemożliwość”, przez wiele stuleci matematycy starali się problem kwadratury koła rozwiązać.

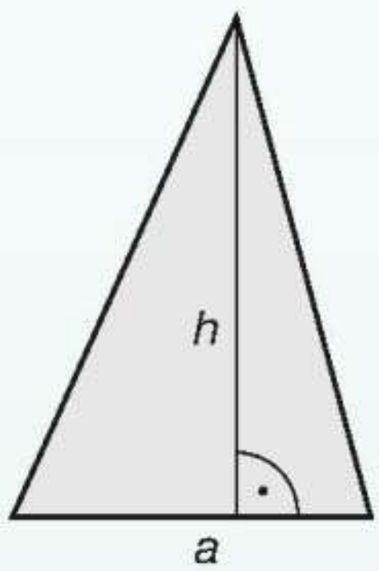
Kwadrat o polu danej figury

Kwadratura figury geometrycznej polega na konstrukcyjnym wyznaczeniu boku kwadratu o polu tej figury. Dla starożytnych Greków była to zwyczajna metoda obliczania pola figur. Problem kwadratury należało rozwiązać przy użyciu cyrkla i linijki bez podziałki. Taką zasadę wykonywania konstrukcji geometrycznych wprowadził Platon, jeden z najsłynniejszych filozofów starożytnej Grecji. Praktyczne zastosowanie tego zagadnienia spowodowało, że już w jego czasach rozwiązano problem kwadratury dowolnego wielokąta.

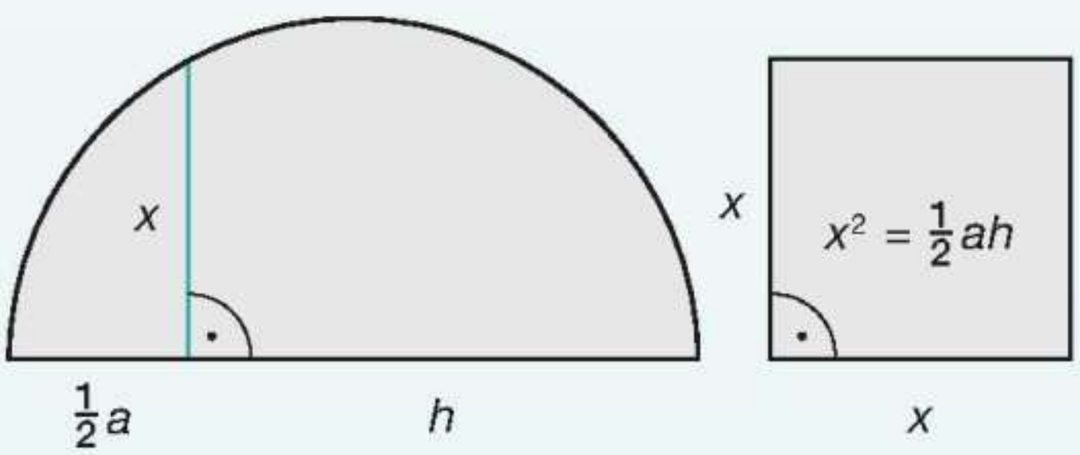


Kwadratura wielokąta

Oto kolejne kroki pokazujące, jak przeprowadzić kwadraturę dowolnego wielokąta.

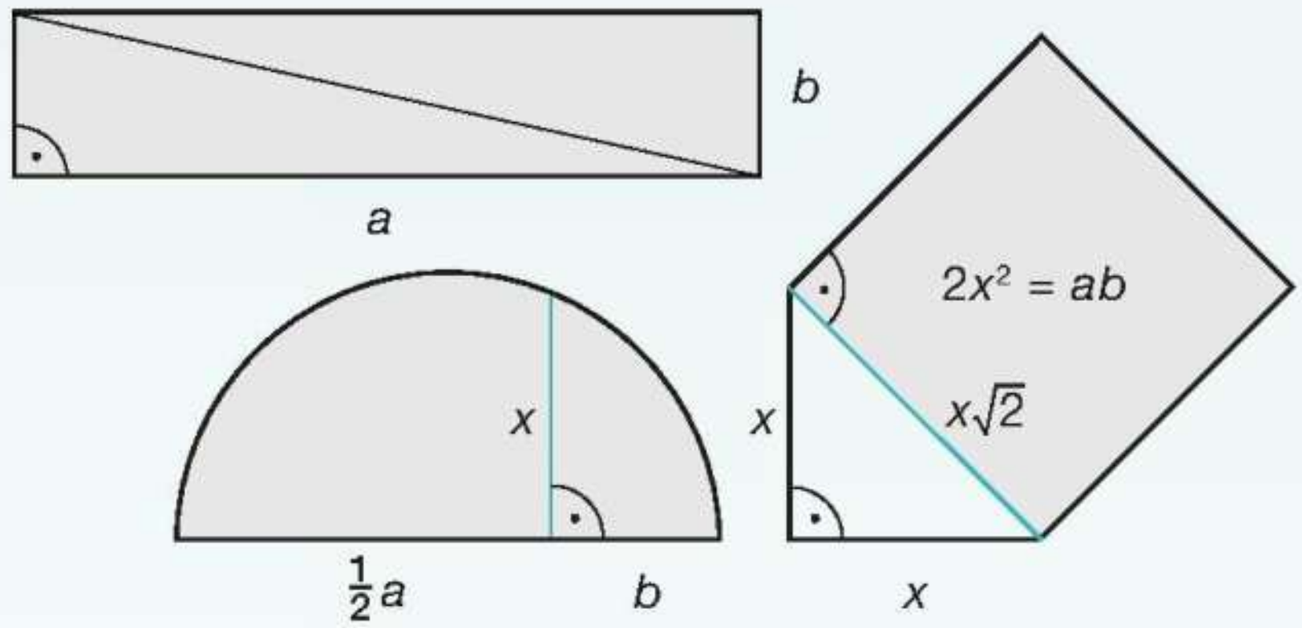


1 Z rysunków obok można odczytać, jak konstrukcyjnie przeprowadzić kwadraturę trójkąta o boku a i wysokości h. Zaznaczony w półkolu o średnicy $\frac{1}{2}a + h$ odcinek x to szukany bok kwadratu, którego pole jest równe polu trójkąta.



2 Aby wykonać kwadraturę prostokąta, wystarczy podzielić go na dwa trójkąty przystające i przypomnieć sobie twierdzenie Pitagorasa, dzięki któremu można skonstruować kwadrat o polu równym sumie pól dwóch danych kwadratów (rysunki na następnej stronie).





3 Kwadratura dowolnego wielokąta jest wykonalna, ponieważ każdy wielokąt można podzielić na skończoną liczbę trójkątów o rozłącznych wnętrzach. Taki sposób podziału nazywamy triangulacją wielokąta.

Niewykonalna konstrukcja

Prawdziwym wyzwaniem dla starożytnych matematyków okazała się **kwadratura koła**, czyli wyznaczenie boku kwadratu o polu danego koła. Jeśli koło ma promień r, to jego pole wynosi πr^2. Zatem jeśli bok kwadratu oznaczymy jako a, to $a^2 = \pi r^2$, czyli $a = r\sqrt{\pi}$. Mając więc dany odcinek o długości r, powinniśmy **za pomocą cyrkla i linijki** skonstruować odcinek o długości $r\sqrt{\pi}$. Jest to zadanie niewykonalne, a winę za to ponosi liczba π. Pełny dowód niewykonalności konstrukcji odcinka o długości $\sqrt{\pi}$ został podany dopiero pod koniec XIX wieku.

Przybliżenia liczby π

Zanim udowodniono niewykonalność kwadratury koła, wielu matematykom wydawało się, że zagadnienie to rozwiązali. Konstruowali kwadraty o polach coraz bardziej zbliżonych do pola wyjściowego koła, jednak ich wyniki były obarczone pewnym błędem. Im mniejszy był ten błąd, im bliższe sobie były pola koła i kwadratu, tym dokładniej wyznaczano liczbę π: od przyjęcia przez Babilończyków (ok. 2000 r. p.n.e.), że $\pi = 3$, przez obliczenie wartości π z dokładnością do 35 miejsc po przecinku przez holenderskiego matematyka **Ludolfa van Ceulena** w 1610 r. (stąd liczbę π nazywa się czasem ludolfiną), aż po dzisiejsze komputerowe wyznaczenie π z dokładnością do miliona cyfr po przecinku. Warto wspomnieć, że autorem bardzo dokładnej, a jednocześnie prostej technicznie kwadratury koła jest **Adam Adamandy Kochański**, nadworny matematyk Jana III Sobieskiego.



11. Pojęcie logarytmu

Umiejętności:

- wykorzystywanie definicji logarytmu

Wiemy, że liczba a^w jest dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby rzeczywistej w jednoznacznie określona. Inaczej mówiąc, jeżeli założymy, że $a,\ w \in \mathbf{R}$ i $a > 0$, to istnieje dokładnie jedna liczba $b \in \mathbf{R}$, dla której zachodzi równość:

$$a^w = b$$

Z własności działań na potęgach wynika ponadto, że skoro $a > 0$, to również $b > 0$.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Gdy liczby a i b są dodatnie i $a \neq 1$, to istnieje dokładnie jedna taka liczba x, że $a^x = b$.

Dowód tego twierdzenia pominiemy – wymaga on znajomości bardziej zaawansowanej matematyki.

Liczbę x można czasem wyznaczyć w prosty sposób, np.:

- jeśli $2^x = 8$, to $x = 3$, bo $2^3 = 8$,
- jeśli $3^x = \frac{1}{3}$, to $x = -1$, bo $3^{-1} = \frac{1}{3}$,
- jeśli $5^x = \sqrt{5}$, to $x = \frac{1}{2}$, bo $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

Najczęściej jednak wyznaczenie wykładnika takiej potęgi jest zadaniem trudnym. Możemy na przykład znajdować coraz dokładniejsze przybliżenia liczby x spełniającej równanie $2^x = 3$, posługując się kalkulatorem, ale dokładnie jej nie wyznaczymy, bo x jest liczbą niewymierną.

Liczbę x wyróżniono nowym określeniem.

Definicja

Logarytmem przy podstawie a $(a > 0 \text{ i } a \neq 1)$ **liczby b** $(b > 0)$ nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść liczbę a, aby otrzymać liczbę b.

$$\log_a b = c, \text{ gdy } a^c = b \text{ i } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$$

Liczbę b nazywamy **liczbą logarytmowaną**.

Twórcą logarytmów jest szkocki matematyk John Napier (Neper) (1550–1617). W pracy *Opis zadziwiających tablic logarytmów* (opublikowanej w 1620 r.) podał opis i własności logarytmów oraz szereg ich zastosowań, przede wszystkim do upraszczania skomplikowanych rachunków, wykonywanych np. dla potrzeb astronomii.



Liczba x spełniająca równanie $2^x = 3$ jest więc logarytmem przy podstawie 2 liczby 3. Zapisujemy ją $x = \log_2 3$. Jej wartość to:

$$\log_2 3 = 1{,}5849625\ldots$$

Podobnie:

$$\log_3 2 = 0{,}6309297\ldots, \quad \log_4 7 = 1{,}4036774\ldots, \quad \log_{\sqrt{2}} 3 = 3{,}1699250\ldots$$

Przykład 1

a) Jeżeli $5^x = 7$, to $x = \log_5 7$.

b) Jeżeli $4^x = 9$, to $x = \log_4 9$.

c) Jeżeli $3^x = 17$, to $x = \log_3 17$.

d) Jeżeli $\left(\sqrt{13}\right)^x = 2$, to $x = \log_{\sqrt{13}} 2$.

Logarytmy wielu liczb są liczbami wymiernymi (podobnie jak pierwiastki).

Przykład 2 ◂ zad. 11.5 a

a) $\log_2 4 = 2$, bo $2^2 = 4$

b) $\log_3 81 = 4$, bo $3^4 = 81$

c) $\log_5 1 = 0$, bo $5^0 = 1$

d) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, bo $2^{-2} = \frac{1}{4}$

e) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, bo $4^{\frac{1}{2}} = 2$

f) $\log_7 7 = 1$, bo $7^1 = 7$

Przykład 3 ◂ zad. 11.5 d

Obliczymy podany logarytm.

a) $\log_{\sqrt{5}}\left(5\sqrt[3]{5}\right)$

b) $\log_{3\sqrt{27}}\left(9\sqrt[5]{3}\right)$

Rozwiązanie

a) $\log_{\sqrt{5}}\left(5\sqrt[3]{5}\right) = x$ ⟵ oznaczamy literą x szukaną liczbę

$\left(\sqrt{5}\right)^x = 5\sqrt[3]{5}$ ⟵ korzystamy z definicji logarytmu

$5^{\frac{1}{2}x} = 5^{1+\frac{1}{3}}$ ⟵ doprowadzamy potęgi do tej samej podstawy

$\frac{1}{2}x = \frac{4}{3}$ ⟵ porównujemy wykładniki

$x = \frac{8}{3}$

Odp.: $\log_{\sqrt{5}}\left(5\sqrt[3]{5}\right) = \frac{8}{3}$

b) $\log_{3\sqrt{27}}\left(9\sqrt[5]{3}\right) = x$ ⟵ oznaczamy literą x szukaną liczbę

$\left(3\sqrt{27}\right)^x = 9\sqrt[5]{3}$ ⟵ korzystamy z definicji logarytmu

$\left(3 \cdot 27^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{5}}$ ⟵ wykonujemy działania na potęgach

$\left(3^{1+\frac{3}{2}}\right)^x = 3^{2+\frac{1}{5}}$ ⟵ doprowadzamy potęgi do tej samej podstawy

$\frac{5}{2}x = \frac{11}{5}$ ⟵ porównujemy wykładniki

$x = \frac{22}{25}$

Odp.: $\log_{3\sqrt{27}}\left(9\sqrt[5]{3}\right) = \frac{22}{25}$

Przykład 4 ◀ zad. 11.6

Wyznaczymy liczbę x, wiedząc, że $\log_4 x = -2$.

Rozwiązanie

Zgodnie z definicją logarytmu -2 jest wykładnikiem potęgi, do której należy podnieść liczbę 4, żeby otrzymać x, czyli $x = 4^{-2} = \frac{1}{16}$.

Odp.: $x = \frac{1}{16}$

Zapisane poniżej własności wynikają bezpośrednio z definicji logarytmu.

Wniosek

Dla każdego $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $b > 0$:

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$a^{\log_a b} = b$$

Przykład 5 ◀ zad. 11.8

a) $3^{\log_3 9} = 9$

b) $5^{\log_5 2} = 2$

c) $\left(\sqrt{7}\right)^{2\log_7 10} = \left(\left(\sqrt{7}\right)^2\right)^{\log_7 10} = 7^{\log_7 10} = 10$

d) $4^{\log_2 7} = \left(2^2\right)^{\log_2 7} = 2^{2\cdot\log_2 7} = \left(2^{\log_2 7}\right)^2 = 7^2 = 49$

Przykład 6 ◀ zad. 11.7

Obliczymy $\log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$.

Liczbę $\log_a \log_m b$ czytamy „logarytm przy podstawie a logarytmu przy podstawie m z b".

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że liczbą logarytmowaną b logarytmu przy podstawie $\sqrt{2}$ jest $b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$.

$\log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{\sqrt{2}} 2 =$ ⟵ $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$, bo $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$= 2$ ⟵ bo $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

Odp.: $\log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$

Przykład 7 ◀ zad. 11.9

Obliczymy $36^{1+\log_6 2}$.

Rozwiązanie

Zastosujemy wzory dotyczące działań na potęgach.

$36^{1+\log_6 2} = 36 \cdot 36^{\log_6 2} =$ ⟵ $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$= 36 \cdot \left(6^2\right)^{\log_6 2} = 36 \cdot 6^{2\log_6 2} = 36 \cdot \left(6^{\log_6 2}\right)^2 =$ ⟵ dwukrotnie stosujemy wzór $a^{m \cdot n} = \left(a^m\right)^n$

$= 36 \cdot 2^2 = 36 \cdot 4 = 144$

Odp.: $36^{1+\log_6 2} = 144$

Ważną rolę wśród logarytmów pełnią logarytmy przy podstawie 10, czyli **logarytmy dziesiętne**. W zapisie logarytmu dziesiętnego pomijamy liczbę 10 i np. logarytm przy podstawie 10 liczby 5 zapisujemy: log 5.

Przykład 8

a) $\log 100 = 2$, bo $10^2 = 100$

b) $\log 1 = 0$, bo $10^0 = 1$

c) $\log 0{,}001 = -3$, bo $10^{-3} = 0{,}001$

d) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, bo $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

Większość kalkulatorów naukowych pozwala obliczać logarytm dziesiętny dowolnej dodatniej liczby x oraz wykonywać operację odwrotną – podnosić 10 do potęgi x. Trzeba tylko pamiętać, że są to wyniki przybliżone. Na przykład, z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku, $\log 17 \approx 1{,}23$, a $10^{1{,}23} \approx 16{,}98$.

Logarytmy mają wiele zastosowań.

Poziom natężenia dźwięku mierzymy w dB (decybelach). Liczbę decybeli N oblicza się według wzoru $N = 10 \log \frac{I}{I_0}$, w którym I to natężenie danego dźwięku mierzone w W/m^2 (watach na metr kwadratowy), a I_0 to natężenie dźwięku na progu słyszalności dla ucha ludzkiego wynoszące 10^{-12} (jedna bilionowa) W/m^2.

Przykład 9 ◀ zad. 11.14

Natężenie dźwięku piły łańcuchowej wynosi 0,1 W/m^2. Wyznaczymy liczbę decybeli dla odgłosu tej piły.

Rozwiązanie

Podstawiamy do wzoru $I = 0{,}1$.

$$N = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{0{,}1}{10^{-12}} = 10 \cdot \log \frac{10^{-1}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{11} = 10 \cdot 11 = 110$$

Odp.: Poziom natężenia dźwięku dla odgłosu piły łańcuchowej wynosi 110 dB.

Przykład 10 ◀ zad. 11.13

W tabeli podano gęstość zaludnienia kilku wybranych państw.

Państwo	Gęstość zaludnienia	
	liczba osób/km^2	
Monako	16 500	4,22
Singapur	6650	3,82
Martynika	?	2,58
Polska	123	2,09
Szwecja	19	1,28
Angola	?	0,94
Mongolia	1,73	0,24
Grenlandia	0,03	−1,52

Wielkości przedstawione w środkowej kolumnie tabeli są bardzo zróżnicowane. Trudno byłoby je na przykład przedstawić na czytelnym diagramie. Dlatego w prawej kolumnie umieściliśmy **logarytmy dziesiętne** wielkości ze środkowej kolumny. Wszystkie podane tam liczby mieszczą się w przedziale $(-2; 5)$. Jeżeli wiemy, że logarytm dziesiętny gęstości zaludnienia Angoli jest równy 0,94, a Martyniki 2,58, to należy się spodziewać, że Angola w przeciwieństwie do Martyniki nie należy do grona państw gęsto zaludnionych. Gdy chcemy się dowiedzieć, ile osób przypada w tych państwach na 1 km^2, wyznaczamy: $10^{0{,}94} \approx 8{,}71$ i $10^{2{,}58} \approx 380$.

Operację zamiany wielkości fizycznych lub chemicznych na ich logarytmy dziesiętne stosuje się między innymi przy określaniu skali kwasowości i zasadowości roztworów chemicznych (skala pH). Dzięki temu informacje podane na przykład na kosmetykach są bardziej czytelne. Napis „pH = 5,5” umieszczony na opakowaniu szamponu wygląda „mniej groźnie” niż „pH = 316 000” $\left(10^{5{,}5} \approx 316\,000\right)$.

Zadania

W każdym z zadań 11.1–11.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

11.1. Wskaż wartość wyrażenia $\log_{0,16} 0{,}4 + \log_{\frac{1}{9}} 3$.

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 0

11.2. Wskaż liczbę niewymierną.

A. $\log_4 32$ **B.** $\log_{27} \sqrt[3]{9}$ **C.** $\log_5 \sqrt{5}$ **D.** $\log_6 \sqrt{12}$

11.3. Wskaż liczbę największą.

A. $\log_7 \frac{1}{7}$ **B.** $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$ **D.** $\log_3 \sqrt[3]{3}$

11.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\log_2 \frac{1}{4} < 0$ **B.** $\log_{\frac{1}{36}} \frac{1}{6} < 0$ **C.** $\log_{\frac{1}{3}} 9 < 0$

11.5. Oblicz.

a) $\log_5 25$, $\log_7 343$, $\log_6 1296$, $\log_3 729$, $\log_2 1024$, $\log_4 64$

b) $\log_8 2$, $\log_{81} 3$, $\log_{27} 9$, $\log_{25} \frac{1}{5}$, $\log_{69} \frac{1}{69}$, $\log_4 \frac{1}{64}$

c) $\log_5 \sqrt{5}$, $\log_3 \left(3\sqrt{3}\right)$, $\log_2 \left(4\sqrt[3]{16}\right)$, $\log_3 \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right)$, $\log_2 \left(0{,}125\sqrt[6]{64}\right)$, $\log \sqrt{0{,}001}$

d) $\log_{\sqrt{2}} 32$, $\log_{\sqrt{6}} \frac{1}{36}$, $\log_{\sqrt[3]{3}} 27$, $\log_{2\sqrt{2}} 16$, $\log_{27\sqrt[4]{3}} 9$, $\log_{7\sqrt[4]{49}} \frac{1}{7}$

e) $\log_{0,2} 0{,}04$, $\log_{0,25} 0{,}5$, $\log_{0,2} 0{,}008$, $\log_{0,5} 0{,}125$, $\log_{0,0016} 5$, $\log_{0,11} 0{,}0121$

11.6. Oblicz x.

a) $\log_3 x = 2$

b) $\log_5 x = 1$

c) $\log_{11} x = 0$

d) $\log x = \frac{1}{3}$

e) $\log_{0,1} x = -3$

f) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$

g) $\log_4 x = -1$

h) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$

i) $\log_{25^2} x = \frac{1}{2}$

11.7. Oblicz.

a) $\log_2 \log_3 81$

b) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 8$

c) $\log_{\sqrt{2}} \log_3 9$

d) $\log_{\frac{1}{9}} \log_4 64$

e) $\log_{\sqrt{3}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$

f) $\log_{\sqrt{5}} \log_2 32$

g) $\log_{\frac{3}{2}} \log_{25} 125$

h) $\log_9 \log_4 \sqrt[3]{4}$

i) $\log_2 \log_3 \sqrt[4]{3}$

11.8. Oblicz.

a) $10^{\log 5}$
b) $5^{\log_5 4}$
c) $9^{\log_3 15}$
d) $2^{\log_2 64}$
e) $3^{\log_3 15}$
f) $49^{\log_7 3}$

11.9. Oblicz.

a) $2^{1+\log_2 3}$
b) $6^{2-\log_6 3}$
c) $3^{3+\log_3 2}$
d) $8^{1-\log_2 3}$
e) $25^{1-\log_5 2}$
f) $27^{\frac{5-\log_3 27}{6}}$

D **11.10.** Wykaż, że rozwiązaniem równania jest podana obok liczba.

a) $\log_2\left(2^x+8\right)=4, \quad 3$
b) $\log_5 \log_4(x-3)=0, \quad 7$

D **11.11.** Wykaż, że liczba $\log_3 9-\log_{36} 6-\log_7 7$ jest mniejsza od 1.

11.12. Oblicz x.

a) $\log_{\sqrt{x}} \frac{1}{8}=6$
b) $\log_x 11=2$

11.13. Skala Richtera służy do określania (w stopniach skali) siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest za pomocą wzoru $R=\log \frac{A}{A_0}$, w którym A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0=10^{-4}$ cm jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową.

a) Ile stopni w skali Richtera ma trzęsienie ziemi o amplitudzie $A=10$ cm?
b) W listopadzie 2013 r. w Chile miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,6 w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.

11.14. Wyznacz liczbę decybeli dla odgłosu motocykla pozbawionego tłumika. Natężenie dźwięku wydawanego przez ten motocykl wynosi 0,01 W/m^2.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Liczba $10^{2-\log 20}-5^{\log_5 4}$ jest

A. parzysta. **B.** złożona. **C.** pierwsza.

2. Oblicz $4^{\log_2 3-1}$.

3. Ustaw liczby: $\log_{0,5} 4$, $\log \sqrt{100\,000}$, $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$, $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$ w kolejności rosnącej.

4. Oblicz $\log_x \sqrt{3}$, wiedząc, że $\log_9 x=\frac{1}{2}$.

5. Wiedząc, że $\log_a x=2$, $\log_b x=3$, $\log_c x=6$, oblicz $\log_{abc} x$.

12. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–30 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż wyrażenie, które jest zapisem iloczynu ilorazu liczb a, b i pierwiastka stopnia trzeciego z różnicy kwadratów tych liczb.

A. $\frac{b}{a} \cdot \sqrt[3]{a^2 - b^2}$ **B.** $\frac{a \cdot b}{\sqrt[3]{a^2 - b^2}}$ **C.** $\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{a^2 - b^2}$ **D.** $\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{a^2 + b^2}$

2. Wskaż wśród podanych liczb tę, która ma najwięcej dzielników naturalnych.

A. 14 **B.** 50 **C.** 101 **D.** 125

3. Wskaż wyłączony przed nawias czynnik W, jeżeli $2a^3 + 4a^2b + 2ab^2 = W(a+b)^2$.

A. a **B.** 2 **C.** ab **D.** $2a$

4. Wskaż wyłączony przed nawias czynnik W, jeżeli

$3\sqrt{2}(x-1) + 6\sqrt{2}(x+5) - 3\sqrt{2}x = W(2x+9)$.

A. $W = \sqrt{2}$ **B.** $W = -\sqrt{2}$ **C.** $W = 3\sqrt{2}$ **D.** $W = -3\sqrt{2}$

5. Wskaż parę liczb względnie pierwszych.

A. 13 i 52 **B.** 27 i 64 **C.** 15 i 108 **D.** 7 i 91

6. Wskaż liczbę równą liczbie $\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2$.

A. $8\sqrt{3}$ **B.** $-2\sqrt{3}$ **C.** 2 **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

7. Wskaż liczbę równą liczbie $\sqrt[4]{1\frac{17}{64}} \cdot \sqrt[4]{4}$.

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** 1

8. Wskaż liczbę równą liczbie $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} - 2\sqrt{3}$.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$ **B.** -2 **C.** $8\sqrt{3}$ **D.** 6

9. Wskaż liczbę równą liczbie $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4^{-1} \cdot 16}{2^{-3} \cdot \sqrt{64} \cdot 8 \cdot 4^0}$.

A. 4 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 2

10. Ile razy liczba $0{,}312^2$ jest mniejsza od liczby 312^2?

A. 100 000 razy **B.** 1 000 000 razy **C.** 1000 razy **D.** 10 000 razy

11. Masę Słońca równą $1{,}989 \cdot 10^{33}$ g można wyrazić w kg jako

A. $198{,}9 \cdot 10^{27}$. **B.** $1{,}989 \cdot 10^{29}$. **C.** $19{,}89 \cdot 10^{31}$. **D.** $1989 \cdot 10^{27}$.

12. Wskaż liczbę, która ma skończone rozwinięcie dziesiętne.

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{3}{7}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{5}{12}$

13. Wskaż liczbę równą liczbie $\frac{1}{30}$.

A. 0,03 **B.** 0,0(3) **C.** 0,(30) **D.** 0,(03)

14. Wskaż wyrażenie równe wyrażeniu $3(x-2)-[2(3x-1)-3]$.

A. $-1-3x$ **B.** $-3x$ **C.** $1-3x$ **D.** $2x-1$

15. Wskaż wyrażenie równe wyrażeniu $(2a+b)(a-b)-3a(a+b)+4ab$.

A. $-a^2-b^2$ **B.** a^2-b^2 **C.** $2a-b^2$ **D.** a^2+b^2

16. Ile złotych reszty z 20 zł otrzymał Waldek, który kupił 4 ciastka po a złotych za sztukę i 2 butelki soku po b złotych za butelkę?

A. $20-4b-2a$ **B.** $2(2a-b-10)$ **C.** $2(10-2a-b)$ **D.** $2(10+2a-b)$

17. Wskaż wyrażenie równe wyrażeniu $2x^2+16xy+32y^2$.

A. $(2x+4y)^2$ **B.** $2(x+4y)^2$ **C.** $2(x+8y)^2$ **D.** $2(x+16y)^2$

18. Zmieszano 1,5 litra soku jabłkowego z m litrami soku bananowego, a następnie przelano mieszaninę, napełniając n szklanek. Ile litrów soku mieści się w czterech szklankach?

A. $\frac{2(3+2m)}{n}$ **B.** $\frac{4(1{,}5+n)}{m}$ **C.** $3(1{,}5m+n)$ **D.** $\frac{2(3+m)}{n}$

19. Wskaż liczbę, która nie jest przybliżeniem liczby $\sqrt{8} = 2{,}8284271\ldots$

A. 3 **B.** 2,8 **C.** 2,82 **D.** 2,828

20. Wskaż wyrażenie równe wyrażeniu $4p^2-12pq+9q^2$.

A. $(4p-9q)^2$ **B.** $(2p-3q)^2$ **C.** $(2p+3q)^2$ **D.** $(2p-9q)^2$

21. Wskaż liczbę równą liczbie $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{20}+\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$.

A. 5 **B.** 4 **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **D.** -4

22. Wskaż liczbę, która jest różna od pozostałych podanych.

A. $2\sqrt{32}$ **B.** $4\sqrt{8}$ **C.** $8\sqrt{2}$ **D.** $16\sqrt{2}$

23. Wskaż liczbę równą liczbie $\frac{6}{2\sqrt{3}-3}$.

A. $6\sqrt{3}+3$ **B.** $2\left(2\sqrt{3}-3\right)$ **C.** $4\sqrt{3}+6$ **D.** $4\sqrt{3}-3$

24. Wskaż liczbę większą od 3.

A. $\sqrt{8}$ **B.** $\sqrt[3]{28}$ **C.** $\sqrt[4]{78}$ **D.** $\sqrt[5]{128}$

25. Wskaż liczbę, która jest zaokrągleniem liczby 7,687986.

A. 7,6 **B.** 7,68 **C.** 7,688 **D.** 7,6879

26. Wskaż wartość wyrażenia $(2x-y)(2x+y)-3(x-y)^2-2x(3y+x)$ dla $x=\sqrt{3}$ i $y=\sqrt{2}$.

A. 11 **B.** -11 **C.** -10 **D.** 12

27. Wskaż liczbę równą połowie liczby 4^8.

A. 4^6 **B.** 2^8 **C.** 2^{15} **D.** 4^4

28. Wskaż liczbę równą $\frac{1}{125}$ liczby 25^4.

A. $\left(\frac{1}{5}\right)^5$ **B.** 5^5 **C.** 5^4 **D.** 25^2

29. Wskaż nierówność fałszywą.

A. $\log_2 8 < 4$ **B.** $\log_3 \frac{1}{27} < -2$ **C.** $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} < -3$ **D.** $\log_2 \frac{1}{16} > -5$

30. Wskaż liczbę równą liczbie $\frac{4^{28}+4^{27}}{4^{27}+4^{26}}$.

A. 16 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 1

W zadaniach 31–48 oceń prawdziwość podanych zdań.

31. Liczba 123 000 000 030 102 jest

A. podzielna przez 4. **B.** podzielna przez 6. **C.** podzielna przez 9.

32. Liczba 10 000 062 jest

A. pierwiastkiem kwadratowym z liczby naturalnej.

B. kwadratem liczby naturalnej.

C. sześcianem liczby naturalnej.

33. Pokój ma a metrów szerokości i b metrów długości, drzwi mają szerokość 80 cm. Niech p oznacza długość listwy podłogowej mierzonej w metrach. Zatem
A. $p = 2(a + b) - 0{,}8$. **B.** $p = a + b - 0{,}8$. **C.** $p = 2(a + b - 0{,}4)$.

34. W pewnej firmie $\frac{1}{3}$ wszystkich zatrudnionych ma średnie wykształcenie, $\frac{3}{4}$ pozostałych ma wyższe wykształcenie, a 20 osób ma wykształcenie podstawowe.
A. W tej firmie pracuje ponad 100 osób.
B. W tej firmie pracuje 120 osób.
C. Na podstawie danych nie można podać liczby zatrudnionych w tej firmie osób.

35. O trzech różnych dodatnich liczbach naturalnych a, b i c wiadomo, że sumy dwóch dowolnych z nich, czyli $a + b$, $a + c$ i $b + c$, są podzielne przez 12.
A. Każda z liczb a, b i c jest podzielna przez 12.
B. Co najmniej jedna z liczb a, b i c jest podzielna przez 12.
C. Suma $a + b + c$ jest podzielna przez 12.

36. Suma dwóch liczb jest równa $\sqrt{6}$, a ich różnica wynosi $\sqrt{2}$. Różnica kwadratów tych liczb jest
A. liczbą niewymierną.
B. wielokrotnością liczby $\sqrt{3}$.
C. większa od 3.

37. Istnieje liczba niewymierna, w której rozwinięciu dziesiętnym po przecinku występują
A. tylko jedynki i dwójki.
B. na co trzeciej pozycji zera.
C. do setnej pozycji tylko siódemki.

38. Liczba $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{2}$ jest
A. niewymierna. **B.** wymierna. **C.** równa 0.

39. Liczba $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ jest
A. wymierna. **B.** większa od 5. **C.** mniejsza od 5.

40. O liczbie $p = \sqrt{19 + 8\sqrt{3}} + \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$ wiadomo, że
A. p jest liczbą niewymierną.
B. $p = 8$.
C. $p = 2\sqrt{19}$.

41. Liczba

A. $a = \log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ jest parzysta.

B. $b = \dfrac{\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{49 \cdot 7}}{\sqrt{\sqrt{49}}}$ jest liczbą pierwszą.

C. $c = \dfrac{1}{2\sqrt{3} - 2}$ jest wymierna.

42. Niech a oznacza pewną dodatnią liczbę rzeczywistą.

A. Połowa kwadratu liczby a jest większa od kwadratu połowy liczby a.

B. Połowa odwrotności liczby a jest większa od odwrotności połowy liczby a.

C. Odwrotność połowy pierwiastka kwadratowego z liczby a jest większa od pierwiastka kwadratowego z połowy odwrotności liczby a.

43. Załóżmy, że $\log_k m = p$. Zatem

A. $k^m = p$. **B.** $k^p = m$. **C.** $p^m = k$.

44. Liczba

A. $a = 3^{\log_3 5}$ jest równa 5.

B. $b = \log_7 7^5$ jest równa 5.

C. $c = \log_{\sqrt{5}} \left(5\sqrt{5}\right)$ jest równa 5.

45. Liczba

A. $a = \log_4 8$ jest wymierna.

B. $b = \log_2 \sqrt{2}$ jest wymierna.

C. $c = \log_{\sqrt{3}} \left(3\sqrt{3}\right)$ jest wymierna.

46. Liczba $p = \dfrac{2}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$. Zatem

A. $p = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$. **B.** $p = 2\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$. **C.** $p = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$.

47. Liczba $k = \left(\sqrt[5]{7}\right)^3$. Zatem

A. $k = 7^{\frac{5}{3}}$. **B.** $k = 7^{\frac{3}{5}}$. **C.** $k = 7^{0,6}$.

48. Liczba $a = 0,(4)$. Zatem

A. a jest większe od $\frac{1}{3}$. **B.** a jest liczbą niewymierną. **C.** $a + \frac{2}{3} > 1$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

49. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $5x^2 - 30xy$

b) $9xy^2 + 3x^2y$

c) $48p^3r - 36pr^2 + 24pr$

d) $14m^2n - 21mn^2 + 70mn$

50. Uzupełnij sumę algebraiczną takim składnikiem, aby można było ją zapisać w postaci iloczynu za pomocą wzoru na kwadrat sumy lub kwadrat różnicy.

a) $9x^2 - 6xy + \boxed{?}$

b) $\boxed{?} + 20xy + 25y^2$

c) $2x^2 + \boxed{?} + 3y^2$

d) $\boxed{?} + 2\sqrt{5}xy + y^2$

51. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu za pomocą wzoru na kwadrat sumy lub kwadrat różnicy.

a) $x^2 + 12x + 36$

b) $100k^2 - 40k + 4$

c) $a^2b^2 + 10ab + 25$

d) $3t^2 + 2\sqrt{6}tu + 2u^2$

e) $25p^2 - 60pq + 36q^2$

f) $x^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$

g) $\frac{9}{16}a^2 + 3ax + 4x^2$

h) $\frac{1}{4}a^4 - 2a^2b^2 + 4b^4$

52. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu.

a) $x^2 - 400$ b) $16a^2 - 25b^2$ c) $1 - 100c^2d^2$ d) $-\frac{4}{9} + \frac{1}{25}z^2$

53. Wyznacz wszystkie elementy zbioru.

a) $A = \{x:\ x \in \mathbf{N} \text{ i } x \leqslant 7\}$

b) $B = \left\{x:\ x = (-1)^{n+1} \text{ i } n \in \mathbf{N}\right\}$

c) $C = \left\{x:\ x \in \mathbf{Z} \text{ i } -2 \leqslant x < \sqrt{10}\right\}$

d) $D = \left\{x:\ x = \frac{1}{n+1} \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } n < 9\right\}$

54. Jedna tabletka pewnego preparatu witaminowego zawiera 20 mg cynku. Wyraź tę wielkość w tonach. Zapisz wynik w notacji wykładniczej.

55. Przyjmijmy, że każdy z 6 miliardów ludzi ma na głowie 100 tysięcy włosów o średniej długości 5 cm. Ile kilometrów zajęłyby te włosy ułożone jeden za drugim? Wynik podaj w notacji wykładniczej.

56. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{5 - 2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$ b) $\frac{3\sqrt{2} - 4\frac{1}{2}}{\sqrt{8} - 3}$ c) $\frac{5}{2\left(\sqrt{3} + 1\right)}$ d) $\frac{0{,}5}{2\sqrt{7} - 4}$

57. Oblicz $\sqrt[3]{2^7 - 3^3 + 5^2 - 7^0}$.

58. Oblicz.

a) $\log_2 \log 100$ b) $\log_4 \log_{\sqrt{2}} 4$ c) $\log_{\frac{1}{2}} \log_{2\sqrt{2}} 64$

59. Oblicz x.

a) $\log_3 \sqrt{x} = \frac{1}{4}$ b) $\log_2 \sqrt{x+2} = \frac{1}{2}$

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

60. Oblicz.

a) $6 : \frac{1}{3} - 0{,}8 : \frac{1{,}5}{\frac{3}{2} \cdot 0{,}4 \cdot \frac{50}{1 : \frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0{,}25}}{6 - \frac{46}{1 + 2{,}2 \cdot 10}}$ b) $\frac{\left[\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2} - \frac{10}{2^4}\right] : (-2)^{-5}}{\left[\left(3\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 3^0 - 1{,}25^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-1}}$

61. Wykonaj działania i zapisz wyrażenie $(2x-3)^2+2(x-3)^2-\left(\sqrt{6}x-3\right)\left(\sqrt{6}x+3\right)$ w prostszej postaci.

62. Wyrażenie $\frac{a+2+\sqrt{a^2-4}}{a+2-\sqrt{a^2-4}} + \frac{a+2-\sqrt{a^2-4}}{a+2+\sqrt{a^2-4}}$ zapisz w prostszej postaci i oblicz jego wartość dla $a = \sqrt{7}$.

63. Wyrażenie $(x-2y)(x+2y)-2(x+y)^2+2y(2x+y)$ zapisz w prostszej postaci i oblicz jego wartość dla $x = \sqrt{5}$ i $y = \sqrt{3}$.

64. Wiedząc, że liczby a i b są dodatnie, $ab = 18$ i $a^2 + b^2 = 108$, oblicz $a + b$.

D **65.** Wykaż, że różnica czterocyfrowej liczby n i liczby, która powstała z liczby n w wyniku zapisania jej cyfr w odwrotnej kolejności, jest podzielna przez 9.

66. Iloczyn dwóch liczb naturalnych jest równy 588, a ich największym wspólnym dzielnikiem jest 7. Wyznacz te liczby.

67. Znajdź dwa tysiące dwudziestą cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\frac{28}{111}$.

68. Przedstaw liczbę $\frac{0{,}(45)}{2{,}1(24)}$ w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

69. Ustaw w kolejności rosnącej liczby: $a = 2{,}34343434\ldots$, $b = 2{,}3(45)$, $c = 2{,}3(43)$, $d = 2{,}3(4)$, $e = 2{,}345345345\ldots$, $f = 2{,}(34)$, $g = 2{,}34(5)$, $h = 2{,}(345)$.

70. Uporządkuj liczby rosnąco: $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(\frac{1}{15}\right)^{-1}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $(-5)^3$, $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

71. Oblicz $\dfrac{25^{-1}\cdot\frac{1}{4}\cdot 10^2}{(5^{-1})^3\cdot 125\cdot 2^{-3}} : \dfrac{9^{-1}\cdot 27^{-2}\cdot 81}{\left(\frac{1}{9}\right)^2}$.

72. Oblicz $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot 2\frac{1}{4} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 : 5^{-2}\right]^2 - \left[\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot 0{,}3^{-3} - 2\right] : \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$.

D **73.** Udowodnij, że liczba $6^{2020} + 6^{2021} + 6^{2022}$ jest podzielna przez 86.

74. Ze zbioru $A = \left\{-\sqrt{3},\ -\sqrt{9},\ \sqrt{3\frac{6}{25}},\ \sqrt[3]{\frac{3}{5}},\ 3 - \sqrt[4]{12},\ 1 + \sqrt{5\frac{1}{16}}\right\}$ wypisz wszystkie liczby wymierne.

75. Przedstaw liczbę $\dfrac{\left(\sqrt[5]{3}\right)^{11}\cdot\left(\frac{1}{81}\right)^{-5}}{\left(9\cdot\sqrt[4]{27}\right)^6}$ w postaci potęgi o podstawie 3 i wykładniku wymiernym.

76. Porównaj liczby $\dfrac{1-2\sqrt{11}}{\sqrt{7}-3}$ i $\dfrac{1+2\sqrt{11}}{\sqrt{3}-7}$.

77. Uporządkuj liczby rosnąco: $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, π, $\sqrt{7}$.

78. Oblicz $\dfrac{4}{\sqrt{5}-3} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$. Zapisz wynik bez niewymierności w mianowniku.

D **79.** Wykaż, że liczba $\dfrac{\sqrt{12} - \sqrt[3]{-16}}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{-2}}$ jest całkowita.

D **80.** Wykaż, że liczba $\dfrac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{162}}$ jest wymierna.

81. Oblicz $\left(\left(4 - 7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(4 + 7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

Równania i nierówności

2

1. Warto powtórzyć – rozwiązywanie równań liniowych z jedną niewiadomą

Definicja

Równanie, które można zapisać w postaci $ax + b = 0$, gdzie x jest niewiadomą, a i b są liczbami danymi, nazywamy **równaniem liniowym** z jedną niewiadomą.

Liczby a i b występujące w zapisie $ax + b = 0$ nazywamy **współczynnikami** równania liniowego.

Aby **rozwiązać równanie liniowe** z jedną niewiadomą (inaczej: znaleźć liczbę, która **spełnia** to równanie), można:

- do obu jego stron dodać tę samą liczbę albo to samo wyrażenie liniowe z jedną zmienną;
- obie jego strony pomnożyć przez tę samą liczbę różną od zera;
- obie jego strony podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Po wykonaniu dowolnej z wymienionych czynności otrzymamy **równanie równoważne**, czyli mające identyczny zbiór rozwiązań z równaniem danym na początku – przed przekształceniami.

Przykład 1 ◂ zad. 1.4

Rozwiążemy podane równania, komentując równoważne przekształcenia.

Rozwiązanie

a) $x - 4 = 0$
$x - 4 + 4 = 4$ ⟵ do obu stron równania dodajemy 4
$x = 4$

b) $2x + 1 = 7$
$2x + 1 - 1 = 7 - 1$ ⟵ od obu stron równania odejmujemy 1
$2x = 6$ ⟵ obie strony równania dzielimy przez 2
$x = 3$

c) $-3x = 15 - 6x$

$-3x + 6x = 15 - 6x + 6x$ ⟵ do obu stron równania dodajemy $6x$

$3x = 15$ ⟵ obie strony równania dzielimy przez 3

$x = 5$

d) $5x + 2\sqrt{5} = 3 - \sqrt{7}x$ ⟵ do obu stron równania dodajemy $\sqrt{7}x - 2\sqrt{5}$

$5x + 2\sqrt{5} + \sqrt{7}x - 2\sqrt{5} = 3 - \sqrt{7}x + \sqrt{7}x - 2\sqrt{5}$

$5x + \sqrt{7}x = 3 - 2\sqrt{5}$ ⟵ wyłączamy x przed nawias

$x\left(5 + \sqrt{7}\right) = 3 - 2\sqrt{5}$ ⟵ obie strony równania dzielimy przez $5 + \sqrt{7}$

$x = \dfrac{3 - 2\sqrt{5}}{5 + \sqrt{7}}$

Dodawanie do obu stron równania tej samej liczby (wyrażenia) potocznie nazywamy **przenoszeniem tej liczby** (wyrażenia) na drugą stronę równania ze zmienionym znakiem. Podobnie – odejmowanie od obu stron równania tej samej liczby (wyrażenia) potocznie nazywamy **przenoszeniem tej liczby** (wyrażenia) na drugą stronę równania ze zmienionym znakiem.

Przykład 2 ◂ zad. 1.6

Rozwiążemy podane równania.

Rozwiązanie

a) $2\left(x - \sqrt{3}\right) + 1 = 2x$ ⟵ wykonujemy działania po lewej stronie równania

$2x - 2\sqrt{3} + 1 = 2x$ ⟵ przenosimy wyrazy z niewiadomą na lewą, a liczby na prawą stronę znaku równości

$2x - 2x = 2\sqrt{3} - 1$ ⟵ redukujemy wyrazy podobne

$0 = 2\sqrt{3} - 1$ ⟵ sprzeczność

Odp.: Równanie jest sprzeczne, czyli nie ma rozwiązań.

b) $3(2 - x) + 4x = 2 - x$

$6 - 3x + 4x + x = 2$

$2x = 2 - 6$

$2x = -4$

$x = -2$

Odp.: Równanie ma jedno rozwiązanie: $x = -2$.

c) $3x + 2\left(\sqrt{2} + 2\right) = 1 + 2\sqrt{2} + 3(x + 1)$

$3x + 2\sqrt{2} + 4 = 1 + 2\sqrt{2} + 3x + 3$

$3x - 3x = 4 + 2\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{2}$

$0 = 0$ ⟵ tożsamość (prawda dla każdego x)

Odp.: Równanie jest tożsamościowe, czyli każda liczba jest jego rozwiązaniem: $x \in \mathbf{R}$.

Przykład 3 ◀ zad. 1.9

Rozwiążemy równanie $(2x+1)^2-(x-3)^2=(2x+1)(2x-1)-x^2+3$.

Rozwiązanie

Stosujemy wzory skróconego mnożenia: kwadrat sumy, kwadrat różnicy po lewej stronie równania; różnica kwadratów po prawej stronie równania.

$$\left(4x^2+4x+1\right)-\left(x^2-6x+9\right)=\left(4x^2-1\right)-x^2+3$$
$$4x^2+4x+1-x^2+6x-9=4x^2-1-x^2+3$$
$$10x=10, \text{ stąd } x=1$$

Odp.: $x=1$

Zadania

1.1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Podane równania są równoważne:

A. $\frac{3}{4}x=\frac{4}{3}$, $\frac{4}{3}x=\frac{3}{4}$.

B. $4(x+1)-12=4$, $2(x-3)-3=x-6$.

C. $\sqrt{3}(x+5)=2\sqrt{27}x$, $2\sqrt{27}x+\sqrt{3}=\sqrt{3}(x+6)$.

1.2. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Podane równania są równoważne:

A. $5x+\sqrt{3}=2\left(\sqrt{3}+x\right)$, $\sqrt{3}x+2=3$.

B. $2(x+7)-7(x+1)=3(x+5)$, $\frac{5(x+1)}{7}+\frac{x-1}{2}=17$.

C. $\frac{x+3}{2}-\frac{x-1}{3}=1\frac{1}{2}$, $\frac{2x+5}{4}=\frac{2x-5}{2}+4\frac{3}{4}$.

1.3. Liczba a spełnia równanie $x+\frac{3x-8}{4}+\frac{x-10}{6}=4$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Liczba a spełnia równanie $x+3(x-1)=2(x+5)-7$.

B. Liczba a spełnia równanie $\frac{x+2}{2}=\frac{x+5}{3}$.

C. Liczba a spełnia równanie $x(2x-3)+1=2(x-3)(x+4)$.

1.4. Rozwiąż równanie.

a) $5x-2=3$

b) $2x+11=5$

c) $7x-8=13$

d) $4x-3=2x+7$

e) $9x+1=4x-9$

f) $2x+3(x-4)=4x-5$

1.5. Rozwiąż równanie.

a) $12-(3x+5)=5x-(2x-1)$

b) $7(x+3)-3(x-1)=5(x+3)$

c) $5-2(x-1)+\frac{1}{2}(2x-4)=5(x-3)+8$

d) $\frac{1}{2}+2(3-2x)+3(1-x)=5\frac{1}{2}-2x$

e) $3\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{3}{4}(12-4x)=\frac{1}{2}(2x-12)$

f) $5\left(x-\frac{1}{6}\right)-2\left(x+\frac{5}{6}\right)=6+5\left(x-\frac{1}{2}\right)$

1.6. Rozwiąż równanie.

a) $6x+2(x-7)+5=8x-11$

b) $x-(7-4x)=3(x-5)+8$

c) $4(2x-1)-7=2(4x-6)+1$

d) $3(2x-1)+2(3x+5)=4(2x+8)-2(3-2x)$

e) $3(3x+5)+5(3-5x)=4(6-4x)+6$

f) $\frac{1}{5}(5-10x)+0{,}2(10+5x)=\frac{1}{2}-2(x-3)$

1.7. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5-x}{5}=\frac{x+3}{15}$

b) $\frac{8x-1}{6}=\frac{x-2}{3}+\frac{1}{2}(2x+1)$

c) $\frac{4x-8}{3}=6(x+2)$

d) $2-\frac{7-x}{3}=\frac{3x+2}{5}-1$

e) $3\left(\frac{x+5}{6}-\frac{3x+1}{2}\right)+11=4(1-x)$

f) $\frac{5x-1}{3}+\frac{7-x}{2}=2\left(3+\frac{x}{2}\right)$

1.8. W równaniu $3(x+1)-2(x-3)=$? zastąp ? takim wyrażeniem, aby otrzymane równanie

a) było tożsamościowe.

b) było sprzeczne.

c) miało rozwiązanie równe 2.

1.9. Rozwiąż równanie.

a) $(x-1)(x+6)-(x-2)^2=2(3x+4)$

b) $x(2x+1)=4(x-2)+2(x+2)^2$

c) $(7-2x)^2-(x+1)(x-5)=3(x-3)^2+3$

d) $5(x+1)^2-3(x+4)^2-1=2(x+5)^2-6(7x+5)$

e) $(3x-2)^2-(2x+1)^2=(2x+1)(2x-1)+x^2-12$

f) $(2x-3)(2x+3)+5(x-1)^2=(3x-2)(3x-2)$

2. Nierówności pierwszego stopnia

Umiejętności:
- rozwiązywanie nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
- sprawdzanie, czy dana liczba jest rozwiązaniem nierówności

Jedną z podstawowych operacji w matematyce jest porównywanie liczb. Na przykład nierówności $2 < 3$, $-5 < 0$, $4 \leqslant 5$, $\sqrt{11} > 3$ są prawdziwe, a nierówności $1 > 1$, $\sqrt{1{,}0002} < 1$ są fałszywe.

Znak $\leqslant$ oznacza „mniejsze lub równe". Zatem nierówność $4 \leqslant 5$ jest prawdziwa, podobnie jak nierówność $4 \leqslant 4$.

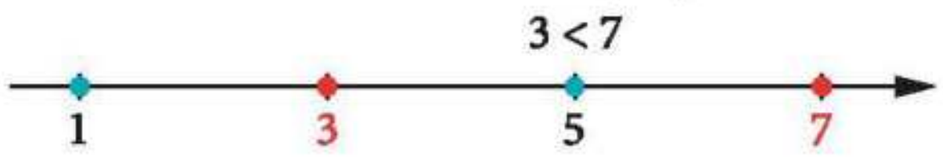
Jeżeli do obu stron nierówności dodamy (lub od obu stron odejmiemy) tę samą liczbę, to otrzymane sumy (różnice) zachowają uporządkowanie na osi liczbowej.
Na przykład:

- $1 < 5$

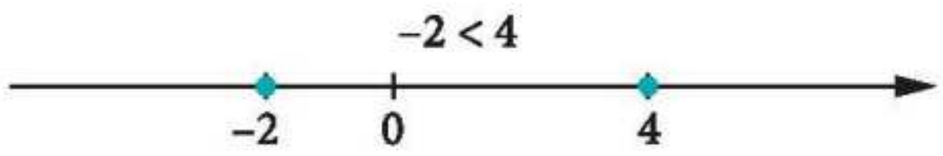


$1 + 2 < 5 + 2$ ⟵ do obu stron nierówności dodajemy 2

- $3 < 7$

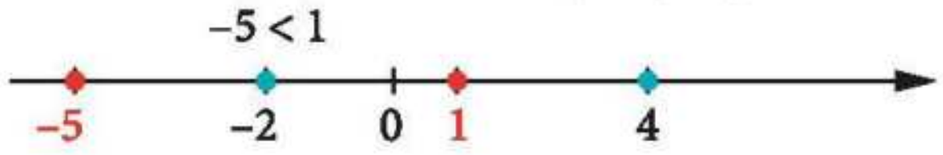


- $-2 < 4$



$-2 - 3 < 4 - 3$ ⟵ od obu stron nierówności odejmujemy 3

$-5 < 1$



Wniosek

- Do obu stron nierówności możemy dodać tę samą liczbę.
- Od obu stron nierówności możemy odjąć tę samą liczbę.

Po wykonaniu tych działań **zwrot nierówności się nie zmieni**.

Jeżeli pomnożymy dwie liczby przez 2, to otrzymane iloczyny zachowają uporządkowanie na osi liczbowej.
Na przykład:

- $-1 < 2$

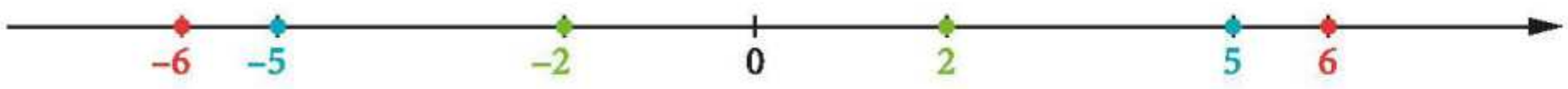
$(-1) \cdot 2 < 2 \cdot 2$ ⟵ obie strony nierówności mnożymy przez 2

$-2 < 4$

- $3 < 4$
  $3 \cdot 2 < 4 \cdot 2$ ⟵ obie strony nierówności mnożymy przez 2
  $6 < 8$
- $-3 < -1$
  $(-3) \cdot 2 < (-1) \cdot 2$ ⟵ obie strony nierówności mnożymy przez 2
  $-6 < -2$

Zwrot nierówności nie zmieni się przy mnożeniu obu jej stron przez dowolną liczbę dodatnią.

Kiedy mnożymy liczbę przez -1, otrzymujemy liczbę do niej przeciwną. Na osi liczbowej ilustracją tego działania jest symetria środkowa względem punktu 0.



Po wykonaniu takiej symetrii dwie liczby zmienią kolejność występowania na osi, np.:

- $2 < 5$, a po symetrii $-5 < -2$, co można zapisać również w postaci $-2 > -5$,
- $-2 < 5$, po symetrii $-5 < 2$, czyli $2 > -5$,
- $-6 < -2$, po symetrii $2 < 6$, czyli $6 > 2$.

Tę obserwację krótko podsumujemy: kiedy mnożymy obie strony nierówności przez -1, musimy zmienić jej zwrot.

Mnożenie stron nierówności przez dowolną liczbę ujemną, np. przez -7, możemy wykonać w dwóch etapach. Najpierw mnożymy przez -1, a następnie przez 7. Przy pierwszej czynności zmienimy zwrot nierówności na przeciwny, drugie mnożenie zwrotu już nie zmieni.

Zauważmy jeszcze, że dzielenie można zastąpić mnożeniem przez odwrotność dzielnika, więc opisane wyżej własności dotyczą również dzielenia.

Wniosek

- Obie strony nierówności możemy pomnożyć (podzielić) przez tę samą liczbę **dodatnią**. Po wykonaniu takiego działania **zwrot nierówności się nie zmieni**.
- Obie strony nierówności możemy pomnożyć (podzielić) przez tę samą liczbę **ujemną**. Po wykonaniu takiego działania **zwrot nierówności zmieni się na przeciwny**.

Zajmiemy się teraz sytuacją, gdy po jednej lub po obu stronach znaków $>$, $<$, $\leqslant$, $\geqslant$ pojawiają się niewiadome.

Przykład 1

Bartek miał banknot 20-złotowy. Kupił kilka batoników po 2 zł każdy. Kasjerka wydała mu ponad 12 zł reszty.

a) Ile batoników mógł kupić Bartek?

b) Jaki warunek spełnia niewiadoma liczba x batoników?

Rozwiązanie

a) Jeżeli Bartek otrzymał ponad 12 zł reszty, to za batoniki zapłacił mniej niż 8 zł. Mógł zatem kupić co najwyżej 3 batoniki.

b) Warunek podany w przykładzie można zapisać w postaci nierówności: $20 - x \cdot 2 > 12$.

Nauczymy się teraz rozwiązywać takie nierówności.

Dwa wyrażenia algebraiczne połączone znakiem $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$ nazywamy nierównością algebraiczną. Przykłady nierówności algebraicznych:

Nierówności, w których występuje znak $<$ lub $>$, nazywamy **ostrymi**. Nierówności, w których występuje znak $\leqslant$ lub $\geqslant$, nazywamy **nieostrymi**.

$$5x - 7 < 6 - 2x, \quad 4\frac{1}{2} - 2x \geqslant 3y, \quad 4z - 3 \leqslant 5, \quad 9 - 2x^2 \geqslant 7$$

Nierówność z niewiadomą x, którą można przedstawić w jednej z postaci $ax + b > 0$ lub $ax + b \geqslant 0$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$, nazywamy **nierównością liniową** z jedną niewiadomą. Jeśli dodatkowo założymy, że $a \neq 0$, to nierówność taką nazywamy nierównością pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

Mówimy, że **liczba spełnia nierówność** (jest rozwiązaniem nierówności), jeżeli po podstawieniu tej liczby w miejsce niewiadomej otrzymamy nierówność prawdziwą.

Na przykład liczba 1 spełnia nierówność $5x - 7 < 6 - 2x$, bo nierówność $5 \cdot 1 - 7 < 6 - 2 \cdot 1$, czyli $-2 < 4$, jest prawdziwa, natomiast liczba 2 tej nierówności nie spełnia, bo nierówność $5 \cdot 2 - 7 < 6 - 2 \cdot 2$, czyli $3 < 2$, jest fałszywa.

Rozwiązanie nierówności liniowej polega na wskazaniu **zbioru wszystkich liczb**, które tę nierówność spełniają. Często przedstawiamy ten zbiór na osi liczbowej.

Z rozważań przedstawionych na początku tematu wynika, że aby rozwiązać nierówność, można:

- do obu jej stron dodać tę samą liczbę albo to samo wyrażenie liniowe z jedną zmienną; od obu jej stron odjąć tę samą liczbę albo to samo wyrażenie liniowe z jedną zmienną;
- obie jej strony pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę dodatnią, pozostawiając bez zmiany zwrot nierówności;
- obie jej strony pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę ujemną, zmieniając równocześnie zwrot nierówności na przeciwny.

Po wykonaniu dowolnej z wymienionych czynności otrzymamy **nierówność równoważną**, czyli mającą identyczny zbiór rozwiązań z nierównością początkową, od której rozpoczynaliśmy rozwiązywanie zadania.

Definicja

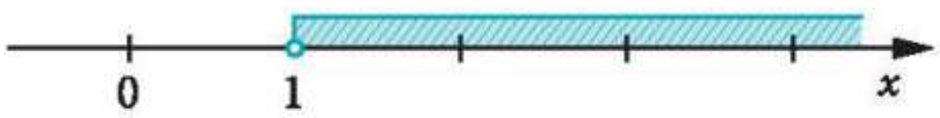
Dwie nierówności nazywamy **równoważnymi**, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Sposób rozwiązywania nierówności pokażemy na przykładach. Zacznijmy od najprostszego zadania.

Przykład 2 ◂ zad. 2.8

Zaznaczymy na osi liczbowej zbiór rozwiązań podanej nierówności.

a) $x > 1$



Puste kółeczko oznacza, że liczba 1 nie spełnia nierówności, czyli **nie należy** do zbioru rozwiązań. Zbiór rozwiązań nierówności tworzą wszystkie liczby większe od 1.

b) $x \leqslant 4$



Zamalowane kółeczko oznacza, że liczba 4 spełnia nierówność, czyli **należy** do zbioru rozwiązań. Zbiór rozwiązań nierówności tworzą: liczba 4 i wszystkie liczby od niej mniejsze.

Przykład 3 ◂ zad. 2.11

Rozwiążemy podaną nierówność i zaznaczymy zbiór jej rozwiązań na osi liczbowej.

Dodawanie (odejmowanie) tej samej liczby do (od) obu stron nierówności potocznie nazywamy (podobnie jak przy wykonywaniu takich samych operacji na równaniach) **przenoszeniem liczby z przeciwnym znakiem na drugą stronę**.

Rozwiązanie

a) $x - 4 < 7$

$x - 4 + 4 < 7 + 4$ ⟵ do obu stron nierówności dodajemy 4

$x < 11$



Odp.: $x < 11$

b) $20 - x \cdot 2 > 12$ ⟵ przenosimy liczbę 20 z przeciwnym znakiem na drugą stronę

$-2x > 12 - 20$ ⟵ wykonujemy odejmowanie po prawej stronie

$-2x > -8$ ⟵ dzielimy obie strony nierówności przez −2, zmieniamy zwrot

$x < 4$



Odp.: $x < 4$

c) $\frac{x-6}{2} + x(x+2) \leqslant (x+3)^2 + 2$ ⟵ mnożymy obie strony nierówności przez 2

$x - 6 + 2x(x+2) \leqslant 2\left(x^2 + 6x + 9\right) + 4$ ⟵ wykonujemy działania po obu stronach

$x - 6 + 2x^2 + 4x \leqslant 2x^2 + 12x + 18 + 4$

$5x - 6 + 2x^2 \leqslant 2x^2 + 12x + 22$

$5x + 2x^2 - 2x^2 - 12x \leqslant 22 + 6$

$-7x \leqslant 28$ ⟵ obie strony nierówności dzielimy przez −7, zmieniamy zwrot

$x \geqslant -4$



Odp.: $x \geqslant -4$

d) $2(x+1) < 2x - 2$

$2x + 2 < 2x - 2$

$2x - 2x < -2 - 2$

$0 < -4$

Otrzymana nierówność jest fałszywa. Żadna liczba rzeczywista nie spełnia podanej nierówności algebraicznej.

Odp.: Nierówność nie ma rozwiązań.

e) $5x - 2 > 5(x-1) + 1$

$5x - 2 > 5x - 5 + 1$

$5x - 5x > -4 + 2$

$0 > -2$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa. Każda liczba rzeczywista spełnia podaną nierówność algebraiczną.

Odp.: Zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych.

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $-2x < 12$.

A. $x < -6$ **B.** $x \leqslant -6$ **C.** $x > -6$ **D.** $x \geqslant -6$

2.2. Która nierówność nie ma rozwiązań?

A. $x + 3 < x + 5$ **B.** $x - 3 < x - 5$ **C.** $3x < 2x$ **D.** $3x \leqslant 2x$

2.3. Która liczba nie spełnia nierówności $5(3 - x) + 1 > 2(x - 6) + 4$?

A. -4 **B.** -2 **C.** 2 **D.** 4

2.4. Niech X oznacza zbiór rozwiązań nierówności $5(1 - x) + 2 < 3x - 8(x + 2)$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. X jest zbiorem liczb dodatnich. **C.** $X = \mathbf{R}$

B. X jest zbiorem liczb ujemnych. **D.** $X = \emptyset$

2.5. Sprawdź, czy liczba 2 należy do zbioru rozwiązań podanej nierówności.

a) $4(x - 1)(x + 1) > (2x - 1)^2 + 3$ b) $3 - (3x + 2) \leqslant \frac{x - 5}{2}$ c) $\frac{4 - x}{2} \leqslant \frac{3x - 2}{4}$

2.6. Sprawdź, czy liczba -5 należy do zbioru rozwiązań podanej nierówności.

a) $5\left(x - 1\frac{1}{2}\right) \geqslant 6\frac{1}{2} - 2x$ b) $6(x - 1) - 1\frac{1}{3} \leqslant 3x + 1\frac{2}{3}$ c) $7x + 5\frac{1}{4} < 3x - 2{,}75$

2.7. Wskaż największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x}{2} \geqslant \frac{2x}{3} + \frac{1}{4}$.

A. -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 1

2.8. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

a) $x > -3$
b) $x \geqslant 2$
c) $x \leqslant -1$
d) $x - 4 > 0$
e) $2x + 4 \geqslant 6$
f) $7x - 15 \leqslant -1$
g) $2x - 13 > 3x - 15$
h) $3(x + 2) > 2(x + 1) + 4$
i) $2(x - 3) \leqslant x - 4$

2.9. Rozwiąż nierówność.

a) $3x - 1 > 2$
b) $7x + 12 \geqslant -2$
c) $5x - 17 \leqslant 3$
d) $2x + 1\frac{1}{2} > 7{,}5$
e) $2x - 3 < x + 5$
f) $4(x - 1) > 3(x - 2)$
g) $3(2x + 1) + 5x < 2(3x + 2) - 11$
h) $6(1 - x) + 2(x + 1) > 10 - 5x$

2.10. Rozwiąż nierówność.

a) $8 - 3(3x + 1) < 5(3 - x) + 2$

b) $5(x - 1) - 4 \geqslant 3(x + 1) - 2(x - 2)$

c) $(x - 3)(x + 2) > (x - 6)(x - 7)$

d) $\frac{2x - 4}{4} > x - 2$

e) $\frac{3x - 2}{2} - 1 < \frac{2}{3}(2x - 3) + x$

f) $\frac{x + 2}{3} - (1 - x) < \frac{x - 2}{2}$

g) $\frac{3(x + 1)}{2} - 7x < 4 - 5(x - 2)$

h) $1 + x - \frac{5x - 2}{4} \geqslant \frac{7 - 2x}{2}$

i) $2{,}5 - x - \frac{2x - 7}{2} \leqslant 1 + \frac{2 - 5x}{4}$

j) $\frac{1 - 4x}{3} + x + 2 \geqslant -2(x + 2) + \frac{1}{4}$

2.11. Rozwiąż nierówność i przedstaw zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

a) $(x - 3)(x + 2) \geqslant (x - 6)(x - 7)$

b) $(x - 3)^2 - 2(x - 1)(x + 1) < 4 - (1 - x)^2$

c) $9(x - 1)(x + 1) + 6 \leqslant (3x + 2)^2 - 5x$

d) $(2x - 1)^2 - (x + 1)^2 > 3x(x - 5) + 18$

e) $(x + 1)^2 < (x - 1)^2$

f) $(x + 1)^2 - 5(x - 2) \geqslant \left(x + \sqrt{13}\right)\left(x - \sqrt{13}\right)$

g) $(2x - 1)^2 - 1 + 5\left(\sqrt{3} - 2\right)\left(\sqrt{3} + 2\right) < 4x^2$

h) $3 - (2x - 5)(5 + 2x) \leqslant 1 - (2x - 3)^2$

2.12. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{(x - 3)(x + 3)}{3} - \frac{(x - 4)^2}{2} < -\frac{1}{6}x^2$

b) $(x - 2)^2 + 1 > \frac{x - 8}{3} - (1 - x)(1 + x)$

c) $1 - (3x - 2)^2 \geqslant \frac{x - 36}{3} - 9(x + 1)(x - 1)$

d) $(x + 2)^2 - \frac{2x - 1}{3} \geqslant \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) - \frac{1}{3}$

2.13. Rozwiąż nierówność $2x - \frac{(3x - 2)(3x + 2)}{3} > 3 - 3(x - 1)^2$. Sprawdź, które z liczb: $1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{5}$, -8 należą do zbioru rozwiązań tej nierówności.

2.14. Rozwiąż nierówność $\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) + 3(x - 1)^2 - 5 < -x - \frac{1}{2}\left(8 - 8x^2\right)$ i podaj największą liczbę całkowitą, która tej nierówności nie spełnia.

2.15. Rozwiąż nierówność $-3(x - 3)^2 + \left(-3x + 3\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 6(x + 1)^2 + 0{,}25$ i podaj największą liczbę całkowitą, która tę nierówność spełnia.

D **2.16.** Wykaż, że każda liczba mniejsza od -2 spełnia nierówność

$$(3x-8)(x-4)-\frac{(5-2x)^2-11}{2}>2(x+5)^2-\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right).$$

2.17. Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające podaną nierówność.

$$\frac{x+2}{3}-\frac{x-1}{2}\geqslant 2(x+2)-5$$

2.18. Ile czekoladek znajduje się w pudełku, jeżeli w pięciu takich pudełkach jest mniej niż 111 czekoladek, a w siedmiu jest ich więcej niż 151?

2.19. Samochodem dostawczym można przewozić 1200 kg towaru. Po załadowaniu cukru okazało się, że samochód został wypełniony w 55% ładowności. Ile co najwyżej 10,5-kilogramowych worków z mąką można wstawić, aby nie przekroczyć dopuszczalnej ładowności?

* **2.20.** Suma dwóch kolejnych liczb naturalnych nieparzystych nie przekracza 16. Wyznacz wszystkie pary takich liczb.

* **2.21.** Różnica między kwadratem liczby naturalnej parzystej i kwadratem następnej liczby naturalnej parzystej jest większa od liczby -36. Wyznacz wszystkie pary takich liczb.

D * **2.22.** Wykaż, że każda liczba ujemna spełnia nierówność $\left(3^x+2\right)x<x$.

Prosto do matury

1. Dana jest nierówność $0\cdot(x+3)<5$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dla $x=-2$ nierówność jest prawdziwa.
B. Dla $x=11$ nierówność jest fałszywa.
C. Nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej.

2. Rozwiąż nierówność $2(3x+5)-3(11-5x)\geqslant 4(-7+4x)$.

3. Rozwiąż nierówność $(4x-3)(3x+5)+3x\leqslant(2x+4)(6x-5)$.

4. Rozwiąż nierówność $x-\frac{(2x-3)(2x+3)}{2}\geqslant\frac{1}{2}-2(x-3)^2$. Podaj najmniejszą liczbę naturalną, która tej nierówności nie spełnia.

5. Rozwiąż nierówność $\frac{x+2}{4}+\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)+1<(x+2)^2-\frac{4x-1}{3}$. Podaj wszystkie liczby całkowite ujemne spełniające tę nierówność.

3. Przedziały liczbowe

Umiejętności:

- rozwiązywanie układów nierówności
- posługiwanie się pojęciem przedziału liczbowego
- zaznaczanie przedziałów na osi liczbowej

Zadanie polegające na szukaniu wspólnych rozwiązań kilku nierówności nazywamy rozwiązywaniem układu tych nierówności. Mówimy, że **liczba spełnia układ nierówności**, jeżeli należy do zbioru rozwiązań każdej nierówności danego układu.

Rozwiązanie układu nierówności polega na wskazaniu **zbioru wszystkich liczb**, które ten układ spełniają. Często przedstawiamy ten zbiór na osi liczbowej.

Sposób rozwiązywania układu nierówności pokażemy na przykładach.
Zacznijmy od najprostszego zadania.

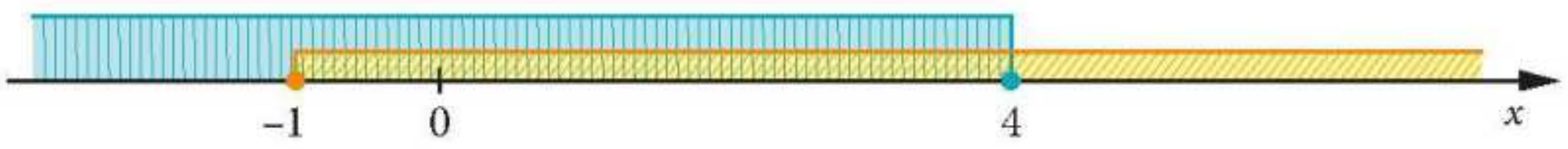
Przykład 1 ◂ zad. 3.4

Przedstawimy na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb spełniających następujący układ nierówności:

$$\begin{cases} x \leqslant 4 \\ x \geqslant -1 \end{cases}$$ ⟵ klamra oznacza, że obie nierówności muszą być spełnione równocześnie

Rozwiązanie

Wygodnie jest zacząć od zaznaczenia zbiorów rozwiązań poszczególnych nierówności na osi liczbowej.



Obok przedstawiona jest ilustracja zbioru rozwiązań danego układu nierówności na osi liczbowej.

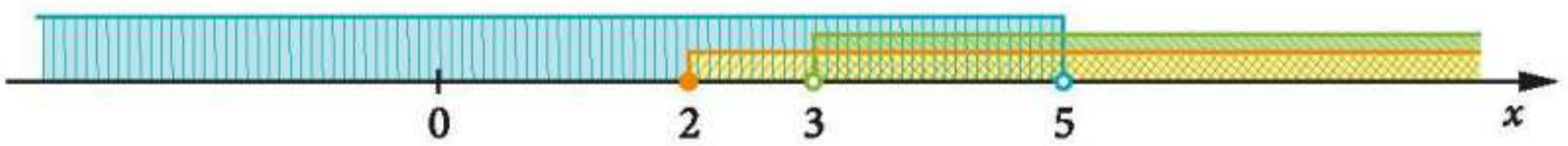


Przykład 2 ◂ zad. 3.5

Rozwiążemy układ nierówności $\begin{cases} x > 3 \\ x \geqslant 2 \\ x < 5 \end{cases}$.

Rozwiązanie

Zaznaczamy zbiory rozwiązań poszczególnych nierówności na osi liczbowej.



Z rysunku odczytujemy, że każdą z trzech nierówności spełniają liczby większe od 3 i jednocześnie mniejsze od 5. Zatem $x > 3$ i $x < 5$.

Obok przedstawiona jest ilustracja zbioru rozwiązań na osi liczbowej.



Układ nierówności $\begin{cases} x > 3 \\ x < 5 \end{cases}$ możemy zapisać w postaci **podwójnej nierówności**:

$$3 < x < 5$$

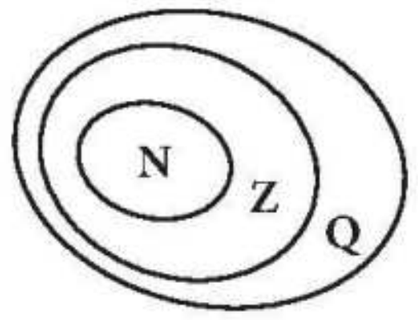
W ostatnim zapisie obowiązuje zasada, że zwroty obu nierówności są zgodne.

Przypomnijmy, że zbiór B **jest podzbiorem zbioru** A ($B \subset A$), jeżeli każdy element zbioru B jest także elementem zbioru A.

Przykład 3

Poznaliście następujące podzbiory zbioru liczb rzeczywistych **R**:

N – zbiór liczb naturalnych,
Z – zbiór liczb całkowitych,
Q – zbiór liczb wymiernych.



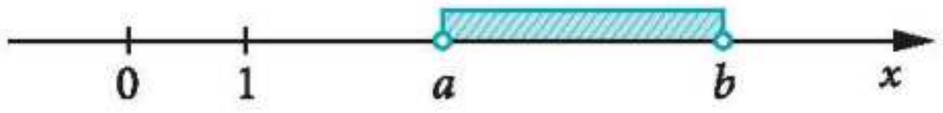
Zdanie $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ ilustruje prostą obserwację, że każda liczba naturalna jest liczbą całkowitą, a każda liczba całkowita jest liczbą wymierną.

Pewne podzbiory zbioru liczb rzeczywistych nazywamy **przedziałami liczbowymi**.

W poniższych definicjach zakładamy, że a i b oznaczają liczby rzeczywiste oraz $a < b$.

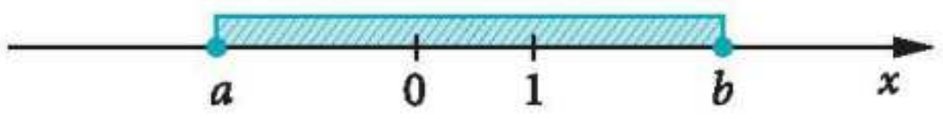
Definicja

Przedziałem otwartym $(a; b)$ nazywamy zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a < x < b$.



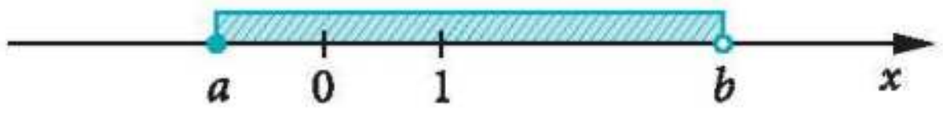
Definicja

Przedziałem domkniętym $\langle a; b \rangle$ nazywamy zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a \leqslant x \leqslant b$.



Definicja

Przedziałem lewostronnie domkniętym $\langle a; b)$ nazywamy zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a \leqslant x < b$.



Definicja

Przedziałem prawostronnie domkniętym $(a; b\rangle$ nazywamy zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a < x \leqslant b$.



Do zapisania zbioru rozwiązań pojedynczej nierówności wprowadzamy następujące oznaczenia przedziałów:

- $x > a$ $\quad (a; \infty)$



- $x < a$ $\quad (-\infty; a)$



- $x \geqslant a$ $\quad \langle a; \infty)$



- $x \leqslant a$ $\quad (-\infty; a\rangle$



Zapis $(a; \infty)$ czytamy: „przedział otwarty od a do nieskończoności". Podobnie zapis $(-\infty; a)$ czytamy „przedział otwarty od minus nieskończoności do a".

Symbol ∞ **nie oznacza** żadnej liczby.

Przykład 4 ◀ zad. 3.6

Zaznaczymy na osi liczbowej przedział

a) $\langle -1; 4)$. b) $(-\infty; 3\rangle$. c) $\left\langle 0; 2\sqrt{2}\right\rangle$. d) $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Rozwiązanie

a) $\langle -1; 4)$



b) $(-\infty; 3\rangle$



c) $\langle 0; 2\sqrt{2}\rangle$



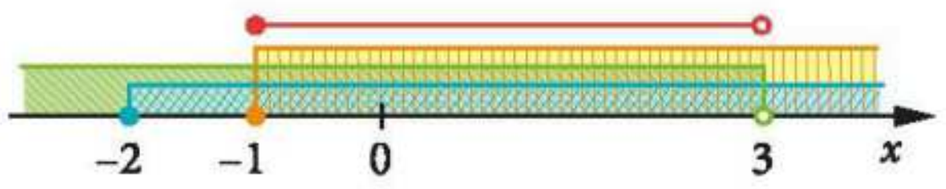
d) $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$



Przykład 5 ◀ zad. 3.7

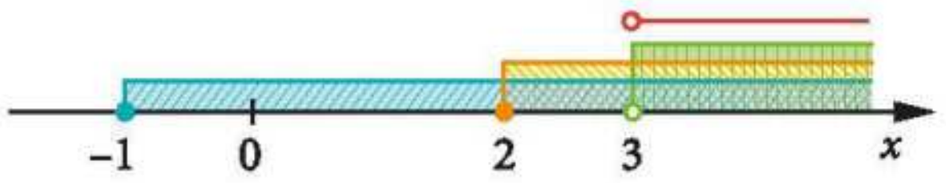
Zapiszemy zbiór rozwiązań układu nierówności w postaci przedziału liczbowego (jeżeli to możliwe).

a) $\begin{cases} x < 3 \\ x \geqslant -2 \\ x \geqslant -1 \end{cases}$



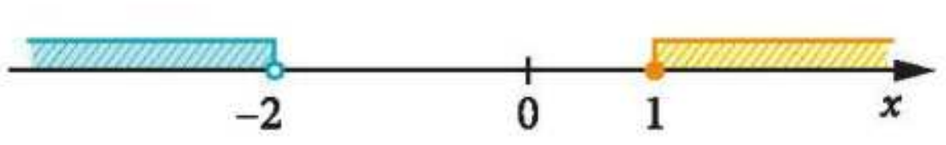
Odp.: $x \in \langle -1; 3)$

b) $\begin{cases} x > 3 \\ x \geqslant 2 \\ x \geqslant -1 \end{cases}$



Odp.: $x \in (3; \infty)$

c) $\begin{cases} x < -2 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$



Odp.: Ten układ nierówności nie ma rozwiązania.

Przykład 6 ◀ zad. 3.13

Zaznaczymy na osi liczbowej zbiór rozwiązań podwójnej nierówności

$$x - 2 \leqslant 3x + 4 \leqslant 2x + 8$$

i zapiszemy go w postaci przedziału.

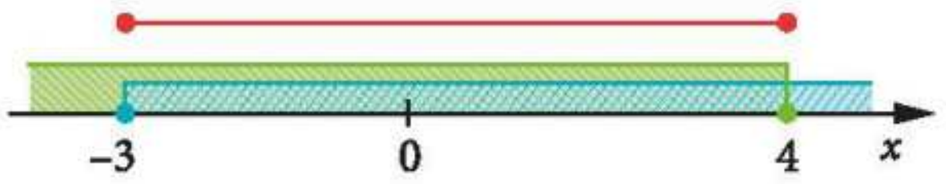
Rozwiązanie

$\begin{cases} x - 2 \leqslant 3x + 4 \\ 3x + 4 \leqslant 2x + 8 \end{cases}$ ⟵ nierówność podwójną zapisujemy w postaci układu

$\begin{cases} x - 3x \leqslant 4 + 2 \\ 3x - 2x \leqslant 8 - 4 \end{cases}$ ⟵ rozwiązujemy każdą z nierówności

$\begin{cases} -2x \leqslant 6 \\ x \leqslant 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant -3 \\ x \leqslant 4 \end{cases}$



Odp.: $x \in \langle -3; 4\rangle$

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wskaż przedział, który jest zbiorem rozwiązań układu nierówności.

$$\begin{cases} x \leqslant 3 \\ x > 0 \end{cases}$$

A. $(0; 3)$ **B.** $\langle 0; 3\rangle$ **C.** $\langle 0; 3)$ **D.** $(0; 3\rangle$

3.2. Ile liczb całkowitych należy do przedziału $(-2; 3\rangle$?

A. 4 **C.** 6

B. 5 **D.** nieskończenie wiele

3.3. Wskaż układ nierówności, którego zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -5; 2)$.

A. $\begin{cases} x \geqslant -5 \\ -x \geqslant -2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x \geqslant -5 \\ -x > -2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} -x \leqslant 5 \\ -x \geqslant -2 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} -x < 5 \\ -x \geqslant -2 \end{cases}$

3.4. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań układu nierówności.

a) $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x < 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x > -3 \\ x \geqslant 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x > -\sqrt{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \leqslant -\frac{3}{2} \\ x \geqslant -1 - \sqrt{2} \end{cases}$

3.5. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} x > -2 \\ x \geqslant -3 \\ x < 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \leqslant 4 \\ x \geqslant 0 \\ x > -2 \end{cases}$

3.6. Zaznacz na osi liczbowej podane przedziały.

$(2; 5)$, $\langle -6; 1\rangle$, $\langle -2; 4\rangle$, $(-3; 2)$, $\langle -4; 2)$, $(-3; -1\rangle$, $\langle -5; 1\rangle$, $(-\infty; 2)$, $(-1; \infty)$, $(-\infty; 3\rangle$, $\langle 2; \infty)$

3.7. Podaj zbiór rozwiązań układu nierówności w postaci przedziału (jeżeli to możliwe).

a) $\begin{cases} 2x - 3 < -5 \\ 3x - 2 < 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 6 < x + 4 \\ x - 2 \geqslant 10 - 3x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 5 \geqslant 2x + 1 \\ x + 1 \geqslant 2x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x + 2 > 0 \\ 4x - 8 < 0 \end{cases}$

3.8. Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające układ nierówności.

a) $\begin{cases} 2x+5>1 \\ 3x-2<13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x-2<6 \\ 5x+2\geqslant -3 \end{cases}$

3.9. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające układ nierówności.

a) $\begin{cases} 3x-8<0 \\ 2x+6\geqslant 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-5<0 \\ 3x+1>0 \end{cases}$

3.10. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań układu nierówności i zapisz ten zbiór w postaci przedziału (jeżeli to możliwe).

a) $\begin{cases} 2(7-x)+1\geqslant 3-4(x-2) \\ 6(x+2)-5x<3x+10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9(x+1)-7(x+1)>3(x+2)+1 \\ \frac{1}{2}(x-2)+5\geqslant 4-1\frac{1}{2}x \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x-2}{3}>\frac{3-x}{5}-1 \\ (3x-1)^2-1\leqslant 3(x-2)^2+6\left(x^2+3\right) \end{cases}$

d) $\begin{cases} (5-x)^2+3(x-1)^2<(2x+1)(2x-1)-3 \\ 2(x-3)^2-(4-x)^2<5+(x+1)^2 \end{cases}$

3.11. Znajdź największą liczbę x spełniającą podany układ warunków.

a) $\frac{2x+1}{3}-\frac{3x-1}{2}>1$ i x jest liczbą całkowitą.

b) $\frac{7x+1}{9}-\frac{4x-5}{5}>1$ i x jest liczbą naturalną.

3.12. Znajdź najmniejszą liczbę x spełniającą podany układ warunków.

a) $2(3x-1)-7>4x+5$ i x jest liczbą nieparzystą.

b) $\frac{1}{2}(x-4)-(3-1{,}5x)<6$ i x jest liczbą naturalną.

3.13. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań podwójnej nierówności i zapisz go w postaci przedziału.

a) $2<x+3<6$

b) $-1\leqslant 2x+3<3$

c) $x+3\leqslant 2x+1\leqslant x+7$

d) $3\leqslant x+1<9$

e) $-3<2-x<5$

f) $x-2\leqslant 3x+4<2x+8$

3.14. Zbadaj, czy zachodzi któryś ze związków: $A \subset B$, $B \subset A$, $A = B$.

a) $A = \{a, b, c\}$ $B = \{b, c, d\}$

b) $A = \{x, y, z\}$ $B = \emptyset$

c) $A = \{x\colon x \in \mathbf{N} \text{ i } x > 0\}$ $B = \{y\colon y \in \mathbf{R} \text{ i } y > 0\}$

d) $A = \{x\colon x \in \mathbf{R} \text{ i } x > 2\}$ $B = (3; \infty)$

e) $A = \langle -5; 2{,}5\rangle$ $B = \left(-\infty; \sqrt{7}\right\rangle$

f) $A = \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{-8}; \infty\right)$ $B = \left(\log_9 \frac{1}{9}; \infty\right)$

Prosto do matury

1. Dany jest przedział $(-5; 3\rangle$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Przedział ten jest zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x \leqslant 3 \\ -x > -5 \end{cases}$.

B. Do tego przedziału należy 8 liczb całkowitych.

C. Przedział ten jest zbiorem rozwiązań nierówności $-3 \leqslant -x < 5$.

2. Podaj zbiór rozwiązań układu nierówności w postaci przedziału.

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x < \frac{1}{2} \\ 17x + 20 > 27x \end{cases}$$

3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające układ nierówności.

$$\begin{cases} 5x + 3 > 0 \\ 7 - 2x \geqslant 0 \\ 11 - 4x > 0 \end{cases}$$

4. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań układu nierówności:

$$\begin{cases} \frac{2x - 5}{3} < \frac{5 - 3x}{2} - 1 \\ (2x - 3)^2 \geqslant 10 - (5 - 2x)(5 + 2x) \end{cases}$$

i zapisz ten zbiór w postaci przedziału.

D **5.** Wykaż, że nie istnieje rozwiązanie podwójnej nierówności:

$n - 7 \leqslant 3n + 4 < 3 - n$

gdzie n oznacza liczbę naturalną.

4. Działania na zbiorach

Umiejętności:
- wykonywanie działań na zbiorach (suma, część wspólna, różnica zbiorów)
- stosowanie symboli działań na zbiorach

Zdefiniujemy trzy działania na zbiorach. Omawiane przykłady dotyczą zbiorów liczbowych, ale wprowadzane definicje stosuje się nie tylko w matematyce.

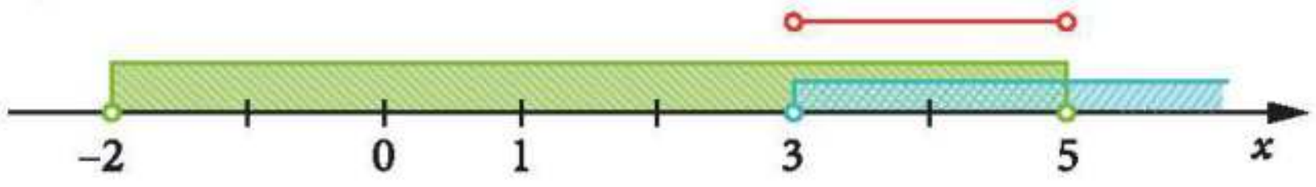
Część wspólna (iloczyn) zbiorów

Przykład 1

Rozwiążemy układ nierówności $\begin{cases} -2 < x < 5 \\ x > 3 \end{cases}$, zaznaczając odpowiednie przedziały na osi liczbowej.

Rozwiązanie

Zbiorem rozwiązań pierwszej nierówności jest przedział liczbowy $(-2;\ 5)$, a drugiej – przedział $(3;\ \infty)$.



Do zbioru rozwiązań układu należą wszystkie liczby spełniające pierwszą i drugą nierówność jednocześnie, a więc takie, które są elementami obydwu przedziałów. Tworzą one przedział liczbowy $(3;\ 5)$.

Odp.: $x \in (3;\ 5)$

Definicja

Częścią wspólną lub **iloczynem** zbiorów A i B nazywamy zbiór utworzony ze wszystkich elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B. Część wspólną zbiorów A i B oznaczamy $A \cap B$.

Przykład 2 ◂ zad. 4.5

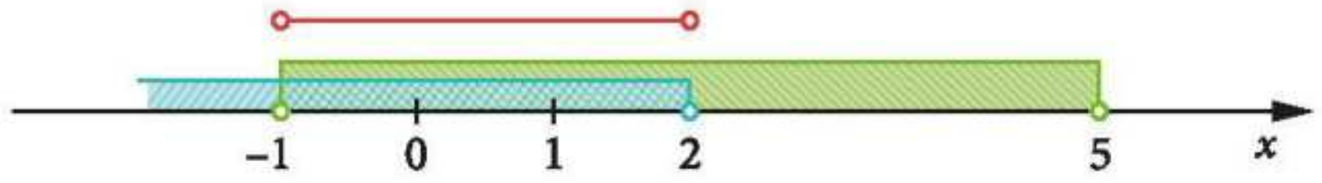
Wyznaczymy część wspólną podanych zbiorów A i B.

a) A jest zbiorem liczb całkowitych podzielnych przez 3, B jest zbiorem liczb całkowitych podzielnych przez 2.

Część wspólna $A \cap B$ jest zbiorem liczb całkowitych podzielnych przez 3 i przez 2, czyli zbiorem liczb całkowitych podzielnych przez 6.

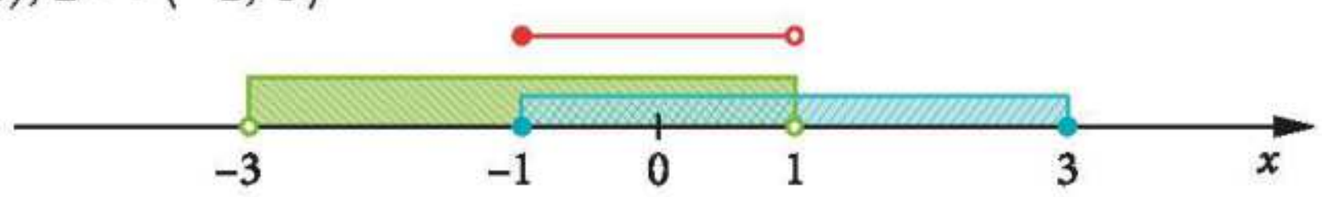
b) $A = (-\infty; 2)$, $B = (-1; 5)$

Obydwa zbiory zaznaczamy na osi liczbowej.



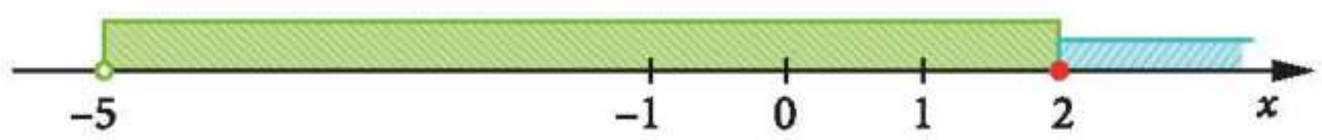
Do zbioru $A \cap B$ należą liczby x spełniające nierówność $-1 < x < 2$, czyli $(-\infty; 2) \cap (-1; 5) = (-1; 2)$.

c) $A = (-3; 1)$, $B = \langle -1; 3\rangle$



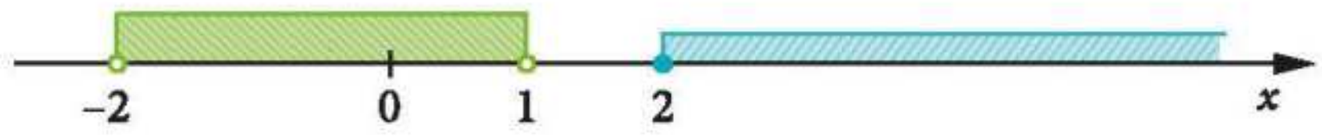
$(-3; 1) \cap \langle -1; 3\rangle = \langle -1; 1)$

d) $A = (-5; 2\rangle$, $B = \langle 2; \infty\rangle$



Jedyną liczbą należącą do przedziału A i do przedziału B jest 2.
Zbiór $A \cap B$ jest jednoelementowy: $(-\infty; 2\rangle \cap \langle 2; 5\rangle = \{2\}$.

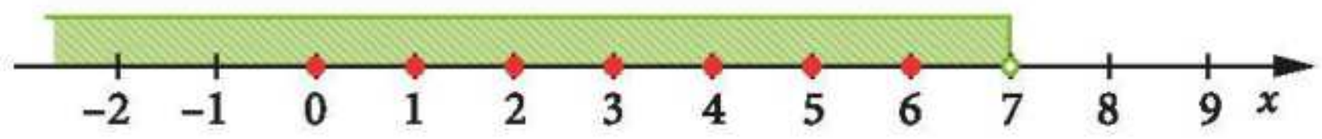
e) $A = (-2; 1)$, $B = \langle 2; \infty)$



Nie ma liczby, która należałaby jednocześnie do przedziału A i do przedziału B.
Zatem częścią wspólną tych zbiorów jest zbiór pusty.
$(-2; 1) \cap \langle 2; \infty) = \emptyset$

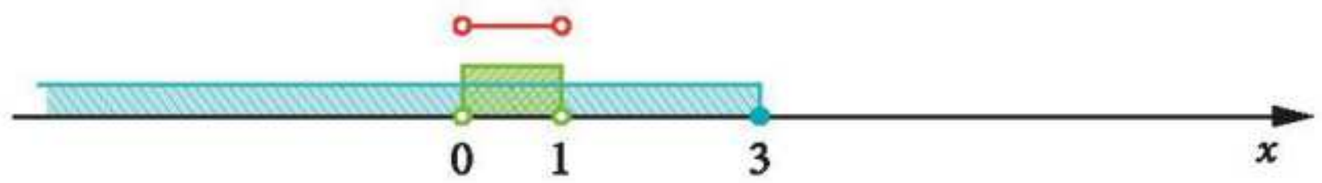
Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zbiory A oraz B są **rozłączne**.

f) $A = (-\infty; 7)$, $B = \mathbf{N}$



W nawiasach klamrowych wypisujemy wszystkie elementy wyznaczonego zbioru.
$(-\infty; 7) \cap \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

g) $A = (-\infty; 3\rangle$, $B = (0; 1)$



$A \cap B = (0; 1) = B$

Jeżeli $A \cap B = B$, to zbiór B jest podzbiorem zbioru A.

Suma zbiorów

Przykład 3

Wyznaczymy zbiór X liczb naturalnych mniejszych od 20 podzielnych przez 3 lub przez 4.

Rozwiązanie

Jeżeli $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 20 podzielnych przez 3, a $B = \{0, 4, 8, 12, 16\}$ – odpowiednio zbiorem liczb podzielnych przez 4, to szukany zbiór $X = \{0, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18\}$ nazwiemy sumą zbiorów A oraz B.

Definicja

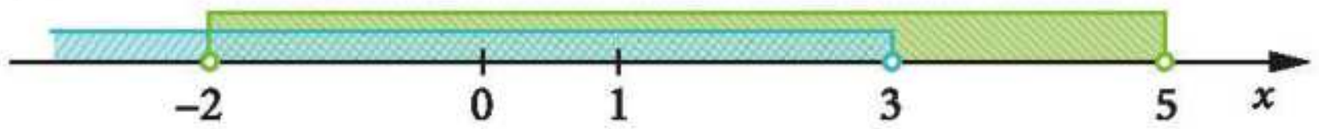
Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór utworzony ze wszystkich elementów, które należą przynajmniej do jednego z nich, czyli do zbioru A lub do zbioru B. Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$.

Przykład 4 ◀ zad. 4.8

Wyznaczymy sumę zbiorów A i B.

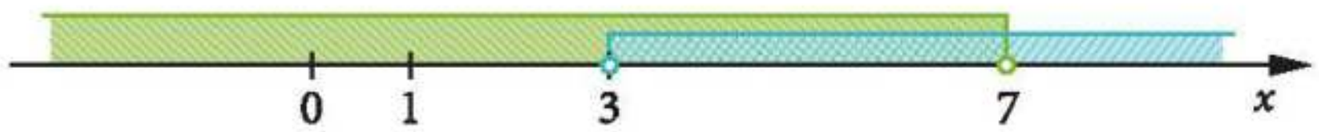
a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, czyli A jest zbiorem liczb naturalnych parzystych i mniejszych od 20;
$B = \{0, 5, 10, 15\}$, czyli B jest zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 5 i mniejszych od 20.
$A \cup B = \{0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$

b) $A = (-\infty; 3)$, $B = (-2; 5)$



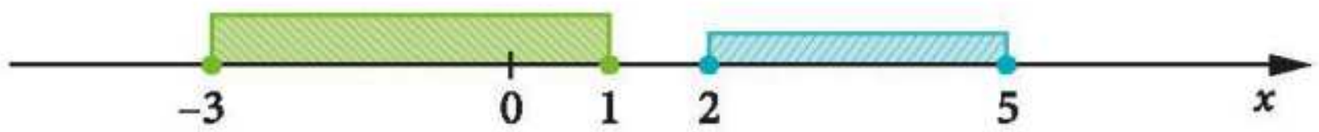
$A \cup B = (-\infty; 5)$

c) $A = (-\infty; 7)$, $B = (3; \infty)$



$A \cup B = \mathbf{R}$

d) $A = \langle -3; 1\rangle$, $B = \langle 2; 5\rangle$



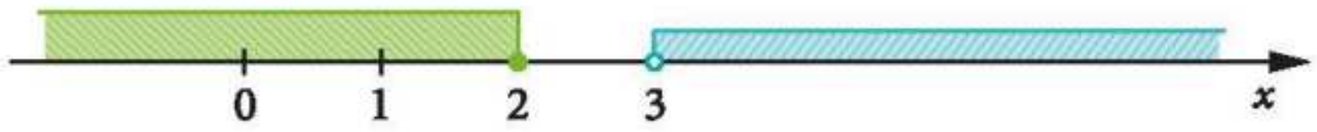
$A \cup B = \langle -3; 1\rangle \cup \langle 2; 5\rangle$

W tym wypadku suma $A \cup B$ nie jest przedziałem liczbowym, ponieważ zbiory A oraz B są rozłączne.

Przykład 5 ◀ zad. 4.9

Zaznaczymy na osi zbiór liczb spełniających następujący warunek: $x \leqslant 2$ lub $x > 3$.

Rozwiązanie



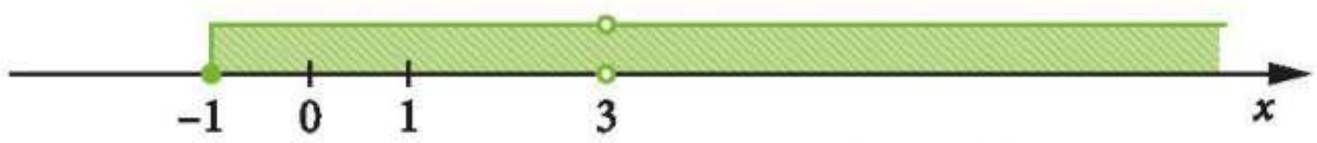
Szukanym zbiorem jest suma przedziałów $(-\infty;\ 2\rangle \cup (3;\ \infty)$.

Różnica zbiorów

Przykład 6

Zaznaczymy na osi liczbowej zbiór rozwiązań podanego układu dwóch nierówności.

$$\begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$



Warunki $x \in \langle -1;\ \infty)$ i $x \neq 3$ możemy zapisać w postaci $x \in \langle -1;\ 3) \cup (3;\ \infty)$.
Inaczej mówiąc, ze zbioru $\langle -1;\ \infty)$ została wykluczona jedna liczba.

Definicja

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór utworzony ze wszystkich elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B.
Różnicę zbiorów A i B oznaczamy $A - B$.

Zbiór określony w przykładzie 6 możemy zapisać również w postaci $\langle -1;\ \infty) - \{3\}$.

Przykład 7 ◀ zad. 4.13

Wyznaczymy różnice zbiorów $A - B$ oraz $B - A$.

a) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\},\ B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

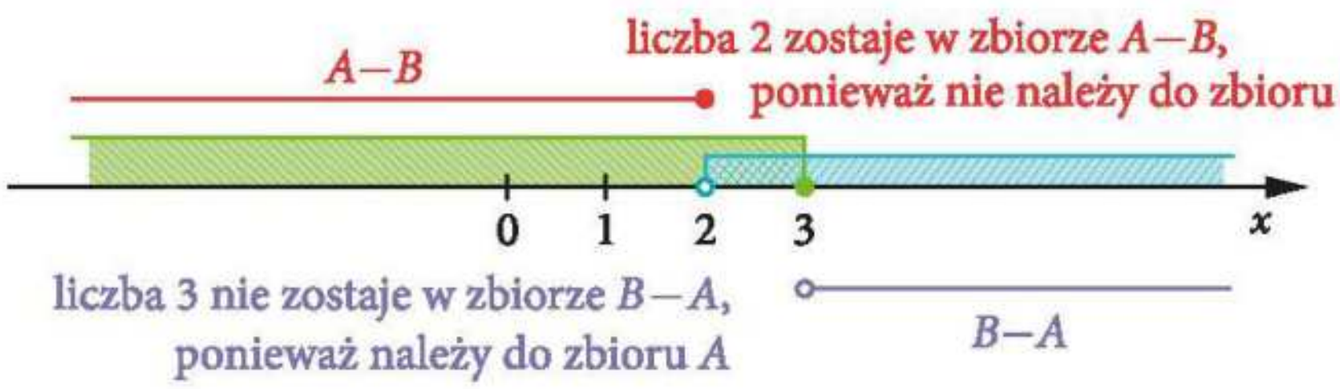
$A - B = \{1,\ 3,\ 5\}$ $\qquad$ $B - A = \{8,\ 10\}$

b) $A = (-\infty;\ 3\rangle,$

$B = (2;\ \infty)$

$A - B = (-\infty;\ 2\rangle$

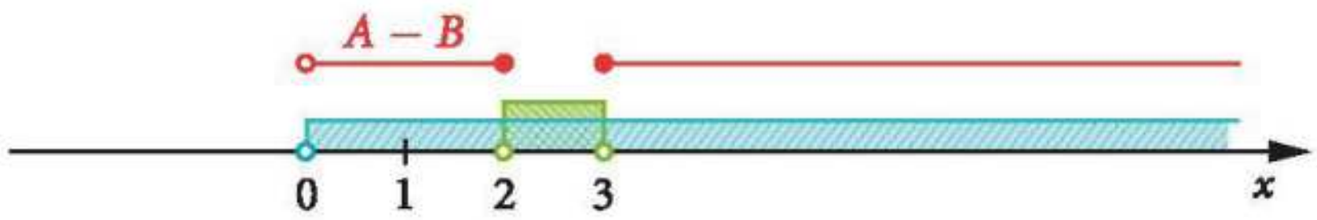
$B - A = (3;\ \infty)$



c) $A = (0;\ \infty),\ B = (2;\ 3)$

$A - B = (0;\ 2\rangle \cup \langle 3;\ \infty)$

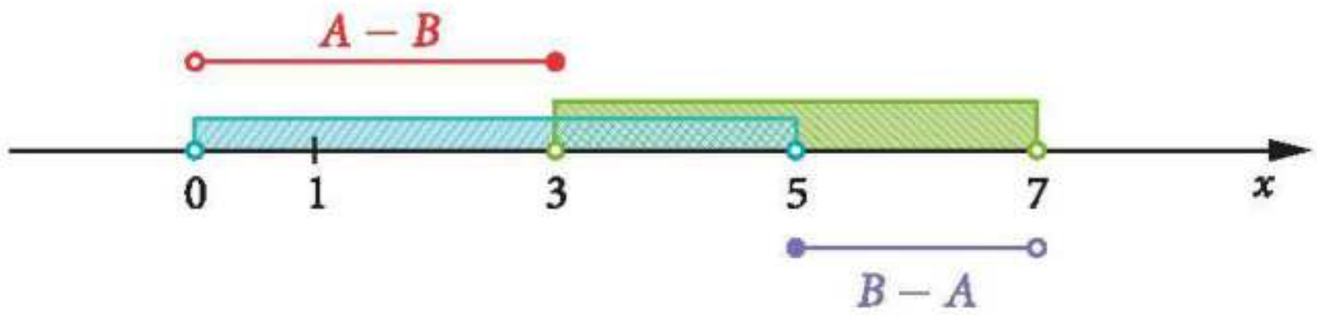
$B - A = \emptyset$



d) $A = (0; 5)$, $B = (3; 7)$

$A - B = (0; 3\rangle$

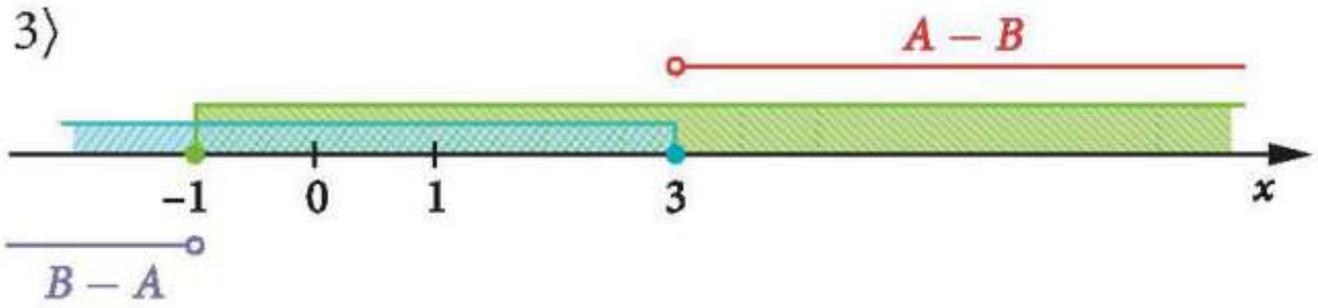
$B - A = \langle 5; 7)$



e) $A = \langle -1; \infty)$, $B = (-\infty; 3\rangle$

$A - B = (3; \infty)$

$B - A = (-\infty; -1)$



Przykład 8 ◀ zad. 4.15

D oznacza zbiór liczb, które możemy podstawiać do wyrażenia w miejsce litery x, aby obliczyć wartość tego wyrażenia dla danej liczby.

Dla każdego z podanych wyrażeń wyznaczymy zbiór D, korzystając z założeń określających wykonalność działań.

Wyrażenie	Założenie	Zbiór D
$x + 1$	niepotrzebne	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$	$\mathbf{R} - \{0\}$
$\sqrt{x}$	$x \geqslant 0$	$\langle 0; \infty)$
$\frac{3}{2 - x}$	$2 - x \neq 0$	$\mathbf{R} - \{2\}$
$\frac{x + 1}{x + 5}$	$x + 5 \neq 0$	$\mathbf{R} - \{-5\}$
$\sqrt{x} + \frac{3}{x - 2}$	$x \geqslant 0$ i $x - 2 \neq 0$	$\langle 0; \infty) - \{2\}$
$\frac{1}{x + 1} + \frac{x}{x - 3}$	$x + 1 \neq 0$ i $x - 3 \neq 0$	$\mathbf{R} - \{-1, 3\}$
$\frac{x^2 + 5x + 7}{3}$	niepotrzebne	$\mathbf{R}$

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Wskaż różnicę zbiorów $\langle -2; 6\rangle - \langle 3; 8\rangle$.

A. $\langle -2; 3\rangle$ **B.** $\langle -2; 3)$ **C.** $\langle 3; 6\rangle$ **D.** $\emptyset$

4.2. Wskaż iloczyn zbiorów $\langle 2; 6\rangle \cap \langle 3; 8\rangle$.

A. $\langle 2; 3\rangle$ **B.** $\langle 2; 3)$ **C.** $\langle 3; 6\rangle$ **D.** $\emptyset$

4.3. Wskaż sumę zbiorów $\langle 2; 6\rangle \cup \langle -3; 8\rangle$.

A. $\langle 6; 8\rangle$ **B.** $\langle -2; 3)$ **C.** $\langle -3; 6\rangle$ **D.** $\langle -3; 8\rangle$

4.4. Niech A i B będą niepustymi zbiorami. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $A \cup \emptyset = A$

B. $A \cap \emptyset = A$

C. Zbiór A jest podzbiorem zbioru B. Zatem $A \cap B = A$.

4.5. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiór $A \cap B$.

a) $A = \langle -5; 2)$, $B = (-1; 4\rangle$

b) $A = (-\infty; 3\rangle$, $B = \langle 0; 5)$

c) $A = \langle -5; 3)$, $B = (3; 6)$

d) $A = (-\infty; 5\rangle$, $B = (2; \infty)$

e) $A = (-5; -2)$, $B = \langle 1; 3)$

f) $A = (-\infty; 8\rangle$, $B = \langle 8; 10)$

4.6. Wymień wszystkie elementy zbioru.

a) $\mathbf{Z} \cap \langle -\pi; \pi\rangle$ b) $\mathbf{Z} \cap \left(0; 3\sqrt{2}\right)$ c) $\mathbf{N} \cap (-\infty; \sqrt{9} - 1\rangle$

4.7. Wyznacz elementy zbiorów: A, B oraz $A \cap B$.

a) $A = \left\{x \in \mathbf{N} \text{ i } x \leqslant \sqrt{17}\right\}$, $B = \{x\colon x = 5n \text{ i } x < 18 \text{ i } n \in \mathbf{N}\}$

b) A jest zbiorem dwucyfrowych wielokrotności liczby 13, B jest zbiorem naturalnych dzielników liczby 52.

c) $A = \{x \in \mathbf{N} \text{ i } 4 \leqslant x \leqslant 8\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \text{ i } -3 \leqslant x \leqslant 12\}$

d) A jest zbiorem liczb pierwszych mniejszych od 20, $B = \{x \in \mathbf{N} \text{ i } 3x - 1 \leqslant 14\}$.

4.8. Wyznacz sumę zbiorów $A \cup B$.

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ i $B = \left\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\right\}$

b) $A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$ i $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$

c) A jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 5, B jest zbiorem nieparzystych liczb naturalnych, spełniających nierówność $3x - 1 < 20$.

d) A jest zbiorem wielokrotności liczby 5, B jest zbiorem wielokrotności liczby 10.

4.9. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiór $A \cup B$.

a) $A = (-\infty; 3\rangle$, $B = (3; 5\rangle$

b) $A = (-3; 2\rangle$, $B = \langle 2; 4)$

c) $A = (-\infty; 1\rangle$, $B = (-3; \infty)$

d) $A = (-3; \infty)$, $B = (0; \infty)$

e) $A = (2; 7)$, $B = \langle -3; 2\rangle$

f) $A = \langle -2; 2\rangle$, $B = (-5, 5)$

4.10. Dane są zbiory $A = \{1, 3, 5, 9, 11\}$, $B = \{2, 5, 7, 9, 11\}$, $C = \{3, 7, 9, 11, 13\}$. Zapisz podany zbiór, używając nazw zbiorów A, B, C oraz symboli $\cup$, $\cap$.

a) $\{5, 9, 11\}$
b) $\{9, 11\}$
c) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$
d) $\{7, 9, 11\}$
e) $\{3, 9, 11\}$
f) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

4.11. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podane warunki i zapisz go w postaci sumy przedziałów.

a) $3x - 1 < 2$ lub $x + 3 > 4$
b) $x + 5 \leqslant 3$ lub $x > 4 - x$
c) $-1 < x < 3$ lub $x > 5$
d) $-3 \leqslant x < 2$ lub $5 < x \leqslant 7$

4.12. Podaj elementy zbioru A i zbioru B, a następnie wyznacz zbiór $A \cup B$.

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \text{ i } 2x - 5 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \text{ i } 7x - 2 = 26\}$
b) $A = \{x\colon x = 2n \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } x < 10\}$, B to zbiór liczb pierwszych mniejszych od 11
c) $A = \{x \in \mathbf{Z} \text{ i } -3 \leqslant x \leqslant 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \text{ i } -7 < x \leqslant 2\}$
d) $A = \left\{x \in \mathbf{N} \text{ i } x \leqslant \sqrt{37}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{N} \text{ i } x \leqslant 2\sqrt{3}\right\}$

4.13. Wyznacz różnice zbiorów $A - B$ i $B - A$.

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \left\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\right\}$
b) $A = \{-2, 0, 2\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$
c) $A = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\right\}$, $B = \{1, 2\}$
d) $A = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
e) A jest zbiorem dzielników całkowitych liczby 18, $B = \left\{x \in \mathbf{Z} \text{ i } x^2 = 81\right\}$
f) $A = \{0, 3, 6, 9\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \text{ i } -1 \leqslant x \leqslant 3\}$

4.14. Jakie warunki powinny spełniać zbiory A i B, aby równość była prawdziwa?

a) $A \cup B = A$
b) $A \cap B = A$
c) $A \cup B = A \cap B$
d) $A - B = \emptyset$
e) $A - B = A$
f) $A - B = A \cup B$

4.15. Niech D oznacza zbiór liczb, które możemy podstawiać do wyrażenia w miejsce litery x. Podaj założenia określające wykonalność działań w wyrażeniu. Wyznacz zbiór D, korzystając z podanych założeń.

a) $\frac{3}{x}$
b) $\frac{1}{x - 5}$
c) $\frac{x + 1}{x - 7}$
d) $\sqrt{x - 4}$
e) $\frac{x - 3}{5}$
f) $\frac{5}{x + 1} - \frac{7}{x + 2}$
g) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x - 2} + \frac{3}{x + 3}$
h) $\sqrt{x - 3} + 3\sqrt{3}$
i) $\sqrt{1 - x} + \frac{7}{x - 4}$
j) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2}$
k) $\frac{x + 5}{2} + \frac{x + 2}{5}$
l) $\frac{1}{\sqrt{x - 2}}$
m) $\frac{x + 1}{x - 3} + \frac{x}{\sqrt{x - 5}}$
n) $\sqrt{x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 - x}}$
o) $\sqrt{(x - 3)^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2}}$

Rozwiązanie zadania możesz zapisać w postaci tabeli (zob. przykład 8 s. 125).

5. Wartość bezwzględna liczby

Umiejętności:

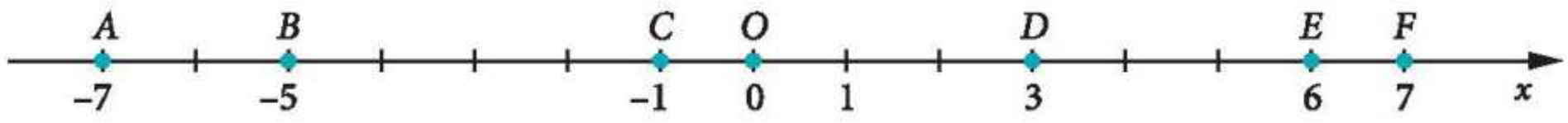
- stosowanie algebraicznej i geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej

Definicja

Wartością bezwzględną liczby nazywamy odległość odpowiadającego jej punktu na osi liczbowej od punktu o współrzędnej 0 mierzoną w odcinkach jednostkowych. Wartość bezwzględną liczby a oznaczamy $|a|$.

Przykład 1

Każdemu punktowi osi liczbowej odpowiada dokładnie jedna współrzędna, a każdej liczbie odpowiada dokładnie jeden punkt na osi. Znajdziemy odległość kilku z nich od punktu O.



$|AO| = 7$ $|BO| = 5$ $|CO| = 1$ $|DO| = 3$ $|EO| = 6$ $|FO| = 7$

Zatem zgodnie z definicją:

$|-7| = 7$ $|-5| = 5$ $|-1| = 1$ $|3| = 3$ $|6| = 6$ $|7| = 7$

Jeżeli liczba a jest nieujemna, to jest równa swojej wartości bezwzględnej.

Jeżeli a jest liczbą ujemną, to jej wartość bezwzględna jest liczbą do niej przeciwną.

$|a| = a$ dla $a \geqslant 0$

$|a| = -a$ dla $a < 0$

Często spotykany jest następujący zapis definicji wartości bezwzględnej liczby:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{dla} \quad a < 0 \end{cases}$$

W tym wypadku klamerka nie oznacza układu, czyli spełnienia obydwu warunków równocześnie.

Przykład 2

a) $|-5{,}3| = 5{,}3$ b) $|0| = 0$ c) $\left|\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$

Wprost z definicji wynikają następujące własności wartości bezwzględnej:

- $|a| = |-a|$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$
- $|a| \geqslant 0$ dla $a \in \mathbf{R}$

Przykład 3

Przekształcimy podane wyrażenie, korzystając z własności wartości bezwzględnej.

a) $|6| = |-6| = 6$ $\longleftarrow |a| = |-a|$

b) $|2x| = |2| \cdot |x| = 2|x|$ $\longleftarrow |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

c) $\left|x^2(x+1)\right| = \left|x^2\right| \cdot |x+1| = x^2|x+1|$ $\longleftarrow x^2 \geqslant 0$ dla $x \in \mathbf{R}$

d) $\left|\frac{xy}{5}\right| = \frac{|xy|}{|5|} = \frac{|xy|}{5}$ $\longleftarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Przykład 4 ◀ zad. 5.5

Zapiszemy podaną liczbę bez używania znaku wartości bezwzględnej.

a) $\left|\sqrt{2}-1\right| = \sqrt{2}-1$ $\longleftarrow \sqrt{2} > 1$, więc $\sqrt{2}-1 > 0$

b) $\left|\sqrt{35}-7\right| = \left|7-\sqrt{35}\right| = 7-\sqrt{35}$ $\longleftarrow 7 > \sqrt{35}$

c) $\left|-5-\sqrt{3}\right| = \left|5+\sqrt{3}\right| = 5+\sqrt{3}$

d) $\left|\frac{\pi-4}{5-\pi}\right| = \frac{|\pi-4|}{|5-\pi|} = \frac{-\pi+4}{5-\pi} = \frac{4-\pi}{5-\pi}$ $\longleftarrow \pi < 4$ i $5 > \pi$

e) $\left|4-\sqrt{15}\right| + \left|4-\sqrt{17}\right| =$ $\longleftarrow \sqrt{15} < 4$ i $\sqrt{17} > 4$

$= 4-\sqrt{15}+\left(-4+\sqrt{17}\right) = \sqrt{17}-\sqrt{15}$

Z własności $|a| = |-a|$ wynika równość $|a-b| = |b-a|$.

Przykład 5 ◀ zad. 5.10

Zapiszemy podane wyrażenie bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, znając warunek, jaki spełnia x.

a) $|x-4|$ dla $x \in (-\infty; 4)$

Jeżeli $x < 4$, to $x-4 < 0$, zatem $|x-4| = -(x-4) = -x+4$.

b) $|1+x|+|x-7|$ dla $x \in (-1; 7)$

Jeżeli $x > -1$, to $1+x > 0$, więc $|1+x| = 1+x$.

Jeżeli $x < 7$, to $x-7 < 0$, więc $|x-7| = -(x-7) = -x+7$.

Zatem $|1+x|+|x-7| = 1+x-x+7 = 8$.

Pojęcie wartości bezwzględnej można wykorzystać przy obliczaniu pierwiastków kwadratowych. Przypomnijmy, że pierwiastkiem kwadratowym z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b, która podniesiona do kwadratu jest równa a.

Zauważmy, że $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ oraz $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Wniosek

$$\sqrt{a^2} = |a| \text{ dla } a \in \mathbf{R}$$

Zatem: $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = -1+\sqrt{2} = \sqrt{2}-1$

$\sqrt{(4-\pi)^2} = |4-\pi| = 4-\pi$

$\sqrt{(-\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2} = |-\sqrt{3}-2\sqrt{2}| = \sqrt{3}+2\sqrt{2}$

Własność tę mają wszystkie pierwiastki parzystego stopnia, czyli

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$$

dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n i $a \in \mathbf{R}$.

Przykład 6 ◀ zad. 5.12

Zapiszemy podane wyrażenie bez użycia symbolu pierwiastka.

a) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$

b) $\sqrt{(x+5)^2} = |x+5|$

c) $\sqrt{9-6x+x^2} = \sqrt{(3-x)^2} = |3-x|$ ⟵ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

d) $\sqrt{4x^2+4x+1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$ ⟵ $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

Zauważmy, że w podanych przykładach musimy zostawić na końcu znak wartości bezwzględnej, ponieważ pierwiastek kwadratowy nie może mieć wartości ujemnej, a zmienna x może przyjmować różne wartości.

Przykład 7 ◀ zad. 5.3

Wiadomo, że w zadaniu jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Mamy wskazać liczbę równą liczbie $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$.

A. $2-\sqrt{7}$ **B.** $\sqrt{7}-2$ **C.** $1-\sqrt{7}$ **D.** $\sqrt{7}-1$

Rozwiązanie

Liczby podane w punktach A, B, C, D nie mają zewnętrznego pierwiastka. Możemy się zatem spodziewać, że $8-2\sqrt{7}$ jest kwadratem jednej z tych liczb.

I sposób

Podnosimy do kwadratu liczby podane w odpowiedziach i sprawdzamy, czy mogą być rozwiązaniem zadania.

A. $\left(2-\sqrt{7}\right)^2 = 4-4\sqrt{7}+7 \neq 8-2\sqrt{7}$

B. Nie musimy sprawdzać, bo różni się od punktu A tylko znakiem, czyli kwadraty tych liczb są równe.

C. $\left(1-\sqrt{7}\right)^2 = 1-2\sqrt{7}+7 = 8-2\sqrt{7}$, ale

D. $\left(\sqrt{7}-1\right)^2 = 8-2\sqrt{7}$

Ponieważ $1-\sqrt{7} < 0$, więc poprawną odpowiedzią jest D.

II sposób

Przedstawiamy liczbę $8 - 2\sqrt{7}$ jako kwadrat pewnej liczby.

$$\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{7} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 - 2\sqrt{7} + 1^2} = \sqrt{\left(\sqrt{7} - 1\right)^2} = \left|\sqrt{7} - 1\right|$$

$\sqrt{7} - 1 > 0$, zatem $\left|\sqrt{7} - 1\right| = \sqrt{7} - 1$

Odp.: D

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Wskaż liczbę równą $||1 - 2| - 3|$.

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

5.2. Wskaż równość, która zachodzi dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

A. $\sqrt{x^2} = x$ **B.** $\sqrt{(-x)^2} = x$ **C.** $\sqrt{(-x)^2} = -x$ **D.** $\sqrt{x^2} = |-x|$

5.3. Wskaż liczbę równą liczbie $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

A. $\sqrt{3} - 1$ **B.** $1 - \sqrt{3}$ **C.** $2 - \sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{3} - 2$

5.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Równość $|x| = -x$ nie zachodzi dla żadnej liczby x, bo wartość bezwzględna nie może być ujemna.

B. Równość $|x| = -x$ zachodzi tylko dla liczby $x = 0$.

C. Równość $|x| = -x$ zachodzi tylko dla liczb x nie większych od 0.

5.5. Zapisz liczbę bez używania symbolu wartości bezwzględnej. Nie korzystaj z kalkulatora.

a) $\left|3 - \sqrt{2}\right|$

b) $\left|5\frac{1}{2} - \frac{11}{2}\right|$

c) $\left|\frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2}\right|$

d) $\left|\frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2}\right|$

e) $\left|3\sqrt{7} - 5\sqrt{3}\right|$

f) $\left|2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\right|$

5.6. Oblicz.

a) $|-3| - |-1 - 5| \cdot |(-3) \cdot (-2)|$

b) $\left|-2 + |2 - |3 - 5|\right|\right|$

c) $|3 - |2 - 5||$

d) $\left|1 - |1 - |1 - 4|\right|\right|$

5.7. Zapisz liczbę bez używania symbolu wartości bezwzględnej. Nie korzystaj z kalkulatora.

a) $\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\right|$

b) $\left|5-2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|$

c) $\left|\sqrt{10}+\sqrt{17}-\sqrt{47}\right|$

d) $\left|\sqrt{99}-3-\sqrt{50}\right|$

5.8. Oblicz.

a) $\left|3{,}5+2\frac{7}{8}\right|+\left|2\frac{7}{8}-3\frac{1}{2}\right|$

b) $\left|\sqrt{3}-5\right|+\left|\sqrt{3}-1\right|$

c) $\left|8+3\sqrt{5}\right|-\left|2\sqrt{5}-8\right|$

d) $\left|2{,}5+1\frac{7}{8}\right|+\left|\frac{15}{8}-\frac{5}{2}\right|$

e) $\left|2\sqrt{5}-3\right|-5\left|\sqrt{5}-2\right|+\left|5-3\sqrt{5}\right|$

f) $\left|2-2\sqrt{3}\right|\cdot\left|2+2\sqrt{3}\right|$

g) $\left|\sqrt{7}-2\right|\cdot\left|-\sqrt{7}-2\right|$

h) $\left|5-3\sqrt{3}\right|\cdot\left|5+3\sqrt{3}\right|$

5.9. Oblicz.

a) $\left|\frac{11-\sqrt{13}}{\sqrt{13}-11}\right|$

b) $\frac{\left|3-\sqrt{15}\right|}{\left|\sqrt{30}-3\sqrt{2}\right|}$

c) $\left|\frac{2-4\sqrt{6}}{2\sqrt{6}-1}\right|$

d) $\left|\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}\right|$

5.10. Wyznacz wszystkie wartości x, dla których podane wyrażenie jest określone, i zapisz to wyrażenie w najprostszej postaci.

a) $\frac{|x|\cdot|-x|}{-|x^2|}$

b) $\frac{|3-x|}{|2x-6|}$

c) $\frac{|\sqrt{2}-x|}{|3x-3\sqrt{2}|}$

d) $\frac{|5-2x|}{|4x-10|}-\frac{|x-6|}{|12-2x|}$

5.11. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, znając warunek, jaki spełnia x.

a) $|x+2|-|x-1|$ $\quad x\in(-\infty;-3)$

b) $|5+x|+|x-8|$ $\quad x\in(4;7)$

c) $|4-x|-2|x-3|-|7-x|$ $\quad x\in(4;7)$

d) $|x-5|-1+|x+5|$ $\quad x\in(1;5)$

e) $3|2x-1|-\frac{x-2}{|2-x|}-2|3x+1|$ $\quad x\in(-\infty;-1)$

f) $|x-2|-\frac{2x-6}{|x-3|}-|1-x|$ $\quad x\in(5;\infty)$

5.12. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu pierwiastka.

a) $\sqrt{(x+7)^2}$

b) $\sqrt{(3-x)^2}$

c) $\sqrt{(x-y+2z)^2}$

d) $\sqrt{x^2-2x+1}$

e) $\sqrt{9x^2+6x+1}$

f) $\sqrt{25y^2-10y+1}$

g) $\sqrt{4-20x+25x^2}$

h) $\sqrt{y^2-2\sqrt{2}y+2}$

5.13. Oblicz.

a) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ c) $\sqrt{(5-2\sqrt{3})^2}-2\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}$ e) $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-2}\right)^2}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$

b) $\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$ d) $\sqrt{(1-\sqrt{7})^2}-\sqrt{(\sqrt{7}+3)^2}$ f) $\sqrt{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$

5.14. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, znając warunek, jaki spełnia x.

a) $\frac{3x-9}{|x-3|}+2\sqrt{x^2-8x+16}-2|3-x|$ $x \in \langle -1; 1\rangle$

b) $\frac{x^2-4}{|x|+2}+\frac{\sqrt{x^2+6x+9}}{2x+6}-\left|\frac{1}{2}-x\right|$ $x \in \langle 1; 2\rangle$

c) $\sqrt{x^2-10x+25}-\frac{x-1}{|x-1|}+|x+5|$ $x \in (1; 5)$

d) $\sqrt{3x^2-6x+3}+\left|\sqrt{3}x-3\right|+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ $x \in \langle 1; 2)$

5.15. Zapisz liczbę w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie $a, b \in \mathbf{Z}$ i $c \in \mathbf{N}$.

a) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$ c) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ e) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}$ d) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ f) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$

D **5.16.** Udowodnij, że wyrażenie $\sqrt{25n^2+10\sqrt{3}n+3}-\sqrt{9n^2+6\sqrt{3}n+3}$ przyjmuje wartości naturalne parzyste dla każdej naturalnej liczby n.

5.17. Zapisz liczbę $\left|\sqrt{7}+\sqrt{11}-6\right|$ bez używania symbolu wartości bezwzględnej. Nie korzystaj z kalkulatora.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.
Dla każdego x wartość wyrażenia $|x-3|$ jest równa wartości wyrażenia

A. $|x+3|$. **B.** $x-3$. **C.** $|3-x|$.

2. Oblicz $\left|-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{18}-2\sqrt{3}\right|+\left|0{,}25\sqrt{32}-0{,}5\sqrt{12}\right|$.

3. Uprość wyrażenie $\sqrt{4x^2-12x+9}-|9-6x|+\sqrt[4]{(x-1{,}5)^4}$.

D **4.** Udowodnij, że dla wszystkich $a \in (-2; 5)$ wyrażenie $|2a-10|+|-2a-4|$ przyjmuje stałą wartość.

D **5.** Udowodnij, że liczba $\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ jest całkowita.

6. Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

Umiejętności:

- wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej
- zaznaczanie na osi liczbowej zbiorów opisanych za pomocą równań i nierówności typu: $|x - a| = b$, $|x - a| < b$, $|x - a| > b$

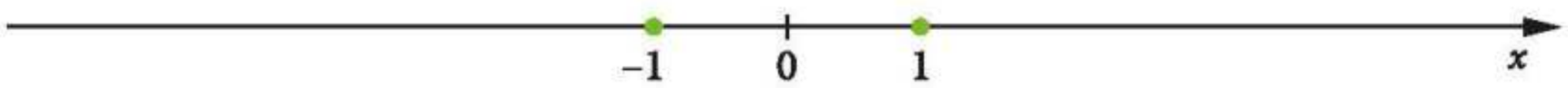
Wartość bezwzględna mierzy odległość liczby od zera.

Przykład 1

◀ zad. 6.6

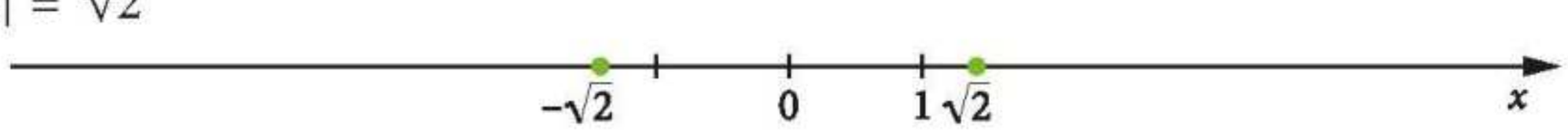
Zaznaczymy na osi liczbowej punkty, których współrzędne x spełniają podane równanie.

a) $|x| = 1$

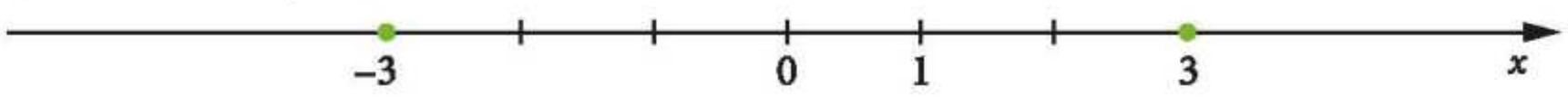


Są dwie liczby oddalone od zera o jedną jednostkę: 1 oraz −1.

b) $|x| = \sqrt{2}$



c) $2|x| + 1 = 7$, czyli $|x| = 3$.



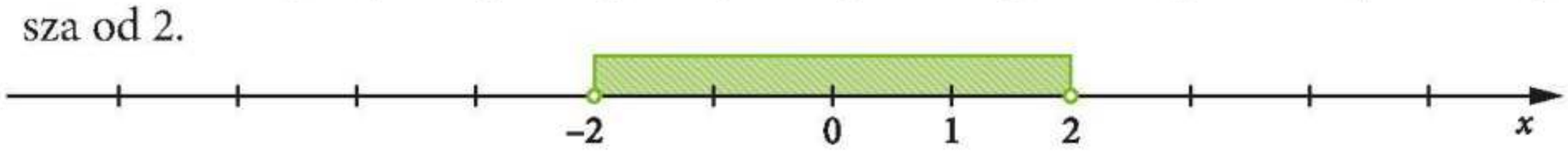
Przykład 2

◀ zad. 6.8

Zaznaczymy na osi liczbowej punkty, których współrzędne x spełniają podaną nierówność.

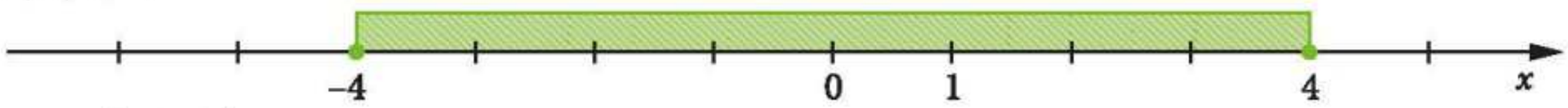
a) $|x| < 2$

Nierówność opisuje wszystkie punkty, których odległość od punktu 0 jest mniejsza od 2.



Są to punkty o współrzędnych większych od −2 i równocześnie mniejszych od 2. Zatem $x \in (-2; 2)$.

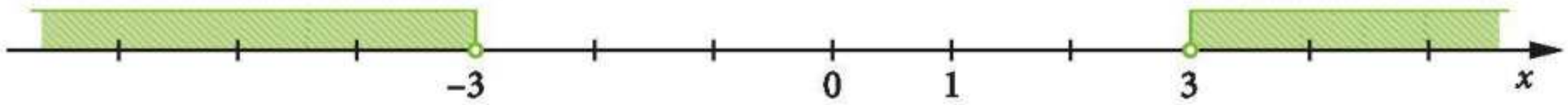
b) $|x| \leqslant 4$



$x \in \langle -4; 4 \rangle$

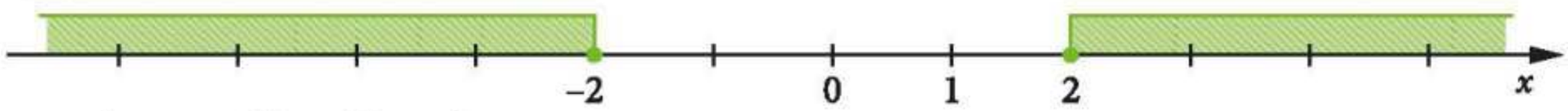
c) $|x| > 3$

Nierówność określa wszystkie punkty, których odległość od punktu 0 jest większa od 3.



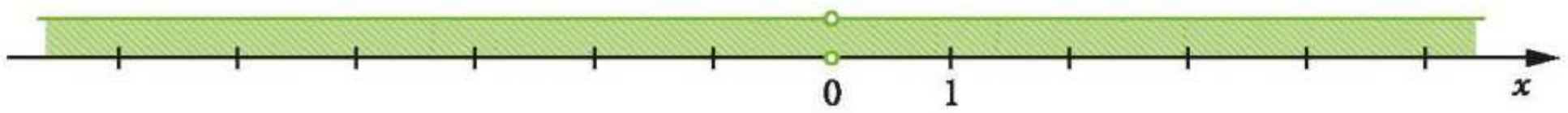
Są to punkty o współrzędnych mniejszych od −3 lub większych od 3.
Zatem $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.

d) $|x| \geqslant 2$



$x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; \infty)$

e) $|x| > 0$



Tylko liczba 0 nie spełnia tej nierówności: $x \in \mathbf{R} - \{0\}$.

f) $|x| > -2$

Wartość bezwzględna każdej liczby jest nieujemna, zatem także większa od −2, więc każda liczba rzeczywista x spełnia tę nierówność: $x \in \mathbf{R}$.

g) $|x| < -1$

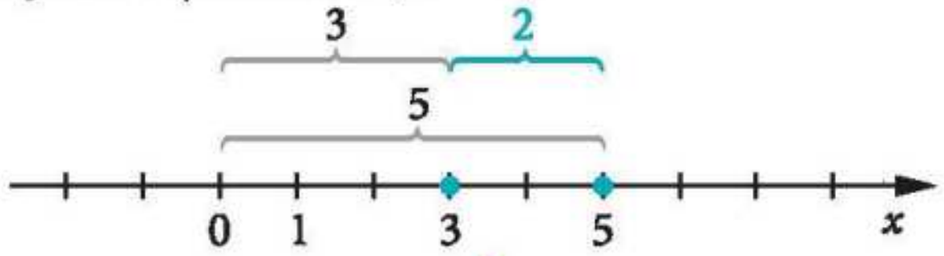
Wartość bezwzględna każdej liczby jest nieujemna, więc ta nierówność nie ma rozwiązań.

Przykład 3

Sprawdzimy, jaką interpretację geometryczną ma wyrażenie $|a - b|$.

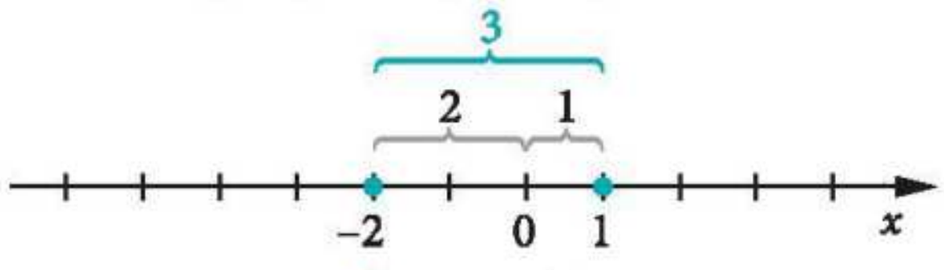
a) $a = 5,\ b = 3$

$|5 - 3| = |2| = 2$



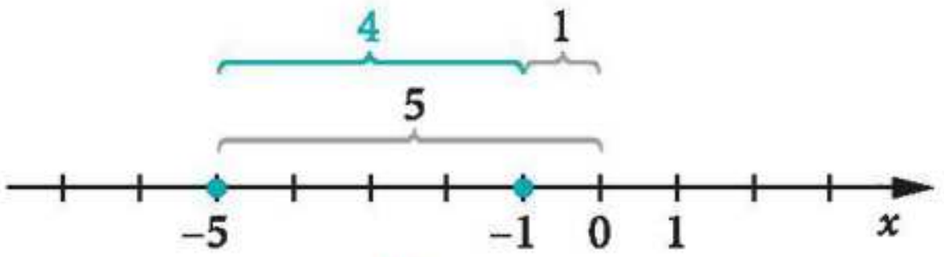
b) $a = -2,\ b = 1$

$|-2 - 1| = |-3| = 3$



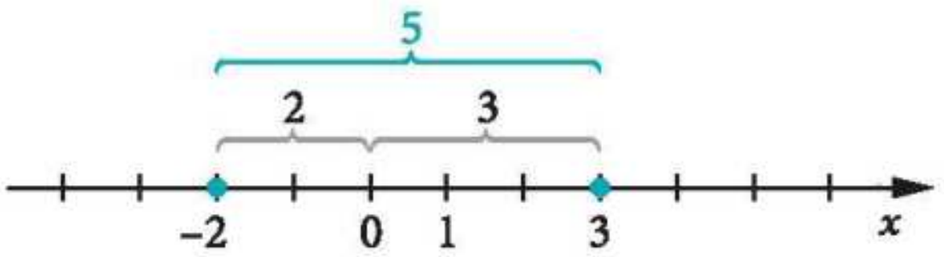
c) $a = -5,\ b = -1$

$|-5 - (-1)| = |-5 + 1| = |-4| = 4$



d) $a = 3,\ b = -2$

$|3 - (-2)| = |3 + 2| = |5| = 5$



Twierdzenie

Odległość między punktami odpowiadającymi na osi liczbom a i b wyraża się wzorem:

$$|a-b|$$

Dowód tego twierdzenia zostawiamy do samodzielnego przeprowadzenia.

Przykład 4 ◀ zad. 6.18

Obliczymy długość odcinka AB, jeżeli punkty $A=(a)$ i $B=(b)$ leżą na osi liczbowej.

a) $a=2-\sqrt{2}$ i $b=1+\sqrt{2}$ b) $a=-3$ i $b=-8+\sqrt{2}$

Rozwiązanie

a) $|AB|=|a-b|=\left|\left(2-\sqrt{2}\right)-\left(1+\sqrt{2}\right)\right|=\left|2-\sqrt{2}-1-\sqrt{2}\right|=\left|1-2\sqrt{2}\right|=2\sqrt{2}-1$

Odp.: $|AB|=2\sqrt{2}-1$

b) $|AB|=|a-b|=\left|-3-\left(-8+\sqrt{2}\right)\right|=\left|-3+8-\sqrt{2}\right|=\left|5-\sqrt{2}\right|=5-\sqrt{2}$

Odp.: $|AB|=5-\sqrt{2}$

Fakt, że odległość między punktami odpowiadającymi na osi liczbom a i b wyraża się wzorem $|a-b|$, wykorzystamy do rozwiązywania prostych równań i nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 5 ◀ zad. 6.11

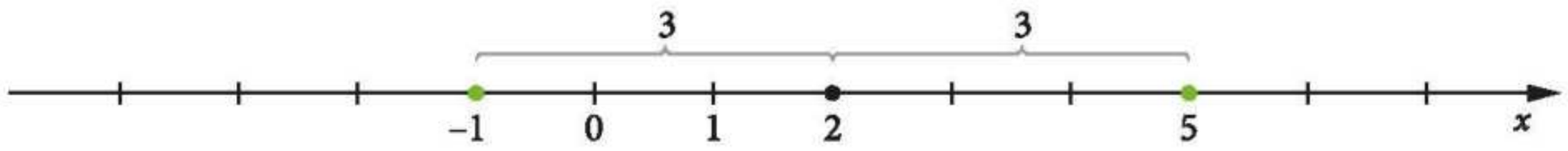
Rozwiążemy graficznie równanie.

a) $|x-2|=3$ b) $|x+3|=2$ c) $|1-x|=4$

Rozwiązanie

a) $|x-2|=3$

Szukamy na osi punktów x, których odległość od liczby 2 jest równa 3.



Rozwiązaniami są liczby -1 oraz 5.

Sprawdźmy: $|-1-2|=|-3|=3$, $|5-2|=|3|=3$.

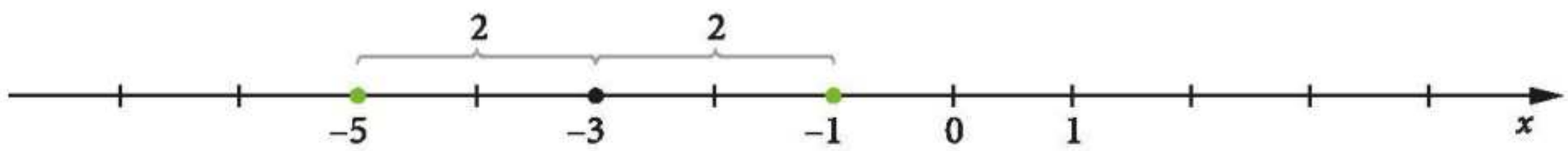
Odp.: $x=-1$ lub $x=5$

b) $|x + 3| = 2$

Zapiszmy to równanie w takiej postaci, aby można było wykorzystać geometryczną interpretację wyrażenia $|a - b|$.

$|x - (-3)| = 2$

Szukamy punktów x, których odległość od punktu -3 jest równa 2.

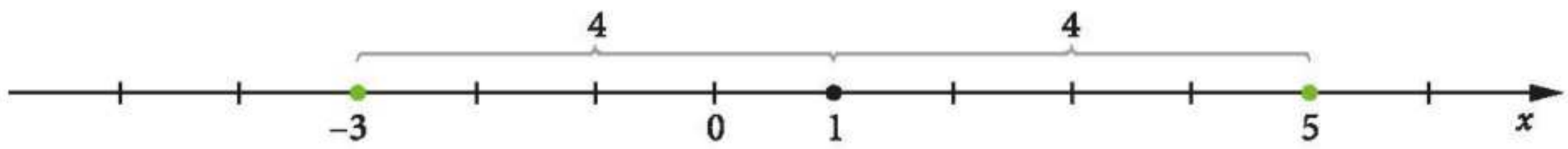


Odp.: $x = -5$ lub $x = -1$

c) $|1 - x| = 4$

$|x - 1| = 4$

$\longleftarrow |a - b| = |b - a|$



Odp.: $x = -3$ lub $x = 5$

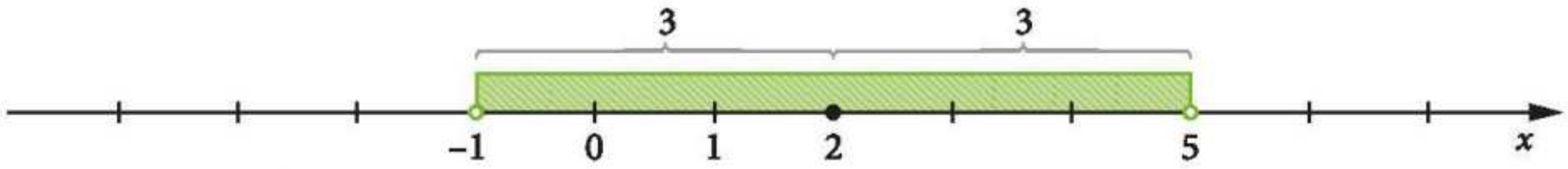
Przykład 6 ◀ zad. 6.13

Rozwiążemy graficznie podaną nierówność.

Rozwiązanie

a) $|x - 2| < 3$

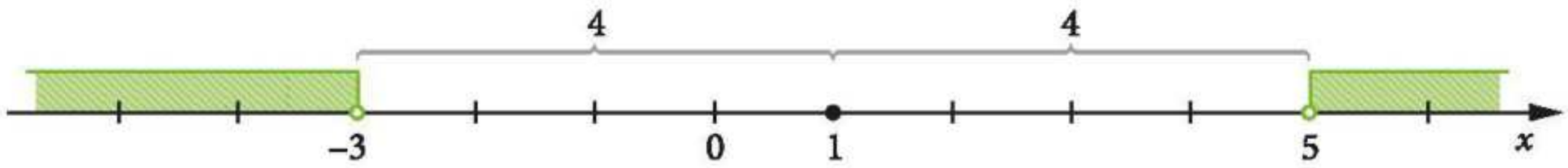
Szukamy punktów x, których odległość od punktu 2 jest mniejsza od 3. Zbiorem rozwiązań jest przedział otwarty $(-1; 5)$.



Odp.: $x \in (-1; 5)$

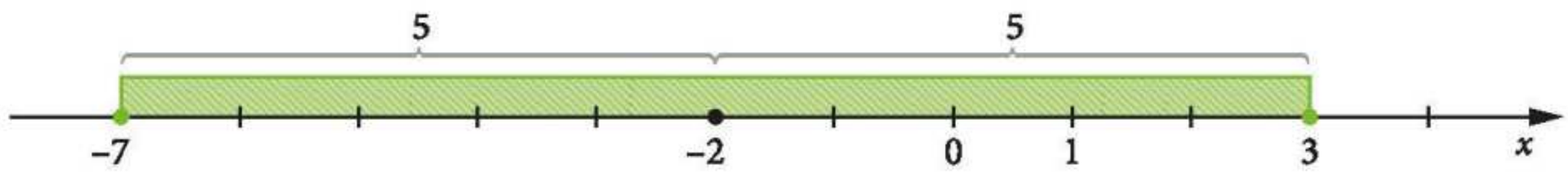
b) $|x - 1| > 4$

Szukamy punktów, których odległość od punktu 1 jest większa od 4.



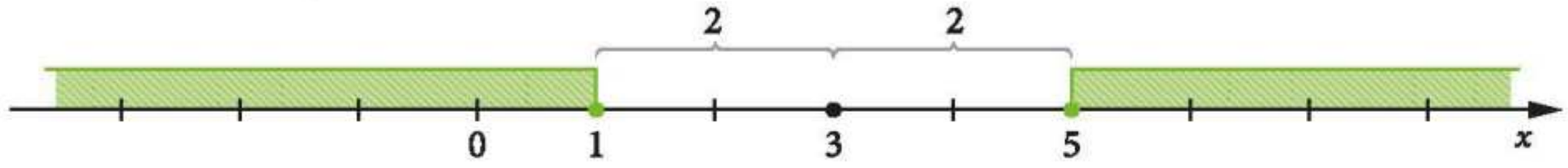
Odp.: $x \in (-\infty; -3) \cup (5; \infty)$

c) $|x + 2| \leqslant 5$, czyli $|x - (-2)| \leqslant 5$



Odp.: $x \in \langle -7; 3 \rangle$

d) $|3 - x| \geqslant 2$, czyli $|x - 3| \geqslant 2$

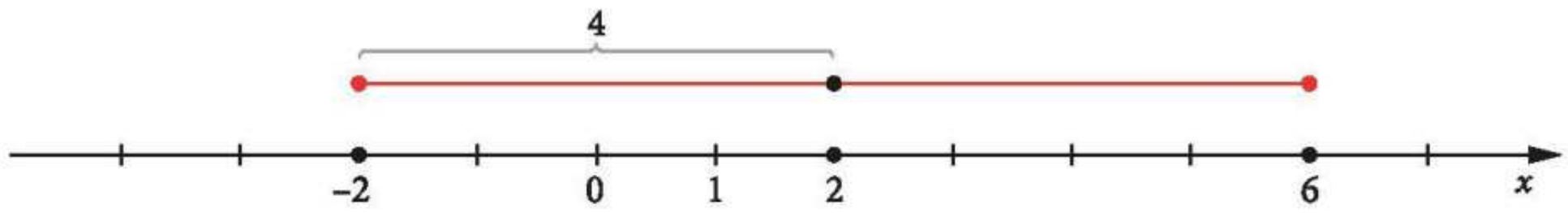


Odp.: $x \in (-\infty; 1\rangle \cup \langle 5; \infty)$

Przykład 7 ◀ zad. 6.14

Zapiszemy w postaci $|x-a| \leqslant b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -2; 6\rangle$.

Rozwiązanie



Odległość między końcami przedziału $\langle -2; 6\rangle$ jest równa 8. Punktem oddalonym od -2 i od 6 o połowę tej odległości, czyli o 4, jest punkt odpowiadający liczbie 2. Zatem $a = 2$, $b = 4$.

Odp.: $|x - 2| \leqslant 4$

Przykład 8 ◀ zad. 6.15

Zapiszemy w postaci $|x - a| > b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest suma przedziałów $(-\infty; -4) \cup (6; \infty)$.

Rozwiązanie

Środkiem odcinka o końcach w punktach -4 oraz 6 jest punkt 1, a jego odległość od -4 oraz od 6 wynosi 5.
Zatem $a = 1$, $b = 5$.

Odp.: $|x - 1| > 5$

Środkiem odcinka o końcach w punktach a i b jest na osi punkt $\frac{a+b}{2}$.

Przykład 9 ◀ zad. 6.17

Rozwiążemy układ nierówności $\begin{cases} \sqrt{x^2} > 4 \\ |x - 2| < 5 \end{cases}$.

Rozwiązanie

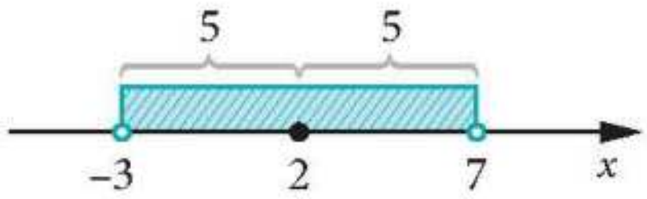
Rozwiązujemy pierwszą nierówność:

$\sqrt{x^2} > 4$, czyli $|x| > 4$, więc $x \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$

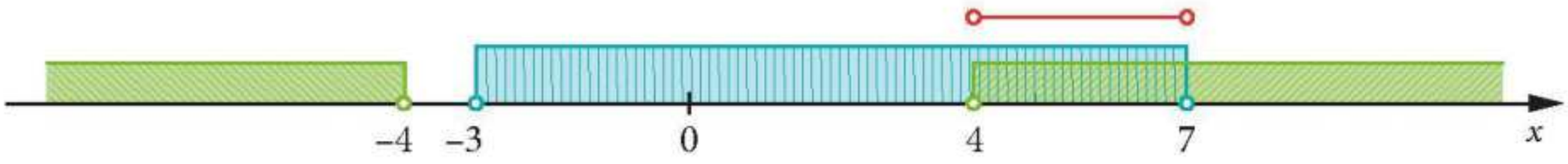


Rozwiązujemy drugą nierówność $|x - 2| < 5$.

Szukamy punktów x, których odległość od punktu 2 jest mniejsza od 5. Zbiorem rozwiązań drugiej nierówności jest przedział otwarty $(-3; 7)$.



Z rysunku odczytujemy, które wartości x spełniają obydwie nierówności:



Odp.: $x \in (4; 7)$

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.5 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Wskaż przedział będący zbiorem rozwiązań nierówności $|x - 4| < 2$.

A. $(-2; 2)$ **B.** $(0; 2)$ **C.** $(-\infty; 6)$ **D.** $(2; 6)$

6.2. Wskaż rysunek, na którym przedstawiono zbiór rozwiązań nierówności $|x + 9| > 7$.

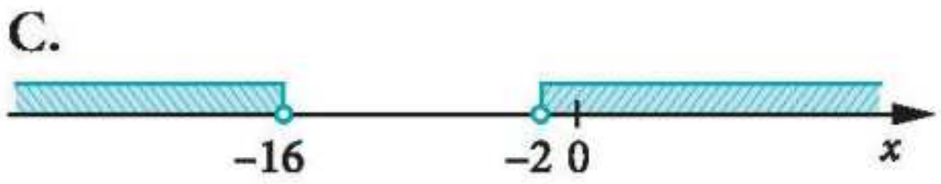
A.



B.



C.



D.



6.3. Na rysunku przedstawiono zbiór rozwiązań jednej z poniższych nierówności. Wskaż tę nierówność.



A. $|x + 2| \leqslant 3$ **B.** $|x + 3| \leqslant 2$ **C.** $|x - 2| \leqslant 3$ **D.** $|x - 3| \leqslant 2$

6.4. Wskaż równanie, którego rozwiązaniami są dwie liczby ujemne.

A. $|x - 11| = 13$ **B.** $|x + 11| = 13$ **C.** $|x - 13| = 11$ **D.** $|x + 13| = 11$

6.5. Wskaż nierówność tożsamościową.

A. $|x + 7| > 0$ **B.** $|x + 7| \geqslant 7$ **C.** $|x + 7| \geqslant -7$ **D.** $|x + 7| \leqslant 7$

6.6. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty, których współrzędne x spełniają podane równanie.

a) $|x| = 4$
b) $|x| = 2\frac{2}{3}$
c) $|x| - \sqrt{3} = 0$
d) $4 - |x| = 4$
e) $1 - |x| = 4$
f) $2|x| - 1 = 3$
g) $5 + 3|x| = 14$
h) $9 - 5|x| = 4$

6.7. Rozwiąż równanie.

a) $|x| = 6$
b) $12|x| = 60$
c) $3|x| - 1 = 5$
d) $2|x| + 5\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$
e) $3(|x| - 2) = \sqrt{2}$
f) $\sqrt{6}(|x| + \sqrt{3}) = 3\sqrt{2}$
g) $2(1 - |x|) = 1$
h) $3 - 5|x| = |x| - 9$

6.8. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty, których współrzędna x spełnia podaną nierówność.

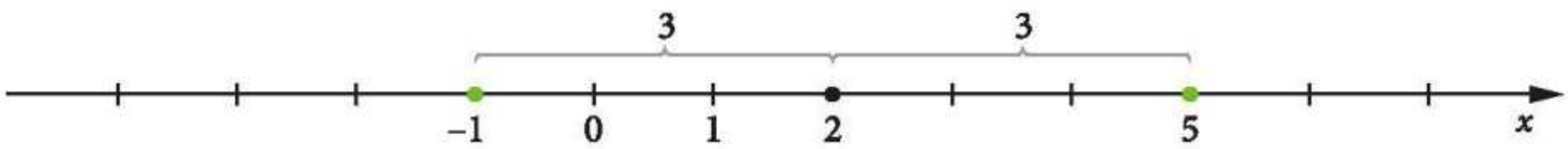
a) $|x| < 5$
b) $|x| > 7$
c) $|x| \leqslant 2$
d) $-2|x| < 0$
e) $2 + |x| > 5$
f) $|x| - 2 \leqslant -2$
g) $11 - 4|x| < 3$
h) $\frac{1}{2}|x| - 2 < 3{,}5|x| - 5$

6.9. Rozwiąż nierówność.

a) $|x| - 3 < 6$
b) $3|x| + 2 > 11$
c) $9 - 2|x| \leqslant 1$
d) $6 - 3|x| \leqslant 11$
e) $3 - 2(7 - 2|x|) \leqslant -11$
f) $5 + 3|x| \leqslant 1$

6.10. Opisz równanie według wzoru, a następnie zilustruj odpowiednim rysunkiem.

- Równanie $|x - 2| = 3$ oznacza, że odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (2)$ na tej osi jest równa 3.



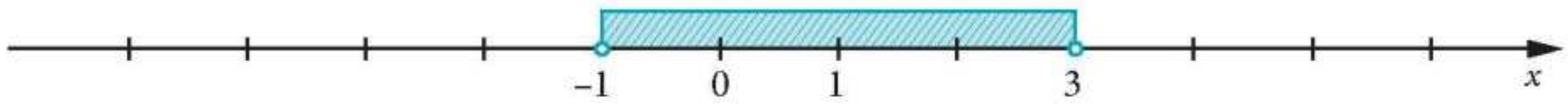
a) $|x - 4| = 7$
b) $|x + 2| = 1$

6.11. Rozwiąż równanie.

a) $|x - 1| = 5$
b) $|x + 2| = 3$
c) $\left|5\frac{1}{3} - x\right| = 2\frac{2}{3}$
d) $|x + 7| = 7$
e) $|x - 2| = -1$
f) $|11 + x| = 3$

6.12. Opisz nierówność według wzoru, a następnie zilustruj odpowiednim rysunkiem.

- Nierówność $|x - 1| < 2$ oznacza, że odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (1)$ na tej osi jest mniejsza od 2.



- Nierówność $|x + 4| \geqslant 3$ oznacza, że odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (-4)$ na tej osi jest większa lub równa 3.



a) $|x - 2| < 1$
b) $|x + 3| \leqslant 2$
c) $|x - 5| \geqslant 1$
d) $\left|x + \sqrt{2}\right| > 3$

6.13. Rozwiąż nierówność.

a) $|x + 7| \leqslant 4$
b) $|x - 5| > 3$
c) $|x - 5| + 1 < 5$
d) $1 - |x + 6| \leqslant 4$
e) $|4 - x| + 3 > 3$
f) $3(2 - |x + 9|) > 7$
g) $2 + 3|x - 5| \geqslant -1$
h) $15 \geqslant 3(|x - 11| + 5)$

6.14. Przedstaw w postaci $|x - a| < b$ lub $|x - a| \leqslant b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podany przedział liczbowy.

a) $(-3; 7)$ b) $\langle 6; 14\rangle$ c) $\langle -10; 0\rangle$ d) $\langle -5; -1\rangle$

6.15. Przedstaw w postaci $|x - a| > b$ lub $|x - a| \geqslant b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podana suma przedziałów liczbowych.

a) $(-\infty; 7) \cup (11; \infty)$
b) $(-\infty; -2\rangle \cup \langle 8; \infty)$
c) $(-\infty; -7\rangle \cup \langle -1; \infty)$
d) $(-\infty; -15) \cup (13; \infty)$

6.16. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} |x| > 2 \\ |x - 2| < 3 \end{cases}$
b) $\begin{cases} |x| \leqslant 5 \\ |x + 1| > 2 \end{cases}$
c) $\begin{cases} |x - 1| < 3 \\ |x - 2| \geqslant 1 \end{cases}$
d) $\begin{cases} |x + 1| \leqslant 3 \\ |x - 1| \leqslant 3 \end{cases}$
e) $\begin{cases} |x| > 3 \\ |x + 1| \leqslant 3 \end{cases}$
f) $\begin{cases} |x - 5| < 15 \\ |x - 8| > 1 \end{cases}$
g) $\begin{cases} |x - 4| \geqslant 1 \\ |x - 3| \leqslant 2 \end{cases}$
h) $\begin{cases} |x - 5| < 1 \\ |x + 1| \leqslant 5 \end{cases}$

6.17. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} \sqrt{x^2} > 4 \\ |x+2| < 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x^2} \leqslant 5 \\ \sqrt{x^2} > 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{4x^2-4x+1} < 7 \\ |x-2| \geqslant 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{x^2+10x+25} < 3 \\ |x-2| < 10 \end{cases}$

6.18. Oblicz długość odcinka AB, którego końce $A = (a)$ i $B = (b)$ leżą na osi liczbowej oraz

a) $a = 3,\ b = -5.$
b) $a = -1,\ b = -7.$
c) $a = 9,\ b = 2.$
d) $a = -\sqrt{3},\ b = 2\sqrt{3}.$
e) $a = 2\sqrt{5},\ b = -7\sqrt{5}.$
f) $a = 1 + 2\sqrt{3},\ b = 2\sqrt{3} + 5.$
g) $a = 2 - \sqrt{2},\ b = 1 + \sqrt{2}.$
h) $a = 3 - 2\sqrt{5},\ b = 2 - \sqrt{5}.$

D **6.19.** Udowodnij, że równanie $\left|x + 3\sqrt{5}\right| = 7 - 5\sqrt{2}$ jest sprzeczne (czyli nie ma rozwiązań).

D **6.20.** Udowodnij, że iloczyn rozwiązań równania $\left|x - \sqrt{7}\right| = \sqrt{11}$ jest liczbą całkowitą.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Zbiór rozwiązań nierówności $|x+7| < 2$ jest zbiorem wszystkich liczb, których odległość od liczby 7 jest równa 2.

B. Do zbioru rozwiązań nierówności $|x+7| < 2$ należy 5 liczb całkowitych.

C. Zbiorem rozwiązań nierówności $|x+7| < 2$ jest przedział $(-9; -5)$.

2. Rozwiąż nierówność $10 < 2|x-2| - 4$.

3. Przedstaw w postaci przedziału zbiór rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} |x| > 5 \\ |x-3| < 4 \end{cases}$.

4. Przedstaw w postaci $|x-a| < b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest przedział $(-2; 14)$.

D **5.** Udowodnij, że wszystkie rozwiązania równania $|x+5{,}4| = 6{,}8$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $|x-3{,}9| \geqslant 2{,}5$.

7. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań i nierówności z wartością bezwzględną

Podczas rozwiązywania równań lub nierówności typu $|x - b| = a$, $|x - b| < a$, $|x - b| > a$ korzystaliśmy bezpośrednio z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej. Prześledźmy na przykładach, jak można rozwiązać podobne zadanie, jeżeli wyrażenie pod znakiem wartości bezwzględnej jest bardziej skomplikowane.

Przykład 1 ◂ zad. 7.6

Rozwiążemy równanie $|2x - 5| = 7$.

Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy na dwa sposoby. W pierwszym skorzystamy z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej, w drugim – bezpośrednio z jej definicji.

I sposób

$|2x - 5| = 7$ ⟵ przekształcamy równanie do postaci $|x - b| = a$

$\left|2\left(x - \frac{5}{2}\right)\right| = 7$

$2\left|x - \frac{5}{2}\right| = 7$, stąd $\left|x - \frac{5}{2}\right| = \frac{7}{2}$

Wyznaczamy liczby, które na osi liczbowej są oddalone od $\frac{5}{2}$ o $\frac{7}{2}$.

$x = \frac{5}{2} - \frac{7}{2}$ lub $x = \frac{5}{2} + \frac{7}{2}$

$x = -1$ lub $x = 6$

II sposób

Zauważmy, że $|w| = 7$ tylko wówczas, gdy $w = 7$ lub $w = -7$. Zatem:

$|2x - 5| = 7$ ⟵ przyjmujemy $w = 2x - 5$

$2x - 5 = 7$ lub $2x - 5 = -7$

$2x = 12$ lub $2x = -2$

$x = 6$ lub $x = -1$

Druga metoda rozwiązywania równania okazała się w tym wypadku prostsza.

Odp.: $x = -1$ lub $x = 6$

R

Przykład 2 ◂ zad. 7.7 b, d

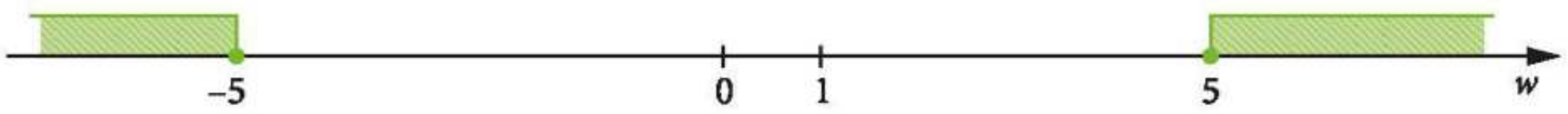
Rozwiążemy nierówność $|3 - 2x| \geqslant 5$.

Rozwiązanie

Tę nierówność można, podobnie jak równanie z przykładu 1, przekształcić do postaci $|x-a| \geqslant b$ i rozwiązywać tak, jak w poprzednim rozdziale. Prostsze wydaje się jednak inne postępowanie.

Zauważmy, że $|w| \geqslant 5$ tylko wtedy, gdy zajdzie jedna z dwóch możliwości:

$w \leqslant -5$ lub $w \geqslant 5$



Zatem:

$|3 - 2x| \geqslant 5$ ⟵ przyjmujemy $w = 3 - 2x$

$3 - 2x \leqslant -5$ lub $3 - 2x \geqslant 5$

$-2x \leqslant -8$ lub $-2x \geqslant 2$

$x \geqslant 4$ lub $x \leqslant -1$

Rozwiązaniem nierówności $|3 - 2x| \geqslant 5$ jest każda liczba należąca do przedziału $(-\infty; -1\rangle$ albo do przedziału $\langle 4; \infty)$.

Odp.: $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 4; \infty)$

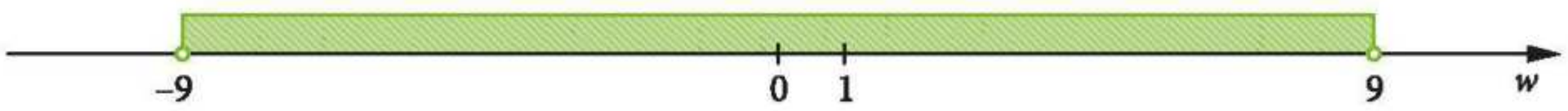
Przykład 3 ◂ zad. 7.7 a, c

Rozwiążemy nierówność $|2x + 3| < 9$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $|w| < 9$ tylko wtedy, gdy spełniona jest podwójna nierówność:

$-9 < w < 9$



Zatem:

$|2x + 3| < 9$ ⟵ przyjmujemy $w = 2x + 3$

$-9 < 2x + 3 < 9$ ⟵ nierówność podwójną zapisujemy w postaci układu nierówności

$\begin{cases} 2x + 3 < 9 \\ 2x + 3 > -9 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x < 6 \\ 2x > -12 \end{cases}$, czyli $\begin{cases} x < 3 \\ x > -6 \end{cases}$

Rozwiązaniem nierówności $|2x + 3| < 9$ jest każda liczba spełniająca warunek $-6 < x < 3$.

Odp.: $x \in (-6; 3)$

Przykład 4 ◀ zad. 7.9

Rozwiążemy równanie $\big||x-3|-2\big| = 5$.

Rozwiązanie

Wartość bezwzględna wyrażenia $|x-3|-2$ jest równa 5, więc:

$|x-3|-2 = 5$ lub $|x-3|-2 = -5$, czyli

$|x-3| = 7$ lub $|x-3| = -3$

Drugie równanie jest sprzeczne (wartość bezwzględna żadnej liczby nie jest równa -3), rozwiążemy więc tylko pierwsze.

$x-3 = 7$ lub $x-3 = -7$

$x = 10$ lub $x = -4$

Równanie $\big||x-3|-2\big| = 5$ ma dwa rozwiązania.

Odp.: $x = 10$ lub $x = -4$

Przykład 5 ◀ zad. 7.9

Rozwiążemy równanie $\big||2x+4|-3\big| = 1$.

Rozwiązanie

$\|2x+4\|-3 = 1$	lub	$\|2x+4\|-3 = -1$
$\|2x+4\| = 4$	lub	$\|2x+4\| = 2$
$2x+4 = 4$ lub $2x+4 = -4$	lub	$2x+4 = 2$ lub $2x+4 = -2$
$x = 0$ lub $x = -4$	lub	$x = -1$ lub $x = -3$

Równanie $\big||2x+4|-3\big| = 1$ ma cztery rozwiązania.

Odp.: $x = 0$ lub $x = -4$, lub $x = -1$, lub $x = -3$.

Przykład 6 ◀ zad. 7.11 a, b

Rozwiążemy nierówność $\big||x+2|-3\big| < 7$.

Rozwiązanie

$\big||x+2|-3\big| < 7$ tylko wtedy, gdy $-7 < |x+2|-3 < 7$

$\begin{cases} |x+2|-3 < 7 \\ |x+2|-3 > -7 \end{cases}$, czyli $\begin{cases} |x+2| < 10 \\ |x+2| > -4 \end{cases}$

Nierówność $|x+2| > -4$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej, więc do rozwiązania zostaje tylko nierówność $|x+2| < 10$.

$-10 < x+2 < 10$, stąd $-12 < x < 8$

Odp.: $x \in (-12; 8)$

R

Przykład 7 ◀ zad. 7.11 c, d

Rozwiążemy nierówność $\left|2-|3x+6|\right|>1$.

Rozwiązanie

$2-|3x+6|>1$ lub $2-|3x+6|<-1$

$-|3x+6|>-1$ lub $-|3x+6|<-3$

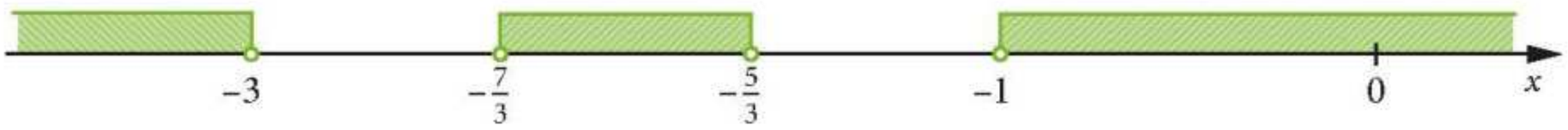
$|3x+6|<1$ lub $|3x+6|>3$

$-1<3x+6<1$ lub $3x+6>3$ lub $3x+6<-3$

$-7<3x<-5$ lub $3x>-3$ lub $3x<-9$

$-\frac{7}{3}<x<-\frac{5}{3}$ lub $x>-1$ lub $x<-3$

$x\in\left(-\frac{7}{3};-\frac{5}{3}\right)$ lub $x\in(-1;\infty)$ lub $x\in(-\infty;-3)$



Odp.: $x\in(-\infty;-3)\cup\left(-\frac{7}{3};-\frac{5}{3}\right)\cup(-1;\infty)$

Przykład 8 ◀ zad. 7.16

Rozwiążemy równanie $|3x-2|=5x+1$.

Dla dowolnego wyrażenia a:
- jeżeli $a\geqslant 0$, to $|a|=a$,
- jeżeli $a\leqslant 0$, to $|a|=-a$.

Rozwiązanie

I sposób

Zauważmy, że:
- gdy $3x-2\geqslant 0$, to $|3x-2|=3x-2$ i równanie ma postać: $3x-2=5x+1$,
- gdy $3x-2<0$, to $|3x-2|=-(3x-2)$ i równanie ma postać: $-3x+2=5x+1$.

Mamy zatem:

$\begin{cases}3x-2\geqslant 0\\3x-2=5x+1\end{cases}$ lub $\begin{cases}3x-2<0\\-3x+2=5x+1\end{cases}$

$\begin{cases}3x\geqslant 2\\-2x=3\end{cases}$ lub $\begin{cases}3x<2\\-8x=-1\end{cases}$

$\begin{cases}x\geqslant \frac{2}{3}\\x=-\frac{3}{2}\end{cases}$ lub $\begin{cases}x<\frac{2}{3}\\x=\frac{1}{8}\end{cases}$

Pierwszy układ jest sprzeczny, natomiast drugi nie, bo liczba $\frac{1}{8}$ należy do przedziału $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$. Jedynym rozwiązaniem równania $|3x-2|=5x+1$ jest liczba $\frac{1}{8}$.

II sposób

$|3x - 2| = 5x + 1$

Zauważmy, że równanie może mieć rozwiązania tylko przy założeniu, że $5x + 1 \geqslant 0$, czyli $x \geqslant -\frac{1}{5}$. Wtedy mamy dwie możliwości:

$3x - 2 = 5x + 1$ lub $3x - 2 = -5x - 1$

Stąd:

$x = -\frac{3}{2}$ lub $x = \frac{1}{8}$

Tylko drugie rozwiązanie spełnia założenie $x \geqslant -\frac{1}{5}$.

Odp.: $x = \frac{1}{8}$

Przykład 9 ◀ zad. 7.17

Rozwiążemy nierówność $x - |2x + 4| < 3$.

Rozwiązanie

Zapisujemy nierówność w postaci dwóch układów (podobnie jak w przykładzie 8).

$$\begin{cases} 2x + 4 \geqslant 0 \\ x - (2x + 4) < 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2x + 4 < 0 \\ x + 2x + 4 < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \geqslant -4 \\ -x < 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2x < -4 \\ 3x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -2 \\ x > 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x < -2 \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Odp.: $x \in (-\infty; -2) \cup (7; \infty)$

Przykład 10 ◀ zad. 7.19

Rozwiążemy równanie $|x - 2| + |3x + 12| = 26$.

Rozwiązanie

Aby pozbyć się znaków wartości bezwzględnej, zauważmy, że:

$x - 2 \geqslant 0$ dla $x \geqslant 2$

$3x + 12 \geqslant 0$ dla $x \geqslant -4$

Liczby 2 oraz −4 dzielą oś liczbową na trzy przedziały.



W każdym z tych przedziałów dane równanie przyjmie inną postać.

I. Dla $x \in (-\infty; -4)$ mamy $|x-2| = -x+2$, $|3x+12| = -3x-12$, zatem:
$(-x+2)+(-3x-12) = 26$
$-4x = 36$
$x = -9$ $\longleftarrow -9 \in (-\infty; -4)$

Uwaga – kiedy dzielimy oś liczbową na przedziały, nie możemy pominąć krańców tych przedziałów.

II. Dla $x \in \langle -4; 2\rangle$ mamy $|x-2| = -x+2$, $|3x+12| = 3x+12$, zatem:
$(-x+2)+(3x+12) = 26$
$2x = 12$
$x = 6$ $\longleftarrow 6 \notin \langle -4; 2\rangle$

III. Dla $x \in (2; \infty)$ mamy $|x-2| = x-2$, $|3x+12| = 3x+12$, zatem:
$(x-2)+(3x+12) = 26$
$4x = 16$
$x = 4$ $\longleftarrow 4 \in (2; \infty)$

Odp.: $x = -9$ lub $x = 4$

Przykład 11 ◂ zad. 7.21

Rozwiążemy nierówność $|4x-2| - |5-x| > 2x$.

Rozwiązanie

Aby pozbyć się znaków wartości bezwzględnej, zauważmy, że:

$4x-2 \geqslant 0$ dla $x \geqslant \frac{1}{2}$

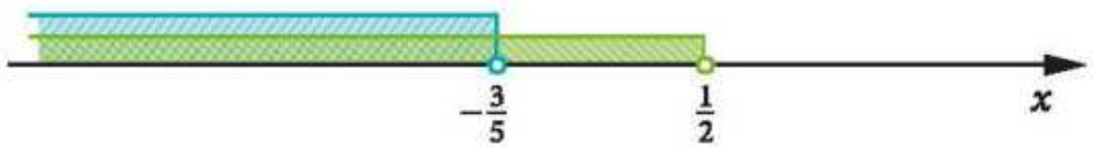
$5-x \geqslant 0$ dla $x \leqslant 5$

Liczby $\frac{1}{2}$ oraz 5 dzielą oś liczbową na trzy przedziały.



W każdym z tych przedziałów dana nierówność przyjmie inną postać.

I. Dla $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ mamy $|4x-2| = -4x+2$, $|5-x| = 5-x$, zatem:
$(-4x+2)-(5-x) > 2x$
$-5x > 3$
$x < -\frac{3}{5}$



Sprawdzamy, które rozwiązania nierówności $x < -\frac{3}{5}$ należą do przedziału $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$:

$\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cap \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) = \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$

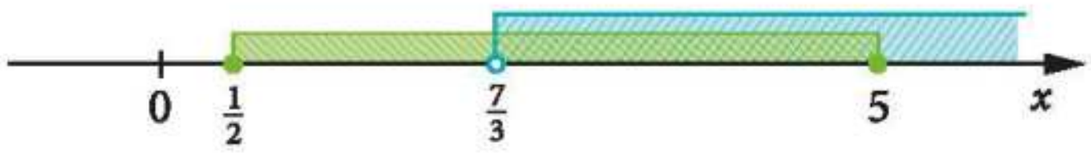
Zatem $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$.

II. Dla $x \in \left\langle \frac{1}{2}; 5 \right\rangle$ mamy $|4x-2| = 4x-2$, $|5-x| = 5-x$, zatem:

$(4x-2)-(5-x) > 2x$

$3x > 7$

$x > \frac{7}{3}$



Sprawdzamy, które rozwiązania nierówności $x > \frac{7}{3}$ należą do przedziału $\left\langle \frac{1}{2}; 5 \right\rangle$:

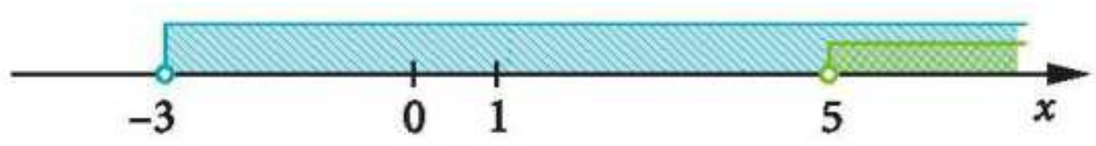
$\left\langle \frac{1}{2}; 5 \right\rangle \cap \left(\frac{7}{3}; \infty \right) = \left(\frac{7}{3}; 5 \right\rangle$

Zatem $x \in \left(\frac{7}{3}; 5 \right\rangle$.

III. Dla $x \in (5; \infty)$ mamy $|4x-2| = 4x-2$, $|5-x| = -5+x$, zatem:

$(4x-2)-(-5+x) > 2x$

$x > -3$



Każda liczba z przedziału $(5; \infty)$ jest rozwiązaniem nierówności $x > -3$.

$(5; \infty) \cap (-3; \infty) = (5; \infty)$

Zatem $x \in (5; \infty)$.

Podsumowując – rozwiązaniami nierówności $|4x-2|-|5-x| > 2x$ są liczby należące do sumy trzech przedziałów: $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$, $\left(\frac{7}{3}; 5\right\rangle$, $(5; \infty)$.

Odp.: $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; \infty\right)$

Przykład 12 ◂ zad. 7.25

Rozwiążemy równanie $|3x-7| = |5+2x|$.

$|a| = |b|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$ lub $a = -b$.

Rozwiązanie

Rozwiązaniami tego równania są tylko takie wartości x, dla których wyrażenia $3x-7$ oraz $5+2x$ są albo liczbami równymi, albo liczbami przeciwnymi. Zatem:

$3x-7 = 5+2x$ lub $3x-7 = -5-2x$

Stąd:

$x = 12$ lub $5x = 2$

Odp.: $x = 12$ lub $x = \frac{2}{5}$

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Wskaż równanie, które nie jest spełnione przez wszystkie liczby rzeczywiste.

A. $|x| \cdot |x| = x^2$ **B.** $|x| + |x| = |2x|$ **C.** $|x| - x = 0$ **D.** $|x| + |x| = 2\sqrt{x^2}$

7.2. Wskaż równość prawdziwą.

A. $|\pi - 3{,}14| = 0$

B. $|\pi - 3{,}14| = \pi - 3{,}14$

C. $|\pi - 3{,}14| = 3{,}14 - \pi$

D. $|-3{,}14 - \pi| = \pi - 3{,}14$

7.3. Wskaż wszystkie rozwiązania równania $|2x - 1| = |x + 7|$.

A. $x = 8$ **B.** $x = 2$ lub $x = 8$ **C.** $x = -2$ **D.** $x = -2$ lub $x = 8$

7.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Równość $|x - 7| = x - 7$ zachodzi dla każdej liczby x z przedziału $(-7; \infty)$.

B. Równość $|x - 7| = x - 7$ zachodzi dla każdej liczby x z przedziału $(7; \infty)$.

C. Równość $|x - 7| = x - 7$ zachodzi dla liczby x równej 7.

7.5. Dane jest równanie $|x - 6| = 2x$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba -6.

B. Jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba 2.

C. Równanie to ma dwa rozwiązania: -6 oraz 2.

7.6. Rozwiąż równanie.

a) $|6x - 5| = 11$

b) $|2 - 5x| = 6$

c) $|3x - 7| = 8$

d) $\left|2x - \sqrt{3}\right| = 3\sqrt{3}$

e) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 5$

f) $\frac{1}{7}\sqrt{9x^2 + 12x + 4} = 2$

7.7. Rozwiąż nierówność.

a) $|3x - 5| \leqslant 2$

b) $\left|2 - \frac{1}{5}x\right| > 1$

c) $|7x - 5| < 2$

d) $|11 - 5x| \geqslant 4$

e) $9 - \sqrt{9x^2 + 36x + 36} < 0$

f) $\sqrt{1 - 14x + 49x^2} < 13$

7.8. Rozwiąż nierówność.

a) $1 - |6 - 3x| \geqslant 1$

b) $\left|x - \sqrt{5} + 1\right| > 0$

c) $5 + \left|3\frac{1}{5}x - 7\right| < 1$

d) $9 > 6 - |2x - 8|$

7.9. Rozwiąż równanie.

a) $\big||x+3|+5\big| = 7$

b) $\big||x+3|-\sqrt{7}\big| = \pi$

c) $\big||x+5|-2\big| = 1$

d) $\Big|3\sqrt{2}-\big|\sqrt{2}x-1\big|\Big| = 2\sqrt{3}$

e) $\Big|9-\sqrt{49-14x+x^2}\Big| = 6$

f) $\Big|4-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+2x+1}\Big| = 7$

D **7.10.** Wykaż, że równanie $\Big|\big||x+3|-5\big|-2\Big|+1=0$ nie ma rozwiązań.

7.11. Rozwiąż nierówność.

a) $\big||x-7|+1\big| < 6$

b) $\big|2|3-x|-6\big| \leqslant 2$

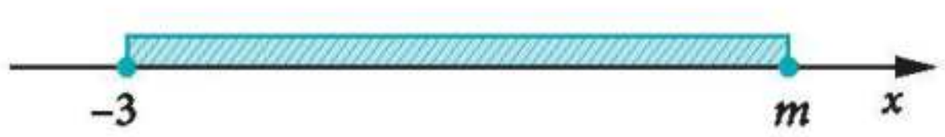
c) $\Big|7-\big|\frac{1}{2}x-2\big|\Big| > 3$

d) $\big||5x+2|-3\big| \geqslant 4$

e) $\Big|\sqrt{0{,}16x^2-4x+25}-2\Big| < 3$

f) $7-\big|3-2|11-3x|\big| < 2$

7.12. Na rysunku przedstawiono zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|2x-6| \leqslant 12$. Wskaż wielkość m.



A. $m = 2$ B. $m = 18$ C. $m = 5$ D. $m = 9$

7.13. Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające nierówność $|x-7| < 4$.

7.14. Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające podany układ nierówności.

$$\begin{cases} |x| > 2 \\ |x-3| \leqslant 2 \end{cases}$$

7.15. Wśród podanych nierówności jedna jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą, a jedna nie ma rozwiązań. Wskaż te nierówności.

I. $\big||x-5|+2\big|+3 \geqslant 0$

II. $\big||5x-1|-3\big|-2 \geqslant 0$

III. $\big||2x+3|-5\big|+1 < 0$

IV. $\big||3x+2|+1\big|-5 < 0$

7.16. Rozwiąż równanie.

a) $|3x-1|-4x = 2$

b) $|5x+2| = 2x-1$

c) $4x-|7-2x| = 9$

d) $|x+2| = \frac{1}{3}x+2$

e) $|x+5|-2 = 2x$

f) $3|x-2|-4x = 6$

7.17. Rozwiąż nierówność.

a) $2|x+1|-3 \leqslant 2x-1$

b) $\frac{1}{2}|2x-5|+1 > 3x$

c) $|x+3| \geqslant \frac{1}{5}x+3$

d) $2|3-x|+3x-7 < 1$

e) $5-|2x-7| \geqslant \frac{1}{2}x-3$

f) $|x+2|-x > 2-\frac{2}{3}x$

7.18. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} \sqrt{x^2}-3 > 0 \\ \left|\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right| \leqslant 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} |1-0{,}2x|-3 < 0 \\ 1-\sqrt{x^2-16x+64} < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5+\frac{1}{3}|3x-12| \geqslant 6 \\ |x-3|+\left|x^2\right| \leqslant x^2+2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1-\sqrt{(x-5)^2} > 0 \\ \sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt[3]{125} \leqslant 0 \end{cases}$

7.19. Rozwiąż równanie.

a) $|x-3|+|x+2|=7$

b) $|x-1|-|x+5|=6$

c) $|3-x|+|4-2x|=4$

d) $|2x-16|-|x-3|=3$

7.20. Rozwiąż równanie.

a) $3|x-1|+2|x+2|=9+3x$

b) $|2x-3|-|3x-2|=5-x$

c) $\sqrt{4x^2+20x+25}-3\sqrt{1-2x+x^2}=2$

d) $2|x+4|+12=|2x-4|$

7.21. Rozwiąż nierówność.

a) $|x-2|+|2x-7|<9$

b) $|3x-8| \leqslant |x+6|$

c) $|x+3|-|x+1| > 2(x+1)$

d) $|x+2|+|x-3| \geqslant x+3$

7.22. Rozwiąż nierówność.

a) $|x+1|+3|x-1| \geqslant 4x-5$

b) $|x+3|+\frac{1}{2}(4-x) \geqslant |2x-1|$

c) $|3-3x|-|2-x| < 2x-6$

d) $|x-2|-3\sqrt{4x^2-28x+49} \geqslant 1-x$

7.23. Rozwiąż równanie.

a) $|x-2|+|4-2x|-|3x-6|+|10-5x|=8$

b) $|3x-1|+|2-6x|+x=5$

c) $|x+3|+2|4-x|-|3x+9|+|3x-12|=15$

d) $|2x+2|-|x-1|-|x+1|=2-|2-2x|$

7.24. Rozwiąż nierówność.

a) $|x+0{,}5|-|-2x-1|+4|2x+1|+|2+4x| \leqslant 3$

b) $|x-3|+|2x+6| \geqslant 2+|x+3|$

c) $8-2x+|x+1|-|-2x-2|-|3x+3| \leqslant 0$

d) $|x+\sqrt{3}|+|2\sqrt{3}-2x| \leqslant 3+|x-\sqrt{3}|$

7.25. Rozwiąż równanie.

a) $|x+1| = 3|x-1|$

b) $\left|\sqrt{3}+2x\right| = \left|1-\sqrt{3}x\right|$

c) $|3x-\pi+1| = \left|\sqrt{3}-2x\right|$

d) $\sqrt{2x^2-2\sqrt{6}x+3} = \sqrt{3x^2+2\sqrt{6}x+2}$

7.26. Rozwiąż nierówność.

a) $\sqrt{4x^2-12|x|+9} > 1$

b) $\sqrt{9x^2-6|x|+1} < 2$

c) $\sqrt{25x^2-20|x|+4} \leqslant 1$

d) $\sqrt{49x^2-56|x|+16} \geqslant 3$

7.27. Rozwiąż równanie $\left||x-1|-2\right| + 2\left||x-2|-1\right| + 3|2x-6| = 0$.

7.28. Rozwiąż równanie $\sqrt{x^2+2x+26-10|x+1|} = 3$.

D **7.29.** Udowodnij, że dla każdej pary liczb $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$ takich, że $x \neq y$, prawdziwa jest nierówność: $|x-y| + \frac{1}{|x-y|} \geqslant 2$.

D **7.30.** Udowodnij, że dla każdej pary liczb $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$ prawdziwa jest nierówność $\frac{|x|+|y|}{2} \geqslant \sqrt{|xy|}$.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Równość $|3x-12| = -3x+12$ jest spełniona przez wszystkie liczby x z przedziału $(-\infty; 4)$.

B. Równość $|3x-12| = -3x+12$ jest spełniona przez wszystkie liczby x z przedziału $(-\infty; 4\rangle$.

C. Równość $|3x-12| = 12-3x$ nie zachodzi dla żadnej liczby rzeczywistej x.

2. Rozwiąż równanie $\left|1-|x+5|\right| = 3$.

3. Rozwiąż nierówność $\left|1-|1-x|\right| < 1$.

4. Rozwiąż nierówność $|x| + 6\sqrt{4x^2-4x+1} \geqslant x$.

5. Rozwiąż równanie $|x-1| + |2x+3| + |4-x| + |x| = 0$.

8. Równanie liniowe i nierówność liniowa z parametrami

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań i nierówności liniowych z parametrami

Przypomnijmy, że równanie $ax + b = 0$, w którym x jest niewiadomą, a i b są liczbami danymi, nazywamy **równaniem liniowym** z jedną niewiadomą. Liczby a i b występujące w zapisie $ax + b = 0$ nazywamy **współczynnikami** równania liniowego.

Prześledzimy sposób rozwiązywania równania $ax + b = 0$ w zależności od wartości jego współczynników. W prawej kolumnie tabeli podajemy odpowiednio dobrane przykłady ilustrujące omawiane sytuacje.

I przypadek: $a \neq 0$	
Równanie $ax + b = 0$ można przekształcić do postaci $ax = -b$ Skoro $a \neq 0$, możemy podzielić obie strony równania przez a. $x = \frac{-b}{a}$ Równanie ma jedno rozwiązanie.	Przekształcamy równanie $2(3x - 7) = 3x + 1$ $3x - 15 = 0 \quad \longleftarrow a = 3 \text{ i } b = -15$ $3x = 15$ Dzielimy obie strony równania przez 3. $x = 5$ Równanie ma jedno rozwiązanie.
II przypadek: $a = 0$ i $b = 0$	
Równanie $ax + b = 0$ ma postać $0 \cdot x + 0 = 0$ Równanie jest tożsamościowe, czyli jego rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista: $x \in \mathbf{R}$.	Przekształcamy równanie $4(5x - 3) = -2(6 - 10x)$ $20x - 12 = -12 + 20x$ $0 \cdot x + 0 = 0 \quad \longleftarrow a = 0 \text{ i } b = 0$ Równanie jest tożsamościowe, czyli jego rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista: $x \in \mathbf{R}$.
III przypadek: $a = 0$ i $b \neq 0$	
Równanie $ax + b = 0$ ma postać $0 \cdot x + b = 0$ Równanie jest sprzeczne, czyli nie ma rozwiązań.	Przekształcamy równanie $-3(4x - 5) = 2(1 - 6x)$ $-12x + 15 = 2 - 12x$ $0 \cdot x + 13 = 0 \quad \longleftarrow a = 0 \text{ i } b = 13$ Równanie jest sprzeczne, czyli nie ma rozwiązań.

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Równanie liniowe $ax + b = 0$:
- ma jedno rozwiązanie, gdy $a \neq 0$,
- jest tożsamościowe, gdy $a = 0$ i $b = 0$,
- jest sprzeczne, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.

Jeżeli $a \neq 0$, to rozwiązaniem równania $ax + b = 0$ jest $x = -\frac{b}{a}$.

Równanie liniowe z jednym parametrem

Zajmiemy się analizą równań liniowych, w których poza niewiadomą x występuje jeszcze jedna litera oznaczająca liczbę.

Przykład 1

Dane jest równanie $3x + m - \sqrt{2} = 0$, w którym x jest niewiadomą, a m oznacza pewną liczbę. Zapiszemy to równanie dla m przyjmujących wartości: $5, -7, 0, \sqrt{2}$.

Rozwiązanie

$3x + 5 - \sqrt{2} = 0 \quad \longleftarrow m = 5$

$3x - 7 - \sqrt{2} = 0 \quad \longleftarrow m = -7$

$3x - \sqrt{2} = 0 \quad \longleftarrow m = 0$

$3x = 0 \quad \longleftarrow m = \sqrt{2}$

Literę, która w danym równaniu oznacza pewną liczbę, nazywamy **parametrem**. Rozwiązywanie równania z parametrem polega na określaniu liczby i postaci rozwiązań równania w zależności od tego, jaka liczba rzeczywista została podstawiona w miejsce litery oznaczającej parametr. W poniższych przykładach x oznacza niewiadomą, a pozostałe litery to parametry.

Obrazowo mówiąc, równanie z parametrem jest zapisem całej rodziny równań.

Przykład 2 ◀ zad. 8.3

Rozwiążemy równanie $3x + m - \sqrt{2} = 0$.

Rozwiązanie

$3x + m - \sqrt{2} = 0$, czyli $3x = -m + \sqrt{2}$, stąd $x = \frac{\sqrt{2} - m}{3}$

Dla każdej wartości m równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{\sqrt{2} - m}{3}$. Na przykład:

- dla $m = 5$ rozwiązaniem jest $x = \frac{\sqrt{2} - 5}{3}$,
- dla $m = 0$ rozwiązaniem jest $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$,
- dla $m = \sqrt{2}$ rozwiązaniem jest $x = 0$.

Równań postaci $3x+m-\sqrt{2} = 0$ jest nieskończenie wiele, ale każde z nich ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $mx + 3 - 2m = 0$.

Rozwiązanie

$mx = 2m - 3$

Aby wyznaczyć x, należy obie strony równania podzielić przez m. Można tę operację wykonać tylko przy założeniu, że $m \neq 0$. Musimy zatem rozważyć dwie sytuacje.

I. $m \neq 0$. Wówczas $x = \frac{2m-3}{m}$, czyli $x = 2 - \frac{3}{m}$.

II. $m = 0$. Wtedy równanie ma postać $0 \cdot x = -3$ i nie ma rozwiązań.

Odp.: Dla $m \neq 0$ równanie ma jedno rozwiązanie $x = 2 - \frac{3}{m}$, dla $m = 0$ równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 4 ◀ z 8.4

Rozwiążemy równanie $k^2x + 3 = k + 9x$.

Rozwiązanie

$k^2x - 9x = k - 3$ ⟵ grupujemy wyrazy z niewiadomą po jednej stronie równania

$(k^2 - 9)x = k - 3$ ⟵ wyłączamy x poza nawias

$(k + 3)(k - 3)x = k - 3$ ⟵ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

I. Jeżeli $k \neq -3$ i $k \neq 3$, to obydwie strony równania możemy podzielić przez wyrażenie $(k + 3)(k - 3)$. Wtedy $x = \frac{k-3}{(k+3)(k-3)}$, czyli $x = \frac{1}{k+3}$.

II. Jeżeli $k = -3$, to równanie ma postać $0 \cdot x = -6$ i nie ma rozwiązań.

III. Jeżeli $k = 3$, to równanie ma postać $0 \cdot x = 0$ i jest tożsamościowe.

Odp.: Dla $k = -3$ równanie nie ma rozwiązań, dla $k = 3$ rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista, dla $k \neq -3$ i $k \neq 3$ rozwiązaniem jest $x = \frac{1}{k+3}$.

Przykład 5

Dla jakiej wartości parametru m równanie $(m^2 + m)x - 5m = 5$ jest równaniem tożsamościowym?

Rozwiązanie

$m(m + 1)x = 5(m + 1)$

Równanie liniowe tożsamościowe to równanie postaci $0 \cdot x = 0$.
Zatem muszą być spełnione dwa warunki: $m(m + 1) = 0$ i $5(m + 1) = 0$.
Jedyną liczbą spełniającą obydwa warunki jest $m = -1$.

Odp.: Równanie jest tożsamościowe dla $m = -1$.

Przykład 6 ◀ zad. 8.6

Dla jakiej wartości parametru k rozwiązaniem równania $(3k + 4)x = -6k - 1$ jest liczba 5?

Rozwiązanie

$(3k + 4) \cdot 5 = -6k - 1$ ⟵ w miejsce niewiadomej x podstawiamy 5

$15k + 20 = -6k - 1$ ⟵ rozwiązujemy równanie z niewiadomą k

$21k = -21$, stąd $k = -1$

Sprawdźmy, podstawiając do danego równania $k = -1$.

$(3 \cdot (-1) + 4)x = -6 \cdot (-1) - 1$, czyli $x = 5$

Odp.: $k = -1$

Równanie liniowe z kilkoma parametrami

Równanie liniowe może mieć więcej parametrów. Najczęściej oznacza się je literami: m, k, p lub początkowymi literami alfabetu, gdyż litery końcowe tradycyjnie służą do oznaczania niewiadomych.

Rozwiązywanie równań liniowych z większą liczbą parametrów nie różni się od rozwiązywania równania z jednym parametrem. Prześledźmy to na przykładach.

Przykład 7 ◀ zad. 8.17

Rozwiążemy równanie $x + m = k - 1$ z parametrami m oraz k.

Rozwiązanie

$x = k - 1 - m$

Odp.: Dla dowolnych wartości m i k równanie ma jedno rozwiązanie $x = k - 1 - m$.

Przykład 8

Rozwiążemy równanie $kx - 3 = m$ z parametrami m oraz k.

Rozwiązanie

$kx = m + 3$

I. Jeżeli $k \neq 0$, to $x = \frac{m+3}{k}$.

II. Jeżeli $k = 0$ i $m = -3$, to równanie jest tożsamościowe.

III. Jeżeli $k = 0$ i $m \neq -3$, to równanie jest sprzeczne.

Jeżeli w odpowiedzi nie podajemy warunku dla jakiegoś parametru, oznacza to, że parametr ten może przyjmować dowolną wartość liczbową.

Odp.: Dla $k \neq 0$ równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{m+3}{k}$, dla $k = 0$ i $m = -3$ rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista, dla $k = 0$ i $m \neq -3$ nie ma rozwiązań.

Przykład 9

Rozwiążemy równanie $(x-m)(p+2)=-6$ z parametrami m oraz p.

Rozwiązanie

$$px+2x-mp-2m=-6$$
$$px+2x=mp+2m-6$$
$$(p+2)x=mp+2m-6$$

I. Jeżeli $p\neq -2$, to $x=\frac{mp+2m-6}{p+2}$, stąd $x=\frac{m(p+2)-6}{p+2}$, czyli $x=m-\frac{6}{p+2}$.

II. Jeżeli $p=-2$, to równanie ma postać:

$$0\cdot x=m\cdot(-2)+2m-6$$
$$0\cdot x=-6$$

Zatem dla $p=-2$ równanie jest sprzeczne niezależnie od wartości parametru m.

Odp.: Dla $p\neq -2$ równanie ma jedno rozwiązanie $x=m-\frac{6}{p+2}$, dla $p=-2$ równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 10 ◀ zad. 8.18

Rozwiążemy równanie $k^2x-k=m^2x-m$ z parametrami k oraz m.

Rozwiązanie

$$k^2x-k=m^2x-m$$
$$k^2x-m^2x=k-m$$
$$\left(k^2-m^2\right)x=k-m$$
$$(k-m)(k+m)x=k-m$$

I. Jeżeli $k-m\neq 0$ i $k+m\neq 0$, to $x=\frac{k-m}{(k-m)(k+m)}$, czyli $x=\frac{1}{k+m}$.

II. Jeżeli $k-m=0$, to równanie ma postać $0\cdot x=0$ i jego rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista.

III. Jeżeli $k+m=0$, to równanie ma postać $0\cdot x=k-m$ i liczba rozwiązań równania zależy od wartości wyrażenia $k-m$. Zauważmy, że rozwiązaniem układu:

$$\begin{cases} k+m=0 \\ k-m=0 \end{cases}$$

jest para liczb $k=0$, $m=0$, zatem powtarza się sytuacja z punktu II.
Natomiast gdy $k=-m\neq 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Odp.: Dla $k\neq m$ i $k\neq -m$ równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{1}{k+m}$, dla $k=m$ rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista, dla $k=-m\neq 0$ równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 11 ◀ zad. 8.20

Za k opakowań ryżu Tomasz zapłacił o p zł mniej niż za m opakowań tego samego ryżu. Ile kosztowało jedno opakowanie ryżu?

Rozwiązanie

Niech x oznacza cenę jednego opakowania ryżu.

$$kx + p = mx$$

Po przekształceniu równania z niewiadomą x otrzymujemy:

$$p = (m - k)x$$

Stąd mamy:

$$x = \frac{p}{m - k}$$

Z treści zadania wynika, że $m > k > 0$ i $p > 0$. Zatem otrzymane wyrażenie $\frac{p}{m - k}$, opisujące cenę jednego opakowania ryżu, ma wartość dodatnią dla dowolnych wartości m, k i p spełniających te nierówności.

Odp.: Cena jednego opakowania ryżu wynosi $x = \frac{p}{m - k}$ zł dla $m > k > 0$ i $p > 0$.

Nierówność liniowa z parametrem

Nierówność liniowa z jedną niewiadomą to nierówność, którą można zapisać w jednej z dwóch postaci:

- $ax + b > 0$,
- $ax + b \geqslant 0$,

gdzie x jest niewiadomą, a współczynniki a i b są liczbami danymi.

Prześledźmy sposób rozwiązywania nierówności liniowej z parametrem na przykładach.

Przykład 12 ◀ zad. 8.21

Rozwiążemy nierówność $3x - 2m + 6 \leqslant 0$ z parametrem m.

Rozwiązanie

$$3x \leqslant 2m - 6, \text{ stąd } x \leqslant \frac{2m - 6}{3}$$

Odp.: Dla każdej wartości parametru m zbiorem rozwiązań podanej nierówności jest przedział $\left(-\infty; \frac{2m - 6}{3}\right\rangle$.

Przykład 13 ◂ zad. 8.2

Dana jest nierówność $px > p + 2$ z parametrem p. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dla $p = 4$ zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(1; \infty)$.

B. Dla $p = 0$ nierówność jest sprzeczna.

C. Dla $p = 1$ zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(3; \infty)$.

Rozwiązanie

Do oceny prawdziwości podanych zdań nie musimy tej nierówności rozwiązywać. Najprościej będzie podstawić podane wartości parametru p.

A. Jeżeli $p = 4$, to nierówność ma postać $4x > 4 + 2$, zatem zbiorem jej rozwiązań nie jest przedział $(1; \infty)$.

B. Dla $p = 0$ nierówność ma postać $0 \cdot x > 2$ i jest sprzeczna.

C. Dla $p = 1$ nierówność ma postać $x > 1 + 2$, zatem zbiorem jej rozwiązań jest przedział $(3; \infty)$.

Odp.: Zdanie A jest fałszywe, zdania B oraz C są prawdziwe.

Przykład 14

Rozwiążemy nierówność $px - 2p > 0$ z parametrem p.

Rozwiązanie

$$px > 2p$$

I. Jeżeli $p = 0$, to nierówność ma postać $0 \cdot x > 0$ i nie ma rozwiązań.

II. Jeżeli $p > 0$, to obie strony nierówności możemy podzielić przez liczbę p. Zwrot nierówności **nie zmienia się** i otrzymujemy $x > 2$.

III. Jeżeli $p < 0$, to obie strony nierówności także możemy podzielić przez liczbę p, ale zwrot nierówności **zmienia się** i otrzymujemy $x < 2$.

Odp.: Jeżeli $p = 0$, to nierówność nie ma rozwiązań. Jeżeli $p > 0$, to $x \in (2; \infty)$. Jeżeli $p < 0$, to $x \in (-\infty; 2)$.

Przykład 15

Rozwiążemy nierówność $2px - 2x \leqslant 3p^2 - 3$ z parametrem p.

Rozwiązanie

$$2(p - 1)x \leqslant 3(p - 1)(p + 1)$$

I. Jeżeli $p = 1$, to nierówność ma postać $0 \cdot x \leqslant 0$ i jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.

II. Jeżeli $p > 1$, to obie strony nierówności możemy podzielić przez liczbę dodatnią $2(p-1)$. Zwrot nierówności nie zmienia się i otrzymujemy nierówność:
$x \leqslant \frac{3(p+1)}{2}$

III. Jeżeli $p < 1$, to obie strony nierówności możemy podzielić przez liczbę ujemną $2(p-1)$. Zwrot nierówności zmienia się i otrzymujemy nierówność:
$x \geqslant \frac{3(p+1)}{2}$

Odp.: Jeżeli $p = 1$, to $x \in \mathbf{R}$. Jeżeli $p > 1$, to $x \in \left(-\infty; \frac{3(p+1)}{2}\right\rangle$. Jeżeli $p < 1$, to $x \in \left\langle \frac{3(p+1)}{2}; \infty \right)$.

Przykład 16 ◀ zad. 8.24

Sprawdzimy, czy istnieje taka wartość parametru k, dla której podana nierówność jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.

$kx + 2k < 3x + 4$

Rozwiązanie

$kx + 2k < 3x + 4$
$kx - 3x < -2k + 4$
$(k-3)x < -2k + 4$

Przykładami nierówności spełnionych przez dowolną liczbę rzeczywistą są:
$0 \cdot x > -4, \quad 0 \cdot x < 5$

Zauważmy, że aby nierówność była spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą, współczynnik przy niewiadomej x musi być równy 0. Ten warunek jest spełniony, gdy $k = 3$. Ale dla $k = 3$ nierówność ma postać $0 \cdot x < -2$ i nie ma rozwiązań.

Odp.: Nie istnieje taka wartość parametru k, dla której nierówność $kx + 2k < 3x + 4$ jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.

Zadania

8.1. Dane jest równanie $x - 2k = 10$ z parametrem k. Oceń prawdziwość zdań.
A. Dla $k = 0$ rozwiązaniem równania jest liczba 10.
B. Dla $k = 5$ rozwiązaniem równania jest liczba 0.
C. Dla $k = \sqrt{3}$ rozwiązaniem równania jest liczba $12\sqrt{3}$.

8.2. Dana jest nierówność $px > 2p - 2$ z parametrem p. Oceń prawdziwość zdań.
A. Dla $p = 4$ zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-1; \infty)$.
B. Dla $p = 2$ nierówność jest sprzeczna.
C. Dla $p = 1$ zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(1; \infty)$.

8.3. Rozwiąż równanie z parametrem m.

a) $2x + 3m = 5$

b) $mx - 7m = x - m$

c) $m(x + 1) - 2m = x + 3$

d) $5mx - m = 10x - 2$

8.4. Rozwiąż równanie z parametrem k.

a) $k^2x - 1 = x - 5k$

b) $k^2x + 7k = x + 7$

c) $kx + 1 = k + k^2x$

d) $k^2x + \sqrt{3} - k = 3x$

8.5. Rozwiąż równanie $|k + 1|x - 2 = 2k$, w którym k jest parametrem.

8.6. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem równania $(m + 3)x - 5 = 3m$ jest liczba -2?

8.7. Dla jakich wartości parametru k rozwiązanie równania $1 - \frac{x - 9k}{10} = \frac{3k - x}{2} - \frac{3x - 1}{5}$ należy do przedziału $\langle -1; 2\rangle$?

8.8. Dla jakich wartości parametru k równanie $k^2x + 4\left[3 - (k - 1)x\right] = 12k$ nie ma rozwiązania?

8.9. Dla jakich wartości parametru k równanie $k^2x - 7k = 10 - 6x$ jest tożsamościowe?

8.10. Dla jakich wartości parametru m rozwiązanie równania $7x - 3m = 2(m + 1) + 3x$ jest mniejsze od $\frac{3}{4}$?

8.11. Dla jakich wartości parametru k podane równanie jest tożsamościowe?

a) $2 - kx = 2k - x$

b) $kx + 5 = 3x + 1$

8.12. Dla jakich wartości parametru p podane równanie jest sprzeczne?

a) $|x - 1| = p - 5$

b) $2|x - 3| + 3p = 2(1 - p)$

c) $5p - |x + 2| = 2(p - 4)$

d) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} + 4p^2 + 5 = (1 - 2p)^2 + 3p$

8.13. Dla jakich wartości parametru m rozwiązanie równania $2m+3(x-5m) = m+9$ jest większe od rozwiązania równania $2\sqrt{9x^2 - 12x + 4} - \frac{1}{2}(2x - 3) = 1\frac{1}{2} - x$?

8.14. Dla jakich wartości parametru m każde rozwiązanie równania $m(x-1)-m^2=3m+2(2-x)$ jest nie większe od $\frac{7}{8}$?

8.15. Dla jakich wartości parametru m równanie $|m-1|\cdot|x|-2|x|=3$ ma rozwiązanie?

D **8.16.** Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru m równanie $2(4-3x)+mx=2(m-2)$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

8.17. Rozwiąż równanie z parametrami m i p.

a) $(x+1)m=2m+p$

b) $px-m=x+3$

8.18. Rozwiąż równanie $m^2x-m=p^2x+p$, w którym m i p są parametrami.

8.19. Rozwiąż równanie $px+1=k^2-2x$, w którym k i p są parametrami.

8.20. Kwotę k złotych wypłacono z bankomatu w banknotach pięćdziesięciozłotowych oraz stuzłotowych. Wyznacz liczbę banknotów pięćdziesięciozłotowych w zależności od k, wiedząc, że liczba wszystkich banknotów wynosiła 40.

8.21. Rozwiąż nierówność z parametrem k.

a) $2(kx-3)<3k$

b) $(5-2x)k+2<7k$

c) $1-3kx>5\left(k+\frac{1}{5}\right)$

d) $5-kx>2k(x-3)+2$

8.22. Dla jakiej wartości parametru p zbiorem rozwiązań nierówności $5x-3p-8>0$ jest przedział $(10;\infty)$?

8.23. Rozwiąż nierówność z parametrem m.

a) $x-\frac{mx+1}{5}>\frac{x-m}{2}$

b) $1-(mx+1)^2<(m+5)x-(mx-2)(mx+2)$

8.24. Dla jakich wartości parametru m zbiorem rozwiązań nierówności $m(x+1)-2(2x-4)>(m+1)x-5$ jest przedział $\left(-\infty;3\frac{1}{5}\right)$?

8.25. Dla jakich wartości parametru m zbiorem rozwiązań nierówności $2(m-x)+1>2x-7$ jest przedział $(-\infty;m+2)$?

8.26. Sprawdź, czy istnieje taka wartość parametru p, dla której zbiorem rozwiązań nierówności $px-5p^2+2p>0$ jest przedział $(-\infty;-8)$.

8.27. Sprawdź, czy istnieje taka wartość parametru m, dla której nierówność $m^2x - m^2 - 4x - 2m < 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.

D **8.28.** Wykaż, że nie istnieje taka wartość parametru m, dla której nierówność $m^2(x-1) \geqslant m(2x-3)$ jest sprzeczna.

* **8.29.** Podaj przykład równania liniowego z parametrem k, które dla $k = 2$ jest sprzeczne, dla $k = -2$ jest tożsamościowe, a dla $k \neq 2$ oraz $k \neq -2$ ma jedno rozwiązanie.

D **8.30.** Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru $k \in \mathbf{R}$ równanie $2kx + [1 - (k+1)x] \cdot (k+1) = 4$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Prosto do matury

1. Dane jest równanie $kx + m = 1$ z parametrami k oraz m.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Dla $k = 1$ i $m = 2$ rozwiązaniem równania jest liczba -1.
B. Dla $k = 0$ i $m = 0$ równanie jest tożsamościowe.
C. Dla $k = 0$ i $m = 0$ równanie jest sprzeczne.

2. Rozwiąż równanie $k^2x = 2kx - 5k$ z parametrem k.

3. Rozwiąż nierówność $3px \geqslant p - 1$ z parametrem p.

4. Dla jakich wartości parametrów k oraz m równanie $mx - 2k + 3x + 8 = 0$ jest tożsamościowe?

D **5.** Wykaż, że nie istnieje taka wartość parametru m, dla której rozwiązaniem równania $2x + |m| = 8$ jest
a) liczba 5.
b) liczba większa od 4.

9. Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi – wprowadzenie

Umiejętności:

- rozpoznawanie równania liniowego z dwiema niewiadomymi
- sprawdzanie, czy dana para liczb jest rozwiązaniem równania liniowego z dwiema niewiadomymi
- rozpoznawanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi
- sprawdzanie, czy dana para liczb jest rozwiązaniem układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi

Definicja

Równanie postaci $ax+by=c$, w którym niewiadome x i y występują w pierwszej (liniowej) potędze, a, b i c są liczbami danymi oraz a i b nie są jednocześnie równe zero, nazywamy **równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi**.

Przykładami równań tej postaci są:

$2x-y=7$

$-\sqrt{5}x+4y=0{,}27(13)$

$2x=9$

$-y=7\sqrt{3}$

Odpowiedź na pytanie, czy równanie $2x=9$ jest równaniem postaci $ax+by=c$, gdzie $a=2$, $b=0$ i $c=9$, czy jest równaniem liniowym z jedną niewiadomą, odczytujemy z kontekstu. Czasem dla podkreślenia jednoznaczności będziemy zapisywać takie równanie w postaci $2x+0y=9$.

Jeżeli do równania z dwiema niewiadomymi podstawimy parę liczb w miejsce odpowiednich niewiadomych i otrzymamy równość, to mówimy, że ta para liczb spełnia to równanie. Każdą parę liczb spełniającą dane równanie nazywamy **rozwiązaniem tego równania**.

Przykład 1 ◂ zad. 9.5

Znajdziemy kilka rozwiązań równania $5x-2y=4$.

Rozwiązanie

- $5\cdot 2-2y=4$ ⟵ wstawiamy do równania $x=2$ (czyli liczbę 2 w miejsce x)

  $-2y=4-10$

  $y=3$

  Rozwiązaniem równania jest para liczb $x=2$ i $y=3$.

- $5 \cdot \sqrt{2} - 2y = 4$ ⟵ wstawiamy do równania $x = \sqrt{2}$

  $-2y = -5\sqrt{2} + 4$

  $y = \frac{5}{2}\sqrt{2} - 2$

  Rozwiązaniem równania jest para liczb $x = \sqrt{2}$ i $y = \frac{5}{2}\sqrt{2} - 2$.

- $5x - 2 \cdot 0 = 4$ ⟵ wstawiamy do równania $y = 0$

  $x = \frac{4}{5}$

  Rozwiązaniem równania jest para liczb $x = \frac{4}{5}$ i $y = 0$.

Jest nieskończenie wiele par liczb spełniających równanie $5x - 2y = 4$.

Przykład 2 ◂ zad. 9.1

Sprawdzimy, która z par liczb: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ jest rozwiązaniem równania $x - y = 5$.

Rozwiązanie

- $(1, 4)$

  $1 - 4 = -3 \neq 5$ ⟵ wstawiamy do równania $x = 1$ i $y = 4$

Odp.: Para liczb $x = 1$ i $y = 4$ nie jest rozwiązaniem tego równania.

- $(2, -3)$

  $2 - (-3) = 5$ ⟵ wstawiamy do równania $x = 2$ i $y = -3$

Odp.: Para liczb $x = 2$ i $y = -3$ jest rozwiązaniem tego równania.

Rozwiązania równania liniowego z dwiema niewiadomymi zapisujemy w różnych postaciach. Jedną z nich jest zapis:

$x = x_0$ i $y = y_0$

Druga możliwość to zapis z klamerką:

$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$

i kolejna – zapis w postaci uporządkowanej pary liczb:

(x_0, y_0)

Zauważmy, że kolejność liczb w zapisie takiej pary ma znaczenie. Na przykład para $(2, 3)$ jest rozwiązaniem równania $5x - 2y = 4$, natomiast para liczb $(3, 2)$ nie jest rozwiązaniem tego równania.

Przykład 3

Podamy przykłady pięciu par liczb całkowitych spełniających dane równanie.

a) $x + 3y = 7$ b) $-4x + 2y = 12$

Rozwiązanie

a) $x + 3y = 7$ ⟵ z równania wyznaczamy jedną niewiadomą, np. x

$x = 7 - 3y$

Wynika stąd, że rozwiązaniami są pary liczb postaci $(7 - 3y, y)$, gdzie y jest dowolną liczbą rzeczywistą, a $x = 7 - 3y$. Zatem przykładami takich par są: $(7, 0), (4, 1), (10, -1), (1, 2), (-2, 3)$.

b) $-4x + 2y = 12$ ⟵ obie strony równania dzielimy przez 2

$-2x + y = 6$ ⟵ z równania wyznaczamy jedną niewiadomą, np. y

$y = 6 + 2x$

Wynika stąd, że rozwiązaniami są pary liczb postaci $(x, 6 + 2x)$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą, a $y = 6 + 2x$. Zatem przykładami takich par są: $(0, 6), (1, 8), (-1, 4), (-2, 2), (2, 10)$.

Odp.: a) np.: $(7, 0), (4, 1), (10, -1), (1, 2), (-2, 3)$

b) np.: $(0, 6), (1, 8), (-1, 4), (-2, 2), (2, 10)$

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Zadania tekstowe, z którymi zetknęliście się do tej pory, można było rozwiązać albo w pamięci, albo rozwiązując równanie liniowe z jedną niewiadomą.

Często wygodniejszą formą rozwiązywania zadania jest wprowadzenie kilku niewiadomych. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 4

W szkółce leśnej posadzono w sumie 100 sadzonek świerka i modrzewia. Po określonym czasie okazało się, że do rozsady nie nadaje się $\frac{1}{6}$ sadzonek świerka i $\frac{1}{8}$ sadzonek modrzewia. Po ich odrzuceniu do rozsadzenia pozostało 86 sadzonek. Sprawdzimy, ile sadzonek świerka i ile modrzewia posadzono na początku w szkółce.

Rozwiązanie

Oznaczmy:

x – początkowa liczba sadzonek świerka

y – początkowa liczba sadzonek modrzewia

$\frac{1}{6}x$ – liczba odrzuconych sadzonek świerka

$\frac{1}{8}y$ – liczba odrzuconych sadzonek modrzewia

Na podstawie treści zadania wiemy, że:

$x + y = 100$ ⟵ posadzono w sumie 100 sadzonek

oraz

$100 - \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{8}\right) = 86$ ⟵ po odrzuceniu wszystkich niedobrych zostało 86

Zauważmy, że jest wiele par liczb spełniających jedno z równań. Na przykład po podstawieniu $x = 60$ i $y = 40$ otrzymamy:

$$60 + 40 = 100, \text{ ale } 100 - \left(\frac{60}{6} + \frac{40}{8}\right) = 100 - (10 + 5) = 85 \neq 86$$

Z kolei po podstawieniu $x = 24$ i $y = 80$ otrzymamy:

$$100 - \left(\frac{24}{6} + \frac{80}{8}\right) = 100 - (4 + 10) = 86, \text{ ale } 24 + 80 = 104 \neq 100$$

Zadanie, które mamy rozwiązać, polega na znalezieniu takich par liczb $x = x_0$ i $y = y_0$, które będą spełniały wszystkie założenia podane w treści, czyli jedno i drugie równanie. Inaczej mówiąc, mamy do rozwiązania **układ równań**:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 100 - \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{8}\right) = 86 \end{cases}$$

Jedyną parą liczb spełniającą ten układ równań jest $x = 36$ i $y = 64$. Sprawdźmy:

$$\begin{cases} 36 + 64 = 100 \\ 100 - \left(\frac{36}{6} + \frac{64}{8}\right) = 100 - (6 + 8) = 86 \end{cases}$$

Metodami rozwiązywania układów równań oraz wyjaśnieniem, dlaczego poszukiwanym rozwiązaniem tego układu jest tylko jedna para liczb, zajmiemy się w następnych tematach podręcznika.

Odp.: W szkółce posadzono 36 sadzonek świerka i 64 sadzonki modrzewia.

Przyjrzyjmy się ponownie układowi równań:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 100 - \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{8}\right) = 86 \end{cases}$$

Drugie równanie przekształcimy równoważnie do prostszej postaci.

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ -\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{8}\right) = 86 - 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 14 \end{cases}$$ ⟵ obie strony równania mnożymy przez 24

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 4x + 3y = 336 \end{cases}$$

Zatem każde z równań układu jest równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi.

Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi zapisujemy najczęściej w postaci:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

przy czym litery x i y oznaczają niewiadome, natomiast $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi dodatkowo warunki: liczby a_1, b_1 nie są jednocześnie równe zero i liczby a_2, b_2 nie są jednocześnie równe zero.

Przykład 5 ◀ zad. 9.6

Sprawdzimy, czy podana para liczb spełnia układ równań $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 5y = 3 \end{cases}$.

a) $(2, -3)$ b) $(1, 1)$ c) $(-2, 3)$

Rozwiązanie

a) Do każdego z równań układu podstawiamy $x = 2$ i $y = -3$:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = 4 - 9 = -5 \neq 5 \\ 6 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = 12 - 15 = -3 \neq 3 \end{cases}$$

Odp.: Para $(2, -3)$ nie spełnia podanego układu równań.

b) Do każdego z równań układu podstawiamy $x = 1$ i $y = 1$:

$$\begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ 6 + 5 = 11 \neq 3 \end{cases}$$

Odp.: Para $(1, 1)$ nie spełnia podanego układu równań.

c) Do każdego z równań układu podstawiamy $x = -2$ i $y = 3$:

$$\begin{cases} -4 + 9 = 5 \\ -12 + 15 = 3 \end{cases}$$

Odp.: Para $(-2, 3)$ spełnia podany układ równań.

Przykład 6 ◀ zad. 9.7

Dany jest układ równań $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 5 \\ 3x + 2y = 30 \end{cases}$.

Sprawdzimy, czy pary $(0, 15)$, $(-2, 3)$, $(2, 12)$ należą do zbioru jego rozwiązań.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} 0 + \frac{15}{3} = 5 \\ 0 + 30 = 30 \end{cases} \longleftarrow \text{podstawiamy } x = 0 \text{ i } y = 15$$

Para $(0, 15)$ spełnia ten układ równań.

$$\begin{cases} -\frac{2}{2}+\frac{3}{3}=-1+1=0\neq 5 \\ -6+6=0\neq 30 \end{cases} \longleftarrow \text{podstawiamy } x=-2 \text{ i } y=3$$

Para $(-2,\ 3)$ nie spełnia tego układu równań.

$$\begin{cases} \frac{2}{2}+\frac{12}{3}=1+4=5 \\ 6+24=30 \end{cases} \longleftarrow \text{podstawiamy } x=2 \text{ i } y=12$$

Para $(2,\ 12)$ spełnia ten układ równań.

Odp.: Pary $(0,\ 15)$ i $(2,\ 12)$ należą do zbioru rozwiązań tego układu, natomiast para $(-2,\ 3)$ nie należy do tego zbioru.

Wniosek

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi może mieć więcej niż jedno rozwiązanie.

Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.4 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

9.1. Wskaż parę liczb spełniającą równanie $3x-5y=15$.

A. $(0,\ 3)$ **B.** $(-5,\ 0)$ **C.** $(0,\ -3)$ **D.** $(3,\ -1)$

9.2. Wskaż parę liczb, która nie spełnia równania $6x-2y=-12$.

A. $(0,\ 6)$ **B.** $(-1,\ 3)$ **C.** $(-1,\ 5)$ **D.** $(-2,\ 0)$

9.3. Wskaż parę liczb spełniającą układ równań $\begin{cases} 5x+3y=-12 \\ x+y=-2 \end{cases}$.

A. $(-4,\ 2)$ **B.** $(-3,\ 1)$ **C.** $(-5,\ 3)$ **D.** $(3,\ -5)$

9.4. Wskaż parę liczb, która nie jest rozwiązaniem układu $\begin{cases} \frac{4}{5}x-\frac{8}{7}y=12 \\ -x+\frac{10}{7}y=-15 \end{cases}$.

A. $(15,\ 0)$ **B.** $(1,\ 4)$ **C.** $\left(\frac{95}{7},\ -1\right)$ **D.** $\left(0,\ -\frac{21}{2}\right)$

9.5. Dane jest równanie liniowe z dwiema niewiadomymi $6x - y = 7$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Para $(1, -1)$ jest rozwiązaniem tego równania.

B. Rozwiązaniami tego równania są uporządkowane pary liczb.

C. To równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

9.6. Znajdź trzy pary liczb (x, y), które spełniają podane równanie.

a) $x - y = 7$
b) $2x + y = 5$
c) $5x + 3y = 8$
d) $x - y = 0$
e) $0x + y = 9$
f) $x + 0y = 11$

9.7. Sprawdź, czy podana para liczb spełnia układ równań.

a) $\begin{cases} 6x + 5y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $(-3, 4)$

b) $\begin{cases} 7x - 2 = 2y \\ x - y = 1 \end{cases}$ $(0, -1)$

c) $\begin{cases} 2y - 3 = x \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ $(3, 3)$

d) $\begin{cases} 2(x - 1) = 3y \\ x = 1 - y \end{cases}$ $(2, 0)$

e) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 7x - 4y = -3 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

f) $\begin{cases} x + y = \frac{1}{2} \\ x - y = \frac{1}{3} \end{cases}$ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

9.8. Sprawdź, czy para $(1, 2)$ jest rozwiązaniem podanego układu równań.

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -8 \\ x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + \sqrt{2}y = 2\sqrt{2} - 1 \\ x + 5y = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y = 5\sqrt{5} \\ 2\sqrt{3}x + \sqrt{7}y = 2\sqrt{10} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x + 3y = 12 \\ x - y = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 10^{10}x + 10^{10}y = 3 \cdot 10^{10} \\ 2 \cdot 10^{20}x - 10^{15}y = 2 \cdot 10^{5} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2^{11}x + 2^{10}y = 2^{12} \\ 3^{-2}x + 3^{-1}y = 7 \cdot 3^{-2} \end{cases}$

9.9. Do danego równania dopisz drugie równanie tak, aby otrzymany układ był spełniony przez podaną obok parę liczb.

a) $2x + y = 7$ $(2, 3)$
b) $x + y = 10$ $(4, 6)$
c) $-x + 5y = 3$ $(-3, 0)$
d) $4x + 3y = 5$ $(2, -1)$
e) $-13x + 2y = -1$ $(-1, -7)$
f) $117x - 119y = 0$ $(0, 0)$

9.10. Dany jest układ równań $\begin{cases} 2x - y = -\log_2 2 \\ 4x + 2 = 2y \end{cases}$.

D a) Wykaż, że pary $(3, 7)$ i $(-1, -1)$ są rozwiązaniami tego układu.

b) Podaj przykład dwóch innych rozwiązań tego układu oraz jeden przykład pary niebędącej jego rozwiązaniem.

9.11. Sprawdź, czy pary liczb $\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(0, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{4}\sqrt{6}, 0\right)$ są rozwiązaniami układu równań $\begin{cases} 2\sqrt{2}x - \sqrt{6}y = 3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{6}x + 3\sqrt{2}y = -9 \end{cases}$.

9.12. Wyznacz taką wartość m, aby para liczb $(-3, 5)$ była rozwiązaniem równania $2x + my = 9$.

9.13. Znajdź parę liczb całkowitych (x, y) spełniającą równanie $11x - 7y = 19$.

9.14. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych spełniających równanie $7x + 3y = 55$.

9.15. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych spełniających równanie $17x + 13y = 850$.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Para liczb $\left(\frac{11+\sqrt{2}}{4}, \frac{6-\sqrt{2}}{6}\right)$ spełnia równanie $4x + 6y = 17$.

B. Istnieje para liczb całkowitych spełniająca równanie $4x + 6y = 17$.

C. Istnieje para liczb wymiernych spełniająca równanie $4x + 6y = 17$.

2. Podaj parę liczb ujemnych spełniającą równanie $2x - 3y = 1$.

3. Sprawdź, czy para liczb $\left(2\sqrt{3}, -\sqrt{6}\right)$ jest rozwiązaniem równania $\sqrt{6}x + \sqrt{3}y = 3\sqrt{2}$.

4. Wyznacz taką wartość m, aby para liczb $(8, -11)$ była rozwiązaniem równania $mx + 3y = 7$.

D **5.** Udowodnij, że para liczb $\left(2^{101}, 2^{102}\right)$ jest rozwiązaniem podanego układu równań.

$$\begin{cases} 2x + y = 2^{103} \\ \log_2 x - \log_2 y = -1 \end{cases}$$

10. Rozwiązywanie układu równań liniowych

Umiejętności:

- rozwiązywanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania
- rozwiązywanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników

W tym temacie omówimy dwie algebraiczne metody rozwiązywania układów równań, trzecią – geometryczną – poznacie później.
Każda z podanych niżej metod polega na zastępowaniu danego układu równań innym, równoważnym mu i jednocześnie prostszym układem, z którego można już odczytać rozwiązania. Pokażemy to na przykładach.

Metoda podstawiania

Przykład 1 ◂ zad. 10.5

Rozwiążemy metodą podstawiania układ równań $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 5y = 14 \end{cases}$.

Rozwiązanie

Krok 1: Z pierwszego równania wyznaczamy zmienną y i podstawiamy do drugiego równania.

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 3x - 5(-2x + 5) = 14 \end{cases}$$

Krok 2: W drugim równaniu wykonujemy przekształcenia.

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 3x + 10x - 25 = 14 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} y = -2x + 5 \\ 13x = 39 \end{cases}$$

Krok 3: Z drugiego równania, które jest już równaniem z jedną niewiadomą, obliczamy x.

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ x = 3 \end{cases}$$

Krok 4: Obliczoną wartość x podstawiamy do pierwszego równania i obliczamy y.

$$\begin{cases} y = -2 \cdot 3 + 5 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Odp.: Jedynym rozwiązaniem układu jest para liczb $(3, -1)$.

Przykład 2

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Rozwiązanie

Krok 1: $\begin{cases} x = 2y - 3 \\ 2(2y - 3) - 4y = 1 \end{cases}$ ⟵ z pierwszego równania wyznaczamy zmienną x i podstawiamy ją do drugiego równania

Krok 2: $\begin{cases} x = 2y - 3 \\ 4y - 6 - 4y = 1 \end{cases}$ ⟵ wykonujemy działania

$\begin{cases} x = 2y - 3 \\ -6 = 1 \end{cases}$

Drugiego równania nie spełnia żadna liczba, zatem układ równań także nie ma rozwiązań.

Odp.: Układ równań nie ma rozwiązań.

Przykład 3

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -6x + 2y = -8 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Rozwiązanie

Krok 1: $\begin{cases} -6x + 2(3x - 4) = -8 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ ⟵ z drugiego równania wyznaczamy y

Krok 2: $\begin{cases} -6x + 6x - 8 = -8 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ ⟵ wykonujemy działania

$\begin{cases} 0 = 0 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

Pierwsze równanie jest spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą.
Rozwiązaniem układu jest każda para liczb spełniająca drugie równanie, np. $(0, -4)$, $(1, -1)$, $(-2, -10)$. Takich par liczb jest nieskończenie wiele.

Odp.: Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (x, y); są nimi pary liczb spełniające równanie $y = 3x - 4$.

Metodę podstawiania, stosowaną do rozwiązywania układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, można przedstawić w postaci następującego schematu.



Metoda przeciwnych współczynników

W tej metodzie będziemy wykorzystywać jedno z podstawowych praw arytmetyki, które mówi, że:

jeżeli $a = b$ i $c = d$, to $a + c = b + d$

Rozwiążmy tą metodą poprzednio opisane przykłady.

Przykład 4 ◀ zad. 10.7

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 5y = 14 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie

Chcemy mieć w obydwu równaniach przy jednej z niewiadomych współczynniki będące liczbami przeciwnymi. W tym wypadku najłatwiej jest pomnożyć obydwie strony pierwszego równania przez 5.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \quad | \cdot 5 \\ 3x - 5y = 14 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} 10x + 5y = 25 \\ 3x - 5y = 14 \end{cases}$$

Jeśli dodamy równania stronami, to otrzymamy:

$$(10x + 5y) + (3x - 5y) = 25 + 14, \text{ czyli } 13x = 39$$

W ten sposób wyeliminowaliśmy niewiadomą y, czyli otrzymaliśmy równanie z jedną niewiadomą x. Mamy więc nowy układ równań:

$$\begin{cases} 13x = 39 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \longleftarrow \text{przepisujemy którekolwiek z początkowych równań}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 6 + y = 5 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Odp.: Jedynym rozwiązaniem układu jest para liczb $(3, -1)$.

Przykład 5

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \quad | \cdot 2 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} \longleftarrow \text{obydwie strony pierwszego równania mnożymy przez 2}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} \longleftarrow \text{dodajemy równania stronami i jedno przepisujemy bez zmian}$$

$$\begin{cases} 0 = 7 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Z otrzymanej sprzeczności w pierwszym równaniu wnioskujemy, że układ nie ma rozwiązań.

Odp.: Układ równań nie ma rozwiązań.

Przykład 6

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -6x + 2y = -8 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

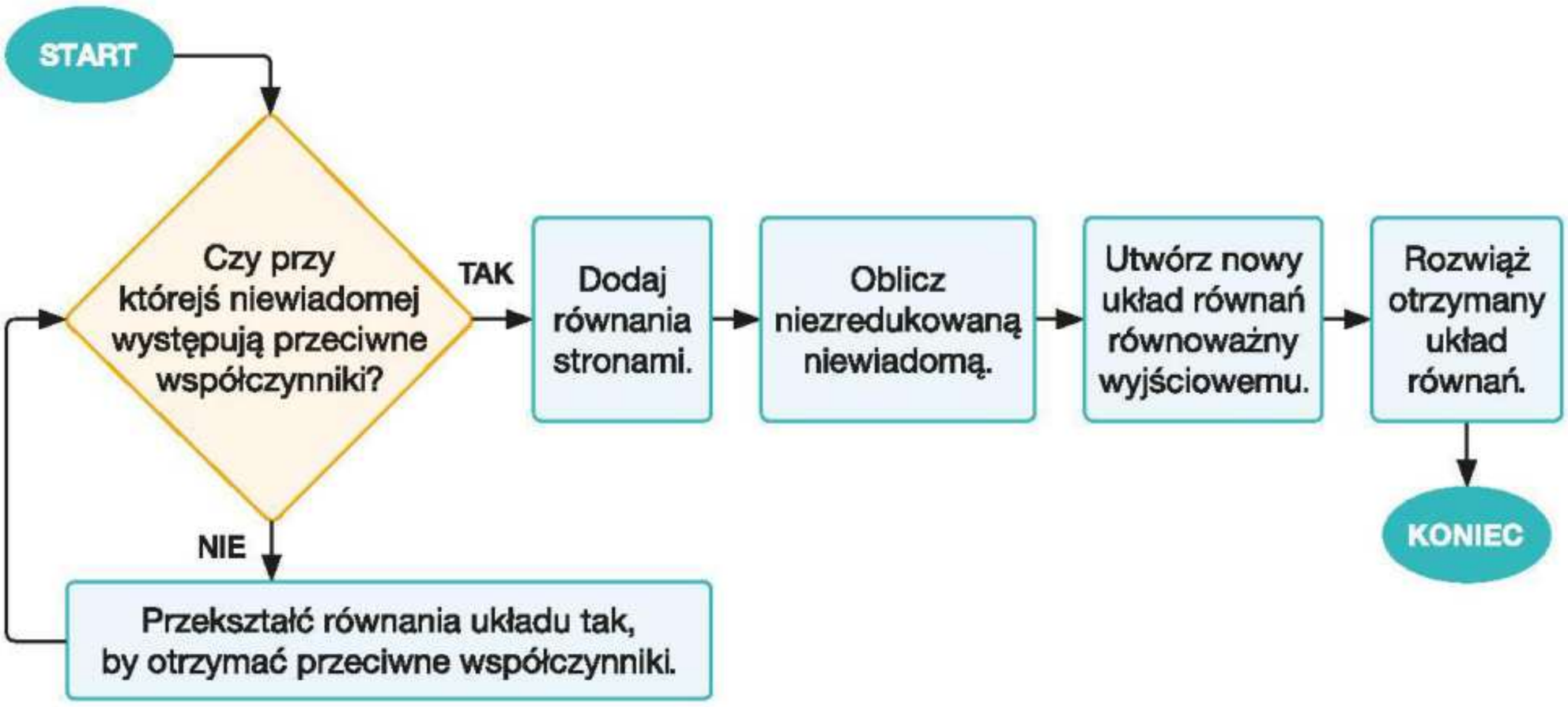
Rozwiązanie

$$\begin{cases} -6x + 2y = -8 \\ 3x - y = 4 \quad | \cdot 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -6x + 2y = -8 \\ 6x - 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Drugie równanie w ostatnim układzie jest spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą, więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Odp.: Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (x, y); są nimi pary liczb spełniające równanie $3x - y = 4$.

Metodę przeciwnych współczynników, stosowaną do rozwiązywania układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, można przedstawić w postaci schematu.



Czasem wygodnie jest stosować metodę przeciwnych współczynników do kolejnego wyznaczania niewiadomych.

Przykład 7 ◂ zad. 10.8

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} 7x + 5y = 1 \\ 3x - 9y = 4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie

Aby doprowadzić do przeciwnych współczynników, np. przy zmiennej y, musimy w tym wypadku pomnożyć obydwa równania przez odpowiednie liczby.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 1 \quad | \cdot 9 \\ 3x - 9y = 4 \quad | \cdot 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 63x + 45y = 9 \\ 15x - 45y = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 78x = 29 \\ 3x - 9y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{29}{78} \\ 3x - 9y = 4 \end{cases}$$

Gdybyśmy chcieli teraz podstawić wyznaczone $x = \frac{29}{78}$ do drugiego równania i obliczyć wartość y, przekształcenia byłyby kłopotliwymi działaniami na ułamkach. Dlatego wygodniej będzie powrócić do pierwotnej postaci układu i ponownie zastosować metodę przeciwnych współczynników – tym razem w celu wyznaczenia niewiadomej y.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 1 \mid \cdot 3 \\ 3x - 9y = 4 \mid \cdot (-7) \end{cases} \quad \begin{cases} 21x + 15y = 3 \\ -21x + 63y = -28 \end{cases} \quad \begin{cases} 78y = -25 \\ 3x - 9y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{25}{78} \\ 3x - 9y = 4 \end{cases}$$

Parą liczb spełniającą układ równań jest zatem $x = \frac{29}{78}$ oraz $y = -\frac{25}{78}$.

Odp.: Rozwiązaniem układu jest para liczb $\left(\frac{29}{78}, -\frac{25}{78}\right)$.

Podobnie jak układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi definiuje się układy równań z większą liczbą niewiadomych, z których każda jest w pierwszej potędze. Najogólniej – mówimy o układach n równań liniowych z n niewiadomymi ($n \in \mathbf{N}$, $n > 1$). Pokażemy na przykładzie, jak można rozwiązywać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi.

Przykład 8 ◂ zad. 10.10

Rozwiążemy układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 7 \\ 3x + 3y + 2z = 1 \\ x - 3y + 5z = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Na początku korzystamy z metody podstawiania. Z dowolnie wybranego równania wyznaczamy jedną z niewiadomych za pomocą pozostałych i wstawiamy otrzymane wyrażenie do pozostałych dwóch równań zamiast tej niewiadomej.

$$\begin{cases} y = 7 - 2x + 3z \\ 3x + 3(7 - 2x + 3z) + 2z = 1 \\ x - 3(7 - 2x + 3z) + 5z = 4 \end{cases} \quad \longleftarrow \text{porządkujemy drugie i trzecie równanie}$$

$$\begin{cases} y = 7 - 2x + 3z \\ 3x + 21 - 6x + 9z + 2z = 1 \\ x - 21 + 6x - 9z + 5z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7 - 2x + 3z \\ -3x + 11z = -20 \\ 7x - 4z = 25 \end{cases}$$

Drugie i trzecie równanie tworzą układ równań z dwiema niewiadomymi, który rozwiążemy metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} -3x + 11z = -20 & |\cdot 7 \\ 7x - 4z = 25 & |\cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -21x + 77z = -140 \\ 21x - 12z = 75 \end{cases}$$

Stąd, po dodaniu równań stronami, otrzymujemy:

$65z = -65$

$z = -1$ ⟵ podstawiamy do równania $7x - 4z = 25$

$7x = 25 - 4$

$x = 3$ ⟵ podstawiamy obliczone niewiadome do równania $y = 7 - 2x + 3z$

$y = 7 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = -2$

Odp.: Rozwiązaniem układu jest trójka liczb: $x = 3$, $y = -2$ i $z = -1$.

Przykład 9 ◀ zad. 10.11

Rozwiążemy dany układ równań.

Rozwiązanie

a) $\begin{cases} |x - 4| = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

$|a| = 5$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 5$ lub $a = -5$.

Rozwiązaniem danego układu równań są pary liczb, które spełniają

układ $\begin{cases} x - 4 = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ lub układ $\begin{cases} x - 4 = -5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

$\begin{cases} x = 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 9 \\ y = -15 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$

Odp.: Rozwiązaniami układu są dwie pary liczb: $(9, -15)$ i $(-1, 5)$.

b) $\begin{cases} |x - y| = 2 \\ -x + 3y = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 2 \\ -x + 3y = 8 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x - y = -2 \\ -x + 3y = 8 \end{cases}$

Zastosujemy metodę przeciwnych współczynników.

$\begin{cases} x - y = 2 \\ -x + 3y = 8 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x - y = -2 \\ -x + 3y = 8 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2y = 10 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x - y = -2 \\ 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniami układu są dwie pary liczb: (7, 5) i (1, 3).

Prawdziwe jest następujące twierdzenie, którego uzasadnienie poznacie w IV dziale tego podręcznika (zob. przykład 1 s. 386).

Twierdzenie

Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi:
- ma dokładnie jedno rozwiązanie

albo
- nie ma rozwiązań,

albo
- ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Zgodnie z tym przyjmujemy następującą definicję:

Definicja

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy układem:
- **oznaczonym**, jeżeli ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- **sprzecznym**, jeżeli nie ma rozwiązań,
- **nieoznaczonym**, jeżeli ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Zatem układ równań rozwiązywany w przykładzie 1 jest układem oznaczonym, w przykładzie 2 – układem sprzecznym, a w przykładzie 3 – układem nieoznaczonym.

Przykład 10 ◂ zad. 10.4

Dany jest układ równań $\begin{cases} x + my = 3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases}$, w którym m oznacza parametr, a x i y są niewiadomymi. Ocenimy prawdziwość podanych zdań.

A. Dla $m = 2$ dany układ jest nieoznaczony.

B. Dla $m = 0$ rozwiązaniem układu jest para liczb dodatnich.

C. Dla $m = -2$ dany układ jest sprzeczny.

Rozwiązanie

A. Podstawiamy do układu równań $m = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

Drugie równanie jest równoważne równaniu pierwszemu (powstało przez pomnożenie obu stron pierwszego przez 2), a zatem każde z nich ma identyczny zbiór rozwiązań. Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi $x + 2y = 3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, każde z nich jest równocześnie rozwiązaniem układu, zatem pierwsze zdanie jest prawdziwe.

B. Podstawiamy do układu równań $m = 0$:

$$\begin{cases} x = 3 \\ 4y = 6 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x = 3 > 0 \\ y = \frac{3}{2} > 0 \end{cases}$$

Drugie zdanie jest prawdziwe.

C. Podstawiamy do układu równań $m = -2$:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases} \longleftarrow \text{dzielimy obie strony drugiego równania przez } -2$$

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 6 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \longleftarrow \text{odejmujemy równania stronami i jedno przepisujemy bez zmian}$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że trzecie zdanie również jest prawdziwe.

Odp.: A, B, C – zdania są prawdziwe.

Zastosowanie układów równań

W szkole podstawowej rozwiązywaliście zadania tekstowe za pomocą równań z jedną niewiadomą. Zajmiemy się teraz takimi zadaniami, które wygodnie jest rozwiązać, używając układów równań liniowych.

Zaczniemy od zapisywania informacji podanych w zadaniach w postaci równań liniowych tworzących układ.

Przykład 11 ◂ zad. 10.20

Zapiszemy podane informacje w postaci układów równań.

a) Suma dwóch liczb równa się 22, a ich różnica wynosi 8. Niewiadomymi są te liczby.

Rozwiązanie

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

x – pierwsza liczba

y – druga liczba

Informacje podane w zadaniu można opisać dwoma równaniami:

$x + y = 22$ ⟵ suma tych liczb równa się 22

$x - y = 8$ ⟵ różnica tych liczb wynosi 8

Liczby mają spełniać obydwa warunki zadania, inaczej mówiąc – spełniać obydwa równania, zatem szukany układ równań ma postać:

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

b) Aby odnowić pokój, pani Małgorzata kupiła 4 puszki farby kolorowej przeznaczonej do pomalowania ścian i 2 puszki farby białej do pomalowania sufitu. Za wszystko zapłaciła 669,76 zł. Po przeanalizowaniu ulotek informacyjnych doszła do wniosku, że musi jeszcze dokupić 2 puszki farby kolorowej i 2 białej. Tymczasem ceny farb wzrosły odpowiednio: o 3 zł – puszka kolorowej i o 1,50 zł – puszka białej, więc za drugi zakup pani Małgorzata zapłaciła 408,78 zł. Niewiadomymi są ceny farb przed podwyżką.

Rozwiązanie

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

x – cena puszki farby kolorowej przed podwyżką

y – cena puszki farby białej przed podwyżką

$x + 3$ – cena puszki farby kolorowej po podwyżce

$y + 1{,}50$ – cena puszki farby białej po podwyżce

$4x + 2y = 669{,}76$ ⟵ kwota za 4 puszki farby kolorowej i 2 puszki białej przed podwyżką

$2(x + 3) + 2(y + 1{,}5) = 408{,}78$ ⟵ kwota za 2 puszki farby kolorowej i 2 puszki białej po podwyżce cen

Zatem układ równań ma postać:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 669{,}76 \\ 2(x + 3) + 2(y + 1{,}5) = 408{,}78 \end{cases}$$

Przykład 12 ◂ zad. 10.21

Suma 20% pierwszej liczby i 15% drugiej liczby jest równa 120, a suma 12% pierwszej liczby i 25% drugiej liczby jest równa 136. Wyznaczymy te liczby.

Rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia:

x – pierwsza liczba

y – druga liczba

Wówczas warunki zadania można opisać następującymi równaniami:

$20\%x + 15\%y = 120$

$12\%x + 25\%y = 136$

Zamieniamy procenty na liczby.

$0{,}2x + 0{,}15y = 120$

$0{,}12x + 0{,}25y = 136$

$p\%$ liczby $a = \frac{p}{100} \cdot a$

Rozwiążemy teraz układ tych równań. Wykorzystamy metodę przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}15y = 120 \\ 0{,}12x + 0{,}25y = 136 \end{cases} \quad | \cdot (-0{,}6), \text{ stąd } \begin{cases} -0{,}12x - 0{,}09y = -72 \\ 0{,}12x + 0{,}25y = 136 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}16y = 64 \\ 0{,}12x + 0{,}25y = 136 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 400 \\ 0{,}12x + 100 = 136 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 400 \\ 0{,}12x = 36 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 400 \\ x = 300 \end{cases}$$

Odp.: Pierwsza liczba jest równa 300, a druga 400.

Przykład 13 ◂ zad. 10.31

W dwóch naczyniach znajduje się roztwór kwasu. W pierwszym naczyniu jest roztwór o stężeniu 3%, a w drugim 8%. Ile litrów roztworu z każdego naczynia należy przelać do trzeciego, aby otrzymać 2 litry roztworu o stężeniu 5%?

Rozwiązanie

Niech x oznacza potrzebną liczbę litrów roztworu 3%. Wówczas

$3\%x$ oznacza liczbę litrów czystego kwasu pobranego z pierwszego naczynia.

Podobnie, jeśli y oznacza potrzebną liczbę litrów roztworu 8%, to

$8\%y$ oznacza liczbę litrów czystego kwasu pobranego z drugiego naczynia.

Pierwsze równanie wyraża objętość całego otrzymanego roztworu:

$x + y = 2$

Drugie równanie wyraża liczbę litrów czystego kwasu w otrzymanym roztworze:

$3\%x + 8\%y = 5\% \cdot 2$

Po zamianie procentów na liczby drugie równanie przyjmie następującą postać:

$0{,}03x + 0{,}08y = 0{,}05 \cdot 2$

Otrzymany układ równań rozwiążemy metodą podstawiania.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 0{,}03x + 0{,}08y = 0{,}1 \quad | \cdot 100 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} y = 2 - x \\ 3x + 8y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ 3x + 8(2 - x) = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - x \\ 3x + 16 - 8x = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1{,}2 \\ y = 0{,}8 \end{cases}$$

Odp.: Należy wziąć 1,2 litra roztworu 3% i 0,8 litra roztworu 8%.

Przykład 14 ◀ zad. 10.30

Linia kolejowa łącząca miejscowości A i B prowadzi przez przełęcz górską. Pociąg wjeżdża na przełęcz ze średnią prędkością 40 km/h, a zjeżdża z niej ze średnią prędkością 80 km/h. Podróż z A do B trwa 2 h, a podróż powrotna trwa 1 h 45 min. Ile kilometrów liczy linia kolejowa łącząca te miejscowości?



Rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia:

s_1 – droga z miejscowości A do przełęczy

s_2 – droga z miejscowości B do przełęczy

Tradycyjnie literą v oznaczamy prędkość, a literą t – czas.

Wiadomo, że $v = \frac{s}{t}$, czyli $t = \frac{s}{v}$. Jeśli dodamy czasy przejazdu pociągu na dwóch fragmentach trasy (pod górę i z góry), otrzymamy łączny czas przejazdu z jednej do drugiej miejscowości.

$\frac{s_1}{40} + \frac{s_2}{80} = 2$ ⟵ łączny czas przejazdu z A do B

$\frac{s_2}{40} + \frac{s_1}{80} = 1\frac{3}{4}$ ⟵ łączny czas przejazdu z B do A

Otrzymany układ równań rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} \frac{s_1}{40} + \frac{s_2}{80} = 2 \quad | \cdot 80 \\ \frac{s_1}{80} + \frac{s_2}{40} = 1\frac{3}{4} \quad | \cdot (-160) \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} 2s_1 + s_2 = 160 \\ -2s_1 - 4s_2 = -280 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2s_1 + s_2 = 160 \\ -3s_2 = -120 \end{cases} \quad \begin{cases} s_2 = 40 \\ 2s_1 + 40 = 160 \end{cases} \quad \begin{cases} s_1 = 60 \\ s_2 = 40 \end{cases}$$

Zatem cała droga jest równa $s_1 + s_2 = 100$.

Odp.: Linia kolejowa łącząca miejscowości A i B ma długość 100 km.

Zwróćmy uwagę na dodatkowy problem związany z praktycznym wykorzystaniem matematyki. Często współczynniki równań są podawane w postaci przybliżeń dziesiętnych (np. wtedy, gdy są danymi notowanymi podczas jakichś doświadczeń). Należy wówczas bardzo uważać, gdyż nawet niewielkie zmiany ich wielkości na skutek zaokrągleń mogą znacząco zmienić końcowe rozwiązanie układu.

Przykład 15

Porównajmy współczynniki trzech układów równań:

$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2{,}4x - 7{,}201y = 11{,}999 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2{,}4x - 7{,}201y = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2{,}399x - 7{,}2y = 12{,}001 \end{cases}$$

Różnice w zastosowanych przybliżeniach są bardzo małe, tymczasem rozwiązania bardzo się różnią: pierwszy układ spełnia para (8, 1), drugi – (5, 0), a trzeci – (−1, −2).

Zadania

W każdym z zadań 10.1–10.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

10.1. Wskaż parę liczb spełniającą układ równań $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 7y = -11 \end{cases}$.

A. (1, 1) **B.** (−1, 2) **C.** (−1, 3) **D.** (1, 2)

10.2. Wskaż parę liczb, która nie spełnia układu równań $\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = -3 \\ -3\sqrt{2}x + 12y = 9\sqrt{2} \end{cases}$.

A. $\left(2\sqrt{2} - 3, 1\right)$ **B.** (−3, 0) **C.** (−1, 5) **D.** $\left(1, \sqrt{2}\right)$

10.3. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5x + my = -12 \\ x + y = -2 \end{cases}$ z niewiadomymi x i y jest para liczb (−3, 1). Wskaż wartość współczynnika m.

A. $m = -3$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = 2$

10.4. Dany jest układ równań liniowych z niewiadomymi x i y oraz parametrem m.

$$\begin{cases} 5x + my = 7 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$$

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dla $m = -1$ układ jest oznaczony.

B. Dla $m = 0$ układ jest oznaczony.

C. Dla $m = 1$ układ jest sprzeczny.

10.5. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 7y = 2 \\ x = 2y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 4y = 15 \\ y = -2x \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ -2x + 6y = 10 \end{cases}$

10.6. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -1{,}5x + 0{,}5y = -2{,}5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 7x + 7y = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x = 3 - 5y \\ 18x + 7y = 17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x = 5y + 2 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2y = 6x - 5 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 14x + 3y = 4 \\ 2x - 6 = 5y \end{cases}$

10.7. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 3y = -18 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ 3x + 4y = -15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 3y = 3 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 7y = 4 \\ 2x + y = -8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 2y + 7x = 9 \end{cases}$

10.8. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 5x + 6y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + 3y = 8 \\ 26x - 39y = 104 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 5y = 0{,}2 \\ 5x - 4y = 2{,}3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 9x + 6y = 1 \\ 12x + 8y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 7x - 3y = 7 \\ 3\frac{1}{2}x - 2y = 7 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = -6 \end{cases}$

10.9. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 1{,}5 - (x - y) = 0{,}5(y - x) + 2 \\ 2y - 4 = 4x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ \frac{x+2}{4} - \frac{y-3}{3} = \frac{1}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3x-y}{2} - \frac{x+y}{4} = 4 \\ \frac{x-y}{2} - \frac{x+5y}{5} = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x - 3y = \frac{-5(x+y)}{2} - \frac{5y-25x}{3} \\ 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0 \end{cases}$

10.10. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} (x-3)^2-(y-1)^2=x^2-4x-(y+2)(y-2) \\ 3x-6y=15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x+1)^2+y^2-8=(y-2)^2+(x+3)(x-3) \\ -3x+y-4=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x-2)^2+(x+y)(y-x)=y(y-1) \\ \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{4}=0{,}25(x+2y)+1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x-2)^2-(y-1)^2=(x-y)(x+y)+4 \\ 2(x-y)+y^2=\left(y-2\sqrt{2}\right)\left(y+2\sqrt{2}\right) \end{cases}$

10.11. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 2(x-y)^2-3(x+1)=2(x-y)(x+y)+4y(1-x+y) \\ \frac{x+y}{4}=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y-2}{4}=1\frac{1}{4}y \\ 2(x-3)+3(x+y)=-3 \end{cases}$

10.12. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ 10x-y+3z=7 \\ x-y-3z=-11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x-5y+2z=0 \\ 2x+y-z=5 \\ 5x-3y-z=-5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x-y+3z=1 \\ 2x+3y-z=-4 \\ -x+5y+2z=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y-3z=7 \\ 3x+3y+2z=-5 \\ x-3y+5z=4 \end{cases}$

10.13. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} x-3y=5 \\ |y+1|=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} |2x+y|=1 \\ x-4y=-5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2|x|-3y=3 \\ |x|+4y=7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+|y-1|=7 \\ 2x-|y-1|=5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} |x|-2y=3 \\ x+3y=8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x-y=3 \\ x+|y+2|=3 \end{cases}$

10.14. Jakie wyrażenia można wstawić w miejsce ?, aby otrzymać układ sprzeczny?

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=? \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-5y=7 \\ 6x+?=? \end{cases}$ e) $\begin{cases} 6x-y=1 \\ ?+?=? \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=? \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+10y=7 \\ x+?=3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y=100 \\ y-x=? \end{cases}$

10.15. Jakie wyrażenia można wstawić w miejsce ?, aby otrzymać układ nieoznaczony?

a) $\begin{cases} x-y=3 \\ ?+?=? \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+3y=2 \\ -2x+?=? \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ -2x+?=? \end{cases}$ d) $\begin{cases} 0{,}3x-2{,}1y=1{,}8 \\ 0{,}4x+?=? \end{cases}$

10.16. Podaj liczbę rozwiązań układu równań.

a) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x+3y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2(x-3)+3(y-1)=1 \\ 4(x-3)+6(y-1)=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-2=7y \\ 1\frac{1}{2}x-3\frac{1}{2}y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5(x+2)-(2y+1)=6 \\ 1\frac{2}{3}(x+2)-\frac{1}{3}(2y+1)=2 \end{cases}$

10.17. Jakie wyrażenie można wstawić w miejsce ?, aby otrzymać układ:

I. oznaczony, II. sprzeczny, III. nieoznaczony?

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+?=? \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x+10y=4 \\ ?+?=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x-5y=11 \\ ?+?=? \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x-12y=-5 \\ ?+?=? \end{cases}$

D **10.18.** Wykaż, że układ równań $\begin{cases} 2(1-x)=4(y-1)+3 \\ 4(2y-1)=2(1-2x)-2 \end{cases}$ jest sprzeczny.

D **10.19.** Wykaż, że układ równań $\begin{cases} 8(x-1)+6(y+2)=2 \\ 4(x+2)=10-3(y+1) \end{cases}$ jest nieoznaczony.

10.20. Z równań:

I. $\frac{1}{2}x-y+2=0$ II. $x+4=2y$ III. $2x-4y=-4$ IV. $x+2y=8$

ułóż trzy układy dwóch równań: oznaczony, nieznaczony oraz sprzeczny. Rozwiąż ułożone układy równań, aby uzasadnić odpowiedź.

10.21. Utwórz układ równań opisujący przedstawioną sytuację.

a) Liczba x jest o 12 większa od liczby y. Średnia arytmetyczna liczb x i y jest równa 11.

b) Suma liczby x i potrojonej wartości liczby y jest równa 20, a różnica podwojonej wartości liczby x i liczby y wynosi 19.

c) Po dodaniu 30% liczby x do liczby y otrzymamy 84, natomiast po odjęciu 10% liczby y od liczby x otrzymamy 74.

d) Liczba x jest o 5 większa od liczby y, a iloraz liczby x przez 4 jest o 4 mniejszy od ilorazu liczby y przez 3.

10.22. Liczba x jest o 4 większa od liczby y. Średnia arytmetyczna liczb x i y jest równa 19. Wyznacz te liczby.

10.23. Hania ma w skarbonce 125 zł w monetach o nominałach 2 zł i 5 zł. Monet pięciozłotowych jest o 10 mniej niż dwuzłotowych. Ile jest w skarbonce monet dwuzłotowych, a ile pięciozłotowych?

10.24. Staszek i Jurek porównali dystans, jaki przejechali w ciągu tygodnia rowerami. W sumie pokonali 80 km. Gdyby Staszek przejechał 4 km mniej, a Jurek 2 km więcej, to obaj przejechaliby tyle samo. Ile km przejechał Staszek, a ile Jurek?

10.25. Za 5 opakowań jogurtu owocowego i cztery opakowania serka koziego Anna zapłaciła 33,30 zł. W tym samym sklepie za 6 opakowań identycznego jogurtu i 2 opakowania takiego samego serka koziego Grzegorz zapłacił 25,40 zł. Jaka była cena jogurtu, a jaka serka?

10.26. Marcin zdał wszystkie egzaminy w sesji zimowej i chciał zaprosić 3 koleżanki i 3 kolegów z grupy do klubu studenckiego. Aby wyrównać proporcje między liczbą studentów i liczbą studentek odwiedzających ten klub, zachęcano dziewczęta niższą ceną biletów. Marcin za bilety dla wszystkich zapłaciłby 122 zł, uznał jednak, że absolutnie nie może wydać na imprezę więcej niż 120 zł. Postanowił zmienić plany. Zaprosił tylko najbliższego przyjaciela, ale za to aż 5 koleżanek. Teraz miał zapłacić tylko 110 zł. Jaka jest cena biletów każdego rodzaju?

10.27. Michał ważył za dużo, więc zaczął zwracać uwagę na to, co je. Na podwieczorek, zamiast dwóch drożdżówek, przygotował sobie 3 kromki chleba graham i 2 szklanki mleka. Kiedy jednak zajrzał do tabeli wartości kalorycznych, przekonał się, że jego podwieczorek to aż 334 kcal. Zredukował go więc do 2 kromek chleba i 1 szklanki mleka. Rezultat był lepszy – tylko 182 kcal. Uspokojony zabrał się do jedzenia. Jaka jest wartość kaloryczna jednej kromki chleba, a jaka jednej szklanki mleka?

10.28. W grupie uczniów, którzy zapisali się na wycieczkę, liczba chłopców stanowiła 75% liczby dziewcząt. Gdy do tej grupy dodatkowo zapisało się pięciu chłopców, liczba chłopców była równa liczbie dziewcząt. Ile dziewcząt i ilu chłopców wybrało się na wycieczkę?

10.29. Zosia, Krysia i Piotrek wybrali się na kiermasz książki, mając na zakupy po 70 zł. Zosia kupiła dwa komiksy po k zł oraz trzy lektury po m zł i otrzymała 5 zł reszty. Krysia na cztery lektury po m zł oraz jeden komiks w cenie k zł wydała całą sumę. Czy Piotrkowi wystarczy pieniędzy na cztery komiksy po k zł i dwie lektury po m zł? Zapisz obliczenia i odpowiedź.

10.30. Monika dojeżdża do szkoły pociągiem, a potem tramwajem. Za oba bilety miesięczne płaci razem 153 zł 60 gr. Bilet kolejowy jest o 40% droższy od tramwajowego. Oblicz, ile kosztuje każdy z biletów.

10.31. Monika dojeżdża do szkoły pociągiem o 7^{00}. Potem po 5 minutach czekania wsiada do tramwaju i jest przed szkołą o 7^{50}. Łącznie przebywa drogę 30 km. Pociąg jedzie ze średnią prędkością 50 km/h, a tramwaj – 20 km/h. Oblicz, ile czasu Monika jedzie pociągiem, a ile tramwajem.

10.32. Stopiono dwa kawałki metalu. Jeden z nich zawierał 80% srebra, a drugi 87,5% srebra. Otrzymano 20 g stopu zawierającego 83% srebra. Jaką masę miał każdy ze stopionych kawałków?

10.33. Pole prostokąta nie zmieni się, jeśli jego dłuższy bok zmniejszymy o 4 cm, a krótszy zwiększymy o 4 cm. Pole to nie zmieni się również, jeśli dłuższy bok prostokąta zwiększymy o 4 cm, a krótszy zmniejszymy o 2 cm. Oblicz długości boków prostokąta.

* **10.34.** Ktoś zapytał znajomego, ile ma lat. Zapytany odpowiedział: „Kiedy ja byłem w twoim wieku, ty się dopiero urodziłeś; za pięć lat będziemy mieć razem dwa razy tyle lat, ile mieliśmy 5 lat temu". Ile lat ma każdy z nich?

* **10.35.** Znajdź takie trzy liczby, z których największa jest większa od liczby średniej o trzecią część najmniejszej, średnia jest większa od najmniejszej o trzecią część największej, a najmniejsza jest większa o 20 od trzeciej części liczby średniej.

* **10.36.** Trzy szkoły zorganizowały wspólne zawody. Pierwsza szkoła wystawiła o 25% uczniów więcej niż szkoła druga, a druga o 4 osoby więcej niż szkoła trzecia. Szkoły druga i trzecia razem wystawiły o 20 uczniów więcej niż szkoła pierwsza. Ilu uczniów z każdej szkoły brało udział w zawodach?

10.37. Statek pokonuje dystans 90 km, płynąc z prądem rzeki w czasie 6 godzin, a z powrotem w czasie 10 godzin. Oblicz prędkość prądu rzeki i prędkość własną statku przy założeniu, że statek płynie w obie strony z taką samą prędkością własną.

10.38. Stacje A i B łączy linia kolejowa o długości 240 km. O godzinie 8^{00} z A do B wyjechał pociąg osobowy, a o godzinie 8^{48} z B do A wyjechał pociąg pospieszny. Pociągi te minęły się o godzinie 9^{48}. Gdyby pociąg pospieszny wyjechał o godzinie 8^{00}, a osobowy o godzinie 8^{48}, to pociągi minęłyby się o godzinie 9^{40}. O której godzinie minęłyby się te pociągi, gdyby oba wyjechały o godzinie 8^{00}? Zakładamy, że we wszystkich podanych sytuacjach średnie prędkości pociągów się nie zmieniają.

Prosto do matury

1. Dany jest układ równań liniowych z niewiadomymi x i y oraz parametrem m.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + my = 2m \end{cases}$$

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dla $m = 1$ rozwiązaniem układu jest para liczb dodatnich.

B. Dla $m = 6$ układ jest sprzeczny.

C. Dla $m = 0$ rozwiązaniem układu jest para liczb ujemnych.

2. W konkursie historycznym startowało 140 uczniów. Do drugiego etapu zakwalifikowało się 38 osób, czyli $\frac{1}{3}$ startujących dziewcząt i $\frac{1}{5}$ startujących chłopców. Ile dziewcząt i ilu chłopców brało udział w tym konkursie?

3. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \frac{x-y}{3} - \frac{x+y}{2} = 2 \\ (x+2)(y-4) = (x-1)(y+2) \end{cases}$.

4. Właściciel sklepu z owocami kupił na giełdzie truskawki i czereśnie. Cena hurtowa kilograma czereśni była o 2 zł wyższa niż cena hurtowa kilograma truskawek. Właściciel sklepu ustalił cenę sprzedaży czereśni o 25% wyższą od ceny hurtowej, a cenę sprzedaży truskawek – o 30% wyższą od ceny hurtowej. Za pół kilograma czereśni i kilogram truskawek klient zapłacił w sklepie 8,95 zł. Oblicz cenę kilograma czereśni i kilograma truskawek w tym sklepie.

D **5.** Wykaż, że układ równań $\begin{cases} 3(x+1) - 4(y-1) = 2 \\ 3(x-1) + 2(1-2y) = -6 \end{cases}$ jest nieoznaczony. Podaj trzy przykłady par liczb spełniających ten układ.

11. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–22 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż przedział, do którego należy rozwiązanie równania $x(x-3)-15 = x(x+2)$.

A. $(-8; -5)$ **B.** $(-5; -3)$ **C.** $(-3; 5)$ **D.** $(-4; -2)$

2. Która z liczb nie należy do zbioru rozwiązań nierówności $-2x \geqslant -7$?

A. -4 **B.** $-3{,}5$ **C.** $3{,}5$ **D.** 4

3. Wskaż nierówność, która ma ten sam zbiór rozwiązań co nierówność $-2x > 0$.

A. $x > 0$ **B.** $x < 0$ **C.** $x > 2$ **D.** $x < 2$

4. Która nierówność nie ma rozwiązań?

A. $x - 2 < x + \log_2 8$

B. $3x < 2x$

C. $x + \sqrt{27} \leqslant x + \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$

D. $x + \log 0{,}01 < x - 3$

5. Wskaż nierówność, która ma inny zbiór rozwiązań niż nierówność $6 \leqslant -3x$.

A. $2 \leqslant -x$ **B.** $x \leqslant -2$ **C.** $x \geqslant -2$ **D.** $3x \leqslant -6$

6. Ile jest liczb całkowitych w przedziale $\langle -1{,}1; 15{,}2\rangle$?

A. 17

B. 16

C. 15

D. nieskończenie wiele

7. Który z przedziałów jest zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x > -2 \\ -x \geqslant -5 \end{cases}$?

A. $\langle -2; 5)$

B. $(-2; 5\rangle$

C. $\langle -2; \infty)$

D. Układ nie ma rozwiązań.

8. Wskaż przedział, do którego nie należy żadna liczba podzielna przez 3.

A. $(7; 10)$ **B.** $(300; 303)$ **C.** $(101; 102\rangle$ **D.** $\langle 3; \infty)$

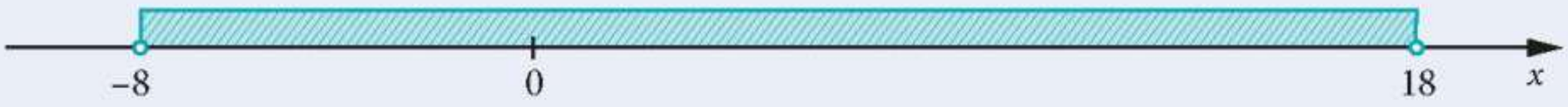
9. Wskaż układ nierówności, którego zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -1; 3)$.

A. $\begin{cases} x \geqslant -1 \\ -x \geqslant -3 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x \geqslant -1 \\ -x > -3 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} -x \leqslant 1 \\ -x \geqslant -3 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} -x < 1 \\ -x \geqslant -3 \end{cases}$

10. W jakiej postaci można zapisać $a\%$ liczby b?

A. $100ab$ **B.** $\frac{ab}{100}$ **C.** $\frac{100a}{b}$ **D.** $\frac{a}{100b}$

11. Wskaż nierówność, która opisuje przedział zaznaczony na osi liczbowej.



A. $|x-5|<13$ **B.** $|x-5|>13$ **C.** $|x-13|<5$ **D.** $|x-13|>5$

12. Wskaż nierówność, która opisuje zaznaczoną na osi liczbowej sumę przedziałów.



A. $|x-7|\geqslant 3$ **B.** $|x-7|\leqslant 3$ **C.** $|x-3|\geqslant 7$ **D.** $|x-3|>7$

13. Wskaż nierówność, którą spełnia liczba $\pi+1$.

A. $|x-1|>5$ **B.** $|x-1|<2$ **C.** $|x+\log 10|\leqslant 4$ **D.** $\left|x-3^{-1}\right|>3$

14. Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|3x-5|=4x-8$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

15. Wskaż równanie, które ma niepusty zbiór rozwiązań.

A. $\big||x+1|+3\big|=0$ **B.** $\big||x-3|+2\big|=1$ **C.** $\big||x-2|+3\big|=2$ **D.** $\big||x+5|+3\big|=3$

16. Wskaż liczbę, która nie jest rozwiązaniem równania $|x+3|+|x-2|=5$.

A. 0 **B.** −2 **C.** −1 **D.** 5

17. Punkty $A=\left(2\sqrt{5}\right)$ i $B=\left(-3\sqrt{5}\right)$ leżą na osi liczbowej. Wskaż długość odcinka AB.

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\sqrt{5}+5$ **C.** $5\sqrt{5}$ **D.** 10

18. Wskaż wartość m, dla której para liczb $(-2,\ 1)$ jest rozwiązaniem równania $(m-1)x+2m-2y=3x-(m+1)y$.

A. $m=4{,}5$ **B.** $m=0$ **C.** $m=-5$ **D.** $m=-7$

19. Wskaż parę liczb, która jest rozwiązaniem układu $\begin{cases}\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y=5\sqrt{2}\\ 3x-\sqrt{3}y=6+\sqrt{3}\end{cases}$.

A. $\left(\sqrt{2},\ \sqrt{3}\right)$ **B.** $(2,\ -1)$ **C.** $\left(\sqrt{2},\ -\sqrt{3}\right)$ **D.** $\left(3\sqrt{2},\ -1\right)$

20. Wskaż parę liczb, która jest rozwiązaniem układu $\begin{cases}3x+2y=3\\ 7x+5y=8\end{cases}$.

A. $\left(-1,\ 0{,}5^{-1}\right)$ **B.** $(-1,\ 4)$ **C.** $(\log 0{,}1,\ 3)$ **D.** $\left(3^{-1},\ \log_2 4\right)$

21. Wskaż wartość m, dla której układ równań $\begin{cases} 4x - my = 2 \\ 2x + y = \sqrt{7} - 2 \end{cases}$ jest sprzeczny.

A. $m = -4$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 4$ **D.** $m = -2$

22. Wskaż wartość m, dla której układ równań $\begin{cases} 6x - 4y = 14 \\ mx + 6y = -21 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

A. $m = -4$ **B.** $m = 4$ **C.** $m = -9$ **D.** $m = 9$

W zadaniach 23–35 oceń prawdziwość podanych zdań.

23. X oznacza zbiór rozwiązań nierówności $3x + 4(x + 1) > 17 - 3(x + 1)$. Zatem

A. X jest zbiorem liczb ujemnych.

B. najmniejszą liczbą całkowitą należącą do X jest 2.

C. X jest zbiorem liczb większych od 1.

24. Dany jest przedział $(-4; 7\rangle$.

A. Przedział ten jest zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x \leqslant 7 \\ -x > -4 \end{cases}$.

B. Do tego przedziału należy 11 liczb całkowitych.

C. Przedział ten jest zbiorem rozwiązań nierówności $-7 \leqslant -x < 4$.

25. Równanie $\big||x| - 7\big| = 2$ ma

A. co najmniej dwa rozwiązania.

B. dokładnie cztery rozwiązania.

C. wszystkie rozwiązania mniejsze od 10.

26. Równanie $|x - 3| + |x + 2| = 5$ ma

A. co najmniej dwa rozwiązania.

B. nieskończenie wiele rozwiązań należących do przedziału $(-2; 3)$.

C. sześć rozwiązań całkowitych.

27. Zbiór rozwiązań równania $\big||x| + 1\big| + 3\big| = 7$ ma

A. dokładnie jeden element.

B. dokładnie dwa elementy.

C. nieskończenie wiele elementów.

28. Wartość wyrażenia $|x + 5|$ jest równa wartości wyrażenia $x + 5$

A. dla każdej liczby x.

B. dla każdej liczby x z przedziału $(-\infty; -5)$.

C. dla każdej liczby x z przedziału $(-5; \infty)$.

29. Dane jest równanie $3x + 2k - 5 = 0$ z parametrem k.

A. Dla $k = 1$ rozwiązaniem równania jest liczba 1.

B. Dla $k = \frac{5}{2}$ rozwiązaniem równania jest liczba 0.

C. Dla $k = 0$ rozwiązaniem równania jest liczba $\frac{5}{2}$.

30. Dane jest równanie $2mx + 1 = 0$ z parametrem m.

A. Dla $m = 5$ równanie ma jedno rozwiązanie.

B. Dla $m = 0$ równanie jest tożsamościowe.

C. Dla $m = -\frac{1}{2}$ równanie jest tożsamościowe.

31. Dana jest nierówność $px \leqslant 5p - 1$ z parametrem p.

A. Dla $p = 1$ zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-\infty; 4\rangle$.

B. Dla $p = 0$ nierówność jest sprzeczna.

C. Dla $p = -1$ zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-\infty; 6\rangle$.

32. Dane jest równanie $kx + km - m = 0$ z parametrami k oraz m.

A. Dla $k = m = 1$ rozwiązaniem równania jest liczba 1.

B. Istnieją takie wartości parametrów k oraz m, dla których równanie jest tożsamościowe.

C. Istnieją takie wartości parametrów k oraz m, dla których równanie jest sprzeczne.

33. Dane jest równanie liniowe z dwiema niewiadomymi $13x - 2y = 7$.

A. Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań (a, b) takich, że $a = -1$.

B. Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań (a, b) takich, że $a < 0$ i $b < 0$.

C. Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań (a, b) takich, że $ab < 0$.

34. Dany jest układ równań $\begin{cases} 8x - 3y = -44 \\ -5x + y = 24 \end{cases}$.

A. Rozwiązaniem tego układu jest para $(-3, 7)$.

B. Rozwiązaniem tego układu jest para liczb przeciwnych.

C. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

35. Dany jest układ równań $\begin{cases} 4x - 2y = -2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$.

A. Ten układ jest sprzeczny.

B. Rozwiązaniem tego układu jest para liczb ujemnych.

C. Rozwiązaniem tego układu jest para liczb dodatnich.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

36. Rozwiąż równanie $\frac{3x^2-1}{2}-\frac{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{3}=(x+3)^2+\frac{x^2}{6}$.

37. Rozwiąż nierówność $2(x-5)-3(4x-1)<4(3-2x)$. Zaznacz zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

38. Podaj wszystkie liczby naturalne, które spełniają podaną nierówność.

$$x-\frac{x-7}{3}\geqslant 1\frac{1}{2}-\frac{1-2x}{2}$$

39. Rozwiąż nierówność $\frac{(2-x)(3-5x)}{6}-1\leqslant\frac{(2x-1)^2}{3}-\frac{(x-2)(x+2)}{2}$. Podaj największą liczbę całkowitą, która nie spełnia tej nierówności.

40. Dane są zbiory $A=\langle -5;\ 3\rangle$, $B=(-7;\ 0)$, $C=(2;\ \infty)$. Wykonaj podane działania na zbiorach i zapisz wynik w postaci przedziału lub sumy przedziałów liczbowych.

a) $A-B$ b) $A\cap(B\cup C)$ c) $C-(A\cap B)$ d) $(B\cap C)\cup(B-A)$

41. Dla jakich wartości parametru m liczba 5 należy do przedziału $\langle 3m-1;\ 4m+9\rangle$?

42. Dla jakich wartości parametru m zbiory $A=(-\infty;\ m+3)$ i $B=(2m-1;\ \infty)$ spełniają warunek $A-B=A$?

43. Rozwiąż równanie.

a) $|x|-7=0$ c) $|x-9|=3$ e) $2\cdot|3-x|+5=0$

b) $|x+13|=0$ d) $|x+4|-1=0$ f) $\frac{3}{5}|1-x|-\frac{1}{2}=1$

44. Rozwiąż nierówność.

a) $5-|x|<0$ c) $|x+2|\geqslant 5$ e) $17+|3-x|<0$

b) $|x-10|<6$ d) $|x+4|+7>0$ f) $11-|3+x|\geqslant 0$

45. Przedstaw w postaci $|x-a|\leqslant b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podany przedział liczbowy.

a) $\langle -4;\ 12\rangle$ b) $\langle -9;\ -3\rangle$ c) $\left\langle 0;\ 2\sqrt{2}\right\rangle$ d) $\left\langle \frac{3}{2};\ \frac{11}{2}\right\rangle$

46. Przedstaw w postaci $|x-a|>b$ lub $|x-a|\geqslant b$ nierówność, której zbiór rozwiązań jest przedstawiony na rysunku.



47. Rozwiąż równanie $\big||x-8|-2\big| = 10$.

48. Rozwiąż nierówność $\big|5-|x+3|\big| > 2$.

49. Rozwiąż równanie $\left|\frac{1}{3}x-2\right| - 2x = 5$.

50. Rozwiąż nierówność $|x-1|-4 > 2x$.

51. Rozwiąż równanie $\sqrt{25x^2-40x+16} = 6$.

52. Rozwiąż równanie $\sqrt{9x^2-12x+4} = \sqrt{4x^2+12x+9}$.

D **53.** Wykaż, że liczba $\left(\left|\sqrt{24}-3\sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{6}-\sqrt{12}\right| - \left|\sqrt{75}-\sqrt{54}\right|\right)^2$ jest całkowita.

D **54.** Wykaż, że liczba $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}$ jest całkowita.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

55. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań układu nierówności:

$$\begin{cases} 2(x-3) > 3(1+2x) \\ 5x-13 \leqslant -(5-7x) \end{cases}$$

i zapisz ten zbiór w postaci przedziału.

56. Dla jakich wartości parametru m zbiór $A = \langle 2;\ 3m-5\rangle$ jest podzbiorem zbioru $B = \langle 4-m;\ 5\rangle$?

57. Rozwiąż równanie $|2x-5| + |3x+6| = 16$.

58. Rozwiąż nierówność podwójną $2 < |5-x| < 2x+3$.

D **59.** Wykaż, że nierówność $|x| - |2x-6| < 10-x$ jest tożsamościowa.

D **60.** Wykaż, że wszystkie rozwiązania równania $\left|x+\frac{1}{2}\right| = 4\frac{1}{2}$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $|x-6| + |3x+6| < 24$.

D **61.** Wykaż, że równanie $|3x-5| + |2x+7| + |13-11x| = 0$ jest sprzeczne.

62. Dla jakich wartości parametru m równanie $|7x-2| = 5+m$ nie ma rozwiązań?

63. Rozwiąż równanie $3x - 5m + 6 = 0$ z parametrem m.

64. Rozwiąż równanie $k^2x = x + k - 1$ z parametrem k.

65. Dla jakich wartości parametrów k oraz m równanie $mx - k + x + km = 0$ jest sprzeczne?

66. Rozwiąż nierówność $3px - p^2 \geqslant 0$ z parametrem p.

67. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} (x+5)(y+4) = (x+3)(y+7) \\ (2x+1)(5y+2) = 2y(5x+4) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2x-y}{3} + \frac{y-1}{2} = \frac{1}{4}x + 1\frac{2}{3} \\ \frac{3x-4y}{4} + \frac{4x-2y-1}{3} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x-5)^2 - (x+3)(x-7) = 2(y+3) + 48 \\ \frac{x+y-1}{2} - \frac{x-y-1}{4} = 0{,}75 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x-4)^2 + (y+2)^2 - 4 = (1-x)(2y+4) + (x+y)^2 \\ \frac{1}{2}(x+y) - \frac{5}{6} = \frac{1}{3}(x+2y) \end{cases}$

68. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 5x + 3y = \sqrt{2} \\ 7x + 4y = \sqrt{8} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 5y = 8\sqrt{2} - 7\sqrt{3} \\ 2x + y = \sqrt{2} + 4\sqrt{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3^7x + 2 \cdot 3^{10}y = 3^{10} \\ 3^{-10}x - 3^{-7}y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 16x + 4y = 2^{15} \\ 8x - y = 2^{12} \end{cases}$

69. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} |3x + 2y| = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2|x-3| - 6y = -5 \\ -3|x-3| + 9y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} |x-1| = y + 3 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} |x - y + 2| = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

D **70.** Wykaż, że układ równań $\begin{cases} (x-2)(x+3) - (x-4)(x+4) = 2(3-y) \\ (x+2)^2 - x(x+3) = (y-2)^2 - y(y-2) \end{cases}$ jest sprzeczny.

71. Suma cyfr liczby dwucyfrowej A jest równa 10. Jeżeli przestawimy w niej cyfry, to otrzymamy liczbę o 36 większą od A. Znajdź liczbę A.

72. Suma cyfr liczby trzycyfrowej A jest równa 9. Jeżeli zamienimy miejscami cyfrę setek i cyfrę jedności, to otrzymamy liczbę o 396 mniejszą od liczby A. Znajdź liczbę A.

73. Na dwóch powierzchniach doświadczalnych posadzono 460 sadzonek. Po pewnym czasie okazało się, że do dalszych doświadczeń nie nadaje się $\frac{3}{4}$ sadzonek z pierwszej powierzchni doświadczalnej i $\frac{3}{5}$ sadzonek z drugiej powierzchni doświadczalnej. Po odrzuceniu nieodpowiednich na obydwu powierzchniach łącznie pozostało 130 sadzonek. Oblicz, ile sadzonek posadzono na każdej powierzchni doświadczalnej.

74. Pan Raczek zainwestował na giełdzie 20 000 zł. Podzielił swój kapitał w stosunku 1 : 4. Za mniejszą część kupił akcje firmy A, a za resztę akcje firmy B. Po roku akcje firmy A podrożały o 12%, natomiast akcje firmy B staniały o 40%. Pan Raczek sprzedał wszystkie akcje i postanowił zainwestować w dzieła sztuki. Jaką kwotą wtedy dysponował? Ile procent pieniędzy stracił?

75. W pewnym technikum $\frac{3}{4}$ liczby maturzystów będzie zdawać na wyższe uczelnie państwowe, $\frac{1}{6}$ zamierza studiować na prywatnych uczelniach, a pozostałe 20 osób chce po skończeniu szkoły pójść do pracy. Ilu maturzystów jest w tym technikum?

76. W wyborach na prezydenta zoo startowało 4 kandydatów. Okazało się, że:
- Lew uzyskał poparcie o 6 punktów procentowych większe niż Wielbłąd,
- Zebra uzyskała 12-punktową przewagę nad Lisem,
- Lew i Wielbłąd uzyskali razem poparcie o 40 punktów procentowych mniejsze niż Zebra i Lis.

Podaj (w procentach) wynik głosowania.

77. W wyborach startują 3 partie: Partia Niebieskich, Partia Żółtych i Partia Pomarańczowych. Na dwa miesiące przed wyborami sytuacja wyglądała następująco:
- poparcie dla Niebieskich było o połowę większe niż poparcie dla Żółtych,
- poparcie dla Pomarańczowych było o 25% większe niż poparcie dla Żółtych,
- co czwarty wyborca nie był zdecydowany, na kogo głosować.

a) Narysuj diagram kołowy ilustrujący poparcie dla poszczególnych partii.
b) Po upływie miesiąca Niebiescy zyskali 8 punktów procentowych poparcia, Żółci stracili 25% poparcia, a liczba niezdecydowanych zmniejszyła się do 15% wyborców. Ile procent wynosiło wówczas poparcie dla Pomarańczowych?

Funkcje

3

1. Pojęcie funkcji

Umiejętności:
- określanie funkcji za pomocą opisu słownego, tabeli, grafu, wzoru
- obliczanie ze wzoru wartości funkcji dla danego argumentu

W życiu codziennym stale spotykamy się z sytuacjami, kiedy jednemu obiektowi jednoznacznie przyporządkowany jest drugi obiekt.

Przykład 1

a) Każdy towar w sklepie ma swoją cenę.
b) Produkty żywnościowe mają swoją wartość kaloryczną.
c) Uczeń w szkole jest przypisany do jednej klasy.
d) W ciągu każdego miesiąca zużywamy pewną ilość energii elektrycznej.
e) Za zużytą energię płacimy odpowiednie rachunki.
f) Każdy kredyt bankowy ma swoje oprocentowanie.

Definicja

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru X przypisuje dokładnie jeden element zbioru Y, co symbolicznie zapisujemy:

$$f\colon X \to Y$$

Zbiór X nazywamy **dziedziną**, a jego elementy **argumentami** funkcji.
Element $y \in Y$ przyporządkowany argumentowi $x \in X$ nazywamy **wartością** funkcji f dla tego argumentu i oznaczamy $f(x)$.

Przykład 2 ◀ zad. 1.5

a) Jeżeli każdej osobie w twojej klasie przyporządkujemy miesiąc jej urodzenia, to tak określone przyporządkowanie jest funkcją ze zbioru uczniów twojej klasy w zbiór miesięcy. Spełnione są warunki definicji funkcji, ponieważ **każdy** uczeń urodził się dokładnie w **jednym** miesiącu.
Dziedziną tej funkcji jest zbiór uczniów twojej klasy.

b) Jeżeli zechcemy każdej osobie w Polsce przyporządkować jej rodzonego brata, to takie przyporządkowanie **nie jest** funkcją, ponieważ niektórzy ludzie nie mają braci, a inni mają ich kilku.

c) Jeżeli każdemu miastu w Polsce przyporządkujemy kod pocztowy, to nie otrzymamy funkcji. Co prawda każde miasto ma jakiś kod pocztowy, ale w większych miastach jest po kilka kodów.

d) Każdemu trójkątowi można przyporządkować jego pole. Otrzymamy w ten sposób funkcję, której dziedziną jest zbiór wszystkich trójkątów.

Sposoby określania funkcji

1. Opis słowny

W ten sposób określone zostały funkcje z przykładów 1, 2 a i 2 d.

Przykład 3 ◀ zad. 1.13

A oto inna funkcja opisana słownie:
„Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy liczbę większą od niej o 1".

Funkcje, których argumentami i wartościami są liczby, nazywamy **funkcjami liczbowymi**.

Ta funkcja przyporządkowuje np. liczbie 0 liczbę 1, liczbie 1 – liczbę 2, liczbie 2000 – liczbę 2001. Dziedzinę funkcji tworzą wszystkie liczby naturalne.

2. Tabela

Tabela często służy do przedstawiania funkcji liczbowych wtedy, gdy ich dziedziny mają tylko kilka elementów.

Przykład 4 ◀ zad. 1.4

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	6	9	3	6	9

⟵ zapis ten oznacza, że liczbie 1 przyporządkowana jest liczba 3, liczbie 2 – liczba 6, liczbie 3 – liczba 9 itd.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Przykładami funkcji opisanych za pomocą tabel są w większości dane podawane w rocznikach statystycznych.

Oto funkcja, która wybranym szczytom górskim przyporządkowuje ich wysokości nad poziomem morza. Dziedziną tej funkcji jest pięcioelementowy zbiór wybranych szczytów:

D = {Rysy, Babia Góra, Barania Góra, Lackowa, Trzy Korony}

Szczyt	Wysokość [m n.p.m.]
Rysy	2499
Babia Góra	1725
Barania Góra	1220
Lackowa	997
Trzy Korony	962

Inną wersją tabeli są, stosowane często w prasie, diagramy słupkowe.

Ludność aktywna zawodowo w rolnictwie w 2007 r.
(w % ogółu ludności)

Estonia	4,8
Grecja	6,2
Irlandia	3,7
Litwa	4,2
Łotwa	5,2
Polska	**8,3**

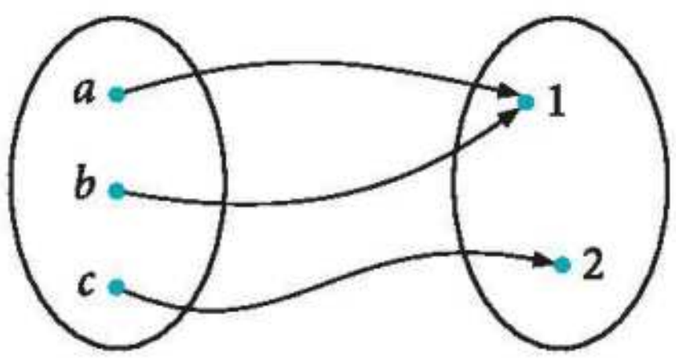
Liczba telefonów komórkowych przypadających na 1000 mieszkańców w 2008 r.

Estonia	1900
Finlandia	1300
Grecja	1200
Litwa	1500
Łotwa	990
Polska	**1200**

Dziedzinami funkcji przedstawionych na diagramach są zbiory wybranych państw.

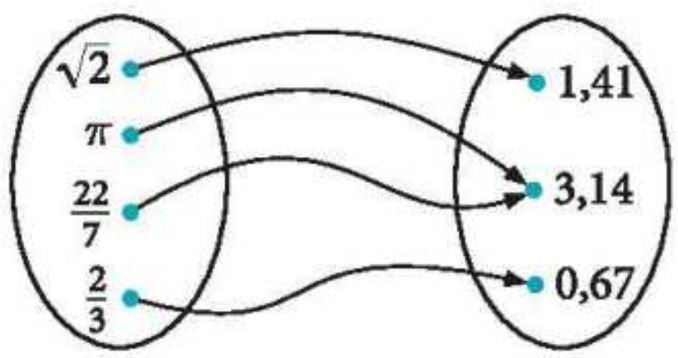
3. Graf

Przyporządkowanie jest określone za pomocą strzałek.



$D = \{a, b, c\}$

Funkcja przyporządkowuje:
argumentowi a – liczbę 1,
argumentowi b – również liczbę 1,
argumentowi c – liczbę 2.



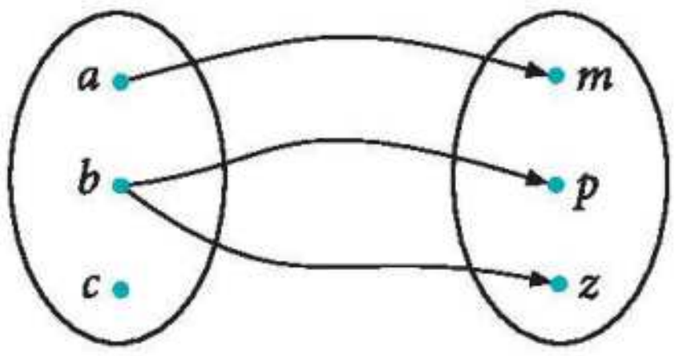
$D = \left\{\sqrt{2}, \pi, \frac{22}{7}, \frac{2}{3}\right\}$

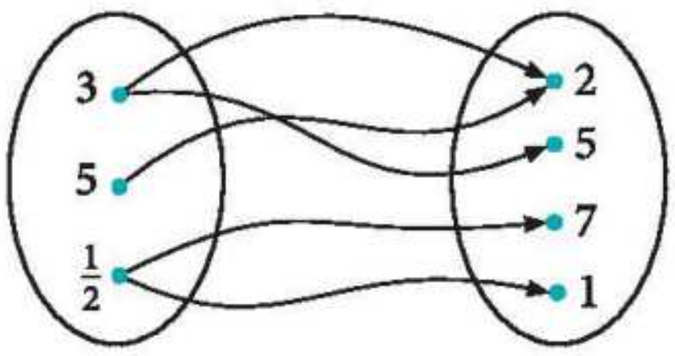
Funkcja przyporządkowuje wybranym liczbom ich rozwinięcia dziesiętne (z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku).

Uwaga: Nie każdy graf przedstawia funkcję. Patrząc na graf, łatwo możemy stwierdzić, czy przyporządkowanie jest funkcją czy nie. Narysowany graf określa funkcję o dziedzinie X, gdy z każdego elementu zbioru X wychodzi strzałka i to tylko jedna.

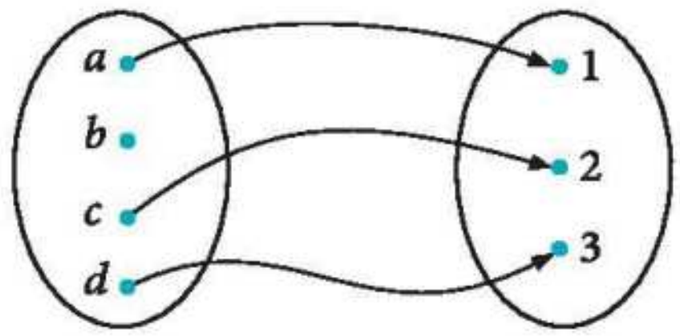
Przykład 5 ◂ zad. 1.7

Poniższe rysunki **nie przedstawiają** funkcji.





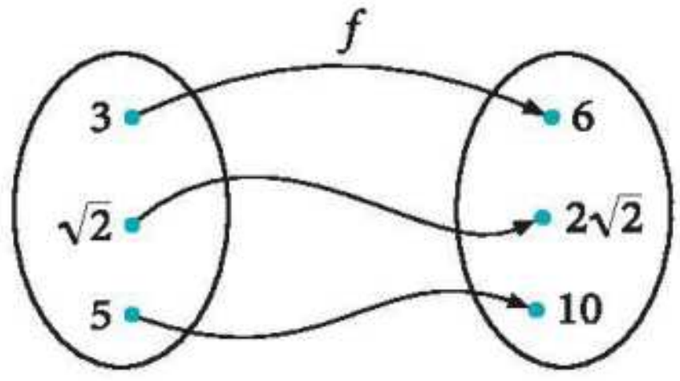
Ten graf nie opisuje funkcji w zbiorze $\{a, b, c, d\}$, ale jeżeli przyjmiemy za dziedzinę tylko zbiór $\{a, c, d\}$, to takie przyporządkowanie jest funkcją.



4. Wzór

Przyjrzyjmy się funkcji oznaczonej literą f i przedstawionej za pomocą grafu.

Zapis $f(3) = 6$ oznacza, że funkcja f liczbie 3 przyporządkowuje liczbę 6. Czytamy go: „f od trzech równa się sześć".
Podobnie: $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, $f(5) = 10$.
Zauważmy, że funkcja f przypisuje każdej liczbie ze zbioru $\{\sqrt{2}, 3, 5\}$ liczbę dwa razy większą. Zależność taką możemy zapisać następująco:



$$f(x) = 2x \text{ dla } x \in \{\sqrt{2}, 3, 5\}$$

Taki przepis na przyporządkowanie podany za pomocą symboli nazywamy **wzorem funkcji**.

Przykład 6 ◀ zad. 1.9

Sporządzimy tabelę funkcji wyrażonej następującym wzorem:

$$g(x) = x^2 - x + 1 \text{ dla } x \in \{0, 1, 2, \sqrt{2}, \pi - 5\}$$

Rozwiązanie

Aby obliczyć, jakie wartości funkcja przyporządkowuje poszczególnym argumentom, podstawiamy w miejsce x kolejne liczby z dziedziny.

$g(0) = 0^2 - 0 + 1 = 1$
$g(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1$
$g(2) = 2^2 - 2 + 1 = 3$
$g(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} + 1 = 2 - \sqrt{2} + 1 = 3 - \sqrt{2}$
$g(\pi - 5) = (\pi - 5)^2 - (\pi - 5) + 1 = \pi^2 - 10\pi + 25 - \pi + 5 + 1 = \pi^2 - 11\pi + 31$

Jeżeli dany jest wzór funkcji, np.:
$g(x) = x^2 - x + 1$
to literę x możemy zamieniać na konkretne liczby z dziedziny funkcji, jak również na inne litery czy znaki:
$g(m) = m^2 - m + 1$
$g(\otimes) = \otimes^2 - \otimes + 1$
$g(k+1) = (k+1)^2 - (k+1) + 1$

Tabela tej funkcji wygląda więc następująco:

x	0	1	2	$\sqrt{2}$	$\pi - 5$
$g(x)$	1	1	3	$3 - \sqrt{2}$	$\pi^2 - 11\pi + 31$

5. Wykres

Funkcję liczbową f możemy również przedstawić za pomocą wykresu, czyli zbioru wszystkich punktów o współrzędnych $(x, f(x))$ na płaszczyźnie z układem współrzędnych. Ten sposób omawiamy w jednym z następnych tematów podręcznika.

Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Wskaż wartość funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ dla argumentu równego 8.

A. 18 **B.** 33 **C.** 34 **D.** 36

1.2. Jeżeli wartość funkcji f dla argumentu 2 jest równa 8, to funkcja nie może być określona za pomocą wzoru

A. $f(x) = 2x + 4$. **B.** $f(x) = x^2 + 2$. **C.** $f(x) = 2x^2$. **D.** $f(x) = x^3$.

1.3. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej połowę liczby do niej przeciwnej. Funkcję f można określić za pomocą wzoru

A. $f(x) = \frac{1}{2x}$. **B.** $f(x) = \frac{2}{x}$. **C.** $f(x) = -\frac{1}{2}x$. **D.** $f(x) = -\frac{1}{2}(-x)$.

1.4. Dana jest funkcja f opisana za pomocą tabeli.

x	1	3	5	7	9	11	13
$f(x)$	4	8	12	16	20	24	28

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$.

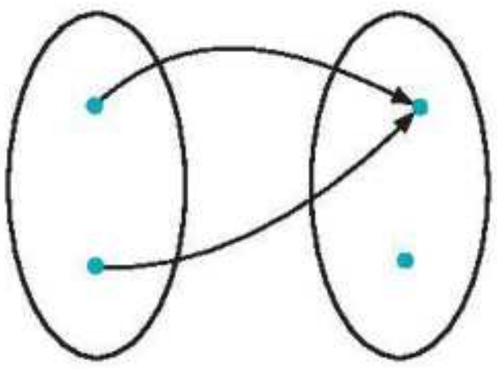
B. $f(7) = 16$

C. Funkcję f można opisać za pomocą wzoru: $f(x) = 2x + 2$.

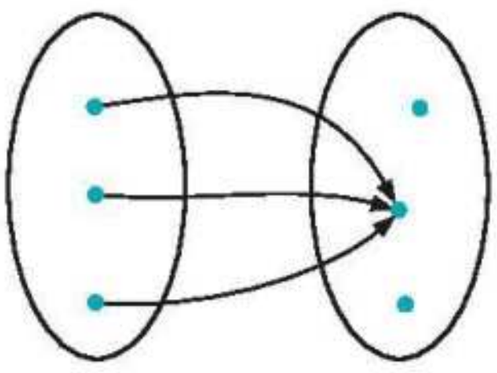
1.5. Podaj trzy przykłady przyporządkowań będących funkcjami i trzy przykłady przyporządkowań, które nie są funkcjami.

1.6. Czy podany graf przedstawia funkcję?

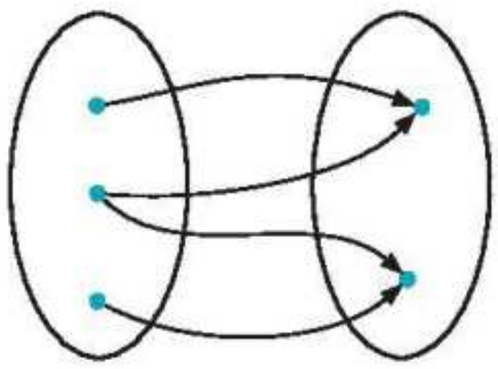
a)



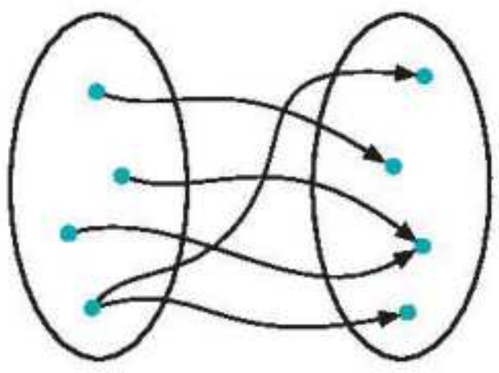
b)



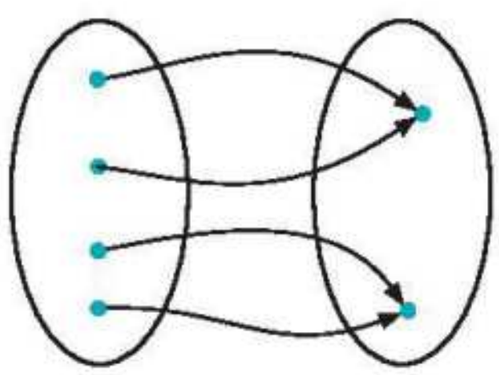
c)



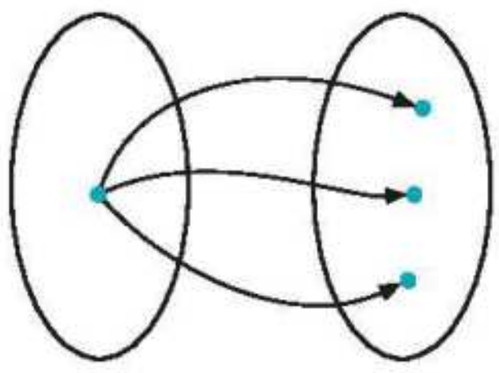
d)



e)



f)



1.7. Sprawdź, czy podane przyporządkowanie jest funkcją.

a) Każdej dodatniej liczbie całkowitej przyporządkowujemy liczbę jej dzielników.

b) Każdemu uczniowi liceum przyporządkowujemy język obcy, którego się uczy.

c) Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy jej resztę z dzielenia przez 7.

d) Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy jej sześcian.

e) Każdej książce przyporządkowujemy jej autora.

1.8. Oblicz $f(-2)$, $f(\sqrt{3})$, jeżeli

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

b) $f(x) = 3x^2 - 6x - 2$.

c) $f(x) = |x| + x$.

d) $f(x) = \frac{6}{x} - 2x + 1$.

1.9. Sporządź tabelę funkcji określonej za pomocą podanego wzoru.

a) $f(x) = 4x - 5$ dla $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

b) $f(x) = x^2 - 2$ dla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

c) $f(x) = |x - 3| + 1$ dla $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ dla $x \in \{-3, -1, 0, 8, 10\}$

1.10. Podaj przykład wzoru funkcji danej w postaci tabeli.

a)

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	4	1	0	1

b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	3	5	7	9

c)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

d)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8

1.11. Określ za pomocą wzoru funkcję f, która przyporządkowuje

a) każdej liczbie rzeczywistej liczbę do niej przeciwną.

b) każdej liczbie naturalnej kwadrat liczby większej od niej o 1.

c) każdej liczbie rzeczywistej jej podwojony kwadrat.

d) każdej liczbie rzeczywistej jej wartość bezwzględną zmniejszoną o 2.

e) każdej liczbie dodatniej logarytm dziesiętny tej liczby.

f) każdej liczbie rzeczywistej połowę pierwiastka sześciennego z tej liczby.

1.12. Określ podaną funkcję za pomocą wzoru.

a) Pole $P(r)$ koła w zależności od promienia r tego koła.

b) Pole $P(a)$ trójkąta równobocznego w zależności od długości a boku tego trójkąta.

c) Obwód $O(a)$ prostokąta o bokach długości a, $2a$ w zależności od długości krótszego boku tego prostokąta.

d) Objętość $V(a)$ prostopadłościanu o krawędziach długości a, $2a$, $3a$ w zależności od długości najkrótszej krawędzi tego prostopadłościanu.

1.13. Podaj przykład opisu słownego funkcji f.

a) $f(x) = -x^2$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ c) $f(x) = |x + 3|$ d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1.14. Funkcja f przyporządkowuje każdej dodatniej liczbie naturalnej jednocyfrowej liczbę jej naturalnych dzielników.

a) Sporządź tabelę tej funkcji.

b) Podaj wszystkie argumenty, dla których wartość funkcji jest równa 2.

1.15. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej sumę jej cyfr.

a) Podaj $f(2019)$.

b) Podaj przykład liczby n, dla której $f(n) = 30$.

c) Podaj wszystkie liczby czterocyfrowe, dla których wartość funkcji jest równa 2.

Prosto do matury

1. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej ostatnią cyfrę jej kwadratu. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $f(4) = 16$

B. $f(-100) = 0$

C. Dla każdej liczby całkowitej k spełniony jest warunek $f(-k) = f(k)$.

2. Sprawdź, czy dane przyporządkowanie jest funkcją. Jeśli tak, zapisz jej wzór.

a) Każdej dodatniej liczbie rzeczywistej x przyporządkowujemy potęgę liczby 2 o wykładniku x.

b) Każdej dodatniej liczbie naturalnej x przyporządkowujemy wykładnik potęgi, do której trzeba podnieść 10, aby otrzymać x.

c) Każdej dodatniej liczbie rzeczywistej x przyporządkowujemy liczbę, której wartość bezwzględna jest równa x.

d) Każdej liczbie rzeczywistej x różnej od zera przyporządkowujemy odwrotność trzeciej potęgi połowy liczby x.

3. Funkcja f jest dana w postaci tabeli. Podaj dziedzinę tej funkcji i narysuj jej graf.

x	2	4	6	8	10
$f(x)$	2	0	2	0	2

4. Funkcja f jest wyrażona wzorem $f(x) = \frac{2x - 3}{2x + 1}$ dla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sporządź tabelę tej funkcji.

D **5.** Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geqslant 0$. Wykaż, że $f\left(14 - 6\sqrt{5}\right) = 3 - \sqrt{5}$.

2. Wyznaczanie dziedziny funkcji

Umiejętności:

- wyznaczanie dziedziny funkcji określonej za pomocą wzoru

Sposób wyznaczania dziedziny funkcji, gdy jest ona przedstawiona za pomocą tabeli, grafu czy opisu słownego, pokazaliśmy w poprzednim rozdziale. Zajmiemy się teraz wyznaczaniem dziedzin funkcji liczbowych danych wzorem.

Przyjmujemy następującą zasadę:

jeżeli obok wzoru funkcji liczbowej nie jest podana dziedzina, to zakładamy, że dziedziną tej funkcji jest zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których można obliczyć wartość funkcji.

Sposób wyznaczania dziedziny funkcji pokażemy na przykładach.

Przykład 1

Wyznaczymy dziedziny podanych funkcji.

a) $f(x) = x^2 - 4$ ⟵ w miejsce x można podstawić dowolną liczbę rzeczywistą

Odp.: $D = \mathbf{R}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ ⟵ w miejsce x nie można podstawić liczby 0

Odp.: $D = \mathbf{R} - \{0\}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ ⟵ w miejsce x nie można podstawić liczby ujemnej

$x \geqslant 0$

Odp.: $D = \langle 0; \infty)$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 5$ ⟵ argumenty funkcji muszą spełniać dwa warunki: $x \geqslant 0$ jako wyrażenie pod pierwiastkiem i $\sqrt{x} \neq 0$ jako wyrażenie z mianownika

$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \sqrt{x} \neq 0 \end{cases}$

Odp.: $D = (0; \infty)$

e) $f(x) = \frac{1 - x}{(x - 2)x}$ ⟵ do wyrażenia w liczniku możemy podstawić dowolną liczbę

$(x - 2)x \neq 0$ ⟵ mianownik różny od zera

$x - 2 \neq 0$ i $x \neq 0$ ⟵ iloczyn wyrażeń jest różny od zera tylko wtedy, gdy każdy z jego czynników jest różny od zera

$\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Odp.: $D = \mathbf{R} - \{0, 2\}$

f) $f(x) = \frac{x}{x}$ ⟵ mianownik różny od zera

Odp.: $D = \mathbf{R} - \{0\}$

Dziedzinę funkcji wyznaczamy **przed** wykonaniem przekształceń we wzorze tej funkcji.

Po skróceniu ułamka wzór funkcji przyjmie postać $f(x) = 1$, nie zmieni to jednak jej dziedziny.

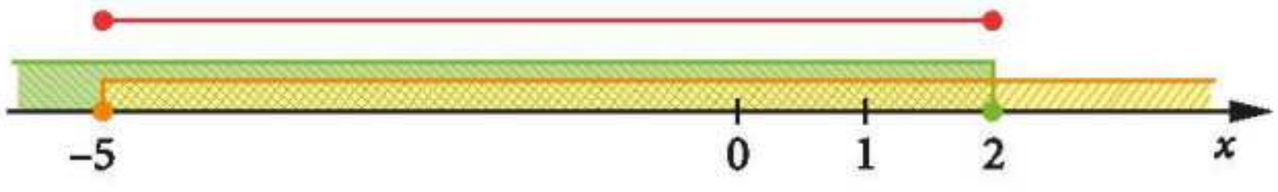
g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ⟵ dla dowolnej liczby podstawionej w miejsce x otrzymujemy $x^2 + 1 > 0$

Odp.: $D = \mathbf{R}$

h) $f(x) = \sqrt{2 - x} + \sqrt{x + 5}$ ⟵ żadne z wyrażeń pod pierwiastkiem nie może być ujemne

$$\begin{cases} 2 - x \geqslant 0 \\ x + 5 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant 2 \\ x \geqslant -5 \end{cases}$$ ⟵ wynik odczytujemy z osi liczbowej



Odp.: $D = \langle -5; 2 \rangle$

i) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{(x - 1)^2}$

$x \geqslant 0$ ⟵ założenie dotyczące liczby pod pierwiastkiem

$(x - 1)^2 \neq 0$ ⟵ założenie dotyczące mianownika

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$ ⟵ liczby spełniające obydwa założenia

Odp.: $D = \langle 0; 1) \cup (1; \infty)$

j) $f(x) = \sqrt{|x - 3| - 2}$

$|x - 3| - 2 \geqslant 0$ ⟵ założenie dotyczące liczby pod pierwiastkiem

$|x - 3| \geqslant 2$

$x \leqslant 1$ lub $x \geqslant 5$

Odp.: $D = (-\infty; 1\rangle \cup \langle 5; \infty)$

k) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - |x|}}$

$2 - |x| > 0$ ⟵ założenie dotyczące liczby pod pierwiastkiem w mianowniku

$|x| < 2$

Odp.: $D = (-2; 2)$

Przykład 2 ◀ zad. 2.13

Wyznaczymy dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{|x-5| - x + 1}$.

Rozwiązanie

$|x-5| - x + 1 \geqslant 0$ ⟵ założenie dotyczące liczby pod pierwiastkiem

Zapisujemy nierówność w postaci dwóch układów.

$$\begin{cases} x - 5 \geqslant 0 \\ (x-5) - x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x - 5 \leqslant 0 \\ (-x+5) - x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 5 \\ x - 5 - x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x \leqslant 5 \\ -x + 5 - x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 5 \\ -4 \geqslant 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x \leqslant 5 \\ -2x \geqslant -6 \end{cases}$$

W pierwszym układzie otrzymaliśmy nierówność sprzeczną, zatem nie spełnia go żadna liczba. Drugi układ jest spełniony przez liczby

$$\begin{cases} x \leqslant 5 \\ x \leqslant 3 \end{cases}, \text{ czyli } x \leqslant 3.$$

Odp.: $D = (-\infty; 3\rangle$

Przykład 3 ◀ zad. 2.7

Wyznaczymy wartość parametru m, dla której dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x-1}{3x-m}$ jest zbiór $D = \mathbf{R} - \{5\}$.

Rozwiązanie

$3x - m \neq 0$ ⟵ założenie dotyczące mianownika

$x \neq \frac{m}{3}$

$D = \mathbf{R} - \left\{\frac{m}{3}\right\}$

Zatem $\frac{m}{3} = 5$, czyli $m = 15$.

Odp.: $m = 15$

Przykład 4 ◀ zad. 2.19

Funkcja przyporządkowuje długości x boku prostokąta o obwodzie 20 pole P tego prostokąta. Wyznaczymy wzór i dziedzinę tej funkcji.

Rozwiązanie

Oznaczmy długość drugiego boku prostokąta przez y. Wówczas:

$2x + 2y = 20$ ⟵ obwód prostokąta wynosi 20

$x + y = 10$

$y = 10 - x$ ⟵ wyznaczamy y za pomocą x
$P = xy = x(10 - x)$ ⟵ wyznaczamy pole prostokąta
$P(x) = x(10 - x)$ ⟵ wzór szukanej funkcji

Dziedzinę funkcji najwygodniej jest wyznaczać z warunków opisanych w treści zadania. Wyrażenia x oraz $10 - x$ oznaczają długości boków prostokąta. Zatem:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 10 - x > 0 \end{cases}$$ ⟵ długości boków są liczbami dodatnimi

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \end{cases}, \text{ czyli } x \in (0;\ 10)$$

Odp.: $P(x) = x(10 - x),\ D = (0;\ 10)$

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Wskaż dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

A. $\mathbf{R} - \{1\}$ **B.** $\mathbf{R} - \{2\}$ **C.** $(2;\ \infty)$ **D.** $(1;\ 2) \cup (2;\ \infty)$

2.2. Wskaż funkcję, której dziedziną jest przedział $(-\infty;\ 5)$.

A. $f(x) = \sqrt{x-5}$ **B.** $f(x) = \sqrt{5-x}$ **C.** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$ **D.** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x}}$

2.3. Wskaż funkcję, której dziedziną nie jest zbiór liczb rzeczywistych.

A. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5$ **B.** $f(x) = \frac{1}{2}$ **C.** $f(x) = \frac{x}{2x}$ **D.** $f(x) = \sqrt{x^2}$

2.4. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = \frac{3}{x-5}$ c) $f(x) = x^3 - 1$ d) $f(x) = \frac{x+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-x}$

2.5. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = x + \sqrt{x}$ c) $f(x) = \sqrt{5-x}$ e) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x}$
b) $f(x) = \sqrt{x-3}$ d) $f(x) = x^3 + 5 + \sqrt{7-x}$ f) $f(x) = \sqrt{2x-6} - 3\sqrt{3-x}$

2.6. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $k(x) = \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x-1}$ c) $k(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x}$

b) $k(x) = \frac{x+5}{(x+1)(x-3)}$ d) $k(x) = \frac{\sqrt{4-x}+5}{x+1}$

2.7. Dla jakiej wartości parametru m dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x+2}{2x-m}$ jest zbiór $D = \mathbf{R} - \{3\}$?

2.8. Dla jakiej wartości parametru m dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x - 3m}$ jest zbiór $D = \langle -12; \infty)$?

D **2.9.** Wykaż, że nie istnieje taka wartość parametru m, dla której dziedziną funkcji $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 3m}}{2x + m}$ jest zbiór $D = \langle -6; \infty) - \{2\}$.

2.10. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = |x - 4|$

b) $f(x) = \dfrac{1}{|x + 2|}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{|x| - 5}$

d) $f(x) = \dfrac{|x| - 1}{|x| + 1}$

e) $f(x) = \sqrt{|x + 4| - 4}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{|x - 10| - 4}$

2.11. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{|x| - 7}}$

b) $f(x) = \sqrt{2 - |x|}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| + 6}}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 - |x - 3|}}{5}$

2.12. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x| - 5}}{x + 5}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 - x}}{3 - |x|}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x + 1| - 2}}{\sqrt{|x - 2| + 1}}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{|x| - 3} + \sqrt{|x| - 2}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x - 1| - 1}}{\sqrt{4 - |x - 3|}}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|5 - |x + 3||}}{|x - 3| - 1}$

2.13. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \sqrt{|x + 1| - 4x + 3}$

b) $f(x) = \sqrt{|x - 2| + 3|x| - 6}$

c) $f(x) = \sqrt{|7 - |x + 2|| - 3}$

d) $f(x) = \sqrt{|x + 4| - 2|x - 2| + 4 - x}$

e) $f(x) = \sqrt{|4 - 2x| + |x| - 3x + 2}$

f) $f(x) = \sqrt{5x - |3 + x| + 2|x - 1|}$

2.14. Sprawdź, czy istnieje taka wartość parametru m, dla której dziedziną funkcji $f(x) = \dfrac{1}{|2x - 3| - m}$ jest zbiór $D = \mathbf{R} - \{1, 2\}$.

2.15. Sprawdź, czy istnieje taka wartość parametru m, dla której dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{5 - |x + m|}$ jest zbiór $D = \langle 0; 5\rangle$.

* **2.16.** Dla jakiej wartości parametru m dziedziną funkcji $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - |m + 1|}}{|x - 2| + m}$ jest zbiór $D = \langle 1; \infty) - \{4\}$?

2.17. Podaj przykład funkcji, której dziedziną jest wskazany zbiór.

a) $D = \mathbf{R} - \{3, 7, 9\}$
b) $D = \langle -6; \infty)$
c) $D = (-\infty; 7)$
d) $D = (-\infty; -9) \cup (3; \infty)$
e) $D = (-\infty; -2\rangle \cup \langle 6; \infty)$
f) $D = (-\infty; 3\rangle \cup \langle 5; \infty) - \{0\}$

2.18. Podaj wzór i określ dziedzinę funkcji, która długości x boku trójkąta równobocznego przyporządkowuje obwód tego trójkąta.

2.19. Niech x oznacza długość ramienia trójkąta równoramiennego o podstawie równej 10. Funkcja $f(x)$ przyporządkowuje zmiennej x obwód tego trójkąta. Podaj wzór funkcji i jej dziedzinę.

2.20. Niech x oznacza długość ramienia trójkąta równoramiennego o obwodzie równym 20. Funkcja $f(x)$ przyporządkowuje zmiennej x długość podstawy tego trójkąta. Podaj wzór funkcji i jej dziedzinę.

2.21. Suma długości przekątnych rombu jest równa 5. Podaj wzór oraz dziedzinę funkcji, która długości d jednej z przekątnych rombu przyporządkowuje jego pole.

2.22. W prostopadłościanie o podstawie kwadratowej krawędź boczna jest o 3 jednostki dłuższa od krawędzi podstawy. Podaj wzór i określ dziedzinę funkcji, która długości krawędzi podstawy przyporządkowuje

a) pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.
b) objętość tego prostopadłościanu.

Prosto do matury

1. Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{mx + 1}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dla $m = -2$ dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right)$.

B. Dla $m = \frac{1}{2}$ dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \langle -2; \infty)$.

C. Dla pewnej wartości m dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.

2. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = x^2 + 1 + \sqrt{2 - x}$.

3. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{3 - |x + 1|}$.

4. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{4x + 2}}{|2x - 3| - 5}$.

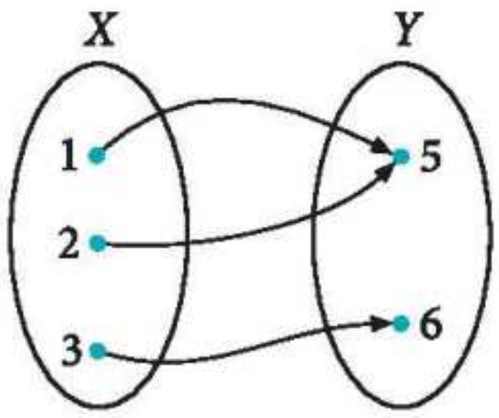
5. Niech x oznacza długość podstawy trójkąta równoramiennego o ramieniu równym 16. Funkcja $f(x)$ przyporządkowuje zmiennej x obwód tego trójkąta. Podaj wzór funkcji i jej dziedzinę.

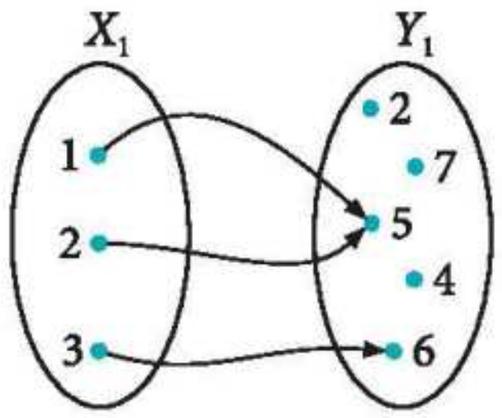
3. Zbiór wartości funkcji

Umiejętności:

- wyznaczanie zbioru wartości funkcji
- obliczanie, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość

W definicji funkcji jest mowa o dwóch zbiorach: X i Y. Definicja narzuca ścisłe warunki elementom zbioru X, niewiele natomiast mówi o elementach zbioru Y. Przyjrzyjmy się następującym rysunkom.





Oba grafy przedstawiają przyporządkowania będące funkcjami. Każda z nich tym samym argumentom przyporządkowuje takie same wartości. Różnica między grafami polega na tym, że w zbiorze Y_1 są „niewykorzystane" elementy. Wygodnie jest wyodrębnić ze zbioru Y_1 te elementy, które są przyporządkowane jakimś elementom zbioru X_1. Otrzymany w ten sposób zbiór nazywamy **zbiorem wartości funkcji** i oznaczamy w tym podręczniku ZW.

Funkcje f i g określone na tej samej dziedzinie i przyporządkowujące każdemu argumentowi x wartości takie, że $f(x) = g(x)$, nazywamy **funkcjami równymi**.

Wyznaczenie zbioru wartości funkcji, bardzo proste w wypadku grafów czy tabel, może być bardziej skomplikowanym zadaniem matematycznym dla funkcji określonych za pomocą wzoru.

Przykład 1

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji $f(x) = -3x$, której dziedziną jest zbiór $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Rozwiązanie

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	−3	−6	−9	−12

⟵ przedstawiamy funkcję w postaci tabeli

Odp.: $ZW = \{0, -3, -6, -9, -12\}$

Przykład 2

Określimy zbiór wartości funkcji g, która każdej liczbie naturalnej z przedziału $\langle 5; 10\rangle$ przyporządkowuje liczbę jej dodatnich dzielników; np. $g(6) = 4$, ponieważ liczba 6 ma cztery dodatnie dzielniki: 1, 2, 3, 6.

Rozwiązanie

x	5	6	7	8	9	10
$g(x)$	2	4	2	4	3	4

Odp.: $ZW = \{2, 3, 4\}$

Przykład 3 ◂ zad. 3.5

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji, która każdej liczbie naturalnej przypisuje jej resztę z dzielenia przez 3.

Rozwiązanie

Każda liczba naturalna daje w wyniku dzielenia przez 3 resztę 0 lub 1, lub 2.
Zatem $ZW = \{0, 1, 2\}$.

Przykład 4 ◂ zad. 3.8

Niech $f(x) = -x$ dla $x \in (0; \infty)$. Wyznaczymy zbiór wartości tej funkcji.

Rozwiązanie

Funkcja f przyporządkowuje dodatnim liczbom rzeczywistym liczby do nich przeciwne. Zatem:

- wszystkie wartości funkcji są liczbami ujemnymi,
- każda liczba ujemna jest wartością tej funkcji, ponieważ jest przyporządkowana pewnej liczbie dodatniej.

Odp.: $ZW = (-\infty; 0)$

Przykład 5 ◂ zad. 3.10

Sprawdzimy, czy liczba 5 należy do zbioru wartości funkcji $f(x) = 3x - 1$ o dziedzinie $D = \langle 0; \infty)$.

Rozwiązanie

Szukamy odpowiedzi na pytanie, czy w podanej dziedzinie znajduje się argument x, któremu funkcja przyporządkowuje liczbę 5.

$f(x) = 5$
$3x - 1 = 5$ ⟵ rozwiązujemy odpowiednie równanie
$x = 2$, liczba 2 należy do przedziału $\langle 0; \infty)$ i $f(2) = 5$

Odp.: Liczba 5 należy do zbioru wartości funkcji f.

Przykład 6

Sprawdzimy, czy liczba 7 należy do zbioru wartości funkcji $g(x) = x - 3$, której dziedziną jest zbiór $D = \langle -2; 2\rangle$.

Rozwiązanie

Rozwiązujemy równanie $g(x) = 7$.

$x - 3 = 7$

$x = 10$ ⟵ sprawdzamy, czy liczba 10 należy do dziedziny

10 nie należy do przedziału $\langle -2; 2\rangle$.

Odp.: Liczba 7 nie należy do zbioru wartości tej funkcji.

Przykład 7 ◂ zad. 3.12

Zbiorem wartości funkcji f jest $ZW = \{-1, 1, 3\}$. Wyznaczymy dziedzinę D, jeżeli $f(x) = 2x + 1$.

Rozwiązanie

Szukamy liczb, którym funkcja przyporządkowuje dane wartości. W tym celu rozwiążemy odpowiednie równania.

$2x + 1 = -1$	$2x + 1 = 1$	$2x + 1 = 3$
$2x = -2$	$2x = 0$	$2x = 2$
$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$

Odp.: Dziedziną funkcji jest zbiór $D = \{-1, 0, 1\}$.

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wskaż zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{2}{3x}$, której dziedziną jest zbiór $\{1, 2, 3\}$.

A. $\left\{\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, 1\right\}$ **B.** $\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ **C.** $\left\{\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ **D.** $\left\{\frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right\}$

3.2. Wskaż liczbę należącą do zbioru wartości funkcji $f(x) = 4x - 3$, której dziedziną jest zbiór liczb całkowitych.

A. 100 **B.** 101 **C.** 102 **D.** 103

3.3. Dziedziną funkcji jest zbiór $\{-2, 0, 2\}$. Wskaż zbiór, który nie może być zbiorem wartości tej funkcji.

A. $\{0\}$ **B.** $\{0, \sqrt{3}\}$ **C.** $\{-2, 0, 2\}$ **D.** $\{-2, -1, 1, 2\}$

3.4. Wyznacz zbiór wartości funkcji.

a) $f(x) = 3x + \frac{1}{2}$ $\quad D = \left\{-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\}$

b) $f(x) = 3\sqrt{x} - 1$ $\quad D = \{1, 4, 9, 16\}$

c) $f(x) = 2^{x+1}$ $\quad D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

d) $f(x) = \log x$ $\quad D = \{0{,}001, 1, 100\}$

3.5. Wyznacz zbiór wartości funkcji, która każdej liczbie naturalnej przypisuje jej resztę z dzielenia przez 7.

3.6. Funkcja f przyporządkowuje każdej naturalnej liczbie dwucyfrowej podzielnej przez 13 sumę jej cyfr. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

3.7. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie x ze zbioru $D = \langle 10; 20\rangle$ najmniejszą liczbę całkowitą parzystą większą od liczby x, np.: $f(17{,}3) = 18$, $f\left(\sqrt{120}\right) = 12$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

3.8. Niech $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \in \langle 1; \infty)$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

3.9. Wyznacz zbiór wartości funkcji.

a) $f(k) = 2k + 1$ $\quad k \in \mathbf{Z}$

b) $f(n) = (-1)^n$ $\quad n \in \mathbf{N}$

c) $f(x) = |x|$ $\quad x \in \langle -3; 3\rangle$

d) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ $\quad x \in \mathbf{R} - \{0\}$

3.10. Dla funkcji o danym wzorze i wskazanej dziedzinie sprawdź, która z podanych obok liczb należy do zbioru wartości tej funkcji.

a) $f(x) = x - 3$	$D = \langle 0; \infty)$	$-5, -1, 3, 5$
b) $g(x) = 2x$	$D = \mathbf{N}$	$4, 1, 3, 8$
c) $h(x) = \frac{1}{x}$	$D = \mathbf{Z} - \{0\}$	$\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 2, -1$
d) $m(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$	$D = (-2; 2)$	$-10, -4, 0, 4, 8, 10$

D **3.11.** Dana jest funkcja $k(x) = |x| + 2$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych. Wykaż, że liczba 1 nie należy do zbioru wartości tej funkcji.

3.12. Dana jest funkcja $y = f(x)$ oraz jej zbiór wartości ZW. Wyznacz dziedzinę D tej funkcji.

a) $f(x) = x - 1$ $\quad ZW = \{0, 3, 5\}$

b) $f(x) = 2x$ $\quad ZW = \{-4, 6, 100\}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad ZW = \{0, 1, 2\}$

d) $f(x) = \frac{9}{x}$ $\quad ZW = \{-3, 3, 9\}$

3.13. Podaj zbiór wartości funkcji, która każdemu kwadratowi o boku a przyporządkowuje jego pole, przy czym a jest liczbą podzielną przez 3 i mniejszą od 10.

3.14. Podaj przykład funkcji o dziedzinie D i zbiorze wartości ZW.

a) $D = \mathbf{R}$ $ZW = \mathbf{R}$
b) $D = \mathbf{Z}$ $ZW = \mathbf{N}$
c) $D = \langle -1; \infty)$ $ZW = (-\infty; 1\rangle$
d) $D = \mathbf{R}$ $ZW = \{-1, 0, 2\}$

3.15. Podaj przykład funkcji, której dziedziną jest zbiór liczb wymiernych, a zbiorem wartości – zbiór liczb całkowitych.

D **3.16.** Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2^x + 17}{2^x + 6}$, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych. Wykaż, że do zbioru wartości funkcji nie należy żadna liczba całkowita.

3.17. O funkcji $y = f(x)$ wiadomo, że jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, a zbiorem wartości $ZW = \{-1, 1\}$. Czy z tych informacji wynika, że w pewnym przedziale $(a; b)$ dla wszystkich argumentów wartości funkcji są równe 1 albo dla wszystkich argumentów z tego przedziału wartości funkcji są równe -1?

Prosto do matury

1. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej liczbę o 2 mniejszą od jej kwadratu. Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Liczba -2 należy do zbioru wartości funkcji f.
B. Liczba -1 należy do zbioru wartości funkcji f.
C. Liczba 36 należy do zbioru wartości funkcji f.

2. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = x - 5$, znając jej zbiór wartości $ZW = \{-7, -5, -1\}$.

3. Sprawdź, czy liczba 3 należy do zbioru wartości funkcji $f(x) = |x - 5| - x + 1$.

4. Wyznacz zbiór wartości funkcji, która bokowi każdego kwadratu o obwodzie mniejszym od 20 przyporządkowuje pole tego kwadratu.

D **5.** Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych. Wykaż, że liczba $7\sqrt{2}$ należy do zbioru wartości tej funkcji.

4. Warto powtórzyć – układ współrzędnych

Prostokątnym układem współrzędnych nazywamy parę osi liczbowych umieszczonych na płaszczyźnie tak, by przecinały się pod kątem prostym w punkcie oznaczonym liczbą 0 na każdej z nich.

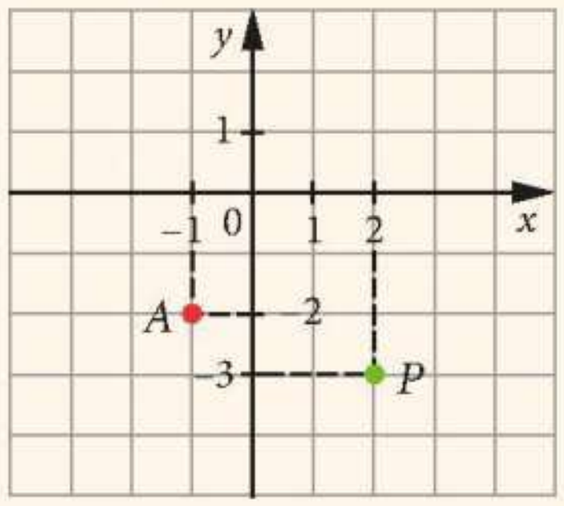
Oś poziomą nazywamy osią x lub osią **odciętych**, oś pionową – osią y lub osią **rzędnych**, a punkt przecięcia osi – **początkiem układu**.

Każdemu punktowi płaszczyzny z wprowadzonym układem współrzędnych odpowiada para liczb rzeczywistych zwanych **współrzędnymi punktu**.

Można umieścić i nazwać osie układu współrzędnych zupełnie inaczej.
Nie jest też konieczne, by odcinki jednostkowe na obu osiach miały jednakową długość.
Matematycy przyjęli zasadę: pierwsza współrzędna punktu jest odczytywana z osi odciętych (x), a druga z osi rzędnych (y).

Na rysunku pokazujemy sposób wyznaczania współrzędnych punktu.

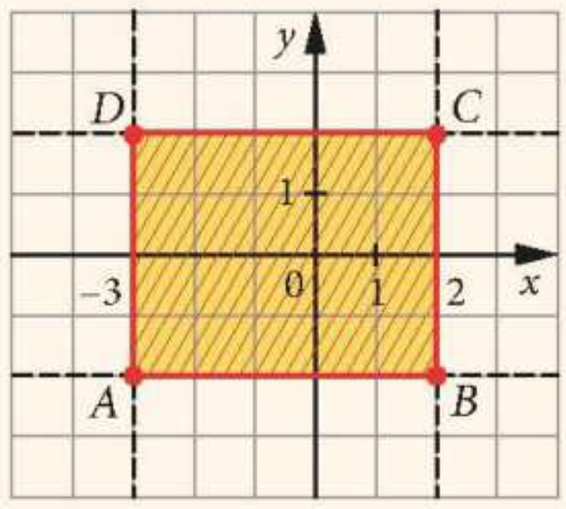
W danym układzie współrzędnych punktowi P odpowiada para liczb: $2, -3$, co zapisujemy $P = (2, -3)$.
Każdej parze liczb odpowiada dokładnie jeden punkt płaszczyzny, np. parze $(-1, -2)$ odpowiada punkt A.



Układ współrzędnych łączy w pewnym sensie algebrę z geometrią, dlatego jest tak powszechnie używany. Wprowadzenie układu współrzędnych (choć nieco innego niż opisany wyżej) jest pomysłem francuskiego uczonego Kartezjusza (XVII w.), stąd używane są często nazwy – „kartezjański układ współrzędnych" i „płaszczyzna kartezjańska" (płaszczyzna z takim układem).

Przykład 1

Zaznaczymy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-3, -2)$, $B = (2, -2)$, $C = (2, 2)$, $D = (-3, 2)$ i obliczymy jego pole.



Rozwiązanie

Boki tego czworokąta są równoległe do osi układu współrzędnych. $ABCD$ jest więc prostokątem, w którym $|AB| = 5$, a $|BC| = 4$.

Odp.: Pole prostokąta $ABCD$ jest równe 20.

Przykład 2

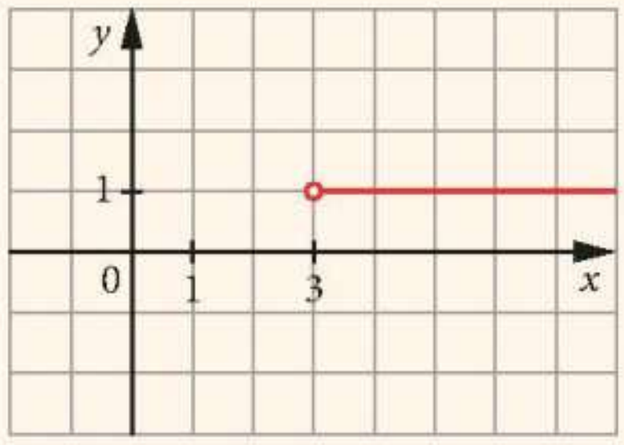
Zaznaczymy na płaszczyźnie w układzie współrzędnych punkty, których współrzędne (x, y) spełniają podane warunki.

a) $x > 3$ i $y = 1$
b) $x = 1$ i $y \geqslant -2$
c) $x = 2$

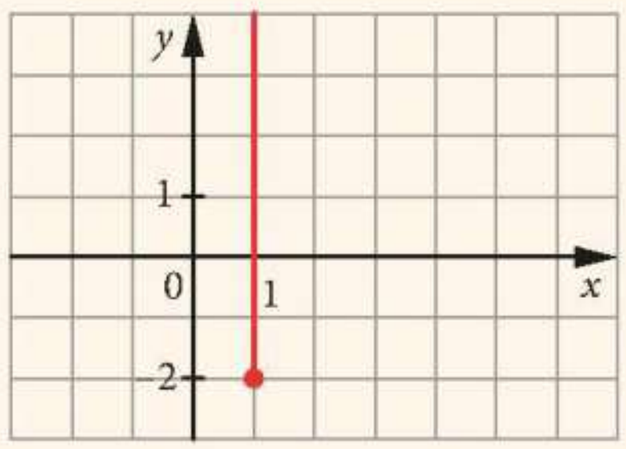
Jeżeli w warunku jest informacja tylko o jednej współrzędnej, to zakładamy, że druga może przyjmować dowolną wartość (chociaż najczęściej zapisujemy taką informację w postaci np. $y \in \mathbf{R}$).

Rozwiązanie

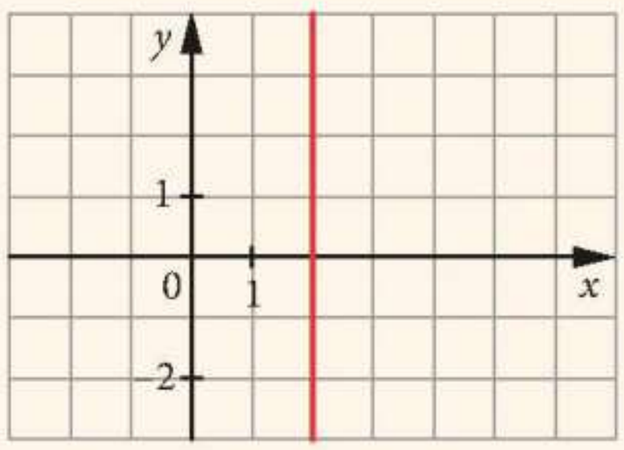
a)



b)



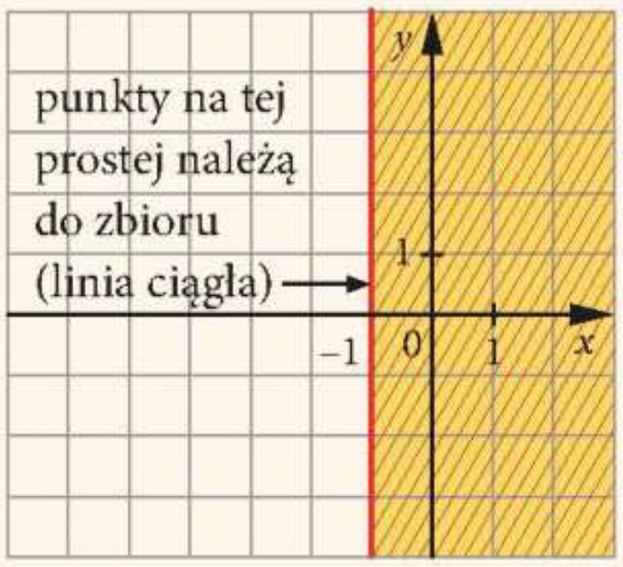
c)



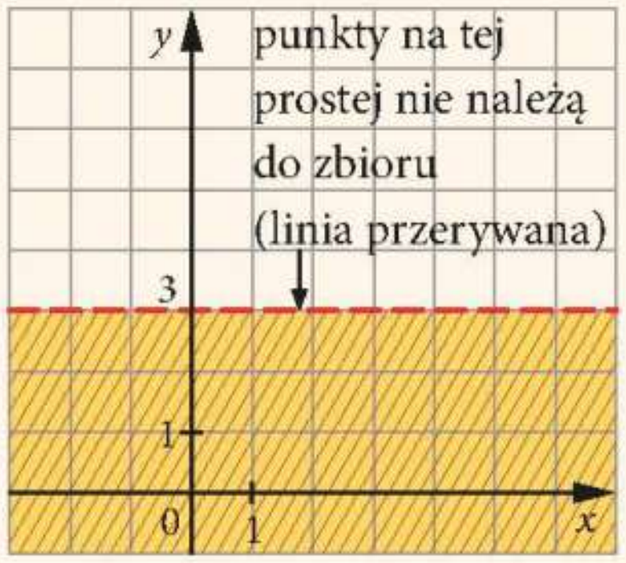
Przykład 3

Zaznaczymy na płaszczyźnie zbiór wszystkich punktów, których współrzędne spełniają podane warunki.

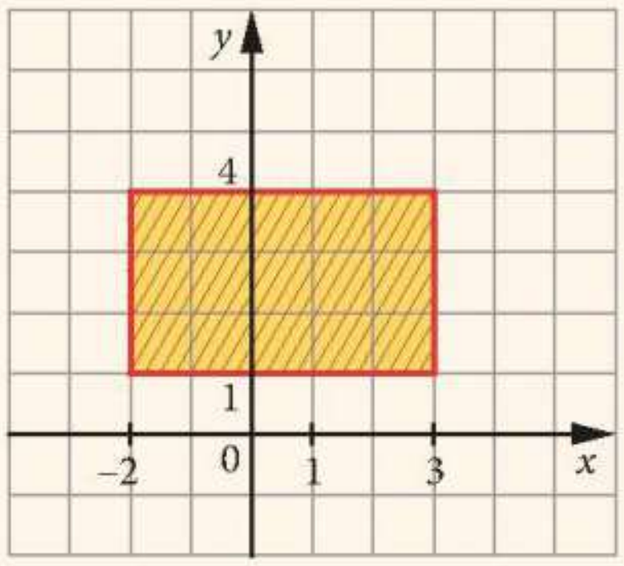
a) $x \geqslant -1$ i $y \in \mathbf{R}$



b) $y < 3$ i $x \in \mathbf{R}$



c) $x \in \langle -2; 3\rangle$ i $y \in \langle 1; 4\rangle$



Przykład 4

Zaznaczymy na płaszczyźnie kartezjańskiej punkty, których współrzędne umieszczone są w tabeli.

x	0	1	2	3
y	100	99	102	100

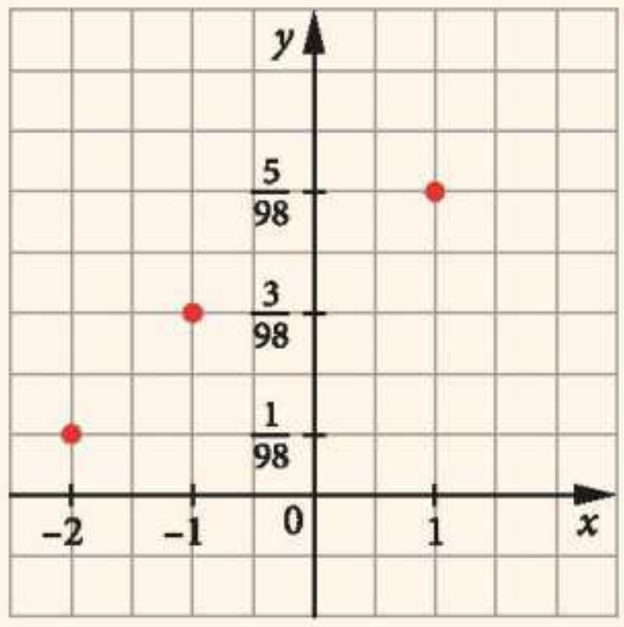
Rozwiązanie

Aby zrobić czytelny rysunek, warto „skrócić” oś y.

Przykład 5

Zaznaczymy w układzie współrzędnych punkty:

$A = \left(-2, \frac{1}{98}\right)$, $B = \left(-1, \frac{3}{98}\right)$ i $C = \left(1, \frac{5}{98}\right)$.



Rozwiązanie

W tym wypadku najlepiej przyjąć na osiach różne jednostki.

Zadania

4.1. Zaznacz w układzie współrzędnych podane punkty.

$A = (0, -3)$, $B = (-5, -1)$, $C = (-5, 2)$, $D = (2, -4)$, $E = (3, 5)$, $F = (-2, 0)$

4.2. Narysuj w układzie współrzędnych wielokąt, którego kolejnymi wierzchołkami są podane punkty. Podaj nazwę tego wielokąta.

a) $A = (-3, 1)$, $B = (5, 1)$, $C = (1, 5)$

b) $K = (-2, -2)$, $L = (2, -2)$, $M = (8, 4)$, $N = (4, 4)$

c) $P = (-3, -4)$, $Q = (4, 3)$, $R = (0, 2)$, $S = (-2, 0)$

d) $D = (1, 0)$, $E = (6, 5)$, $F = (3, 8)$, $G = (-2, 3)$

4.3. Jakim czworokątem jest wielokąt $ABCD$, jeśli $A = (-2, -3)$, $B = (4, -3)$, $C = (4, 1)$, $D = (-2, 1)$? Oblicz jego pole.

4.4. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają podane warunki.

a) $x \leqslant 3$ i $y \in \mathbf{R}$ b) $x \in \mathbf{R}$ i $y \geqslant 1$ c) $x \geqslant 2$ i $y \geqslant 2$ d) $x \leqslant 3$ i $y \leqslant 2$

4.5. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają podane warunki.

a) $x = 0$ i $y \in \mathbf{R}$ b) $y > 0$ i $x = 2$ c) $x \leqslant 1$ i $y = 3$ d) $y < -2$ i $x = 2$

4.6. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają podane warunki.

a) $y \in \langle -2; 4\rangle$ i $x \in \mathbf{R}$

b) $x \in \langle -3; 3\rangle$ i $y = -5$

c) $x \in \langle -5; 1\rangle$ i $y \in \langle -2; 3\rangle$

d) $x \in \langle -2; 4\rangle$ i $y \in \langle 0; 5\rangle$

4.7. Które z podanych punktów należą do osi x?

$A = (-3, 7)$, $B = (-4, 0)$, $C = \left(\sqrt{2}, 0\right)$, $D = \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $E = (-1, 5)$

4.8. Które z podanych punktów należą do osi y?

$K = (2, -1)$, $L = (0, 5)$, $M = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $P = \left(0, -\sqrt{3}\right)$, $Q = (-4, -1)$

5. Wykres funkcji

Umiejętności:

- określanie funkcji za pomocą wykresu

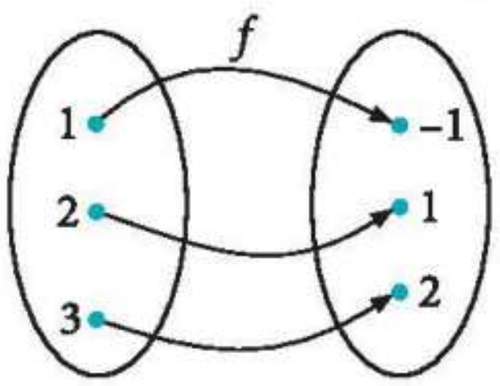
Każda funkcja liczbowa łączy liczby w pary, które możemy przedstawić w postaci punktów na płaszczyźnie z układem współrzędnych.

Definicja

Wykresem funkcji liczbowej f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy zbiór wszystkich punktów o współrzędnych $(x, f(x))$ dla $x \in X$.

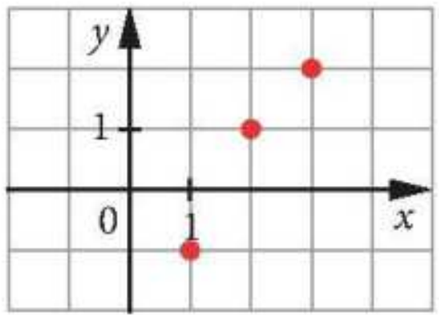
Przykład 1

Narysujemy wykres funkcji określonej za pomocą grafu.



Rozwiązanie

Dziedziną funkcji jest zbiór trzech liczb, zatem wykresem funkcji jest zbiór trzech punktów.



Przyjmujemy zasadę, że pierwszą współrzędną punktu należącego do wykresu funkcji znajdujemy na poziomej osi x, a drugą – na pionowej osi y. Dziedzinę funkcji odczytujemy więc na osi x, a zbiór wartości na osi y.

Przykład 2 ◀ zad. 5.5

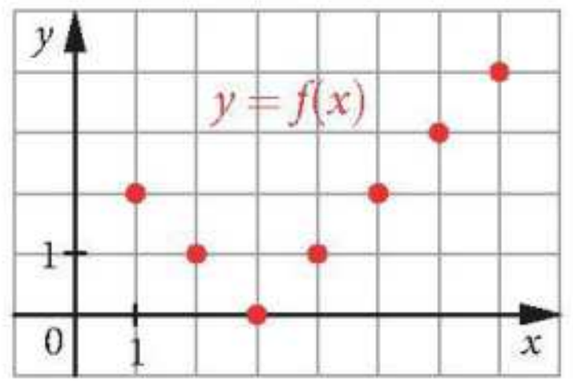
Narysujemy wykres funkcji $f(x) = |x - 3|$ o dziedzinie $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy wartości funkcji i zapisujemy je, np. w tabeli:

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	2	1	0	1	2	3	4

Wykres składa się z siedmiu punktów.

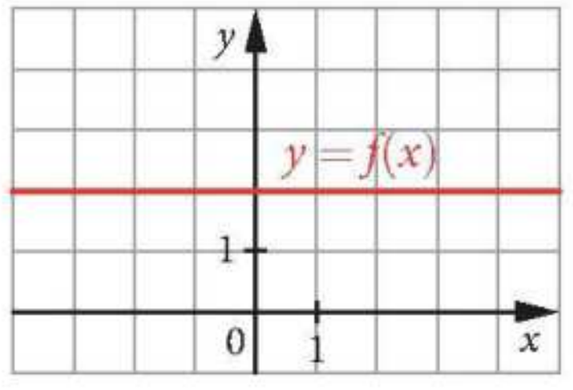


Przykład 3

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = 2$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Wykresem f jest prosta – zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których druga współrzędna jest równa 2.



Podobnie – wykresem funkcji $g(x) = 5$ jest prosta równoległa do osi x będąca zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których druga współrzędna jest równa 5, a wykresem funkcji $h(x) = -\sqrt{3}$ jest prosta równoległa do osi x będąca zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których druga współrzędna jest równa $-\sqrt{3}$ itd. Dlatego przyjmujemy zasadę: jeśli chcemy zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których druga współrzędna jest równa a, to piszemy krótko: **prowadzimy prostą o równaniu** $y = a$.

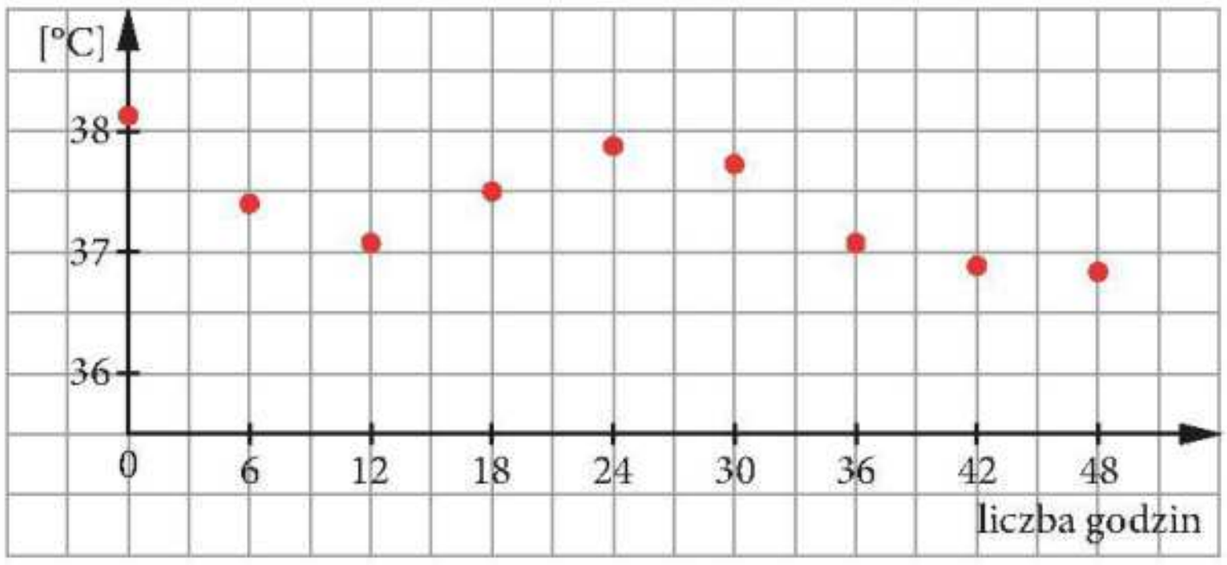
Przykład 4 ◂ zad. 5.7

W tabeli przedstawiono temperaturę ciała pacjenta mierzoną co 6 godzin.

Kolejne godziny	0	6	12	18	24	30	36	42	48
Temperatura [°C]	38,2	37,4	37,1	37,5	37,9	37,7	37,1	36,9	36,8

Sporządzimy wykres funkcji, która czasowi obserwacji (w godzinach) przyporządkowuje zarejestrowaną temperaturę (w °C).

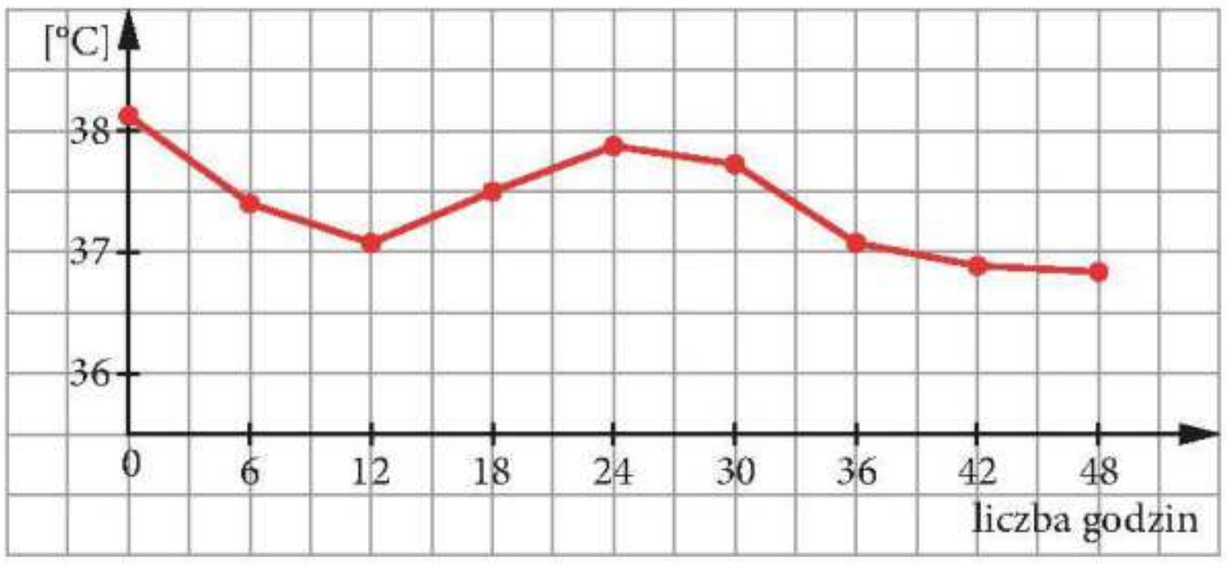
Rozwiązanie



Aby wykres był czytelny, często przyjmuje się różne odcinki jednostkowe na osiach.

Zauważmy, że jednostki na osi pionowej zaznaczone są nie od 0.

Dziedzina funkcji składa się z kilku liczb, więc wykres również składa się z kilku punktów. W praktyce często łączy się je odcinkami, aby uzyskać następujący wykres:



Oczywiście nie jest to wykres funkcji z podanej tabeli, gdyż pomiar nie był wykonany w sposób ciągły i nie mamy pewności, czy np. po upływie trzech godzin temperatura wynosiła 37,8°C. Jest on jednak bardziej czytelny od poprzedniego i pozwala łatwiej stwierdzić, kiedy temperatura rosła, a kiedy malała, a w dodatku – kiedy rosła lub malała najszybciej.

Przykład 5 ◀ zad. 5.12

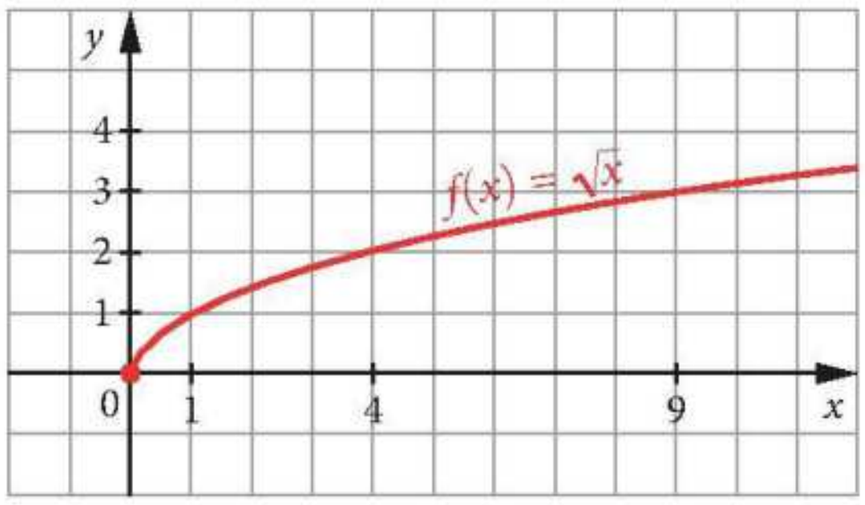
Narysujemy wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$.

Rozwiązanie

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb nieujemnych. Jest to zbiór nieskończony, dlatego w tabeli umieścimy tylko kilka liczb wybranych z dziedziny.

x	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	2	4	9	100
$f(x) = \sqrt{x}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	3	10

Aby dokładnie narysować wykres tej funkcji, trzeba wyznaczyć o wiele więcej punktów, niż zrobiliśmy to w tabeli. Można w tym celu wykorzystać kalkulator graficzny albo komputer.



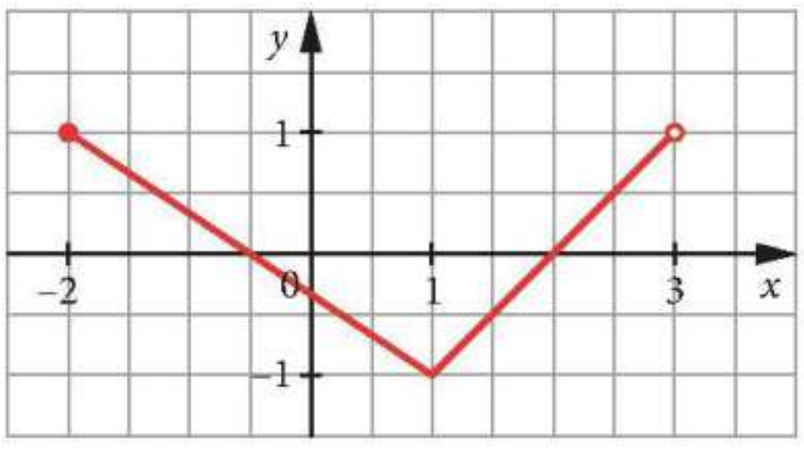
Zauważmy, że ten wykres nie jest zakończony z prawej strony kółeczkiem (pustym lub zamalowanym). W ten sposób zaznaczamy, że funkcja jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich. To oznacza, że linia wykresu ciągnie się dalej, a funkcja nie zmienia swoich własności. Taką konwencję stosujemy we wszystkich naszych podręcznikach.

W powyższych przykładach sporządziliśmy wykresy na podstawie poznanych sposobów przedstawiania funkcji. Często jednak jest odwrotnie – dany jest wykres, a my mamy za zadanie stwierdzić, czy przedstawia on funkcję, i ewentualnie opisać jej własności.

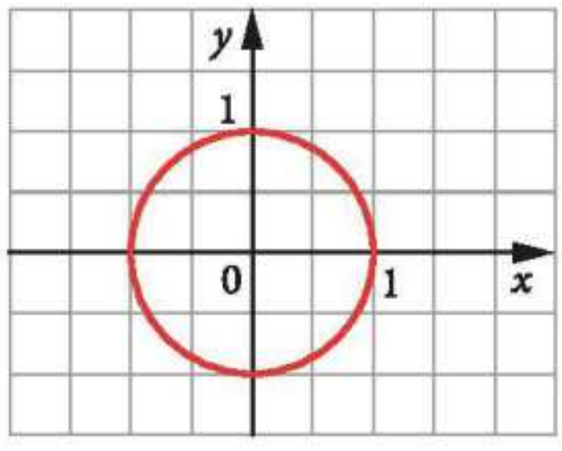
Przykład 6 ◀ zad. 5.13

Który z poniższych wykresów przedstawia funkcję?

I.



II.

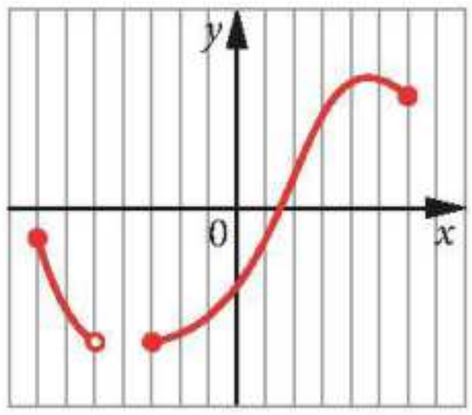


Rozwiązanie

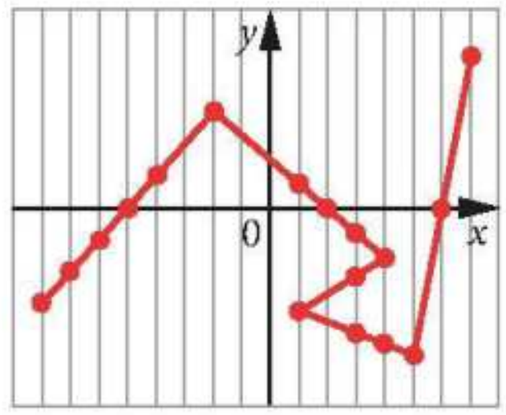
Zgodnie z definicją funkcji dla każdego argumentu x istnieje dokładnie jedna liczba y taka, że $f(x) = y$. Zatem dla każdego x istnieje najwyżej jeden punkt wykresu funkcji o pierwszej współrzędnej x.

Wykres I spełnia ten warunek, natomiast wykres II go nie spełnia – należą do niego różne punkty mające takie same pierwsze współrzędne, np. $(0, 1)$ i $(0, -1)$.

Każda prosta równoległa do osi y może mieć z wykresem funkcji **najwyżej jeden** punkt wspólny.



To jest wykres funkcji.



To nie jest wykres funkcji.

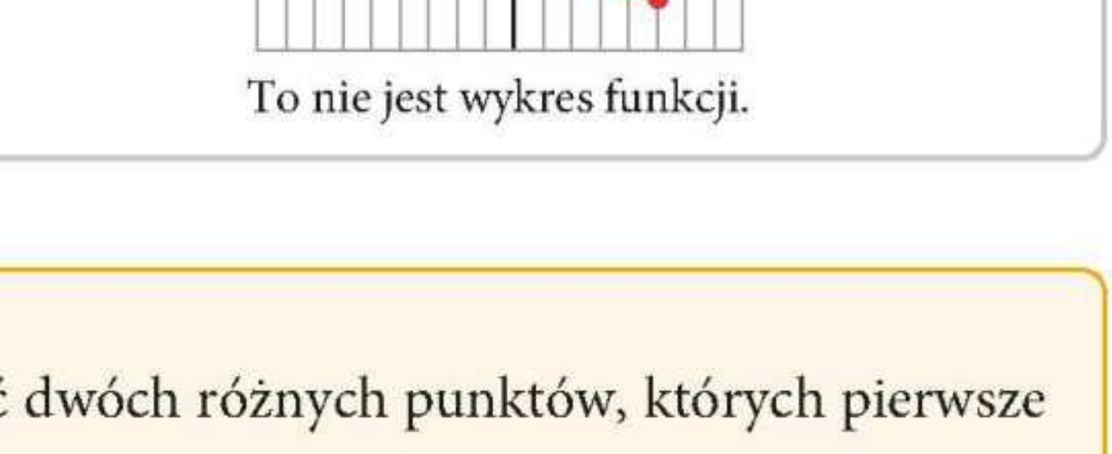
Wniosek

Wykres funkcji nie może zawierać dwóch różnych punktów, których pierwsze współrzędne są takie same.

W postaci wykresów często prezentuje się dane statystyczne.

Przykład 7

Wykres przedstawia procentowy udział osób popierających pewną partię polityczną w ciągu 12 kolejnych miesięcy.

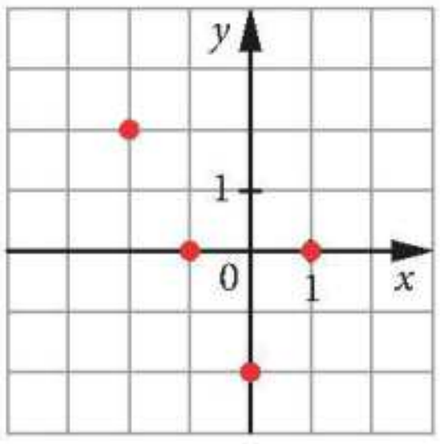


Wykres jest najlepszym sposobem zaprezentowania takich danych. Tabela byłaby mniej czytelna, a podanie wzoru tej funkcji – praktycznie niemożliwe.

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.4 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Na wykresie przedstawiono funkcję. Wskaż tabelę określającą tę funkcję.



A.

x	-2	0	0	2
y	0	-1	1	2

B.

x	-2	-1	0	1
y	-2	0	2	0

C.

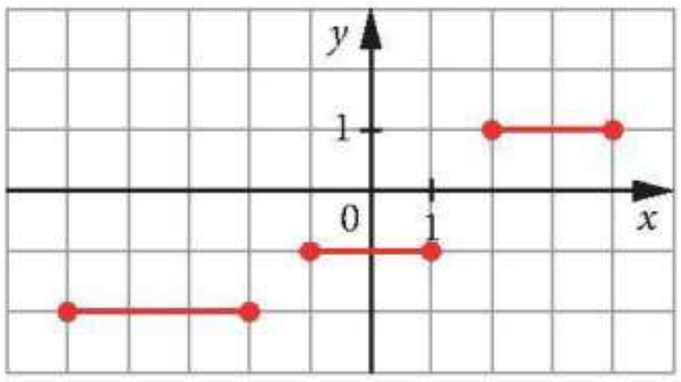
x	-2	-1	0	1
y	2	0	-2	0

D.

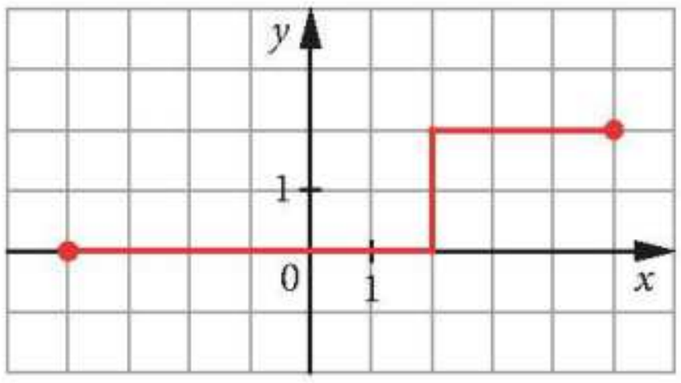
x	-2	-1	0	1
y	2	0	2	0

5.2. Który z wykresów nie przedstawia funkcji?

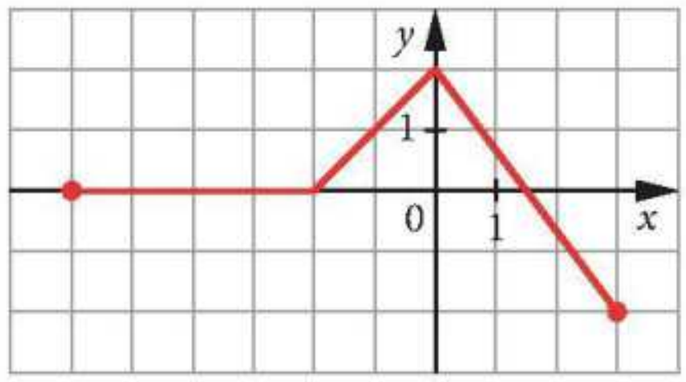
A.



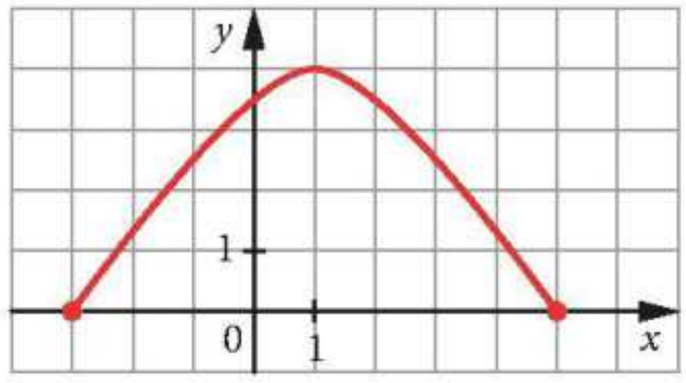
B.



C.



D.

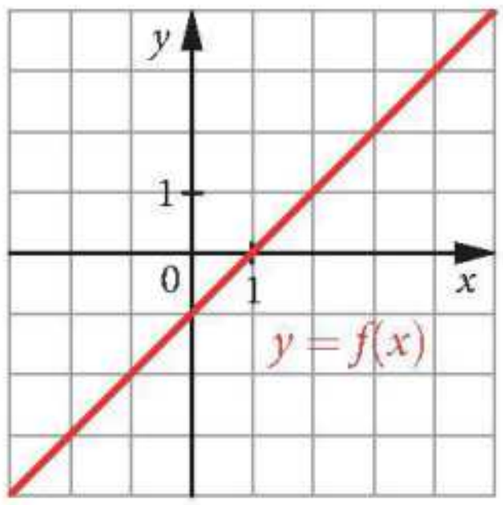


5.3. Dane są punkty $P = (2, 7)$, $Q = (3, 7)$, $R = (3, 5)$, $S = (5, 7)$.
Do wykresu jednej funkcji nie mogą należeć punkty

A. P i Q. **B.** Q i R. **C.** R i S. **D.** S i P.

5.4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f, która przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej

A. liczbę o 1 większą.
B. liczbę o 1 mniejszą.
C. liczbę do niej przeciwną.
D. jej połowę.



5.5. Sporządź wykres funkcji.

a) $f(x) = (-1)^x$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $f(x) = 2^x$, $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
c) $f(x) = -2\sqrt{x-1}$, $D = \{1, 2, 5, 10\}$
d) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

5.6. Sporządź wykres funkcji, która każdej liczbie

a) naturalnej mniejszej od 10 przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez 3.
b) całkowitej przyporządkowuje liczbę 3 razy mniejszą od niej.
c) naturalnej przyporządkowuje liczbę o 2 większą od niej.
d) całkowitej przyporządkowuje liczbę do niej przeciwną.

5.7. Tabela przedstawia ceny biletów normalnych na dystansie nie większym od 50 km w pociągach Kolei Mazowieckich obowiązujące w 2018 r.

Odległość [km]	⟨0; 5⟩	⟨5; 10⟩	⟨10; 15⟩	⟨15; 20⟩	⟨20; 30⟩	⟨30; 40⟩	⟨40; 50⟩
Cena biletu [zł]	3,70	5,80	6,80	8,10	10,50	11,80	13,80

Na podstawie tabeli narysuj wykres funkcji, która przyporządkowuje liczbie przebytych kilometrów cenę biletu za przejazd.

5.8. Jak wygląda wykres funkcji $y = f(x)$, jeżeli y jest resztą z dzielenia liczby x przez 5, a dziedziną funkcji jest zbiór liczb naturalnych? Naszkicuj ten wykres.

5.9. Sporządź wykres funkcji, która każdej liczbie rzeczywistej x z przedziału $\langle -4; 4\rangle$ przyporządkowuje największą liczbę całkowitą y taką, że $y \leqslant x$.

5.10. W pewnym zakładzie fotograficznym obowiązuje podany cennik wykonywania odbitek.

Narysuj wykres funkcji, która powierzchni zdjęcia (w dm^2) przyporządkowuje jego cenę.

Rozmiar [cm × cm]	Cena odbitki [zł]
9×13	0,75
10×15	0,90
13×18	1,60
15×21	1,80

5.11. Sporządź wykres dowolnej funkcji spełniającej podane warunki dotyczące dziedziny D i zbioru wartości ZW.

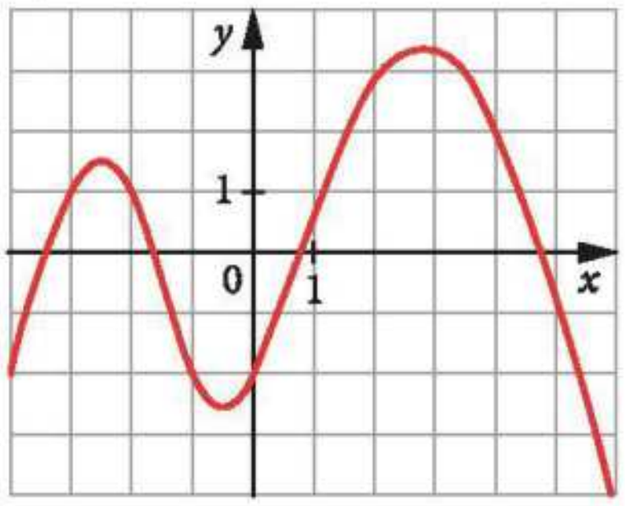
a) D ma 5 elementów i ZW ma 3 elementy.
b) D ma 5 elementów i ZW ma 5 elementów.
c) D ma nieskończenie wiele elementów i ZW ma jeden element.
d) D ma nieskończenie wiele elementów i ZW ma 3 elementy.
e) D ma nieskończenie wiele elementów i ZW ma nieskończenie wiele elementów.

5.12. Wyznacz dziedzinę funkcji $y = f(x)$ i narysuj jej wykres.

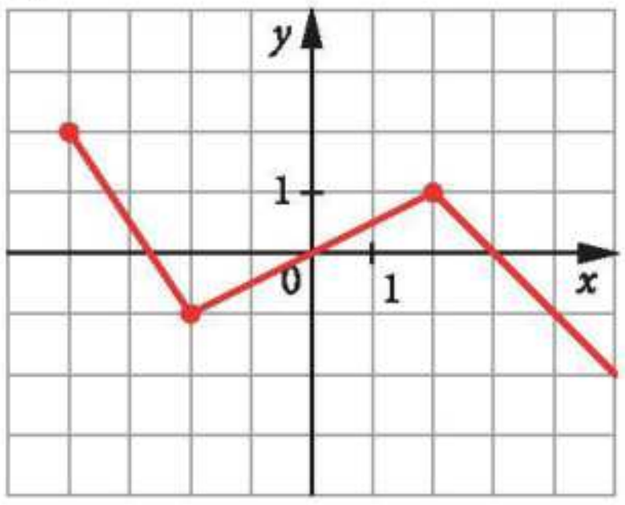
a) $f(x) = 3\sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt{|x|}$ c) $f(x) = \sqrt{2x}$

5.13. Czy podany rysunek przedstawia wykres funkcji?

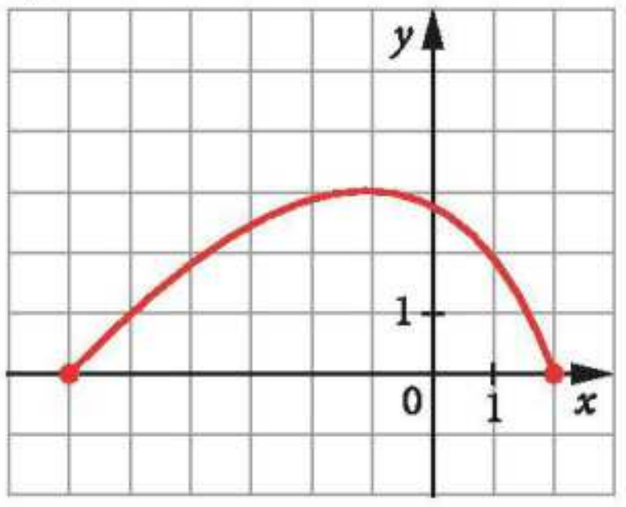
a)



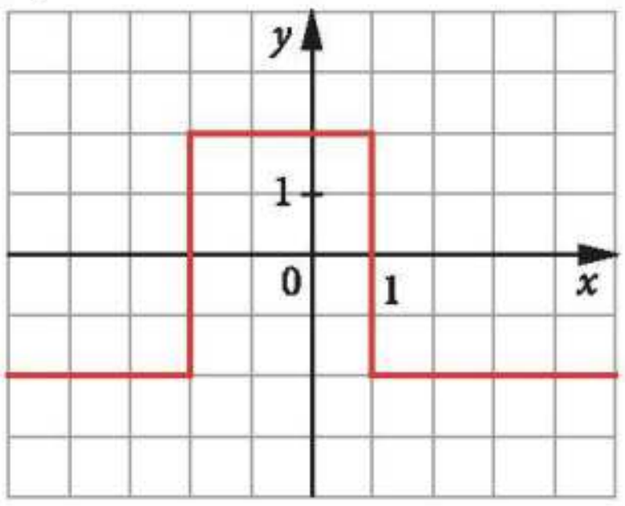
c)



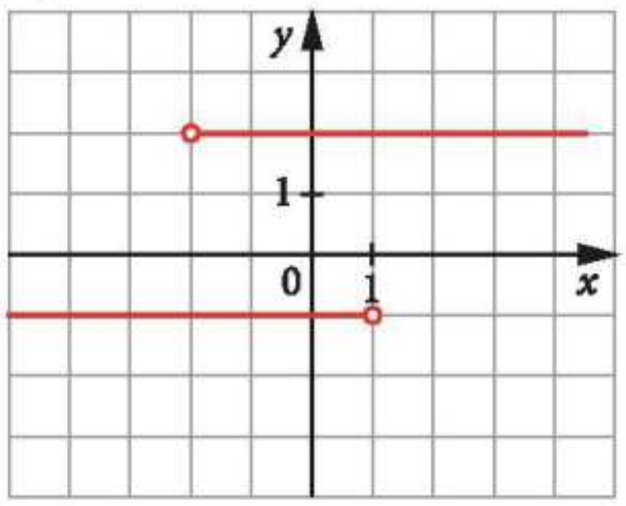
e)



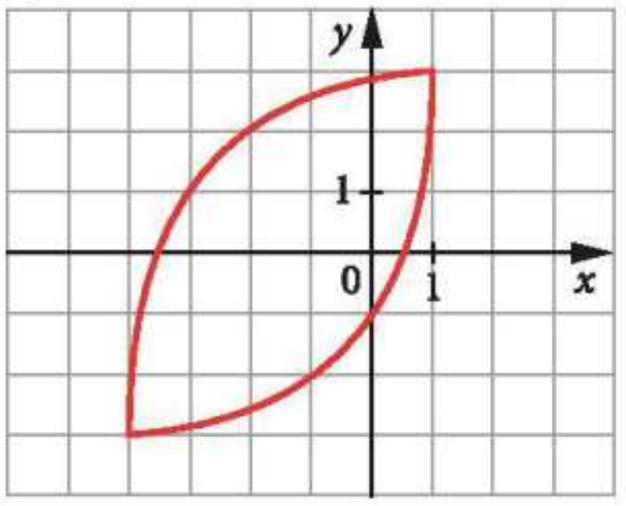
b)



d)



f)

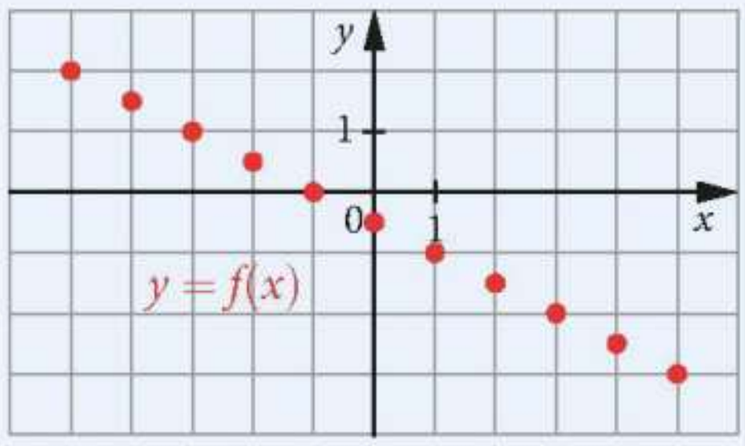


5.14. Funkcja f każdej liczbie całkowitej x z przedziału $\langle -4; 4\rangle$ przyporządkowuje liczbę o 2 mniejszą od połowy kwadratu liczby x.
a) Określ funkcję f za pomocą wzoru.
b) Sporządź wykres funkcji f.
c) Podaj zbiór wartości funkcji f.

5.15. Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje największą liczbę całkowitą nie większą od liczby x.
a) Oblicz $f(2{,}4)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{11}{3}\right)$, $f\left(-\sqrt{13}\right)$.
b) Podaj zbiór wartości funkcji f.
c) Sporządź wykres funkcji f dla argumentów z przedziału $\langle -3; 5\rangle$.

Prosto do matury

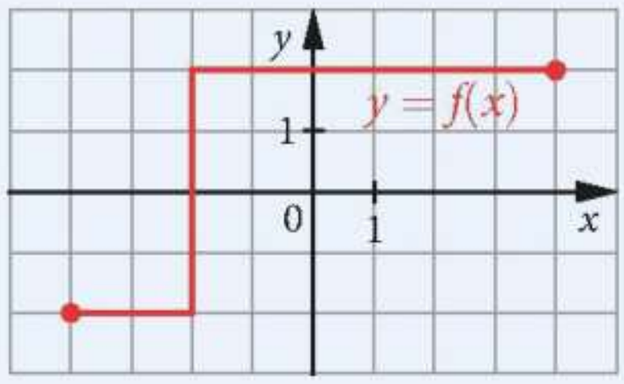
1. Wykres przedstawia funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb całkowitych z przedziału $\langle -5; 5\rangle$. Oceń prawdziwość podanych zdań.



A. $f(5) = -3$
B. Liczba 10,5 należy do zbioru wartości funkcji f.
C. Funkcję f można wyrazić wzorem $f(x)=\frac{-1-x}{2}$.

2. Sporządź wykres funkcji, która każdej liczbie całkowitej z przedziału $\langle -3; 3\rangle$ przyporządkowuje liczbę o 4 mniejszą od jej kwadratu.

3. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{8}{x-1}$ o dziedzinie $D = \{-3, -1, 0, 3, 9\}$. Podaj zbiór wartości i narysuj wykres tej funkcji.



D **4.** Czy na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji? Odpowiedź uzasadnij.

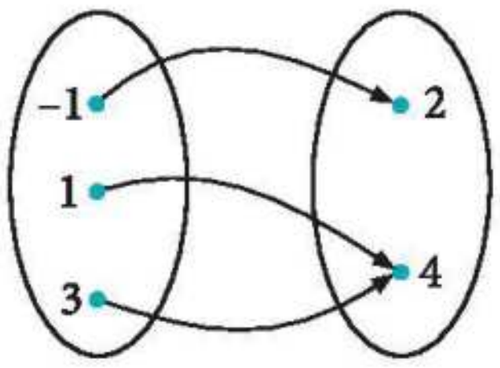
5. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej n resztę z dzielenia kwadratu tej liczby przez 3.
a) Sporządź wykres tej funkcji dla $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}$.
D b) Wykaż, że liczba 2 nie należy do zbioru wartości funkcji f.

6. Odczytywanie argumentów oraz wartości funkcji z wykresu

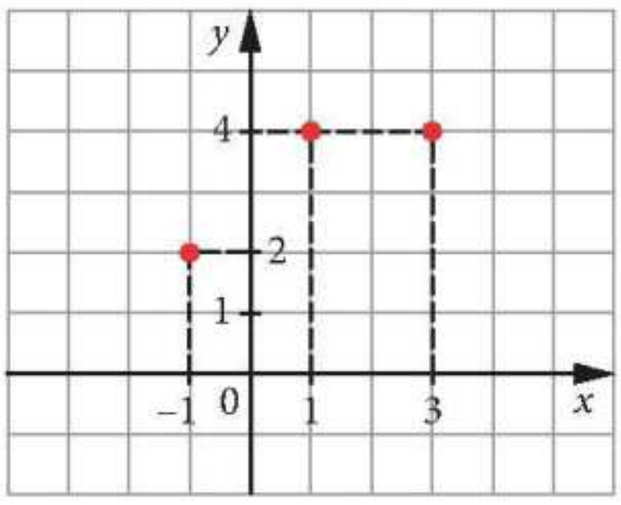
Umiejętności:

- odczytywanie z wykresu dziedziny oraz zbioru wartości funkcji
- odczytywanie z wykresu funkcji argumentów, dla których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą
- odczytywanie z wykresu funkcji liczby rozwiązań równania $f(x) = m$

Przyjrzyjmy się funkcji danej grafem. Jej dziedziną jest zbiór $\{-1, 1, 3\}$, zaś jej zbiorem wartości jest $\{2, 4\}$.



Narysujmy wykres tej funkcji i zauważmy, że na jego podstawie równie łatwo jak na podstawie grafu możemy ustalić dziedzinę i zbiór wartości. Trzeba tylko sprawdzić, jakie są pierwsze i drugie współrzędne punktów należących do wykresu.



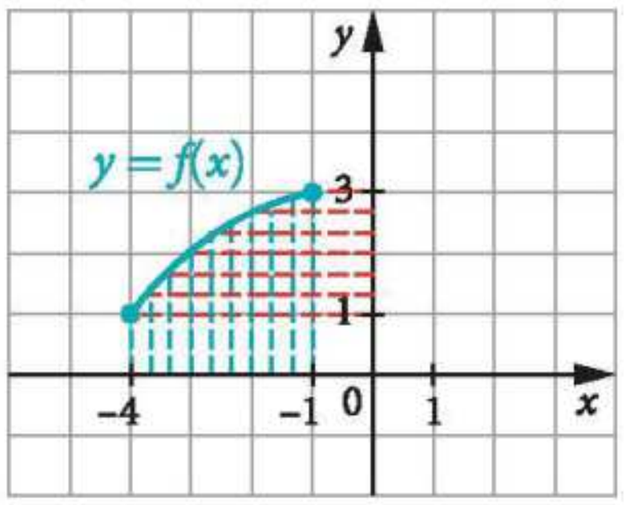
← przez każdy punkt wykresu prowadzimy prostą pionową oraz poziomą

← odczytujemy, w których miejscach proste przecięły osie układu

Jeśli taką operację zastosujemy do wszystkich punktów wykresu, to otrzymane punkty na osi x utworzą dziedzinę, a na osi y – zbiór wartości funkcji.

Przykład 1 ◂ zad. 6.4

Odczytamy dziedzinę i zbiór wartości funkcji danej za pomocą wykresu.



Rozwiązanie

Wyobraźmy sobie, że przez każdy punkt wykresu prowadzimy prostą pionową i poziomą (na rysunku zaznaczono kilka takich prostych).

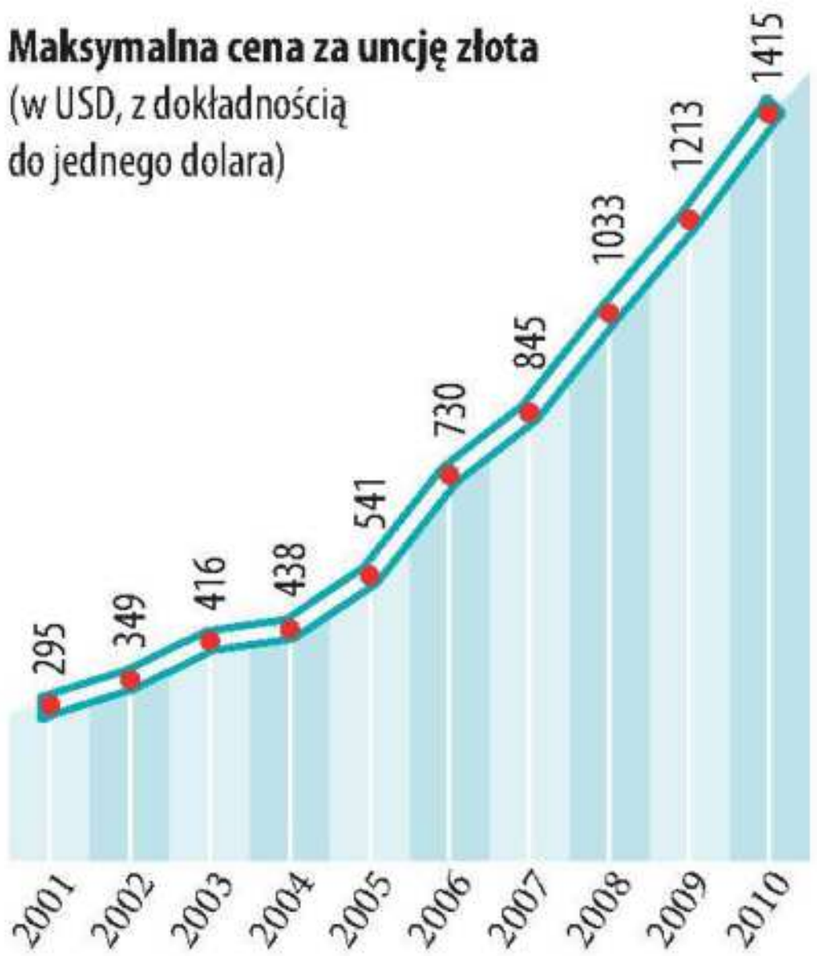
← na osi x otrzymujemy przedział $\langle -4; -1\rangle$

← na osi y otrzymujemy przedział $\langle 1; 3\rangle$

Odp.: $D = \langle -4; -1\rangle$, $ZW = \langle 1; 3\rangle$

Przykład 2

Odczytamy dziedzinę i zbiór wartości funkcji, której wykres jest przedstawiony obok. Należy pamiętać, że odcinki łączące poszczególne punkty wykresu są tylko pomocnicze.



Rozwiązanie

Dziedziną jest dziesięcioelementowy zbiór lat:

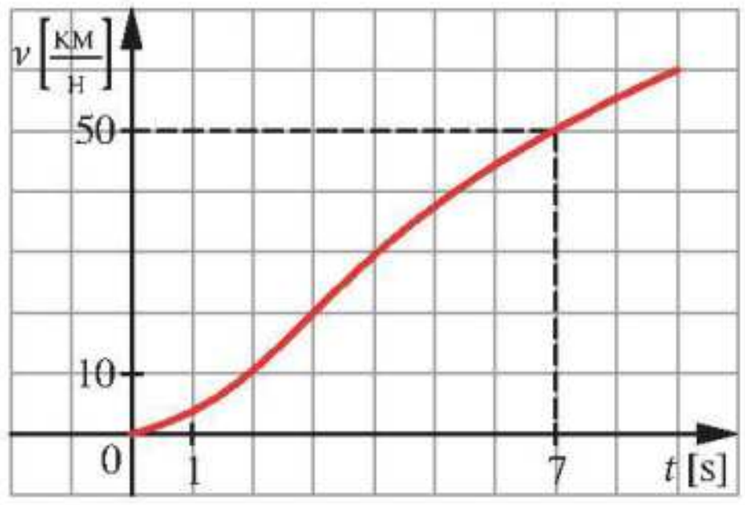
$$D = \{2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010\}$$

a zbiorem wartości – zbiór liczb:

$$ZW = \{295, 349, 416, 438, 541, 730, 845, 1033, 1213, 1415\}$$

Przykład 3 ◂ zad. 6.5

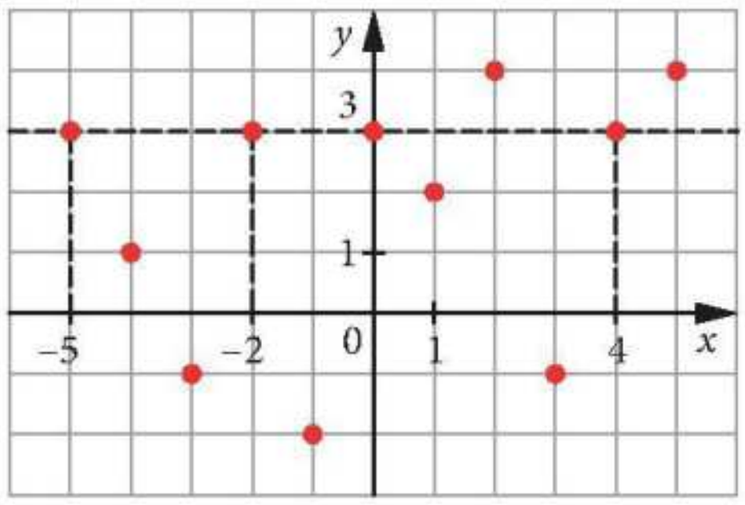
Wykres przedstawia prędkość samochodu mierzoną od momentu ruszenia ze skrzyżowania. Odczytamy z wykresu, w którym momencie samochód osiągnął prędkość 50 km/h.



Odp.: Nastąpiło to w 7. sekundzie.

Przykład 4 ◂ zad. 6.6

Korzystając z wykresu funkcji $y = f(x)$, sprawdzimy, dla których argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3.



Rozwiązanie

Prowadzimy prostą poziomą $y = 3$ i odczytujemy pierwsze współrzędne wszystkich jej punktów wspólnych z wykresem funkcji.

Są nimi: $x = -5$, $x = -2$, $x = 0$ oraz $x = 4$.

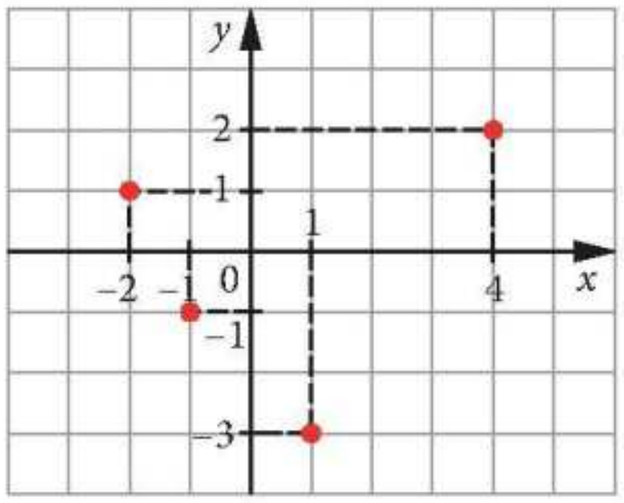
Odp.: $f(x) = 3$ dla $x = -5$, $x = -2$, $x = 0$ lub $x = 4$.

Wartość największa, wartość najmniejsza funkcji

Funkcje liczbowe opisują najrozmaitsze zależności. Wśród własności, na które często zwracamy uwagę, są **wartość największa i wartość najmniejsza**, jakie funkcja przyjmuje.

Jeżeli dany jest wykres funkcji, to szukamy punktu wykresu leżącego najniżej oraz punktu wykresu leżącego najwyżej względem osi x.

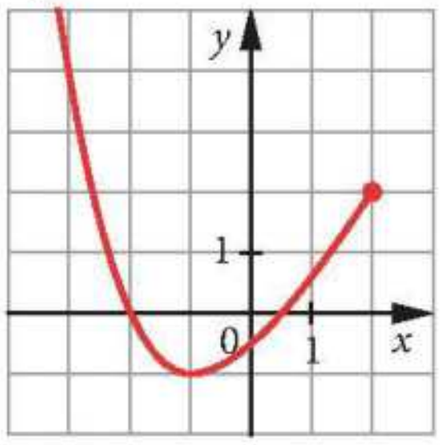
Dla danej obok funkcji najmniejszą wartością jest liczba -3, a największą – liczba 2.



Przykład 5 ◂ zad. 6.12

Wyznaczymy wartość najmniejszą i wartość największą narysowanej funkcji. Odczytamy również argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.

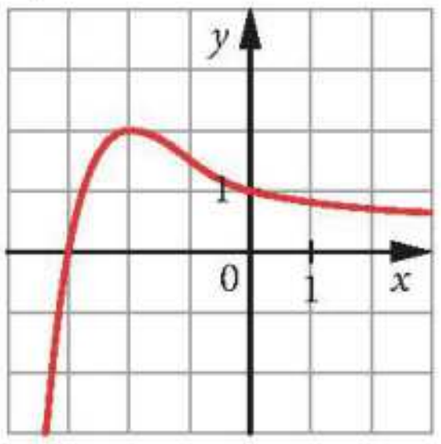
a)



⟵ funkcja nie przyjmuje wartości największej

⟵ wartość najmniejsza: -1 dla $x = -1$

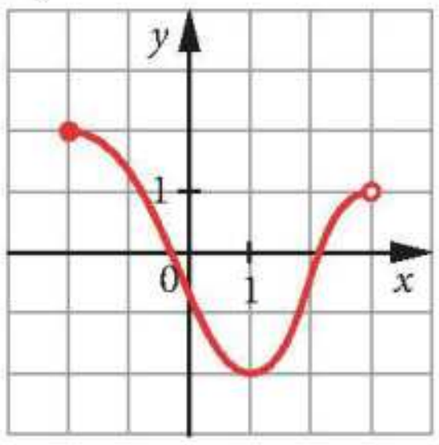
b)



⟵ wartość największa: 2 dla $x = -2$

⟵ funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej

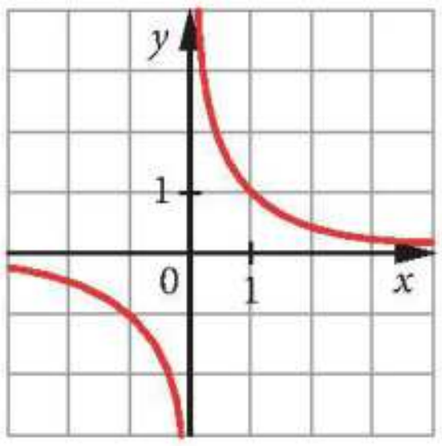
c)



⟵ wartość największa: 2 dla $x = -2$

⟵ wartość najmniejsza: -2 dla $x = 1$

d)

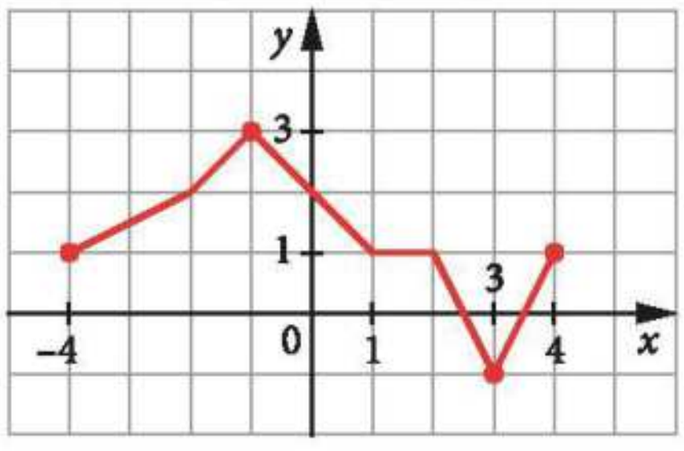


⟵ funkcja nie przyjmuje wartości największej

⟵ funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej

Przykład 6 ◂ zad. 6.13

Wyznaczymy dziedzinę, zbiór wartości oraz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji danej w postaci wykresu.



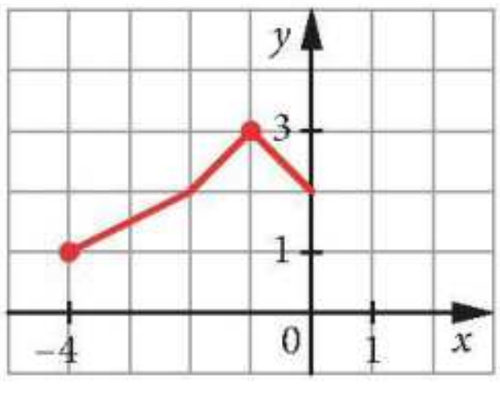
⟵ $D = \langle -4; 4\rangle$, $ZW = \langle -1; 3\rangle$

⟵ funkcja przyjmuje wartość największą równą 3 dla $x = -1$

⟵ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą -1 dla $x = 3$

Czasem interesuje nas największa i najmniejsza wartość funkcji nie w całej dziedzinie, tylko w pewnym jej podzbiorze.

Gdybyśmy na przykład rozpatrywali tę funkcję tylko w przedziale $\langle -4; 0\rangle$, to wartość największa nie zmieniłaby się, ale wartość najmniejsza uległaby zmianie.



⟵ funkcja przyjmuje wartość największą równą 3 dla $x = -1$

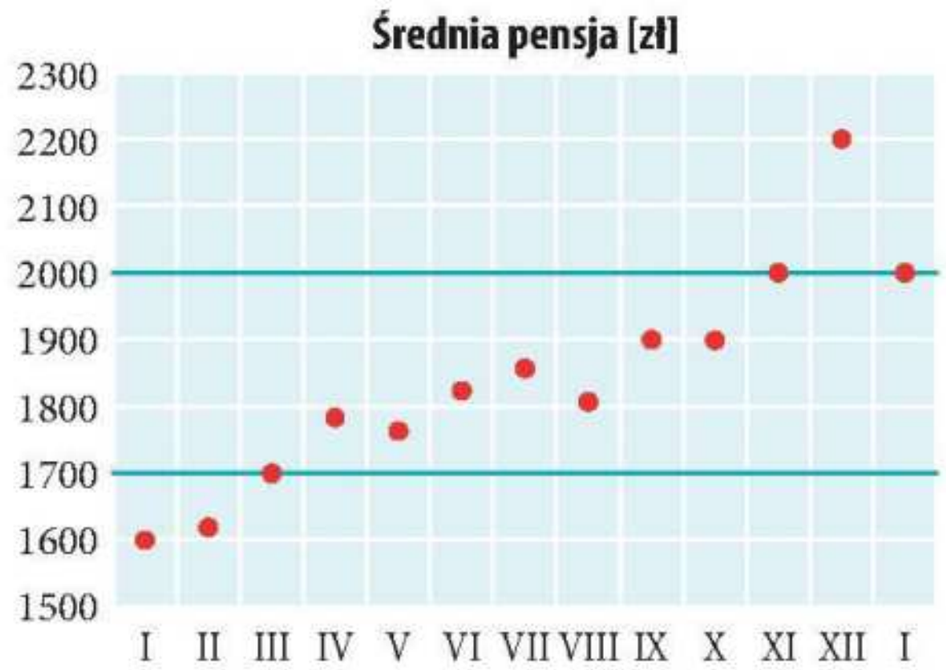
⟵ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą 1 dla $x = -4$

Liczba rozwiązań równania $f(x) = m$

Czasami interesuje nas odpowiedź na pytanie, ile razy funkcja osiągnęła pewną wartość m, bez wskazywania argumentów, dla których funkcja tę wartość przyjmuje.

Przykład 7 ◂ zad. 6.17

Z wykresu przedstawiającego wysokość średniej pensji w pewnej firmie w kolejnych miesiącach możemy odczytać, że np. w tym czasie średnia w wysokości 2000 zł wystąpiła dwa razy, w wysokości 1700 zł raz i ani razu nie sięgnęła kwoty 2300 zł.



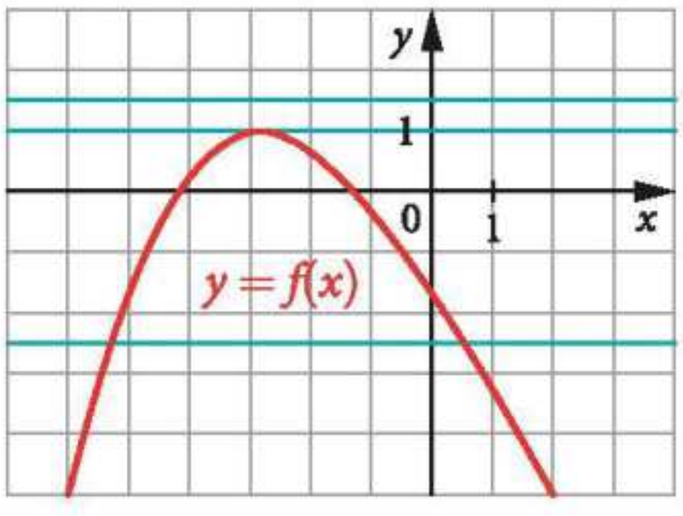
Jeżeli funkcję „średnia pensja” oznaczymy przez g, to możemy napisać, że równanie $g(x) = 2000$ ma dwa rozwiązania, równanie $g(x) = 1700$ ma jedno rozwiązanie, a równanie $g(x) = 2300$ nie ma rozwiązań.

Czasem wygodniej jest zamiast „równanie nie ma rozwiązań” zapisać „liczba rozwiązań równania jest równa 0”.

Przykład 8 ◂ zad. 6.18

Odczytamy z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m.

- Jeżeli $m < 1$, to każda prosta $y = m$ przecina wykres w dwóch punktach, więc równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania.
- Jeżeli $m = 1$, to prosta $y = 1$ ma jeden punkt wspólny z wykresem, czyli równanie $f(x) = 1$ ma jedno rozwiązanie.
- Jeżeli $m > 1$, to prosta $y = m$ nie ma punktów wspólnych z wykresem, zatem równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązań.



Wyniki zapiszemy w tabeli.

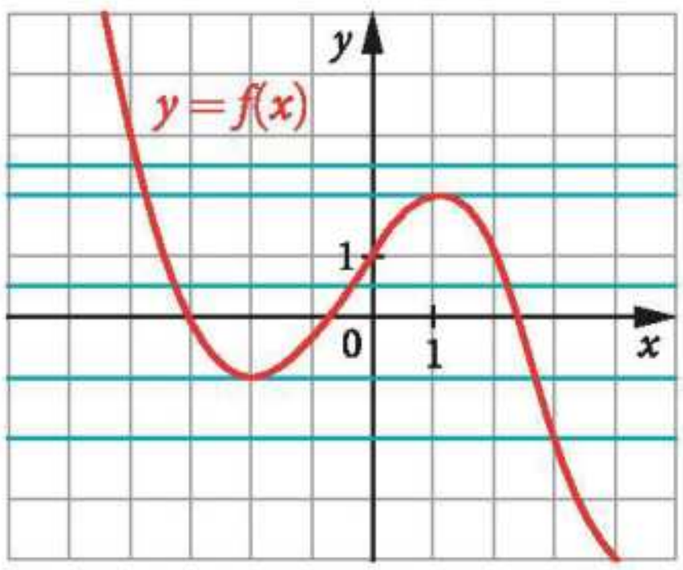
Wartość m	Liczba rozwiązań równania $f(x) = m$
$m \in (-\infty; 1)$	2
$m = 1$	1
$m \in (1; \infty)$	0

Przykład 9

Odczytamy z wykresu funkcji $y = f(x)$ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m.

Rozwiązanie

Podobnie jak poprzednio prowadzimy proste równoległe do osi x i odczytujemy liczby punktów przecięcia każdej z nich z wykresem.



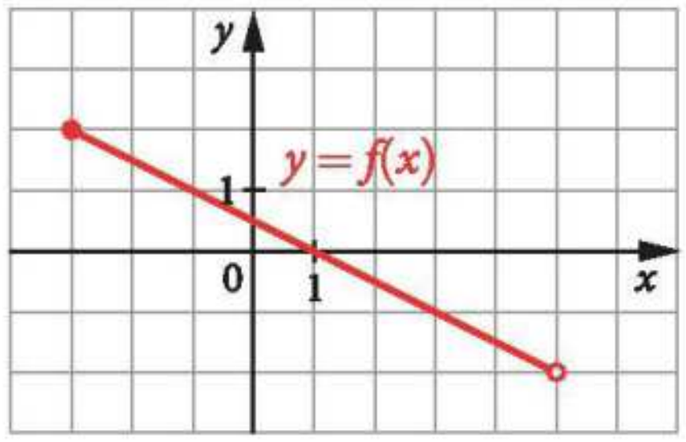
Wartość m	Liczba rozwiązań równania $f(x) = m$
$m \in (-\infty; -1)$	1
$m = -1$	2
$m \in (-1; 2)$	3
$m = 2$	2
$m \in (2; \infty)$	1

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Wskaż dziedzinę D i zbiór wartości ZW funkcji przedstawionej za pomocą wykresu.

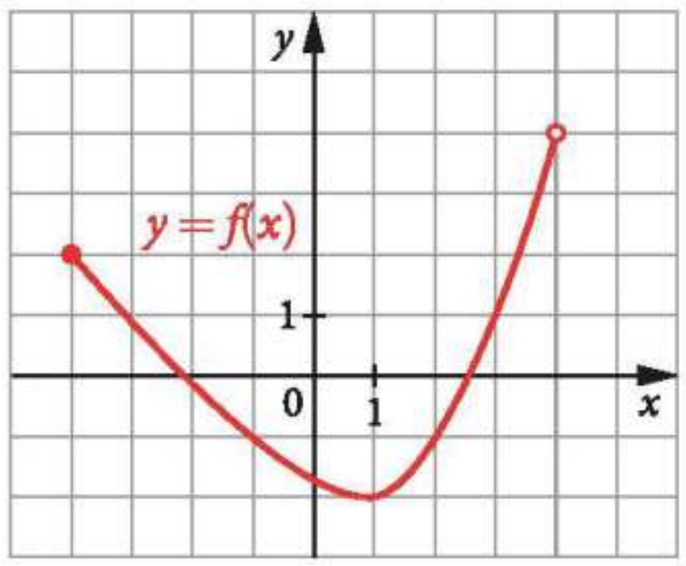
A. $D = \langle -3; 5)$, $ZW = \langle -2; 2)$
B. $D = (-3; 5\rangle$, $ZW = \langle -2; 2)$
C. $D = (-3; 5\rangle$, $ZW = (-2; 2\rangle$
D. $D = \langle -3; 5)$, $ZW = (-2; 2\rangle$



6.2. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

Wskaż zdanie prawdziwe.

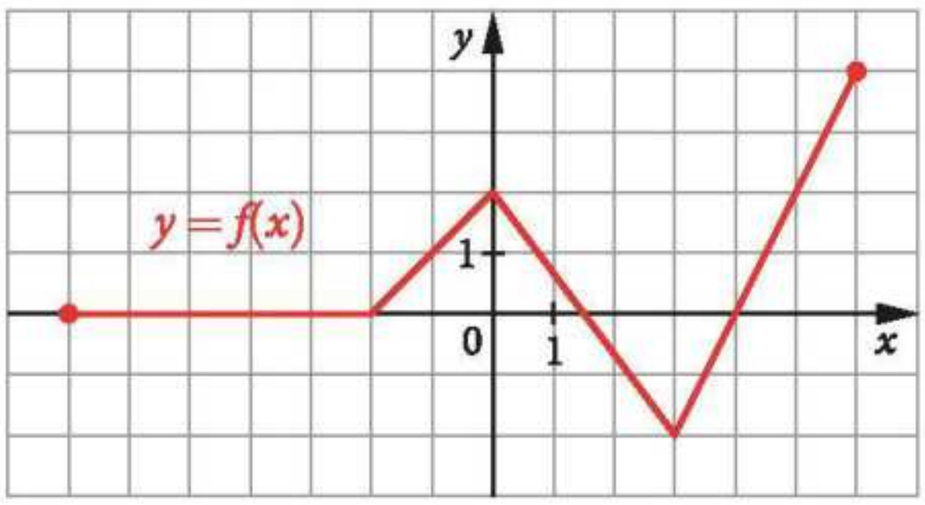
A. Funkcja f przyjmuje wartość największą i przyjmuje wartość najmniejszą.
B. Funkcja f przyjmuje wartość największą i nie przyjmuje wartości najmniejszej.
C. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej i przyjmuje wartość najmniejszą.
D. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej i nie przyjmuje wartości najmniejszej.



6.3. W którym z podanych przedziałów funkcja przedstawiona na wykresie przyjmuje zarówno wartość największą, jak i wartość najmniejszą?

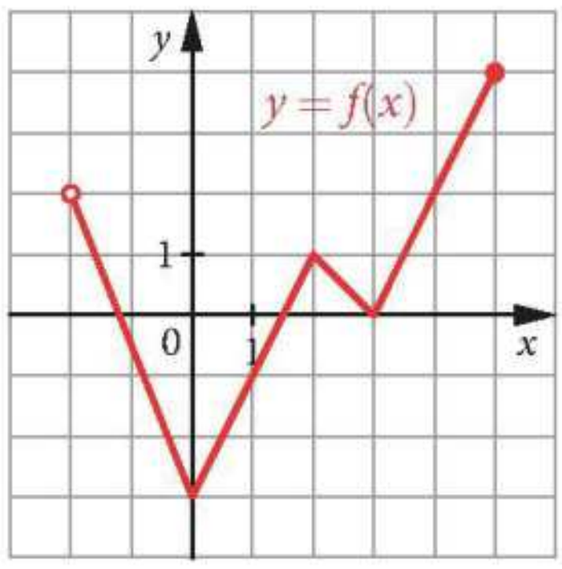
A. $(-1; 1)$ **C.** $(1; 5)$

B. $(0; 2)$ **D.** $(-1; 4)$

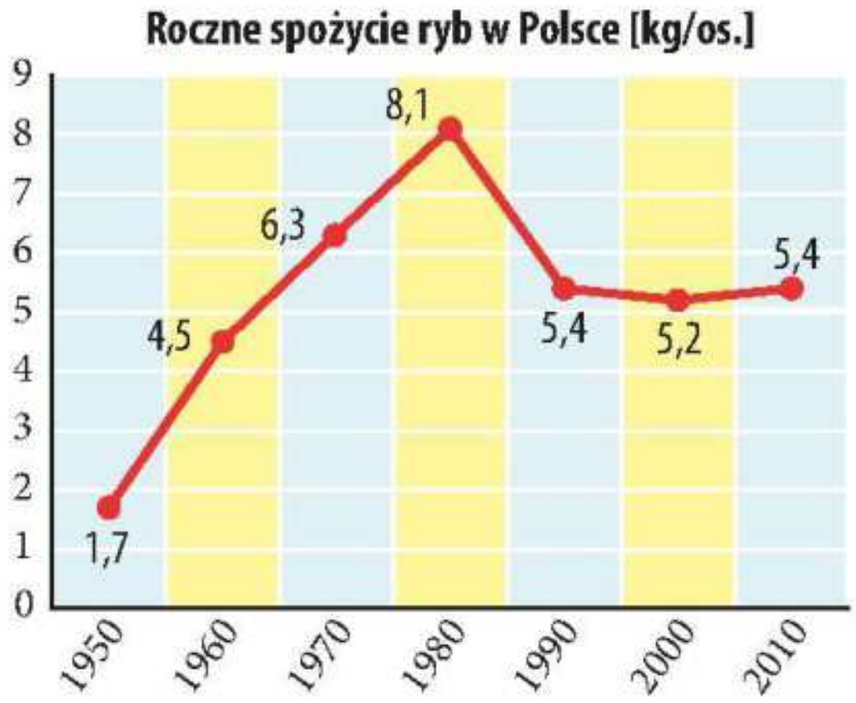


6.4. Odczytaj z wykresu (rys. 1) dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x)$.

6.5. Funkcja na wykresie (rys. 2) przedstawia roczne spożycie ryb i przetworów rybnych w Polsce w kg/os. (źródło: *Tablice geograficzne* 2014). Odczytaj z wykresu, kiedy funkcja osiągnęła wartość 4,5 kg/os.



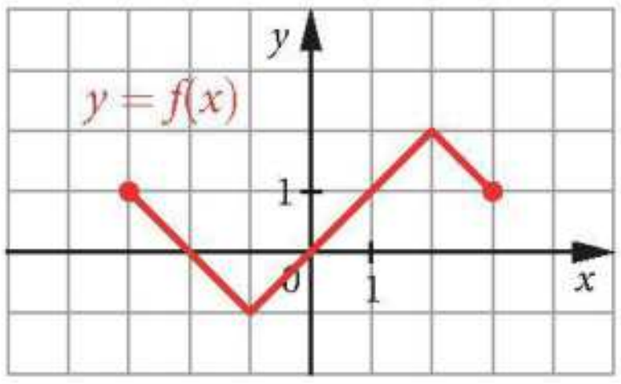
Rys. 1.



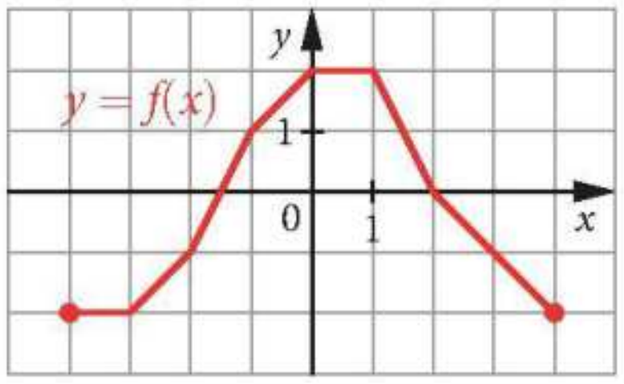
Rys. 2.

6.6. Odczytaj z wykresu funkcji argumenty, dla których

a) $f(x) = 0$, $f(x) = 2$, $f(x) = \frac{1}{2}$, $f(x) = 1$.

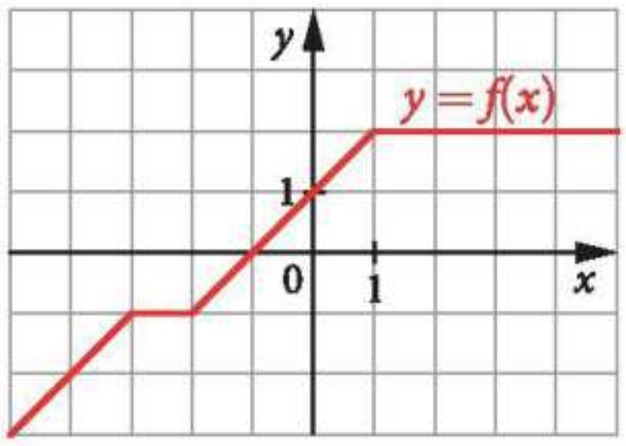


b) $f(x) = 1$, $f(x) = -1$, $f(x) = 2$, $f(x) = -2$.

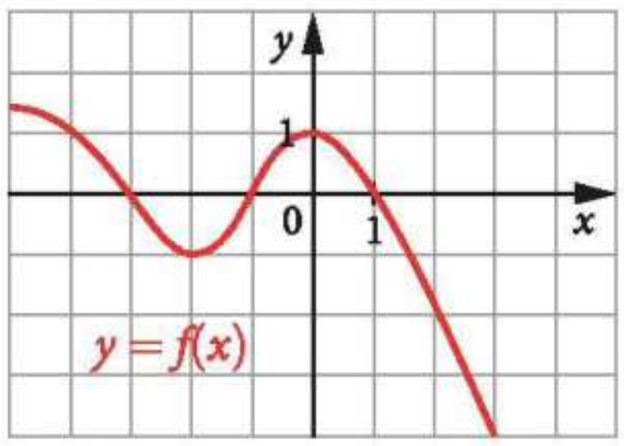


6.7. Odczytaj z wykresu argumenty, dla których $f(x) = -2$, $f(x) = 0$, $f(x) = 1$.

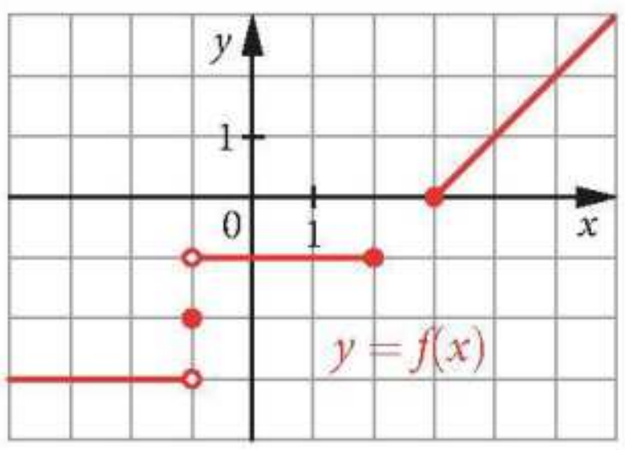
a)



b)

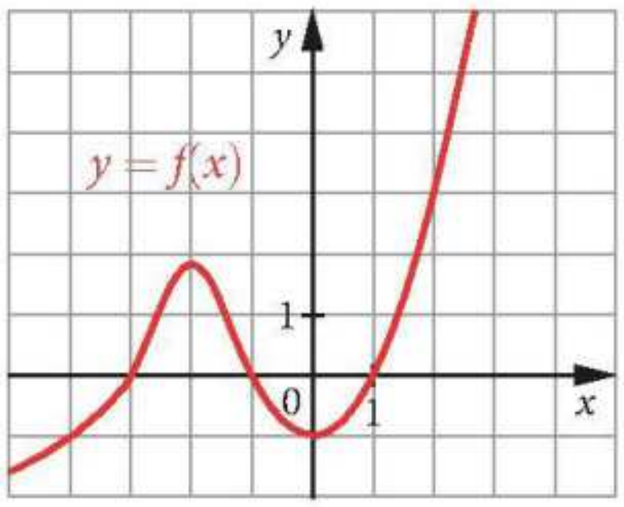


c)



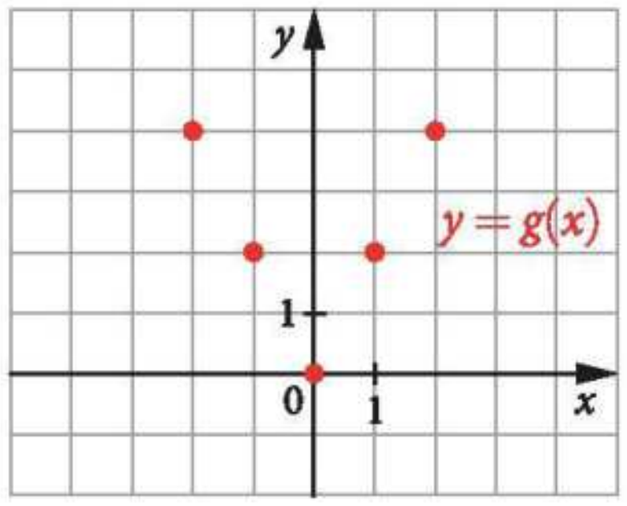
6.8. Na podstawie wykresu funkcji uzupełnij zdania.

a)



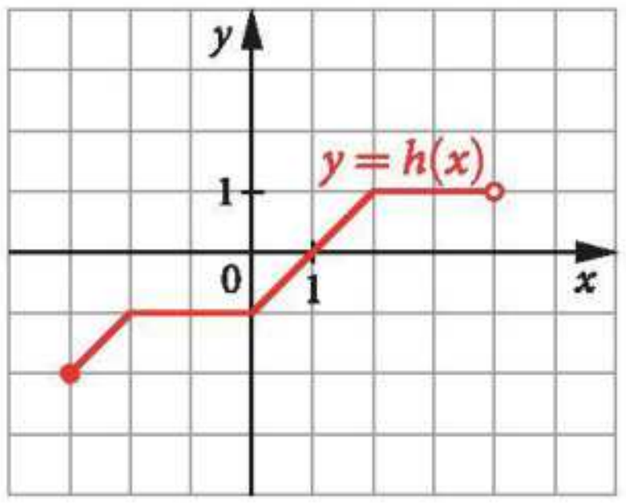
$f(x) = -1$ dla x ?
$f(x) = 3$ dla x ?

b)



$g(x) = 0$ dla x ?
$g(x) = 2$ dla x ?

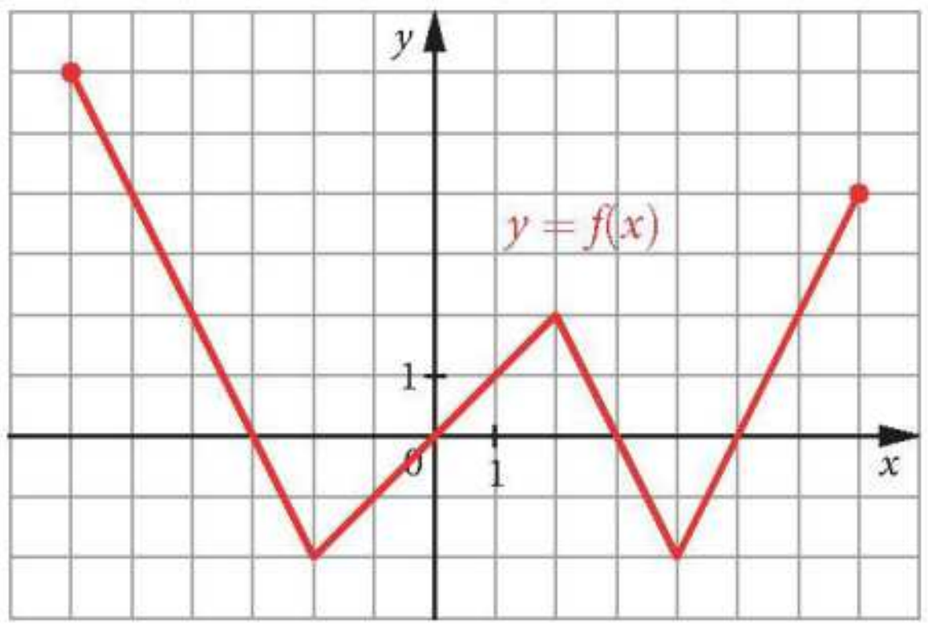
c)



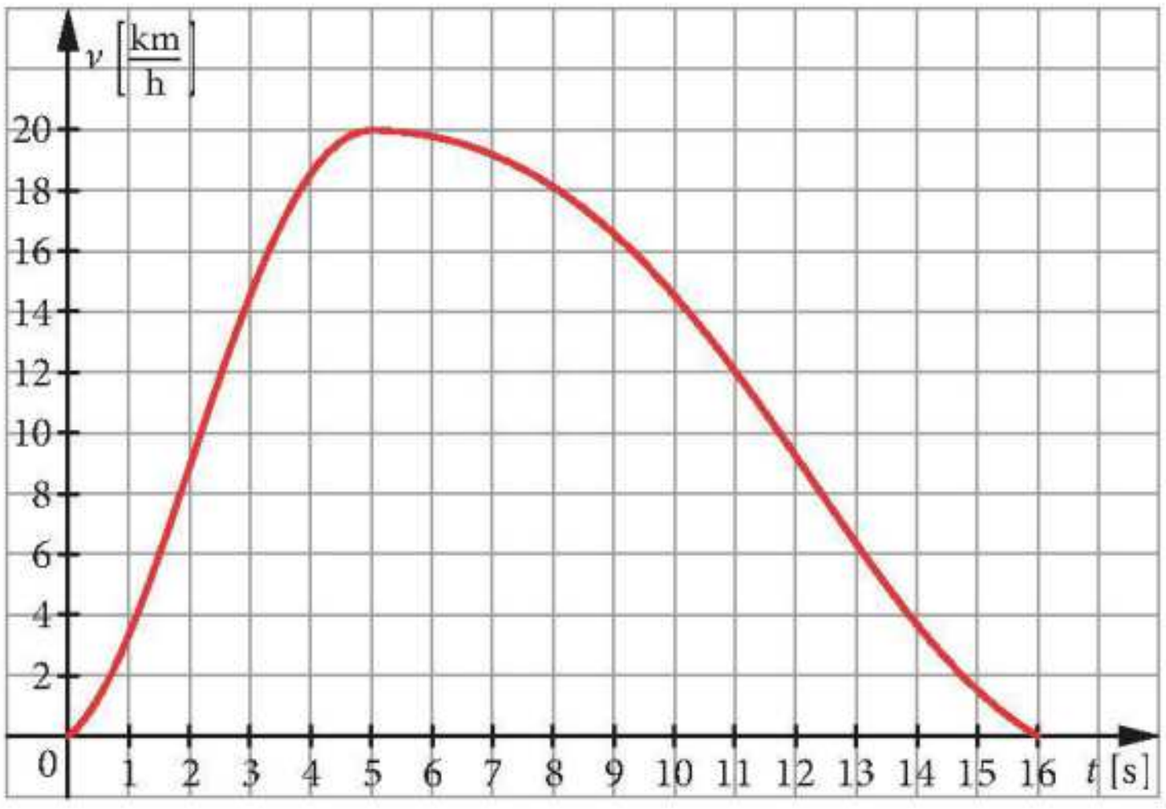
$h(x) = -2$ dla x ?
$h(x) = 1$ dla x ?

6.9. Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rozwiąż podane równanie.

a) $f(x) = 4$
b) $f(x) = 6$
c) $f(x) = 2$
d) $f(x) = 0$

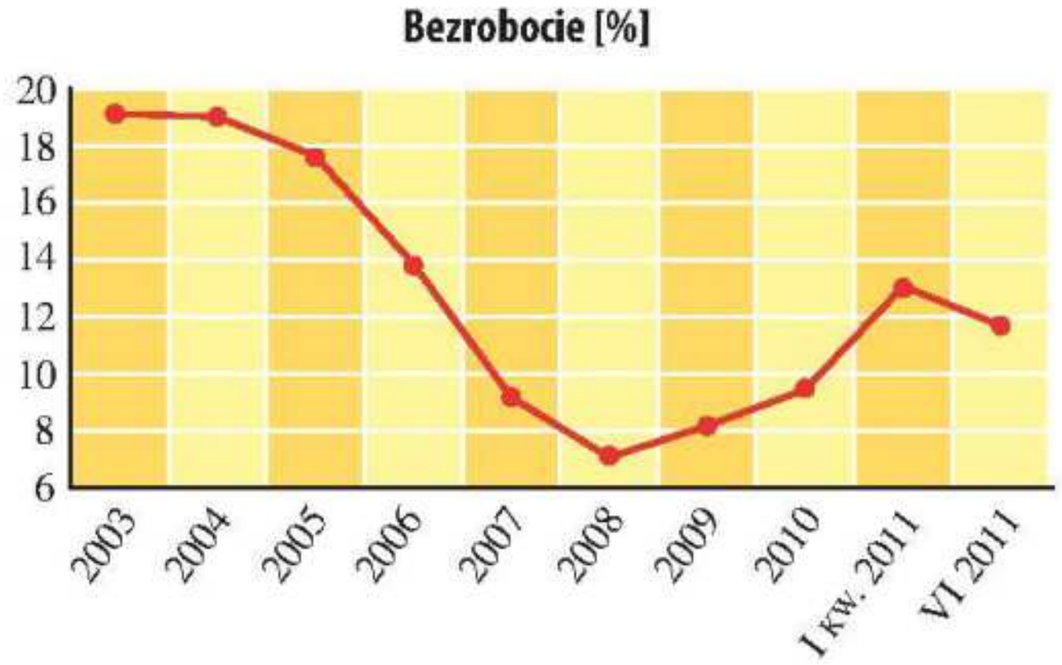


6.10. Wykres przedstawia prędkość rowerzysty od momentu ruszenia z jednego skrzyżowania do momentu zatrzymania się przed drugim skrzyżowaniem.



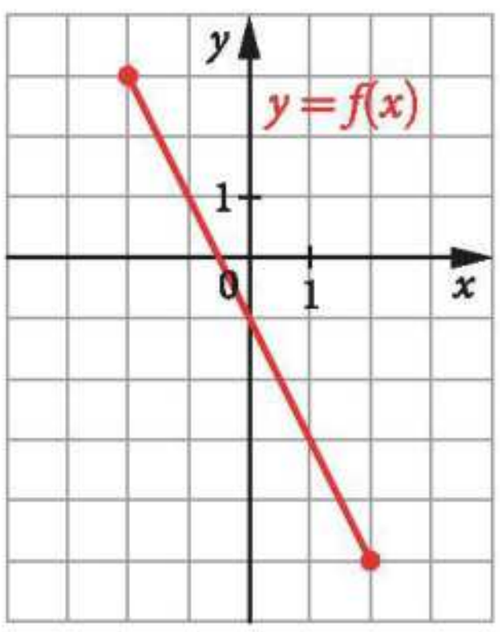
a) Ile czasu trwał przejazd między skrzyżowaniami?
b) Jaką maksymalną prędkość rozwinął rowerzysta?
c) Po jakim czasie od ruszenia ze skrzyżowania osiągnął maksymalną prędkość?

6.11. Odczytaj z wykresu, w którym roku prezentowanego okresu odsetek bezrobotnych był najniższy, a w którym najwyższy.

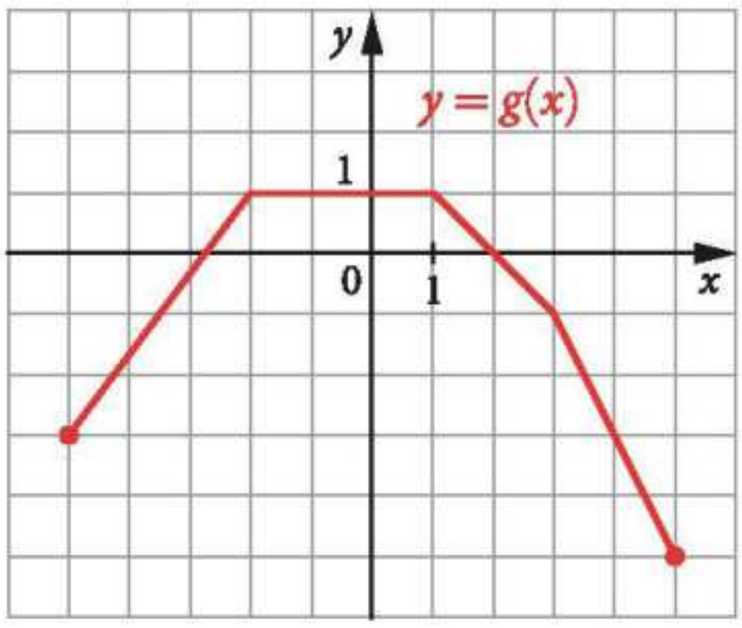


6.12. Odczytaj z wykresu dziedzinę, zbiór wartości, wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji.

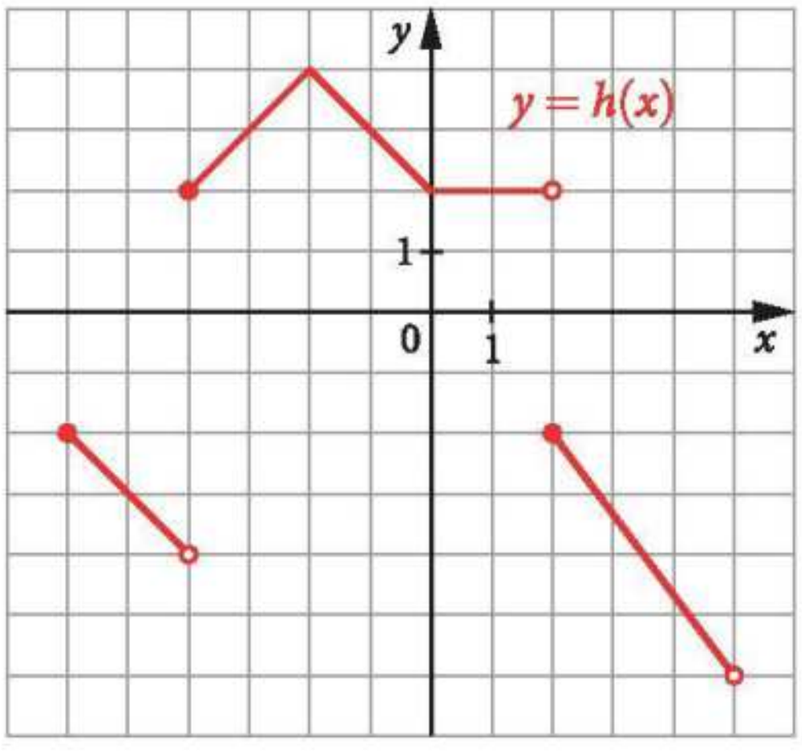
a)



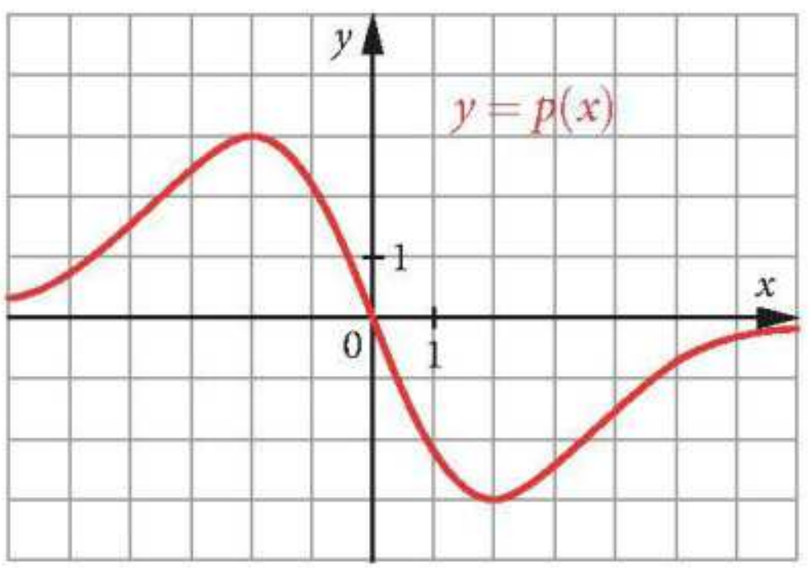
b)



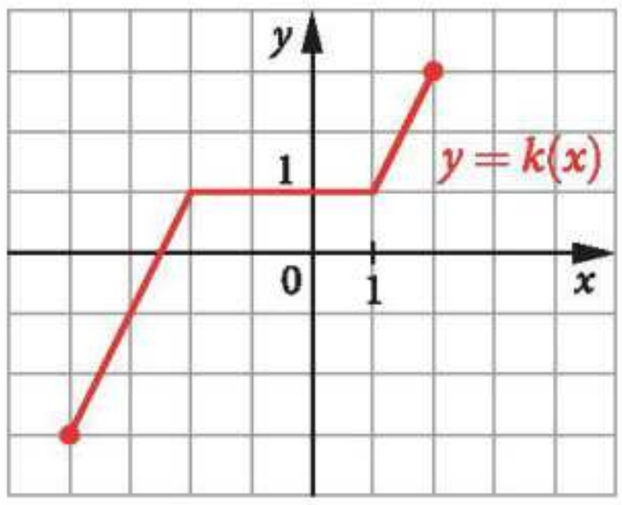
c)



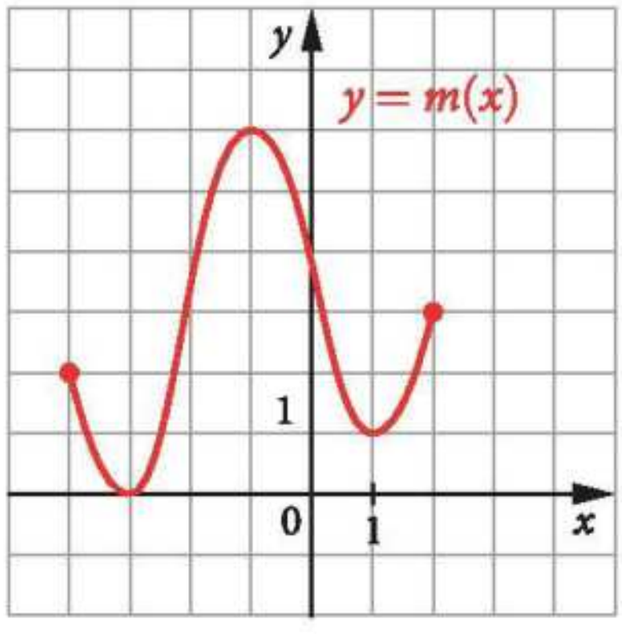
d)



e)



f)



6.13. Korzystając z wykresów funkcji podanych w zadaniu 6.12, odczytaj wartość najmniejszą oraz wartość największą odpowiedniej funkcji w podanym przedziale.

a) $y = f(x)$ dla $x \in \langle 0; 1\rangle$
b) $y = g(x)$ dla $x \in \langle -5; 0\rangle$
c) $y = h(x)$ dla $x \in \langle -2; 2\rangle$
d) $y = p(x)$ dla $x \in \langle -1; 2\rangle$
e) $y = k(x)$ dla $x \in \langle -1; 2\rangle$
f) $y = m(x)$ dla $x \in \langle -1; 2\rangle$

6.14. Podaj przykład wykresu funkcji o dziedzinie $D = (1; 2\rangle \cup (3; 4\rangle$, która

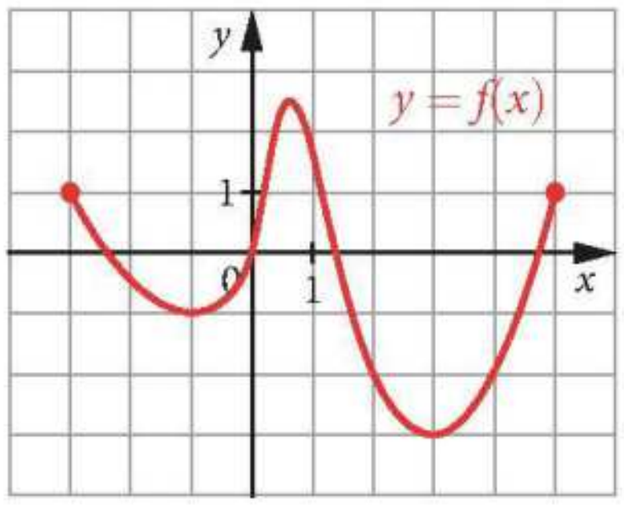
a) przyjmuje wartość największą i wartość najmniejszą.
b) przyjmuje wartość największą i nie przyjmuje wartości najmniejszej.
c) nie przyjmuje wartości największej i przyjmuje wartość najmniejszą.
d) nie przyjmuje wartości największej i nie przyjmuje wartości najmniejszej.

6.15. Podaj przykład wykresu funkcji f o podanych własnościach.

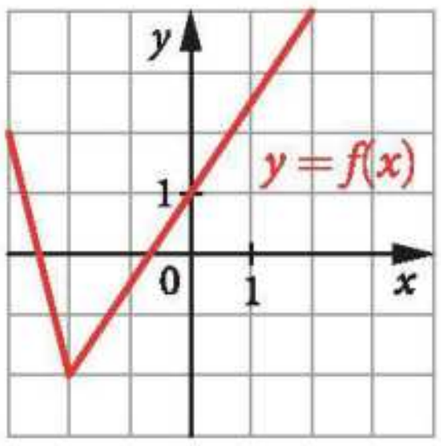
a) $D = \langle 0; 5\rangle$, przyjmuje wartość największą i nie przyjmuje wartości najmniejszej.
b) $D = \langle 1; 7\rangle$, nie przyjmuje wartości największej i przyjmuje wartość najmniejszą.
c) $D = \langle -5; -1\rangle$, nie przyjmuje wartości największej ani wartości najmniejszej.

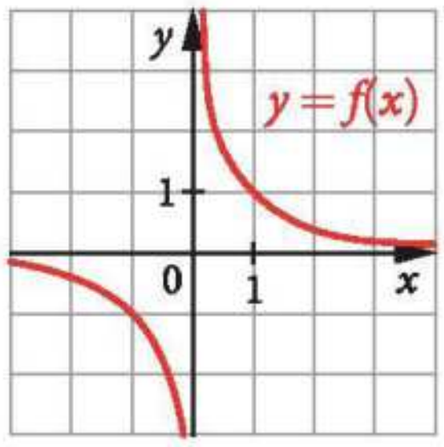
6.16. Na podstawie wykresu funkcji f określ liczbę rozwiązań podanego równania.

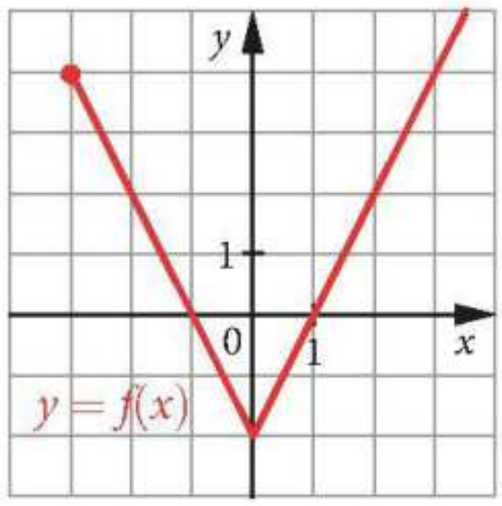
a) $f(x) = 0$
b) $f(x) = 2$
c) $f(x) = -3$
d) $f(x) = 3$

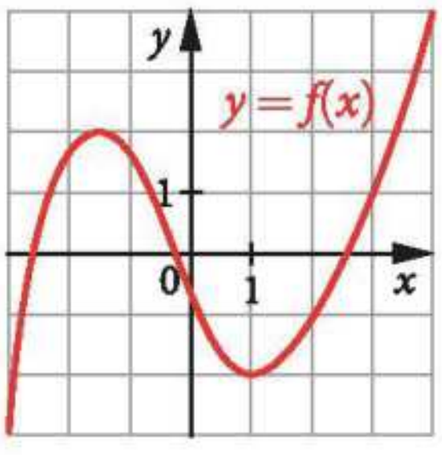


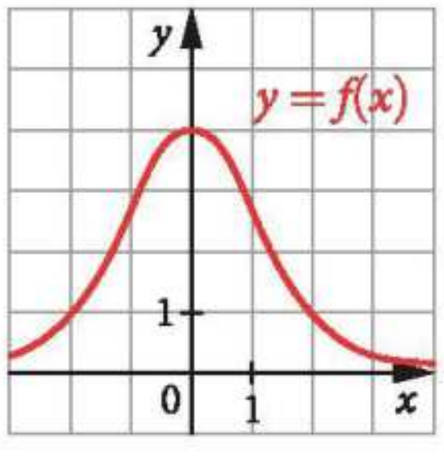
6.17. Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą.

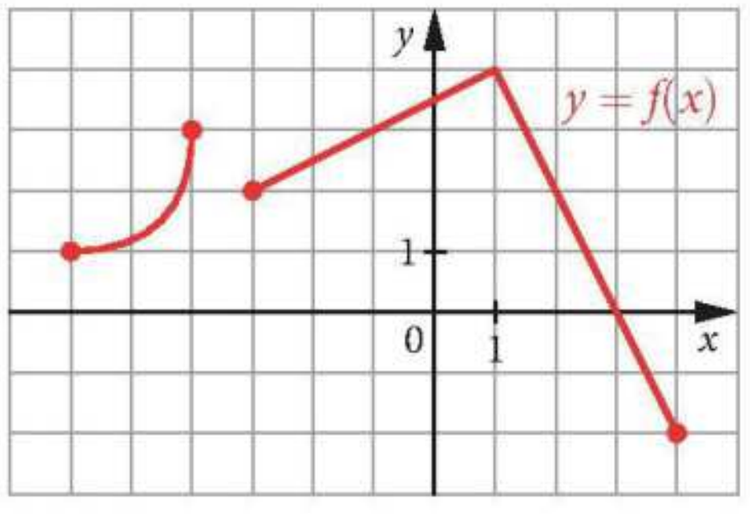
a)


c)


e)


b)


d)


f)


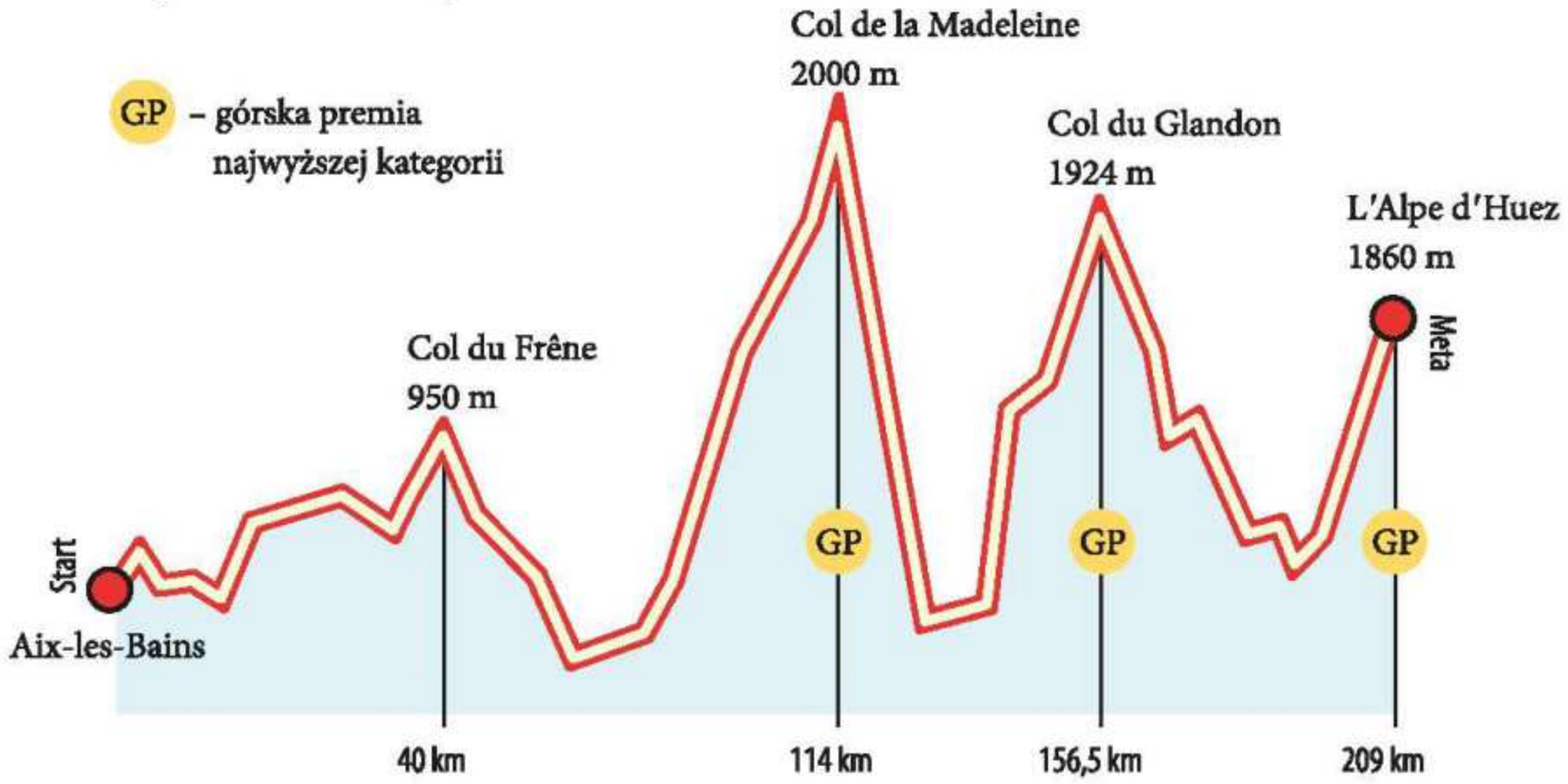
6.18. Czy funkcja o podanym zbiorze wartości ZW przyjmuje wartość najmniejszą? Czy przyjmuje wartość największą?
a) $ZW = (-\infty; 3\rangle$ b) $ZW = (-8; 10)$ c) $ZW = \langle -3; \infty)$ d) $ZW = \{-100\}$

6.19. W książce *Atlas turystyczny Tatr Polskich* są przedstawione tzw. profile szlaków turystycznych. Na podstawie wykresu określ, ile razy w trakcie wycieczki Orlą Percią od Zawratu do Krzyżnego przekracza się wysokość 2200 m n.p.m.



Zwróć uwagę na to, że aby rysunek był czytelny, na osiach zastosowano różne jednostki. W rzeczywistości podejścia są mniej strome.

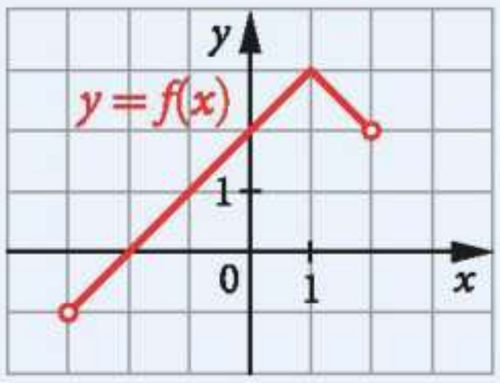
6.20. Na podstawie profilu trasy kolarskiej (zamieszczonego w jednej z gazet) określ, ile razy podczas etapu z Aix-les-Bains do l'Alpe d'Huez uczestnicy wyścigu Tour de France przekraczali wysokość 1800 m.



Zauważ, że aby uwypuklić trudności, jakie napotkali zawodnicy, na osi pionowej przyjęto jednostkę ok. 50 razy mniejszą niż jednostka na osi poziomej. Pokonanie takich wzniesień jak na rysunku byłoby trudne nawet przy użyciu sprzętu wspinaczkowego.

Prosto do matury

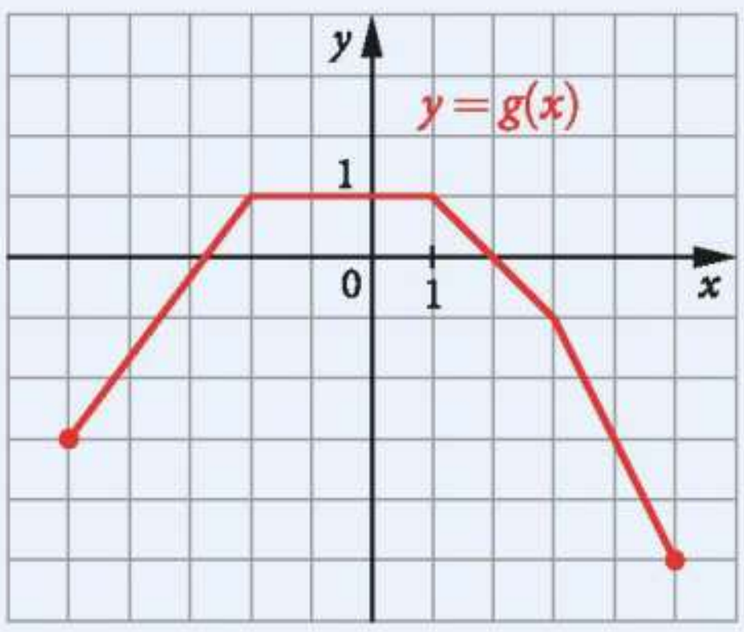
1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.
Oceń prawdziwość podanych zdań.



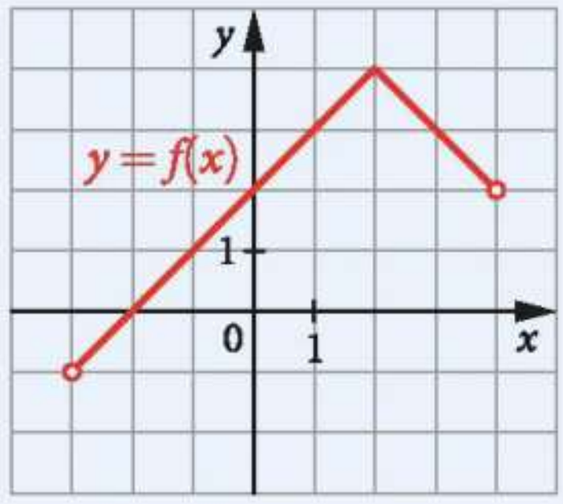
A. Dziedziną funkcji f jest przedział $(-3; 2)$.
B. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-1; 3\rangle$.
C. Funkcja f nie osiąga wartości najmniejszej.

2. Odczytaj z wykresu (rys. 1) dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = g(x)$. Wyznacz wartość najmniejszą oraz wartość największą, które ta funkcja przyjmuje dla argumentów z przedziału $\langle 1; 4\rangle$.

3. Odczytaj z wykresu (rys. 2) dziedzinę i zbiór wartości funkcji f. Podaj wartość największą i wartość najmniejszą funkcji w przedziale $\langle -1; 3\rangle$.



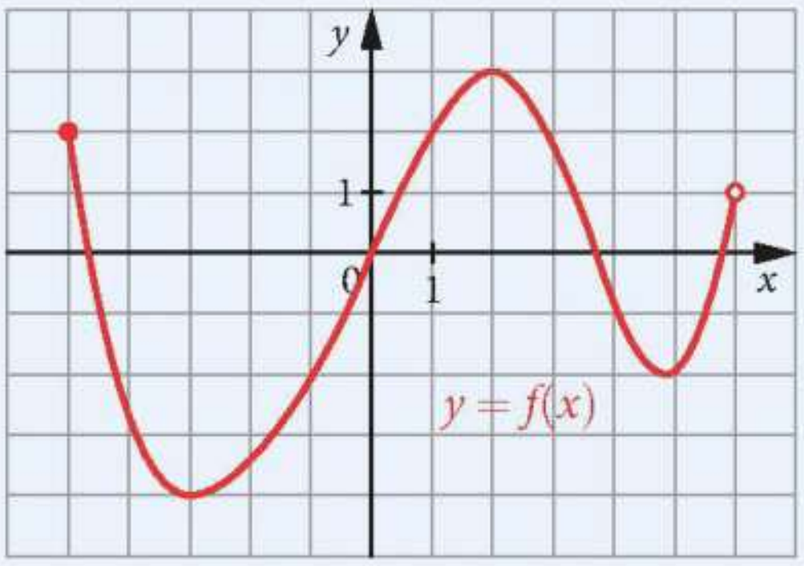
Rys. 1.



Rys. 2.

4. Podaj przykład wykresu funkcji, której dziedziną jest przedział $(-1; 3)$, a zbiorem wartości jest przedział $\langle 2; 4\rangle$.

5. Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, określ, dla jakich wartości m równanie $f(x) = m$ ma trzy rozwiązania.

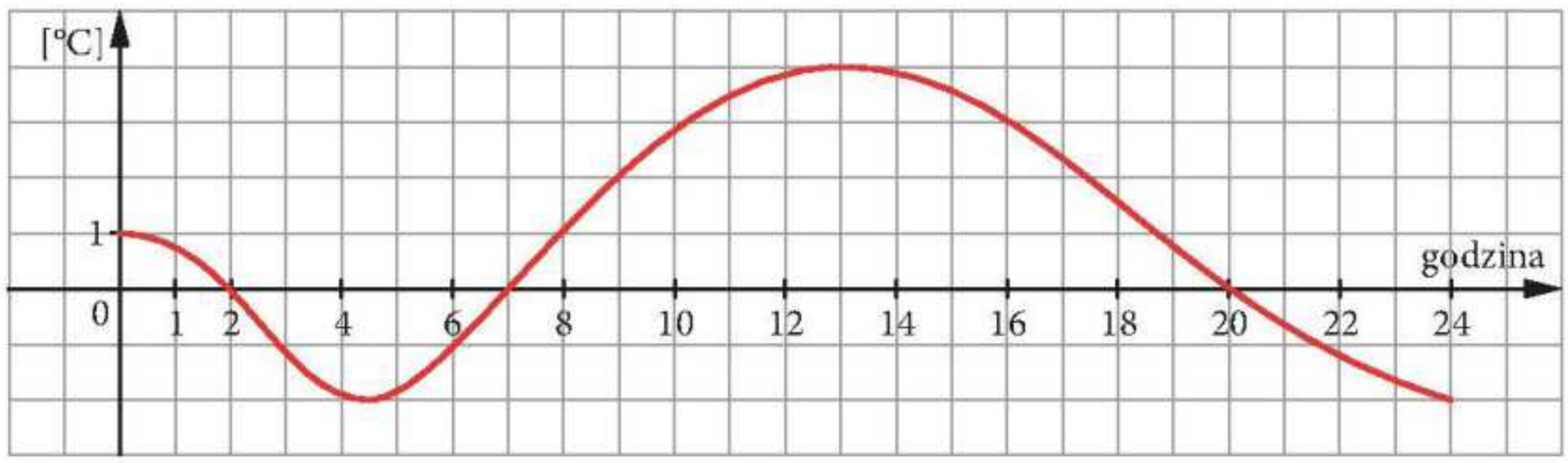


7. Miejsce zerowe funkcji

Umiejętności:

- odczytywanie z wykresu funkcji jej miejsc zerowych
- znajdowanie miejsc zerowych funkcji danych za pomocą wzoru

Przyjrzyjmy się wykresowi, który przedstawia temperaturę w pewnej miejscowości mierzoną w sposób ciągły przez 24 godziny.



Jeżeli interesuje nas, kiedy temperatura była równa 0°C, to szukamy punktów przecięcia wykresu z osią x i odczytujemy pierwsze współrzędne tych punktów. W ciągu opisanej doby temperatura osiągnęła wartość 0°C trzy razy – o godzinie 2^{00}, 7^{00} i 20^{00}.

Argumenty, dla których funkcja osiąga wartość 0, mają często duże znaczenie, dlatego są wyróżnione specjalną nazwą.

Definicja

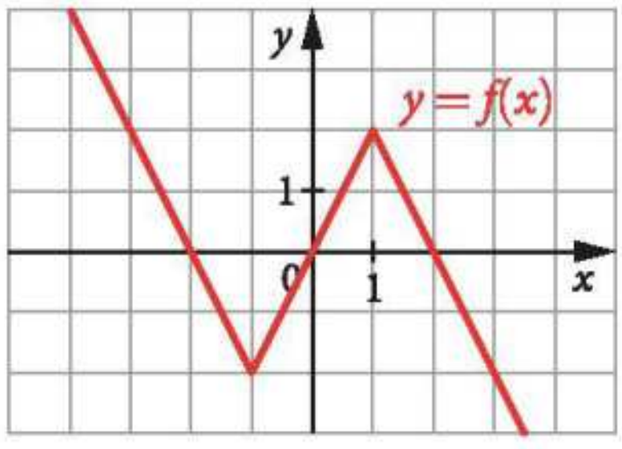
Miejscem zerowym funkcji nazywamy taki argument, dla którego wartość funkcji jest równa 0.

Przykład 1 ◀ zad. 7.4

Wyznaczymy miejsca zerowe podanych funkcji.

Rozwiązanie

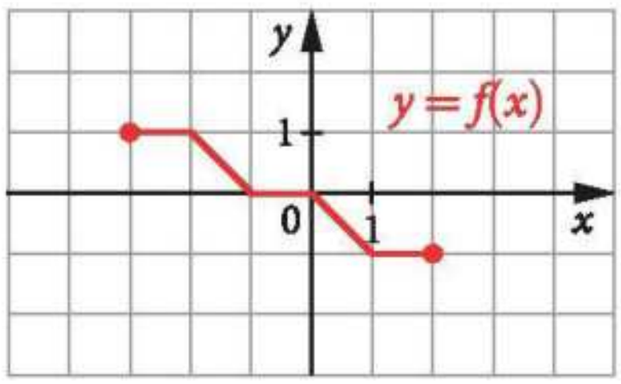
a)



⟵ wykres przecina oś x w trzech punktach

Nie należy mylić miejsca zerowego funkcji z punktem przecięcia wykresu z osią x. **Miejsce zerowe jest liczbą**, a nie punktem. Na przykład jeśli wykres jakiejś funkcji przecina oś x w punkcie $(2, 0)$, to miejscem zerowym jest liczba 2.

Odp.: Funkcja ma trzy miejsca zerowe. Są nimi liczby: -2, 0 i 2.

b) 

← wykres przecina oś x w nieskończenie wielu punktach

Odp.: Funkcja ma nieskończenie wiele miejsc zerowych. Są nimi wszystkie liczby z przedziału $\langle -1; 0\rangle$.

W omówionych przykładach szukaliśmy miejsc zerowych, analizując tylko wykresy funkcji. Jeśli znamy wzór funkcji, to jej miejsca zerowe często możemy wyznaczyć rachunkowo, rozwiązując równanie $f(x) = 0$.

Przykład 2 ◂ zad. 7.6–7.8

Wyznaczymy miejsca zerowe funkcji o podanym wzorze i danej dziedzinie.

Rozwiązanie

a) $f(x) = -3x + 6, \quad D = \mathbf{R}$

$-3x + 6 = 0$, stąd $x = 2$

Odp.: $f(x) = 0$ dla $x = 2$.

b) $f(x) = 2x + 4, \quad D$ jest zbiorem liczb naturalnych

$2x + 4 = 0$, stąd $x = -2$, ale -2 nie jest liczbą naturalną

Odp.: Funkcja nie ma miejsc zerowych.

Zawsze sprawdzamy, czy rozwiązania równania $f(x) = 0$ należą do dziedziny funkcji f.

c) $f(x) = |x| - 3, \quad D = \mathbf{Z} - \mathbf{N}$

$|x| - 3 = 0$, czyli $|x| = 3$

$x = -3$ lub $x = 3$

$-3 \in D$, natomiast $3 \notin D$

Odp.: Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba -3.

Przykład 3 ◂ zad. 7.10

Wyznaczymy miejsca zerowe funkcji $y = g(x)$.

Rozwiązanie

a) $g(x) = (x - 4)(x + 7)$

Jeżeli podany jest tylko wzór funkcji, to zaczynamy od wyznaczenia jej dziedziny. Dziedziną funkcji g jest zbiór $\mathbf{R}$. Szukamy rozwiązań warunku $g(x) = 0$.

$(x - 4)(x + 7) = 0$

$x - 4 = 0$ lub $x + 7 = 0$

$x = 4$ lub $x = -7$

$a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

Odp.: Miejscami zerowym funkcji g są -7 i 4.

b) $g(x) = x\sqrt{x-1}$

Najpierw wyznaczamy dziedzinę funkcji g.

$x - 1 \geqslant 0$ ⟵ wyrażenie pod pierwiastkiem nie jest ujemne

Dziedziną funkcji g jest przedział $D = \langle 1; \infty)$.

Znajdziemy teraz miejsca zerowe. Szukamy rozwiązań warunku $g(x) = 0$ i $x \in D$.

$x\sqrt{x-1} = 0$, stąd $x = 0$ lub $\sqrt{x-1} = 0$

Liczba 0 nie jest argumentem funkcji, więc jedynym miejscem zerowym jest liczba 1.

Odp.: Miejscem zerowym funkcji g jest 1.

c) $g(x) = \dfrac{x+\sqrt{2}}{x-8}$

Dziedziną funkcji g jest zbiór $D = \mathbf{R} - \{8\}$.

Szukamy rozwiązań warunku $g(x) = 0$ i $x \in D$.

$\dfrac{x+\sqrt{2}}{x-8} = 0$ ⟵ ułamek ma wartość 0 tylko wtedy, gdy licznik jest równy 0

$x + \sqrt{2} = 0$, stąd $x = -\sqrt{2}$

$-\sqrt{2} \in D$

Odp.: Miejscem zerowym funkcji g jest $-\sqrt{2}$.

Przykład 4 ◂ zad. 7.15

Sprawdzimy, czy któraś z liczb ze zbioru A jest miejscem zerowym funkcji $y = f(x)$.

Rozwiązanie

a) $f(x) = (x+3)\sqrt{x-2}$, $A = \{-1, 0, 2, 3\}$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji f: $x - 2 \geqslant 0$, czyli $D = \langle 2; \infty)$.

Zatem $-1 \notin D$ i $0 \notin D$.

Pozostałe liczby sprawdzamy, podstawiając je do wzoru funkcji.

$f(2) = (2+3)\sqrt{2-2} = 5 \cdot 0 = 0$ ⟵ 2 jest miejscem zerowym f

$f(3) = (3+3)\sqrt{3-2} = 6 \cdot 1 \neq 0$ ⟵ 3 nie jest miejscem zerowym f

Odp.: Miejscem zerowym funkcji f należącym do zbioru A jest 2.

b) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x+2}$, $A = \left\{-2, 0, -\sqrt{3}\right\}$

$x + 2 \neq 0$, czyli $-2 \notin D$ i $D = \mathbf{R} - \{-2\}$.

$f(0) = \dfrac{-3}{2} \neq 0$ ⟵ 0 nie jest miejscem zerowym f

$f\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{3-3}{-\sqrt{3}+2} = 0$ ⟵ $-\sqrt{3}$ jest miejscem zerowym f

Odp.: Miejscem zerowym funkcji f należącym do zbioru A jest $-\sqrt{3}$.

Przykład 5 ◂ zad. 7.17

Dla jakich wartości m liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = |4 - m|x - 9$?

Rozwiązanie

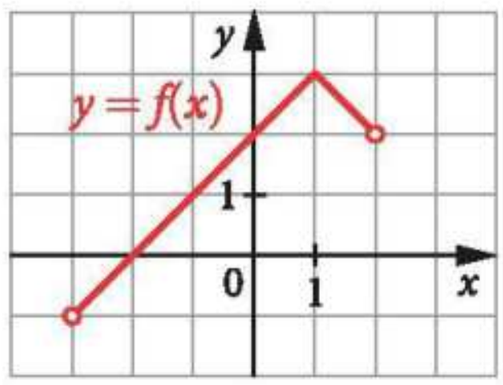
$f(3) = 0$, czyli $|4 - m| \cdot 3 - 9 = 0$
$|4 - m| = 3$
$4 - m = 3$ lub $4 - m = -3$, więc
$m = 1$ lub $m = 7$

Odp.: Dla $m = 1$ lub $m = 7$.

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Wskaż miejsce zerowe funkcji przedstawionej na wykresie obok.



A. $(-2, 0)$ **B.** -2 **C.** $(0, 2)$ **D.** 2

7.2. Wskaż miejsce zerowe funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x - 7$.

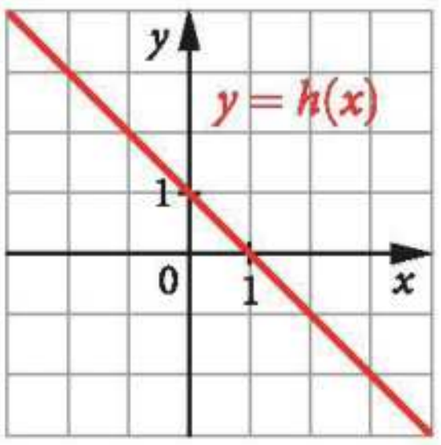
A. 7 **B.** $2\frac{1}{3}$ **C.** $7\frac{1}{3}$ **D.** 21

7.3. Wśród podanych funkcji wskaż tę, dla której liczba -3 jest miejscem zerowym.

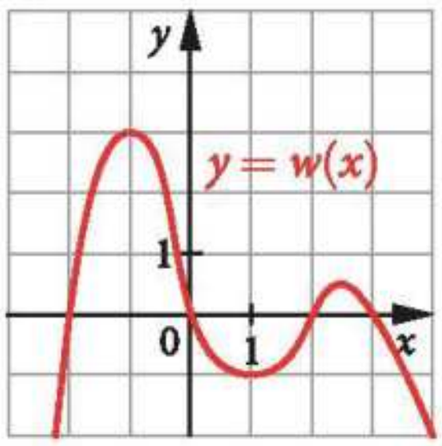
A. $f(x) = 2x + 4$ **B.** $f(x) = 2x + 5$ **C.** $f(x) = 2x + 6$ **D.** $f(x) = 2x + 7$

7.4. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji.

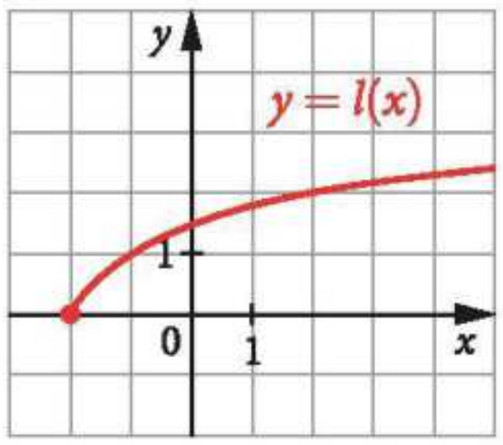
a)



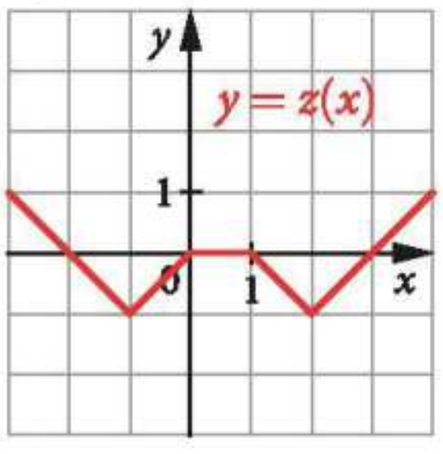
c)



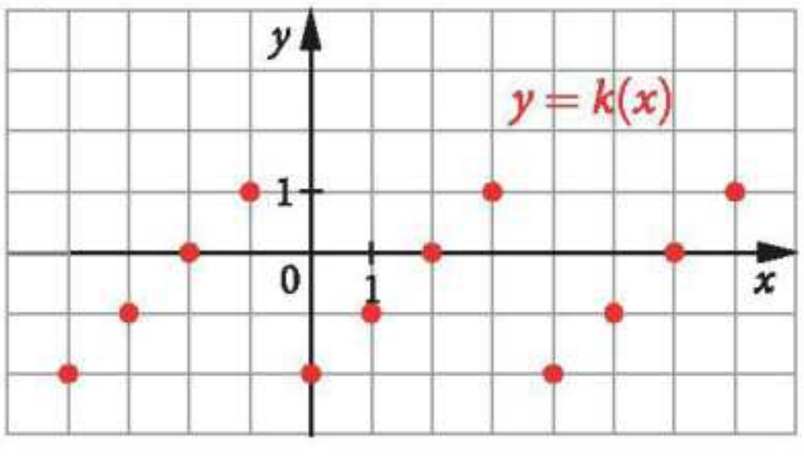
e)



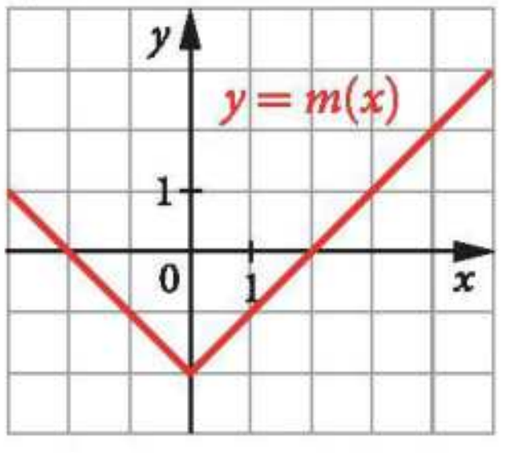
b)



d)



f)



7.5. Podaj przykład wykresu funkcji o dziedzinie $D = \mathbf{R}$ i o danym zbiorze miejsc zerowych.

a) $\{-3\}$
b) $\{-2, 2\}$
c) $\langle 1; \infty)$
d) $\langle 1; 2\rangle$
e) $\langle -1; 2\rangle \cup \langle 4; 5\rangle$
f) $\langle -3; 1) \cup (5; \infty)$

7.6. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = 3x - 6$
b) $f(x) = \frac{3}{7}x - 2\frac{4}{7}$
c) $f(x) = \sqrt{2}x - 2\sqrt{3}$
d) $f(x) = 2^{17}x - 8^6$
e) $f(x) = \pi^2 x - 2\pi$
f) $f(x) = 10^{-13}x - 10^{-17}$

7.7. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = (x + 1)(x - 3)$
b) $f(x) = x\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$
c) $f(x) = x^2 - x$
d) $f(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 5)$

7.8. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = |x - 4| - 7$
b) $f(x) = |x + 2| + 2$
c) $f(x) = \big||x| - 3\big| - 1$
d) $f(x) = \big||x - 1| + 3\big| - 5$

7.9. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = |x| - 2x - 1$
b) $f(x) = |x - 3| + 2x$
c) $f(x) = |x - 1| - |2x + 1|$
d) $f(x) = |x + 2| + |x - 7|$
e) $f(x) = |x + 3| + |x - 1| - 10$
f) $f(x) = |2x - 2| - |x - 4| + 3$

7.10. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$
b) $f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x}}$
c) $f(x) = (x - 5)(x + 2)\sqrt{x - 1}$
d) $f(x) = \sqrt{x - 5} \cdot \sqrt{5 - x}$
e) $f(x) = \frac{(4x + 12)(x - 1)}{x + 3}$
f) $f(x) = \frac{(x - 7)(x - 2)}{\sqrt{2x - 4}}$

7.11. Wyznacz miejsca zerowe funkcji o podanym wzorze i danej dziedzinie.

a) $f(x) = 7x + 5$ $\quad D = \mathbf{R}$
b) $f(x) = 4x - 11$ $\quad D = \mathbf{Z}$
c) $f(x) = \sqrt{2}x - 3$ $\quad D = \mathbf{Q}$
d) $f(x) = \sqrt{3}x - \sqrt{12}$ $\quad D = \mathbf{N}$
e) $f(x) = |x - 1| \cdot |x + 7|$ $\quad D = \mathbf{N}$
f) $f(x) = (2x + 4)\sqrt{x + 5}$ $\quad D = \langle -5; -2) \cup (2; \infty)$

D **7.12.** Wykaż, że liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = 3^{11}x - 9^6$.

D **7.13.** Wykaż, że liczba -3 nie jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = (x+3)\sqrt{x - 3}$.

7.14. Podaj przykład wzoru funkcji, której dziedziną jest zbiór D i której wszystkie miejsca zerowe są elementami podanego zbioru A.

a) $D = (-\infty; 10)$ $A = \{-2, 4\}$
b) $D = \mathbf{R} - \{-9\}$ $A = \{0, 1, 2, 3\}$
c) $D = \langle 3; \infty)$ $A = \{3, 13\}$
d) $D = \mathbf{N} - \{9\}$ $A = \{0, 1, 2, 3\}$
e) $D = (-2; \infty)$ $A = \{4\}$
f) $D = (-\infty; -1\rangle$ $A = \{-3, -2, -1\}$

7.15. Sprawdź, która z liczb ze zbioru A jest miejscem zerowym funkcji $y = f(x)$.

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ $A = \left\{-2, \frac{1}{3}, 1\right\}$
b) $f(x) = \left(x^2 - 9\right)\sqrt{x+3}$ $A = \{-3, 0, 2, 3\}$
c) $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{\sqrt{3-x}}$ $A = \{-2, -1, 2, 4\}$
d) $f(x) = 3^x - 3x - 3$ $A = \{-1, 1, 2\}$
e) $f(x) = 2^x - 7$ $A = \{\log_2 3, \log_2 7\}$
f) $f(x) = \frac{10^{2x} - 5 \cdot 10^x + 6}{x - 1}$ $A = \{\log 2, \log 3, \log 5\}$

7.16. Podaj przykład wzoru funkcji, której dziedziną jest zbiór $\mathbf{R} - \{2\}$ i która nie ma miejsc zerowych.

7.17. Dla jakich wartości m liczba 5 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = (m + 3)x - 5$?

7.18. Dla jakiej wartości parametru m funkcje $f(x) = 5x - 3$ i $g(x) = (3m - 1)x + 6$ mają wspólne miejsce zerowe?

7.19. Dla jakiej wartości parametru k funkcje $f(x) = |x - 4| - 4$ i $g(x) = x^2 + kx$ mają jednakowe miejsca zerowe?

* **7.20.** Dla jakich wartości m funkcja f:

I. ma jedno miejsce zerowe, II. nie ma miejsc zerowych?

a) $f(x) = mx - 2$
b) $f(x) = (m - 1)x + 3$
c) $f(x) = (m + 2)x - 1$
d) $f(x) = 5 - (m - 3)x$

* **7.21.** Dla jakich wartości m miejsce zerowe funkcji

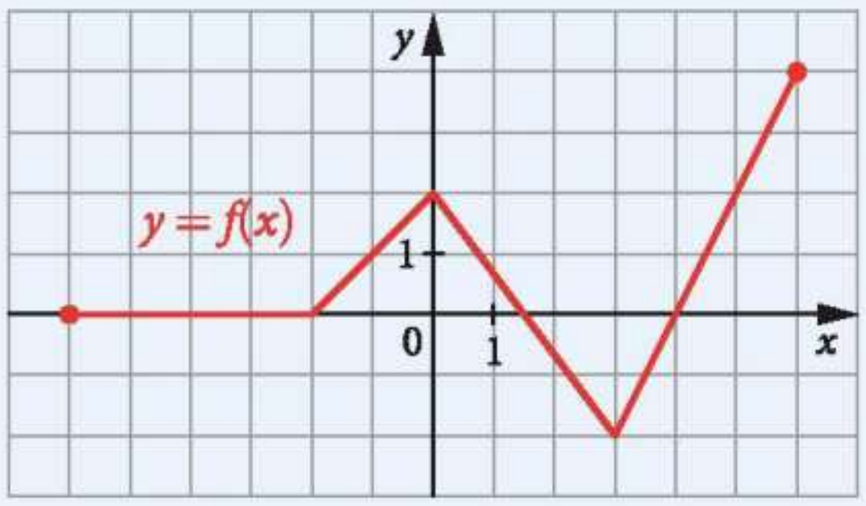
a) $f(x) = 2x - m + 1$ jest liczbą większą od 1?
b) $f(x) = -5x + m$ jest liczbą większą od 3?
c) $f(x) = \frac{1}{2}x - (m + 2)$ jest liczbą mniejszą od -4?
d) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3m - 2$ jest liczbą mniejszą od $1\frac{1}{2}$?

7.22. Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = (2x + m)\sqrt{5x - 3}$ ma dwa miejsca zerowe?

7.23. Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = \dfrac{|x - 2| - m}{\sqrt{x + 3}}$ ma dwa miejsca zerowe?

Prosto do matury

1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.



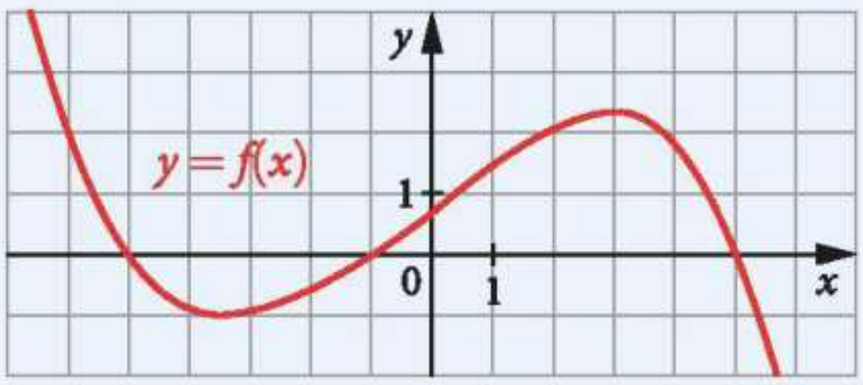
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Równanie $f(x) = 0$ ma dokładnie trzy rozwiązania.

B. Funkcja f ma co najmniej trzy miejsca zerowe.

C. Funkcja f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

2. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji f.



3. Wyznacz (o ile istnieje) miejsce zerowe funkcji $f(x) = 12x - 3$, której dziedziną jest zbiór liczb całkowitych.

4. Dla jakich wartości m liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = |m - 1|x - 12$?

5. Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = |x + 2| - 3$.

8. Znak i monotoniczność funkcji

Umiejętności:

- odczytywanie z wykresu funkcji maksymalnych przedziałów, w których funkcja ma stały znak
- odczytywanie z wykresu funkcji maksymalnych przedziałów, w których funkcja maleje (lub rośnie)

Odczytywanie z wykresu rozwiązań nierówności $f(x) > 0$, $f(x) < 0$

Przykład 1

Odczytamy z wykresu, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości
a) dodatnie. b) ujemne.

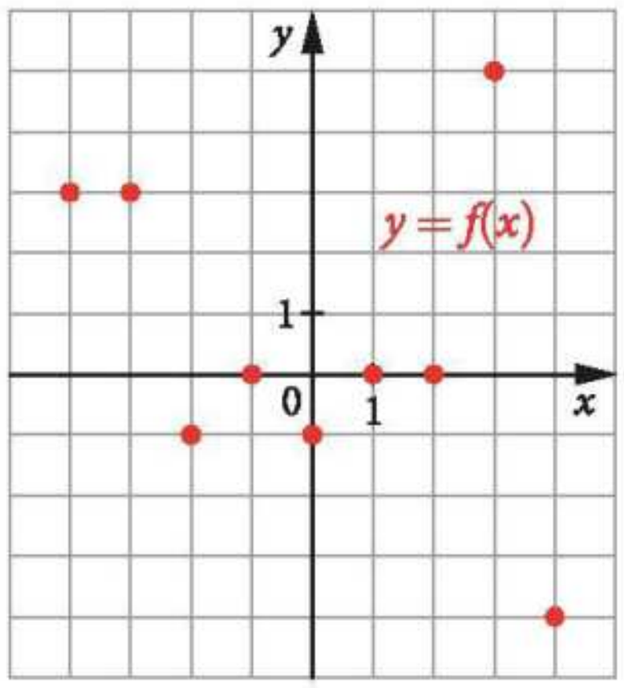
Rozwiązanie

Aby wykonać polecenie a), wybieramy wszystkie punkty wykresu leżące powyżej osi x i odczytujemy ich pierwsze współrzędne:

$$f(x) > 0 \quad \text{dla } x \in \{-4, -3, 3\}$$

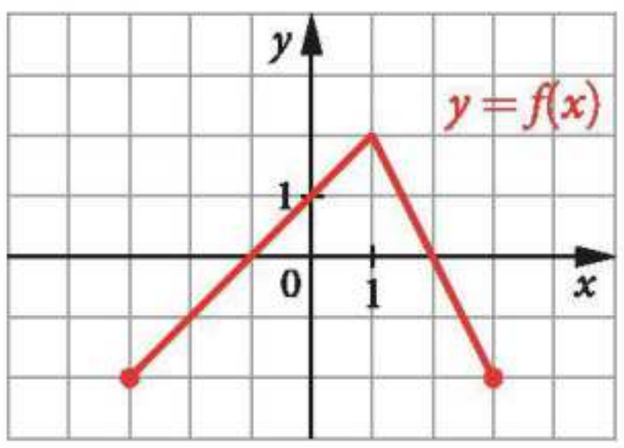
Aby wykonać polecenie b), odczytujemy pierwsze współrzędne wszystkich punktów wykresu leżących poniżej osi x:

$$f(x) < 0 \quad \text{dla } x \in \{-2, 0, 4\}$$



Przykład 2 ◀ zad. 8.6

Wyznaczymy przedziały, w których funkcja ma stały znak (tzn. ma albo dodatnie, albo ujemne wartości).



Rozwiązanie

$f(x) > 0 \quad \text{dla } x \in (-1; 2)$ ⟵ ten fragment wykresu leży nad osią x

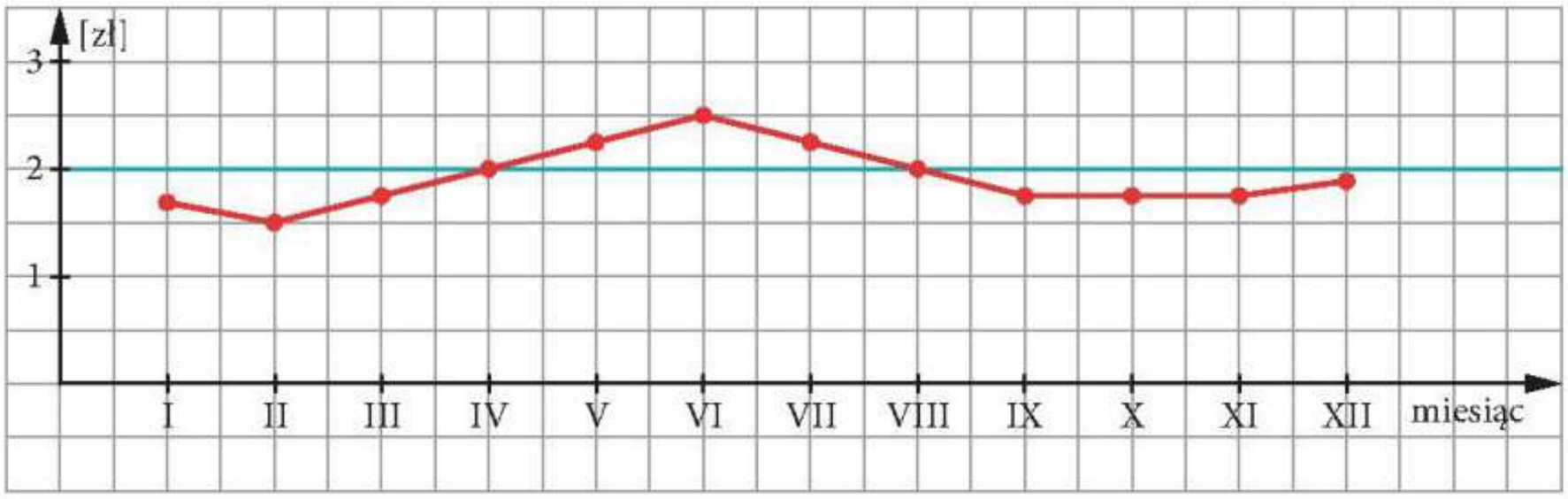
$f(x) < 0 \quad \text{dla } x \in \langle -3; -1) \text{ oraz dla } x \in (2; 3\rangle$ ⟵ te fragmenty wykresu leżą pod osią x

Zwróćmy uwagę na to, że przedział $\langle -3; -1)$ jest lewostronnie domknięty, bo $f(-3) < 0$, ale prawostronnie otwarty, bo $f(-1)$ nie jest ujemne, lecz równe 0. Podobnie $f(3) < 0$, natomiast $f(2) = 0$.

Podobnie odczytujemy z wykresu rozwiązanie nierówności $f(x) > m$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Przykład 3 ◀ zad. 8.4

Wykres przedstawia średni kurs pewnej waluty w 12 kolejnych miesiącach.



Sprawdzimy, w których miesiącach kurs przekroczył 2 zł.

Rozwiązanie

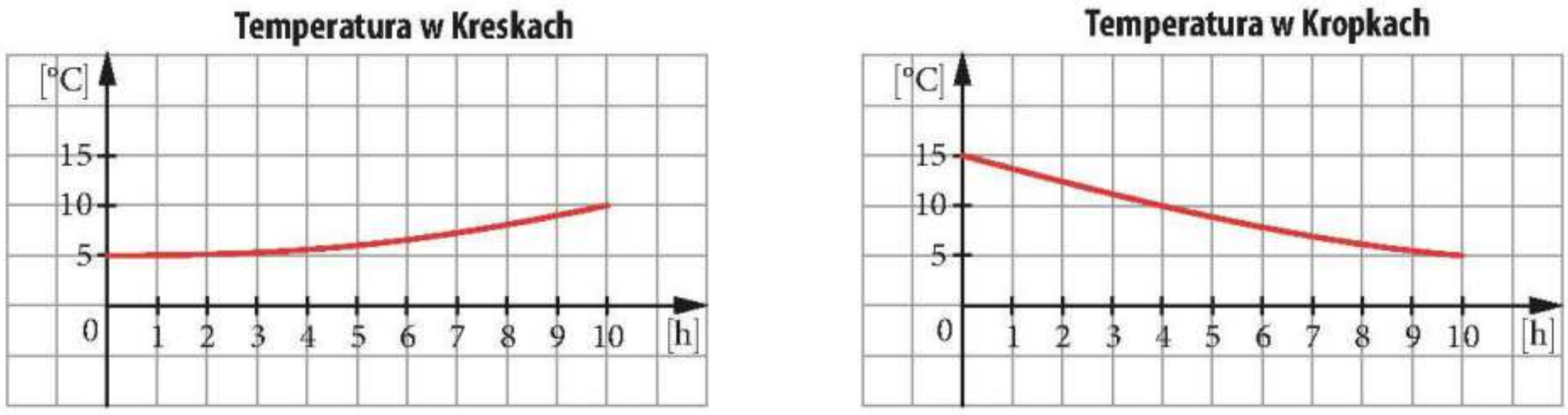
Z wykresu odczytujemy, że kurs osiągnął wartość 2 zł w kwietniu, następnie w maju, czerwcu i lipcu przekraczał 2 zł, w sierpniu znów był równy 2 zł, a w pozostałych miesiącach był niższy od 2 zł.

Odp.: Kurs przekroczył 2 zł w maju, czerwcu i lipcu.

Monotoniczność funkcji

Przykład 4

Przyjrzyjmy się wykresom temperatur mierzonych w dwóch miejscowościach tego samego dnia przez 10 godzin.

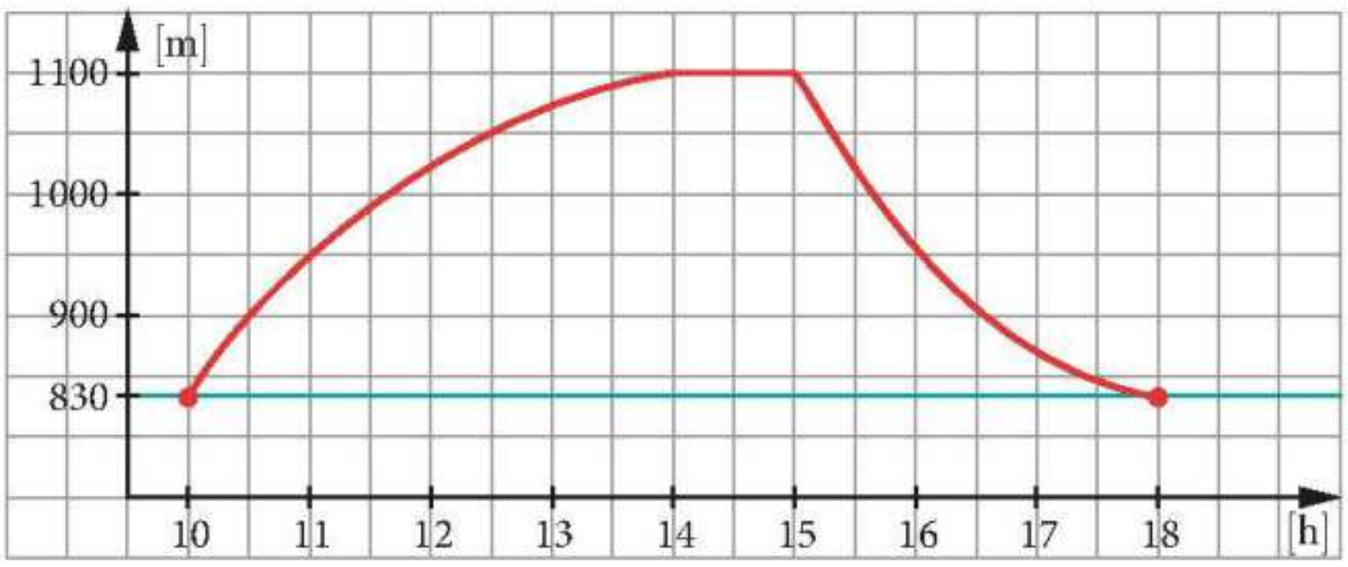


Porównując oba wykresy, możemy stwierdzić, że w Kreskach temperatura rosła, natomiast w Kropkach malała.

Pierwszy wykres jest wykresem funkcji rosnącej, drugi jest wykresem funkcji malejącej.

Przykład 5

Oto wykres ilustrujący wysokość terenu mierzoną w czasie pieszej wycieczki po Bieszczadach.



Wycieczka rozpoczęła się o godzinie 10^{00} z punktu startu leżącego na wysokości 830 m n.p.m. Przez pierwsze 4 godziny droga wiodła pod górę. O godzinie 14^{00} turyści osiągnęli szczyt. Tam odpoczywali przez godzinę, po czym rozpoczęli schodzenie, które trwało do godziny 18^{00}.
Inaczej mówiąc, między 10^{00} a 14^{00} funkcja opisująca osiąganą wysokość rosła, od 14^{00} do 15^{00} była stała, natomiast od 15^{00} do 18^{00} malała.

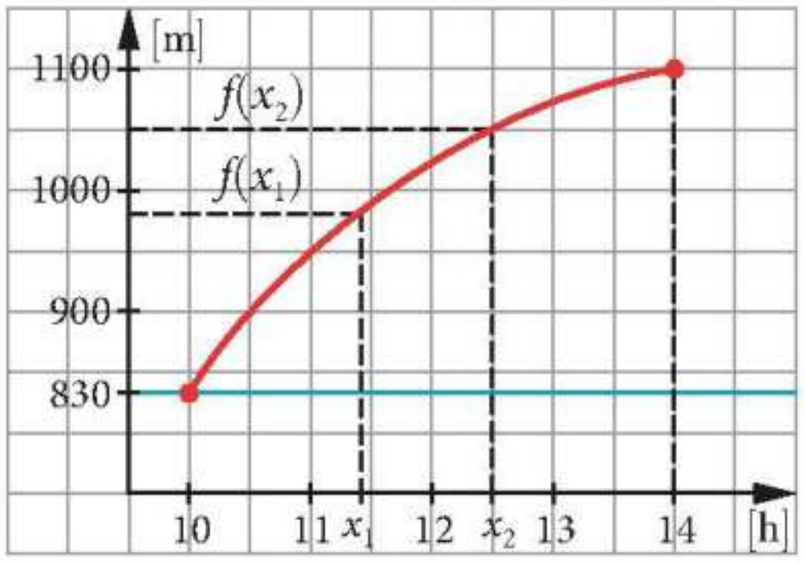
Oznaczmy omawianą funkcję f. Jeżeli porównamy **dowolne dwa argumenty** z przedziału $\langle 10; 14\rangle$ – na rysunku 1 zaznaczone jako x_1 oraz x_2 – to większemu z nich odpowiada większa wartość funkcji, czyli spełniony jest warunek:

jeżeli $x_2 > x_1$, to $f(x_2) > f(x_1)$

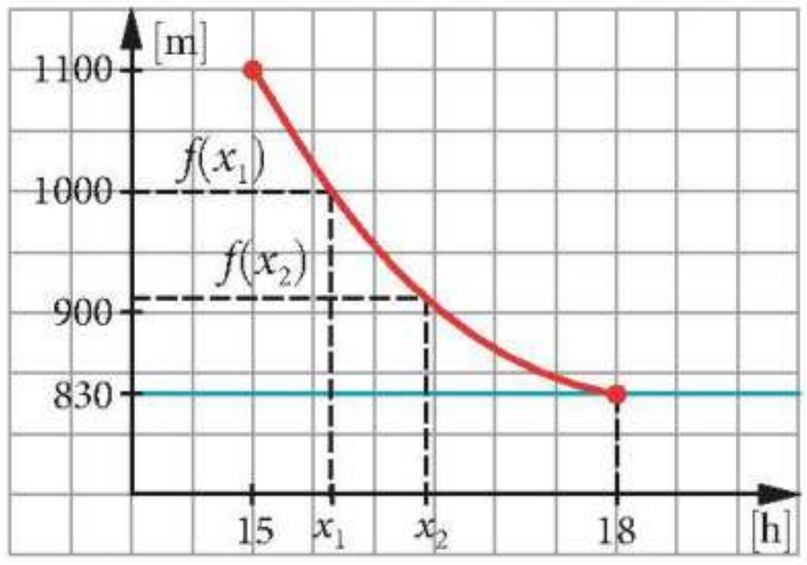
Na rysunku z konieczności wskazujemy dwa przykładowe argumenty. Można, oczywiście, porównać w taki sam sposób wartości dla innych argumentów wybranych z tego przedziału. Wniosek jest taki sam dla każdej pary argumentów.

Z kolei **dowolnym dwóm argumentom** z przedziału $\langle 14; 15\rangle$ odpowiada ta sama wartość, czyli: jeżeli $x_2 > x_1$, to $f(x_2) = f(x_1)$.

Jeżeli natomiast porównamy **dowolne dwa argumenty** z przedziału $\langle 15; 18\rangle$, jak na rysunku 2, to większemu z nich odpowiada mniejsza wartość funkcji, czyli spełniony jest warunek: jeżeli $x_2 > x_1$, to $f(x_2) < f(x_1)$.



Rys. 1.



Rys. 2.

Definicja

Funkcję $y = f(x)$ nazywamy **funkcją rosnącą** w zbiorze X, jeżeli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 należących do X spełniony jest warunek:

$$\text{jeżeli } x_2 > x_1, \text{ to } f(x_2) > f(x_1)$$

Funkcja z przykładu 5 jest rosnąca w przedziale $\langle 10; 14\rangle$.

Definicja

Funkcję $y = f(x)$ nazywamy **funkcją malejącą** w zbiorze X, jeżeli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 należących do X spełniony jest warunek:

$$\text{jeżeli } x_2 > x_1, \text{ to } f(x_2) < f(x_1)$$

Funkcja z przykładu 5 jest malejąca w przedziale $\langle 15; 18\rangle$.

Funkcja **stała** w zbiorze X przyporządkowuje wszystkim argumentom z tego zbioru tę samą wartość.

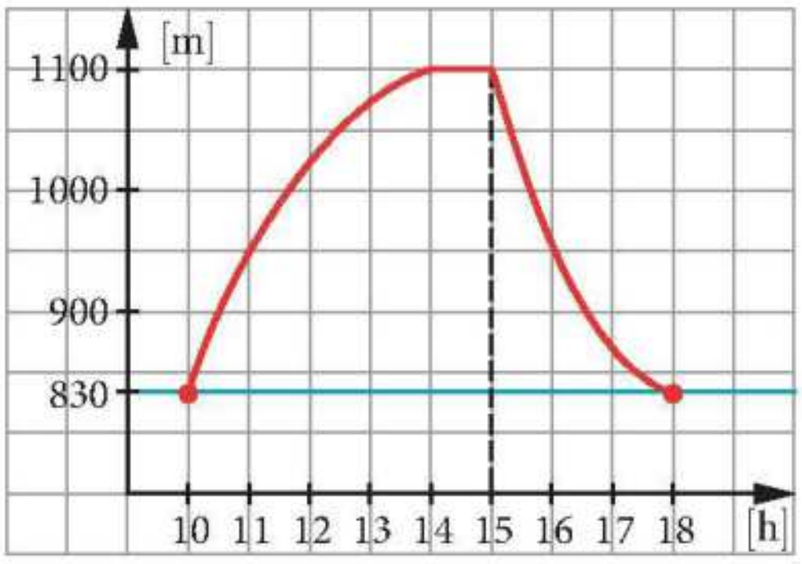
Funkcja z przykładu 5 jest stała w przedziale $\langle 14; 15\rangle$.

Rozszerzymy wprowadzone definicje tak, aby obejmowały przypadki, gdy w pewnym przedziale funkcja jest stała.

Definicja

Funkcję $y = f(x)$ nazywamy **funkcją niemalejącą** w zbiorze X, jeżeli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 należących do X spełniony jest warunek:

$$\text{jeżeli } x_2 > x_1, \text{ to } f(x_2) \geqslant f(x_1)$$



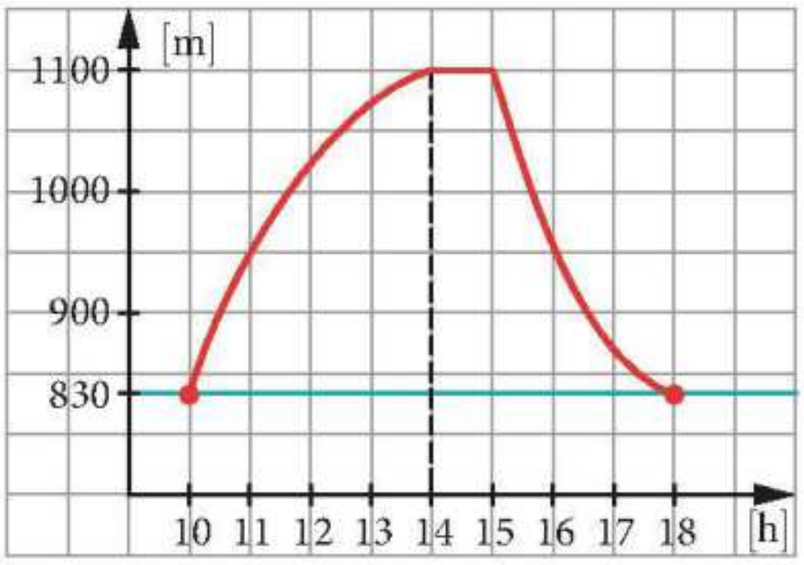
Określenie „funkcja niemalejąca” w istocie oznacza, że w rozpatrywanym zbiorze funkcja nie może większemu argumentowi przyporządkowywać mniejszej wartości.

Funkcja z przykładu 5 jest niemalejąca w przedziale $\langle 10; 15\rangle$.

Definicja

Funkcję $y = f(x)$ nazywamy **funkcją nierosnącą** w zbiorze X, jeżeli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 należących do X spełniony jest warunek:

$$\text{jeżeli } x_2 > x_1, \text{ to } f(x_2) \leqslant f(x_1)$$



Określenie „funkcja nierosnąca" w istocie oznacza, że w rozpatrywanym zbiorze funkcja nie może większemu argumentowi przyporządkowywać większej wartości.

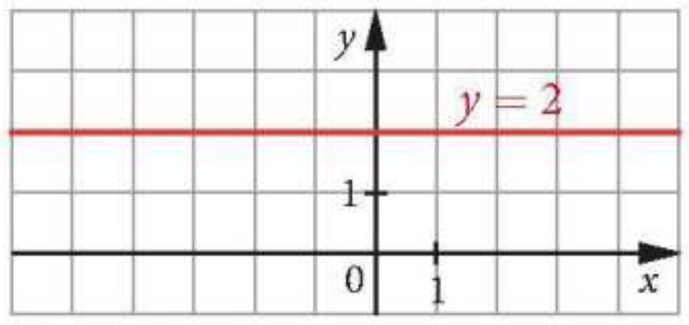
Funkcja z przykładu 5 jest nierosnąca w przedziale $\langle 14; 18\rangle$.

Każdą funkcję, która jest w swojej dziedzinie rosnąca albo malejąca, albo niemalejąca, albo nierosnąca, nazywamy **funkcją monotoniczną**.

Obie funkcje z przykładu 4 są monotoniczne – ta opisująca temperaturę w Kreskach jest rosnąca, a opisująca temperaturę w Kropkach – jest malejąca.

Funkcja z przykładu 5 jest niemonotoniczna.

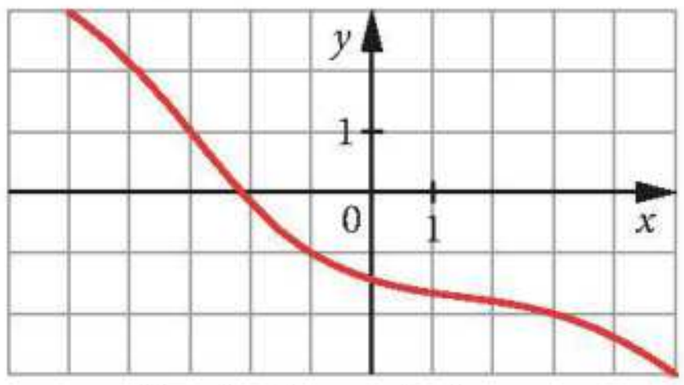
Każda funkcja stała jest funkcją niemalejącą i funkcją nierosnącą.



Przykład 6 ◀ zad. 8.9

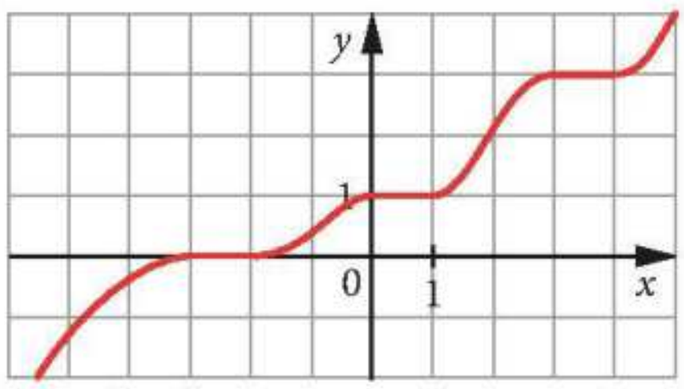
Określimy na podstawie wykresu, czy przedstawione funkcje są monotoniczne.

a)



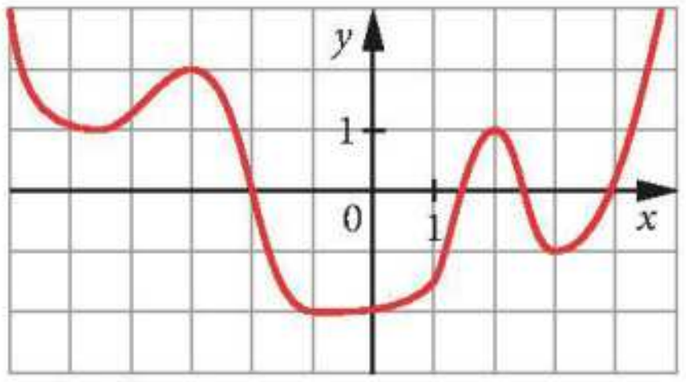
funkcja malejąca

b)



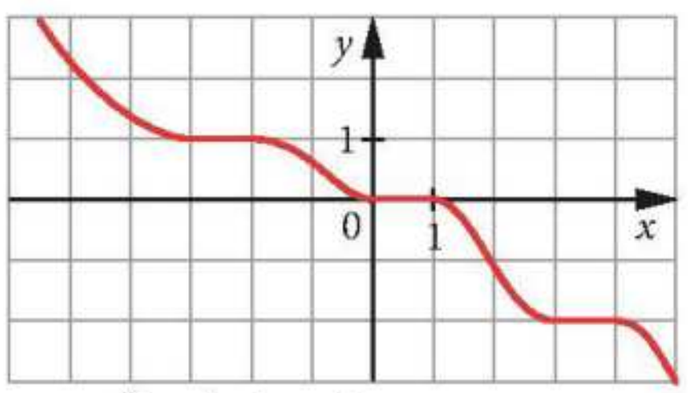
funkcja niemalejąca

c)



funkcja niemonotoniczna

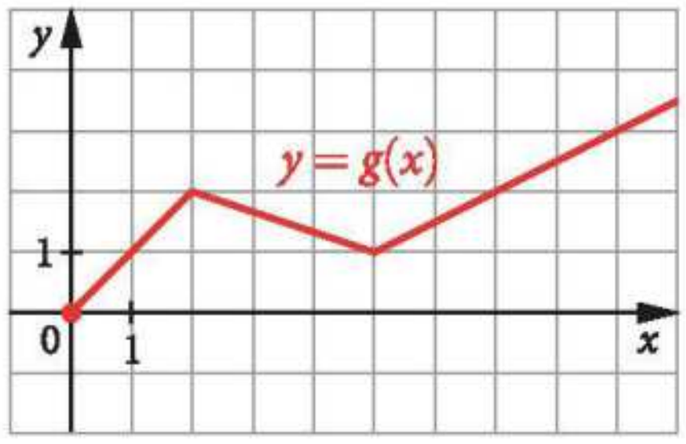
d)



funkcja nierosnąca

Przykład 7 ◀ zad. 8.11

Określimy przedziały monotoniczności funkcji $y = g(x)$ o danym wykresie.



Rozwiązanie

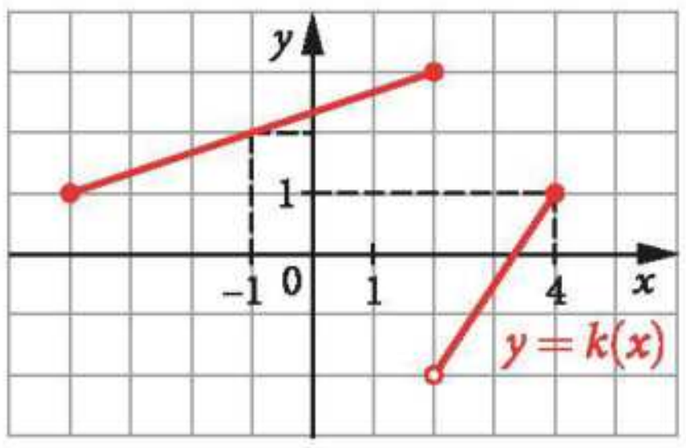
Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D = \langle 0; \infty)$.

Funkcja g nie jest monotoniczna, ale:

- w przedziale $\langle 0; 2\rangle$ jest rosnąca,
- w przedziale $\langle 2; 5\rangle$ jest malejąca,
- w przedziale $\langle 5; \infty)$ jest rosnąca.

Przykład 8 ◀ zad. 8.16

Określimy przedziały monotoniczności funkcji $y = k(x)$ o danym wykresie.



Rozwiązanie

Dziedziną tej funkcji jest przedział $D = \langle -4; 4\rangle$.

- W przedziale $\langle -4; 2\rangle$ funkcja k jest rosnąca.
- W przedziale $(2; 4\rangle$ funkcja k jest rosnąca.

Funkcja k **nie jest** jednak **rosnąca** w całej dziedzinie. Zauważmy, że np. argumentowi $x = -1$ funkcja k przyporządkowuje wartość większą niż argumentowi $x = 4$:

$$k(-1) = 2,\ k(4) = 1$$

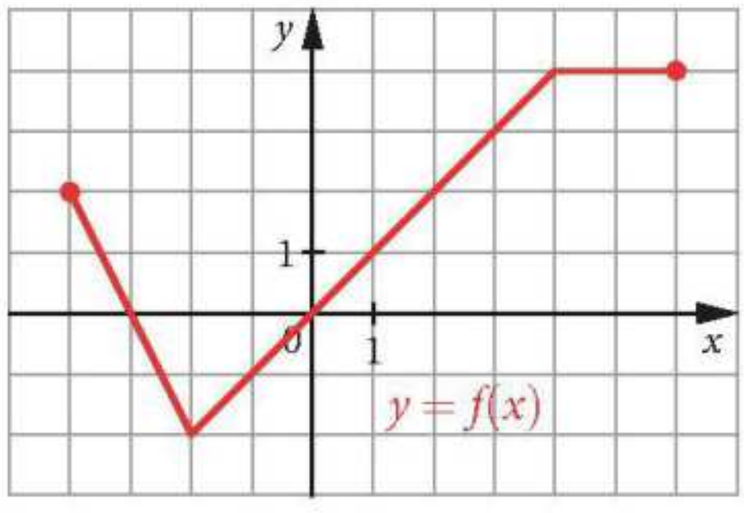
Mamy więc: $4 > -1$, ale $k(4) < k(-1)$.

Wniosek

Z faktu, że funkcja jest rosnąca (malejąca) w kilku przedziałach, **nie wynika**, że jest rosnąca (malejąca) w całej dziedzinie.

Zadania

Rozwiąż zadania 8.1–8.3 na podstawie zamieszczonego obok rysunku. W każdym z tych zadań jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.



8.1. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant 0$.

A. $\langle -3; 2\rangle$ **C.** $(-3; 0)$

B. $\langle -3; 0\rangle$ **D.** $\langle 0; 3\rangle$

8.2. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant 3$.

A. $\langle 3; 6\rangle$ **B.** $(3; 6\rangle$ **C.** $\langle 3; 6)$ **D.** $(3; 6)$

8.3. W przedziale $\langle -2; 6\rangle$ funkcja f jest

A. rosnąca. **B.** stała. **C.** nierosnąca. **D.** niemalejąca.

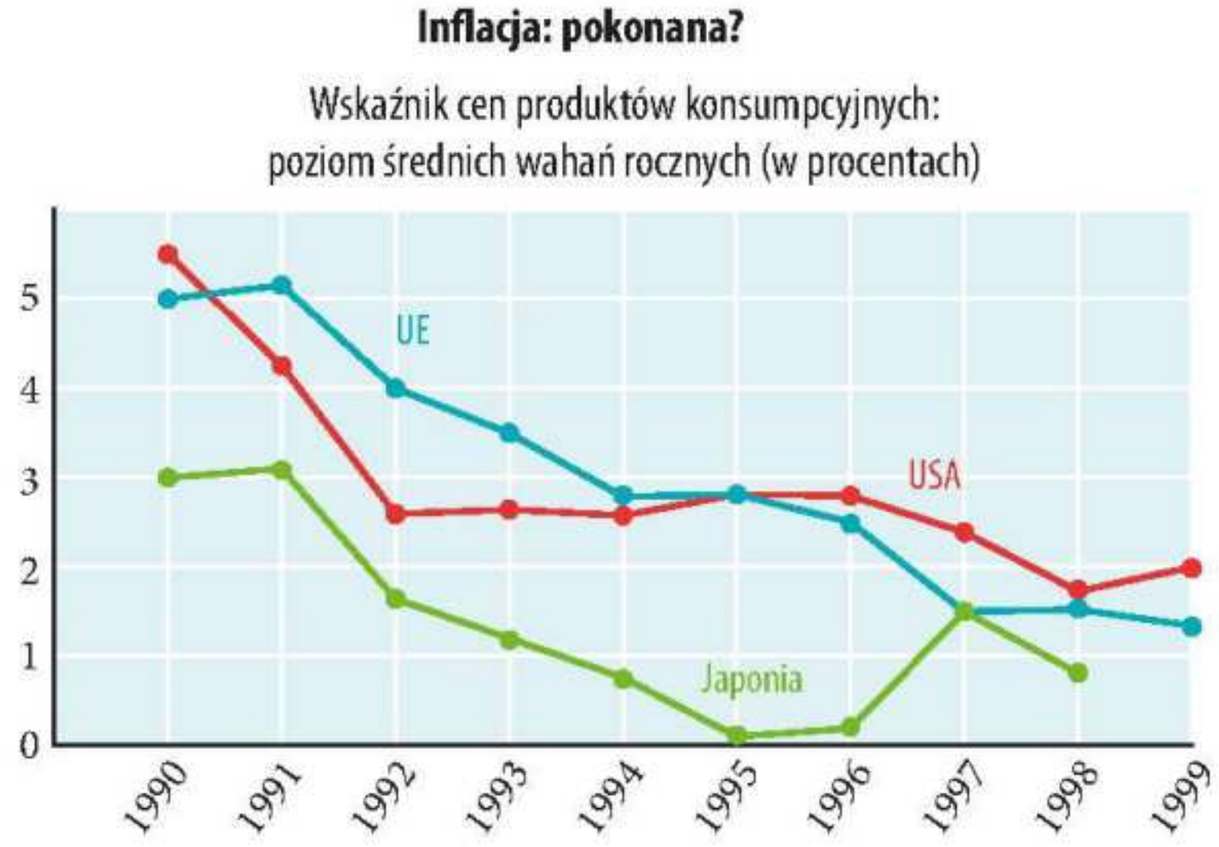
8.4. Wykres przedstawia liczbę widzów na wszystkich seansach kinowych w Polsce w poszczególnych latach.

a) Odczytaj, w jakich latach liczba widzów była wyższa od 100 mln.

b) Kiedy liczba ta była największa?



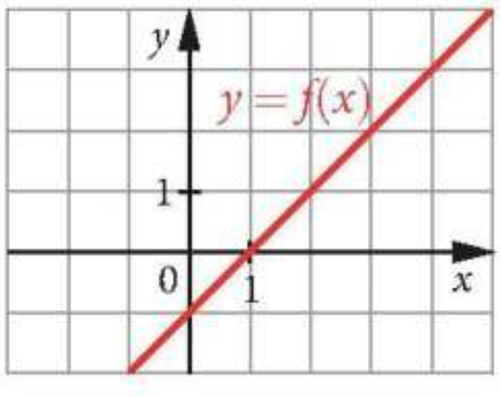
8.5. Z podanego wykresu odczytaj, od którego roku w UE, w USA i w Japonii inflacja była niższa od 2%. W którym roku badanego okresu i gdzie inflacja była najwyższa? Ile wynosiła wtedy jej wartość?



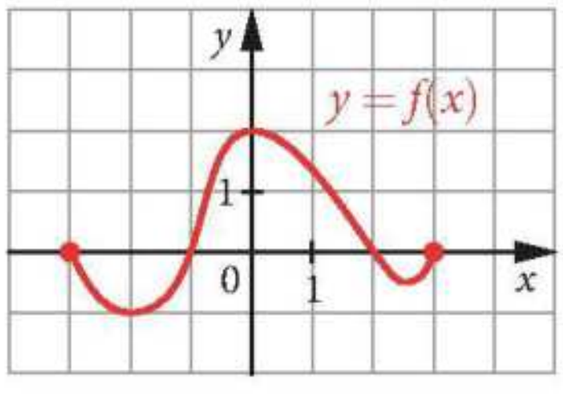
8.6. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytaj z niego rozwiązania nierówności:

I. $f(x) > 0$, II. $f(x) \leqslant 0$, III. $f(x) < 2$, IV. $f(x) \geqslant -1$.

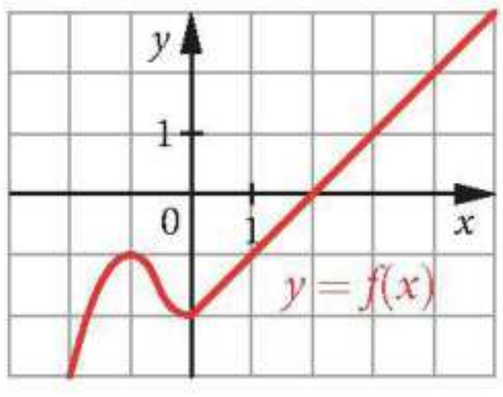
a)



b)

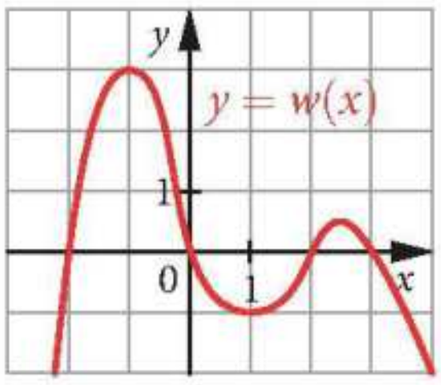


c)

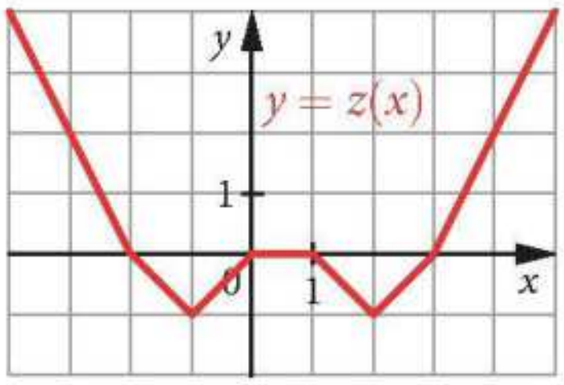


8.7. Odczytaj z wykresu zbiory rozwiązań nierówności.

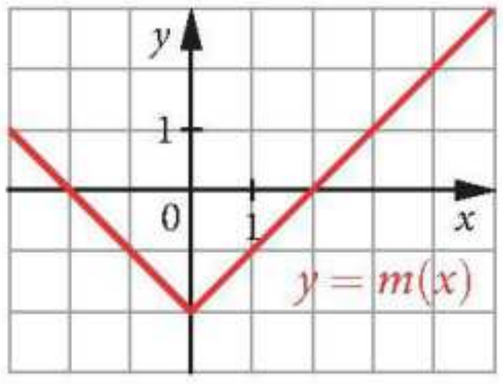
a) $w(x) > 0$,
$w(x) \leqslant 0$



b) $z(x) > 2$,
$z(x) \leqslant 0$,
$z(x) < 4$



c) $m(x) > 0$,
$m(x) < 0$,
$m(x) \leqslant -1$



8.8. Podaj przykład wykresu funkcji f, która spełnia podane warunki.

a) $D = \langle -3; 5\rangle$
$f(x) > 0$ dla $x \in \langle -3; -1) \cup (1; 5\rangle$
$f(x) < 0$ dla $x \in (-1; 1)$

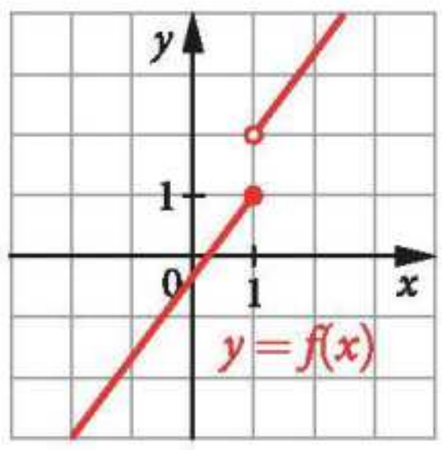
b) $D = (1; 6)$
$f(x) > 0$ dla $x \in (1; 3)$
$f(x) < 0$ dla $x \in \langle 3; 6)$

c) $D = (-3; 3)$
$f(x) > 0$ dla $x \in (0; 3)$
$f(x) < 0$ dla $x \in (-3; 0\rangle$

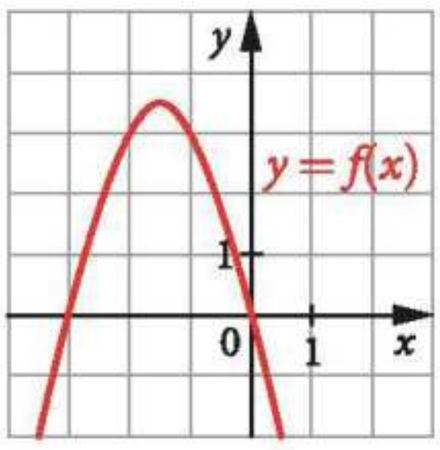
d) $D = \langle 0; 8\rangle$
$f(x) > 0$ dla $x \in \langle 0; 2\rangle \cup \langle 5; 8\rangle$
$f(x) < 0$ dla $x \in (2; 5)$

8.9. Określ na podstawie wykresu, czy przedstawiona funkcja jest monotoniczna.

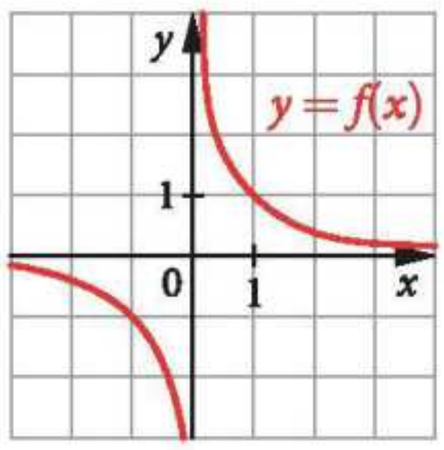
a)



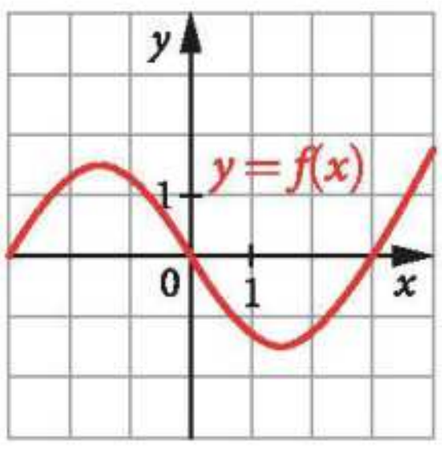
b)



c)

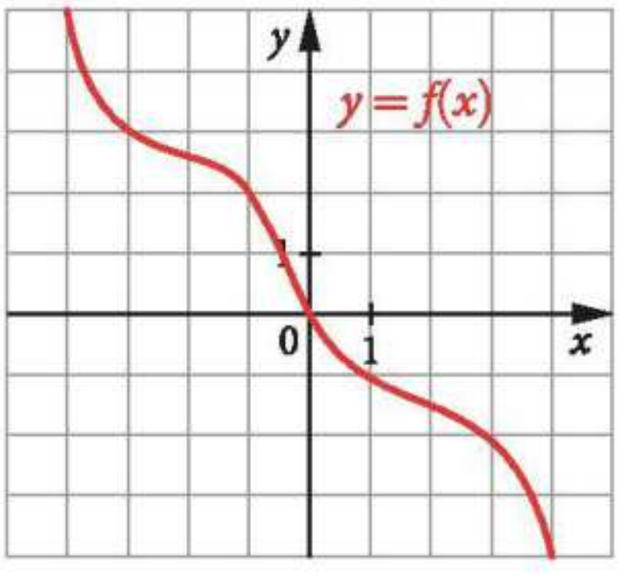


d)

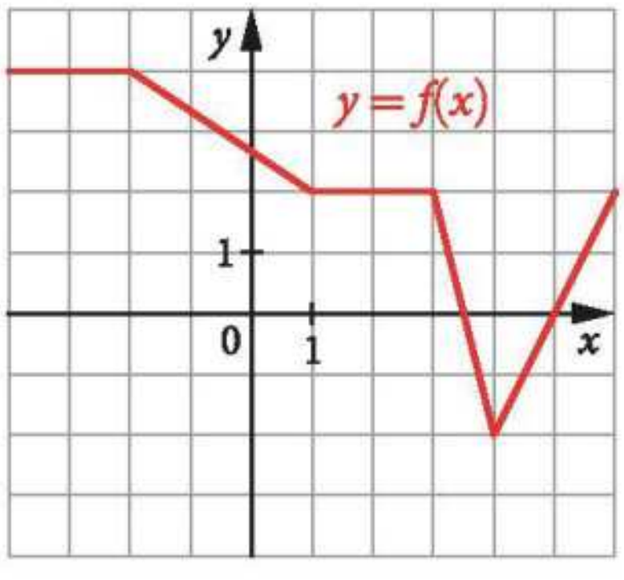


8.10. Określ na podstawie wykresu, czy przedstawiona funkcja jest monotoniczna.

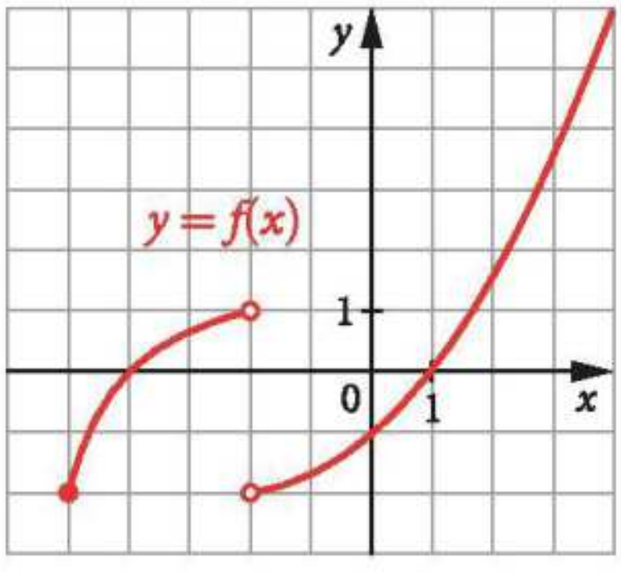
a)



b)

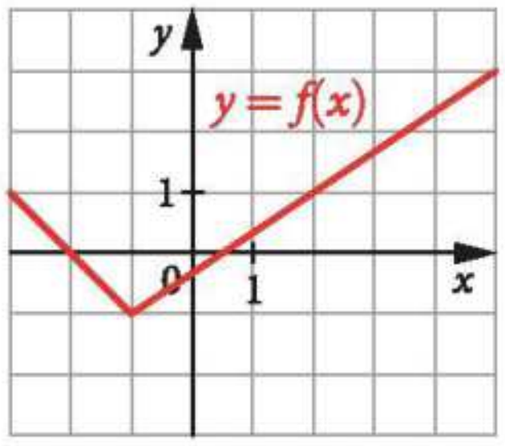


c)

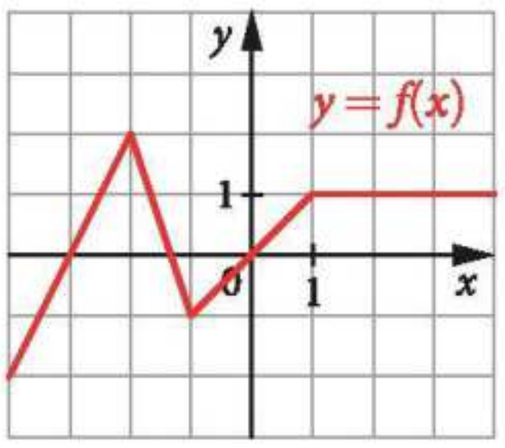


8.11. Podaj przedziały monotoniczności funkcji przedstawionej na wykresie.

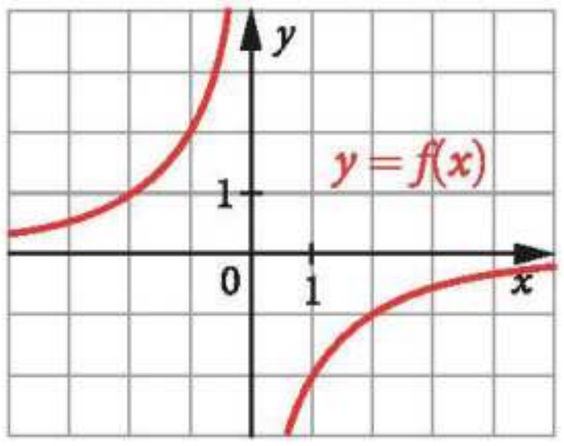
a)



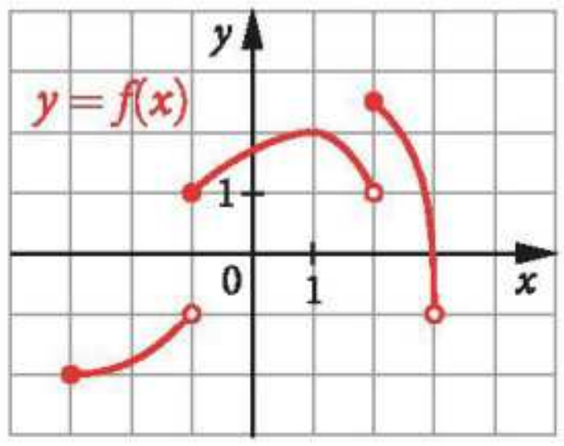
b)



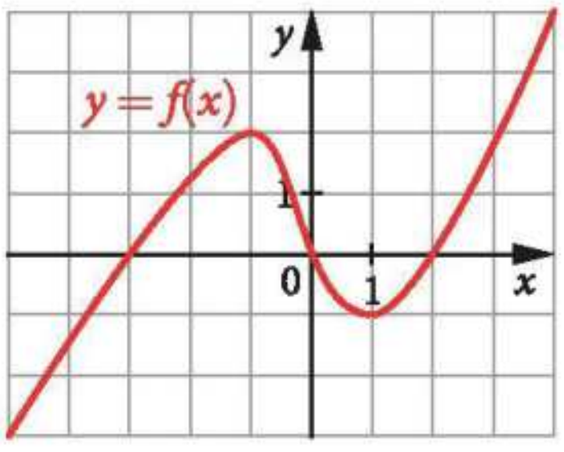
c)



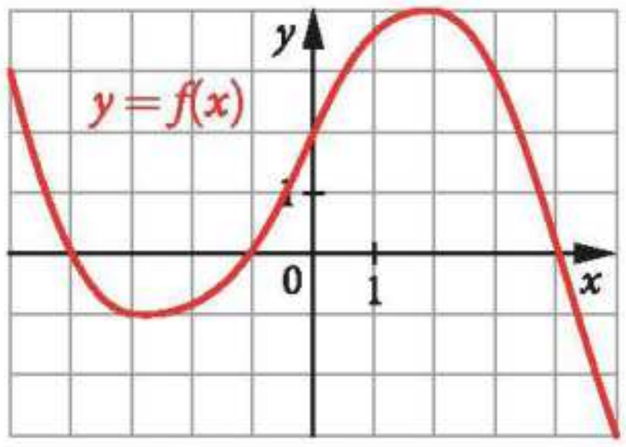
d)



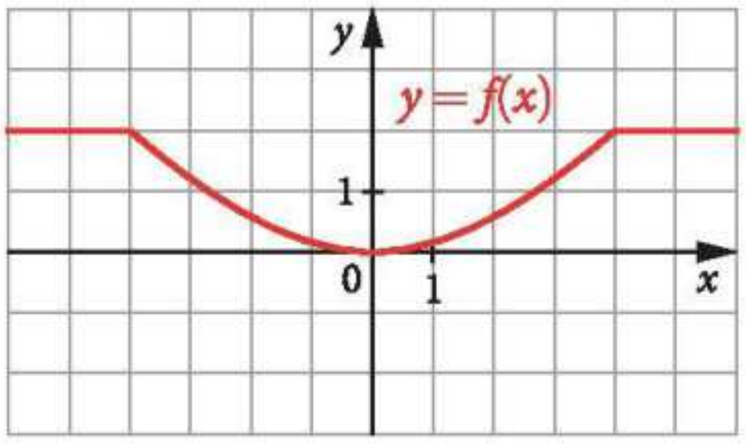
e)



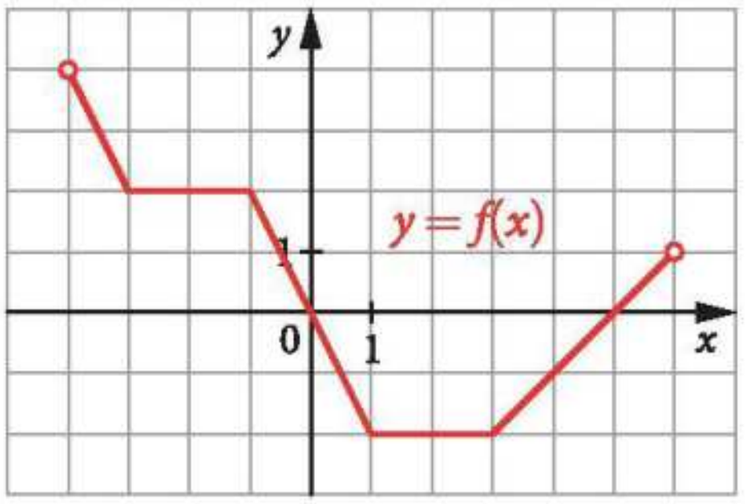
f)



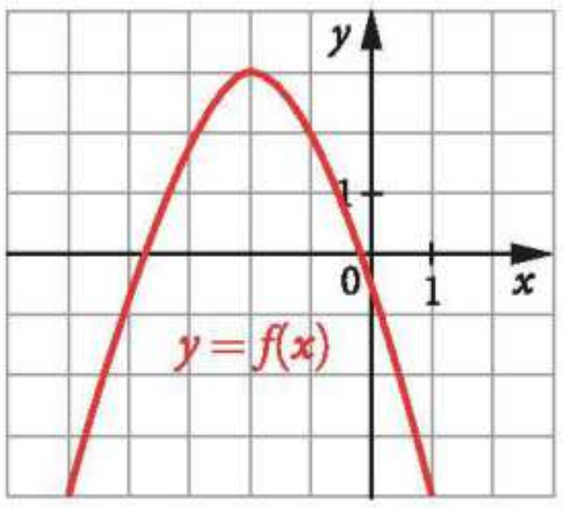
g)



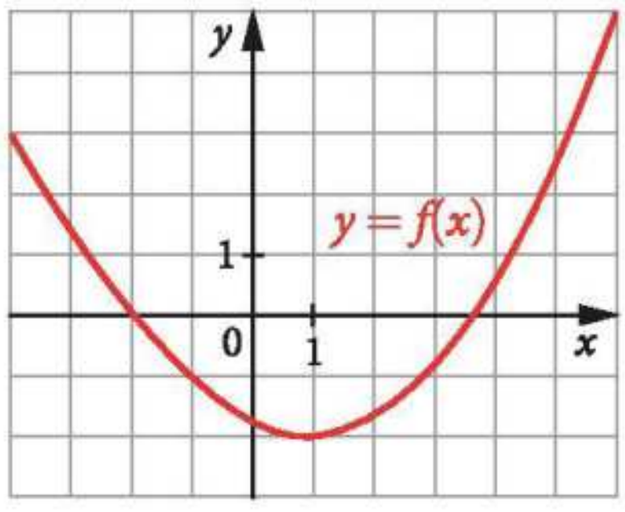
h)



i)

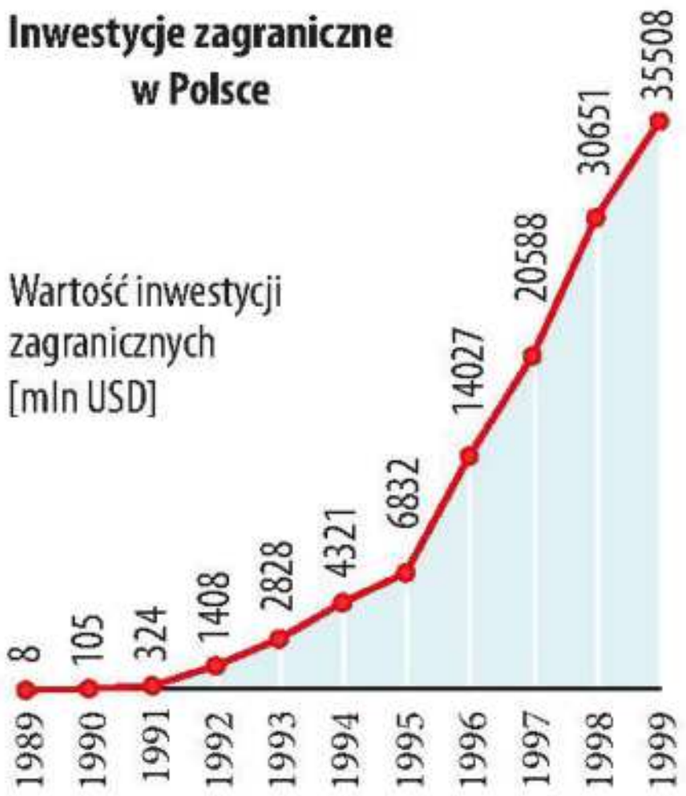


j)

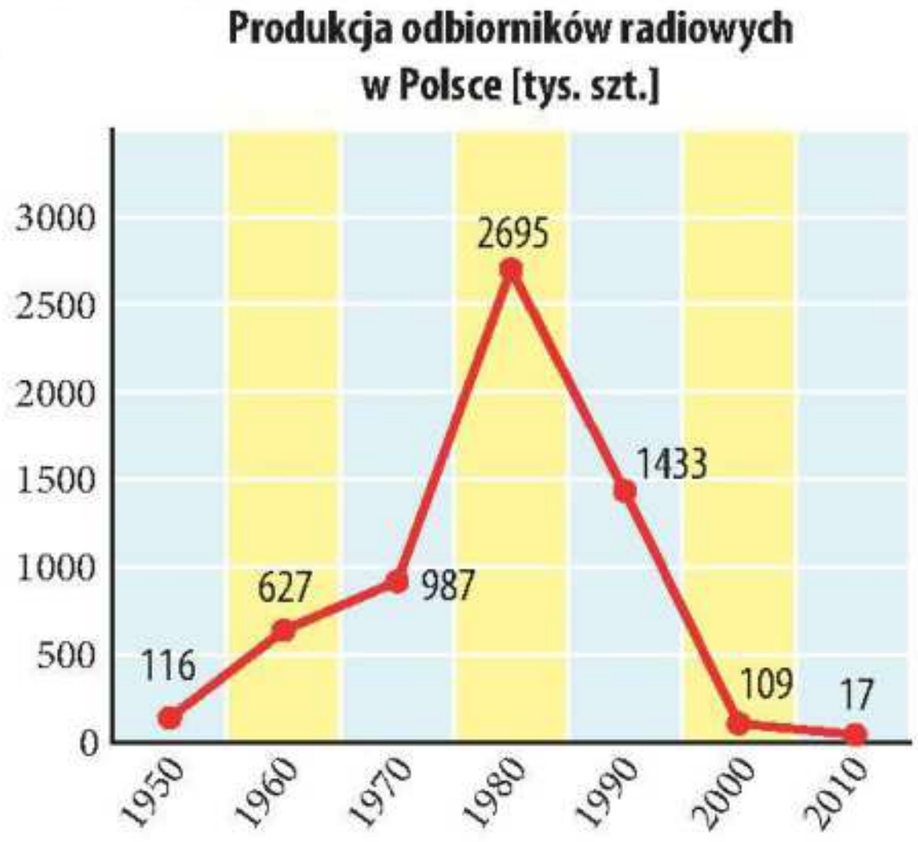


8.12. Omów monotoniczność funkcji o podanym wykresie.

a)



b)

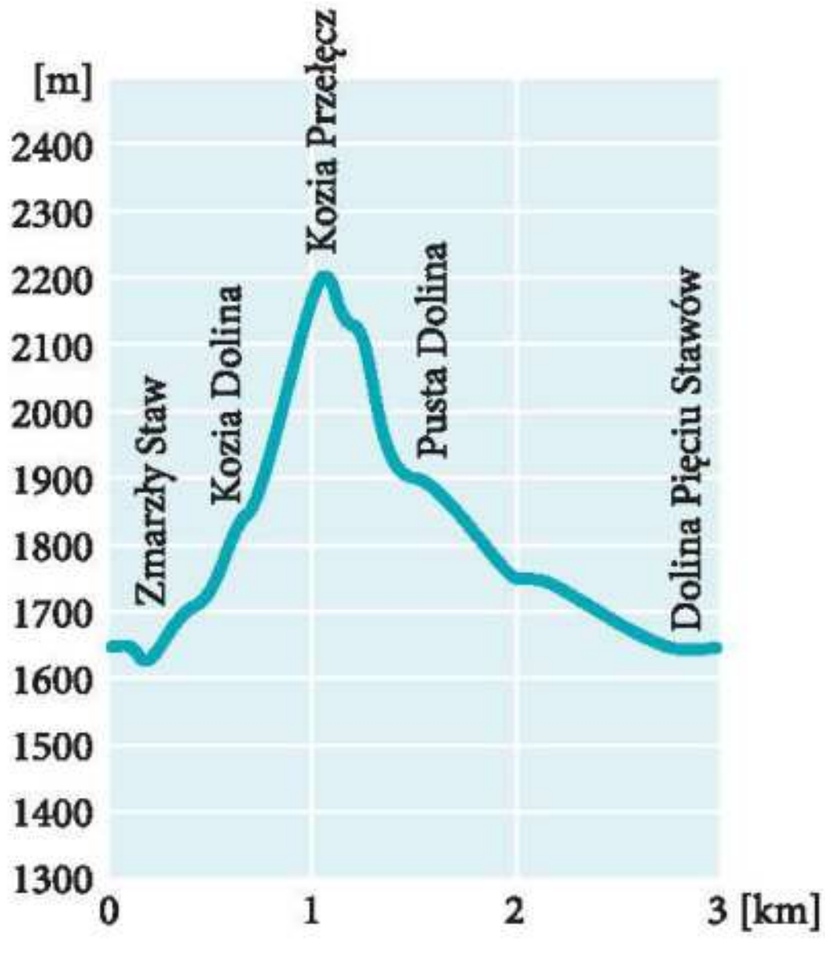


8.13. Omów monotoniczność funkcji opisujących zmiany wysokości n.p.m. podczas pokonywania trzech tatrzańskich szlaków turystycznych. Który z nich można polecić wycieczce szkolnej?

a)



c)



b)



8.14. Ile jest wszystkich funkcji o dziedzinie {1, 2, 3, 4, 5} i zbiorze wartości {6, 7, 8, 9, 10}, które są

a) malejące?

b) rosnące?

* c) rosnące w zbiorze {1, 2, 3} i malejące w zbiorze {3, 4, 5}?

* d) malejące w zbiorze {1, 2} i rosnące w zbiorze {3, 4, 5}?

Wykonaj tabele albo wykresy przykładowych funkcji spełniających te warunki.

8.15. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział (0; 4). Wiemy, że funkcja ta jest malejąca w przedziale (0; 2) i jest malejąca w przedziale (2; 4). Czy z tych informacji wynika, że funkcja $y = f(x)$ jest malejąca w podanym przedziale?

a) (0; 4) b) (0; 3) c) (0; 1) d) (1; 4)

8.16. Podaj przykład wykresu funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle 2; 6\rangle$, która jest malejąca w przedziałach $\langle 2; 4\rangle$ i $\langle 4; 6\rangle$, ale nie jest malejąca w dziedzinie.

8.17. Podaj przykład wykresu funkcji, która spełnia następujące warunki:

a) jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 3; \infty)$ oraz stała w przedziale $\langle -3; 3\rangle$.

b) ma dwa miejsca zerowe, jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -1)$ oraz malejąca w przedziale $\langle -1; \infty)$.

c) nie ma miejsc zerowych, jest rosnąca w przedziale $\langle 2; \infty)$, malejąca w przedziale $\langle -1; 2\rangle$ oraz stała w przedziale $(-\infty; -1\rangle$.

d) jest rosnąca w zbiorze **R** i ma jedno ujemne miejsce zerowe.

e) jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 1)$ i $\langle 1; \infty)$, ale nie jest monotoniczna w zbiorze **R**.

8.18. Przedstaw w jednym układzie współrzędnych wykresy dwóch funkcji malejących, które przecinają się

a) w jednym punkcie.

b) w dwóch punktach.

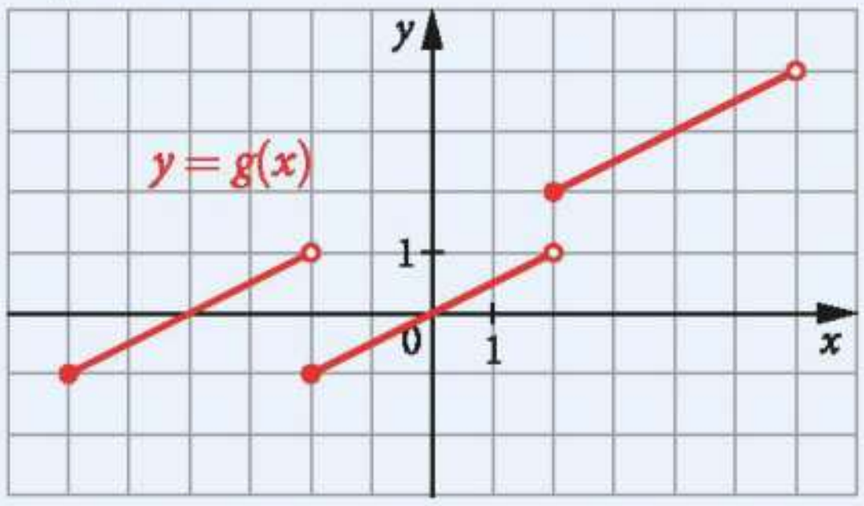
c) w trzech punktach.

d) w nieskończenie wielu punktach.

D * **8.19.** Wykaż, że jeżeli funkcja ma dwa miejsca zerowe, to nie jest funkcją rosnącą.

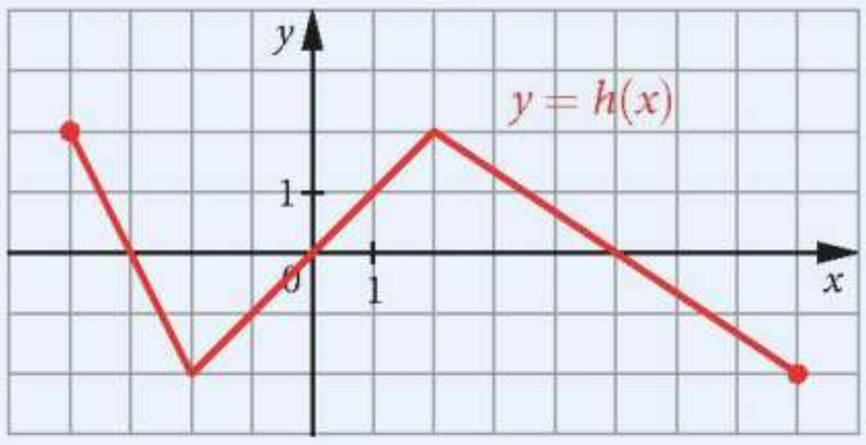
Prosto do matury

1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g.
Oceń prawdziwość podanych zdań.



A. W przedziale $\langle -6; 2)$ funkcja g jest rosnąca.
B. W przedziale $\langle -2; 6)$ funkcja g jest rosnąca.
C. W przedziale $\langle -6; 6)$ funkcja g jest rosnąca.

2. Odczytaj z wykresu funkcji h zamieszczonego obok zbiór rozwiązań nierówności $h(x) > 0$.



3. Opisz przedziały monotoniczności funkcji h, której wykres zamieszczono obok.

4. Podaj przykład wykresu funkcji o dziedzinie $D = \langle -5; 1\rangle$, która spełnia następujące warunki:
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-5; -2) \cup \langle 0; 1\rangle$,
- $f(x) < 0$ dla $x \in \{-5\} \cup (-2; 0)$.

5. Podaj przykład wykresu funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle 1; 5\rangle$ i która jest stała w przedziałach $\langle 1; 3)$ oraz $\langle 3; 5\rangle$, ale nie jest stała w całej dziedzinie. Czy taka funkcja jest monotoniczna?

9. Ważna funkcja – proporcjonalność odwrotna

Umiejętności:

- rozpoznawanie wielkości odwrotnie proporcjonalnych
- szkicowanie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla danego a
- korzystanie ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi

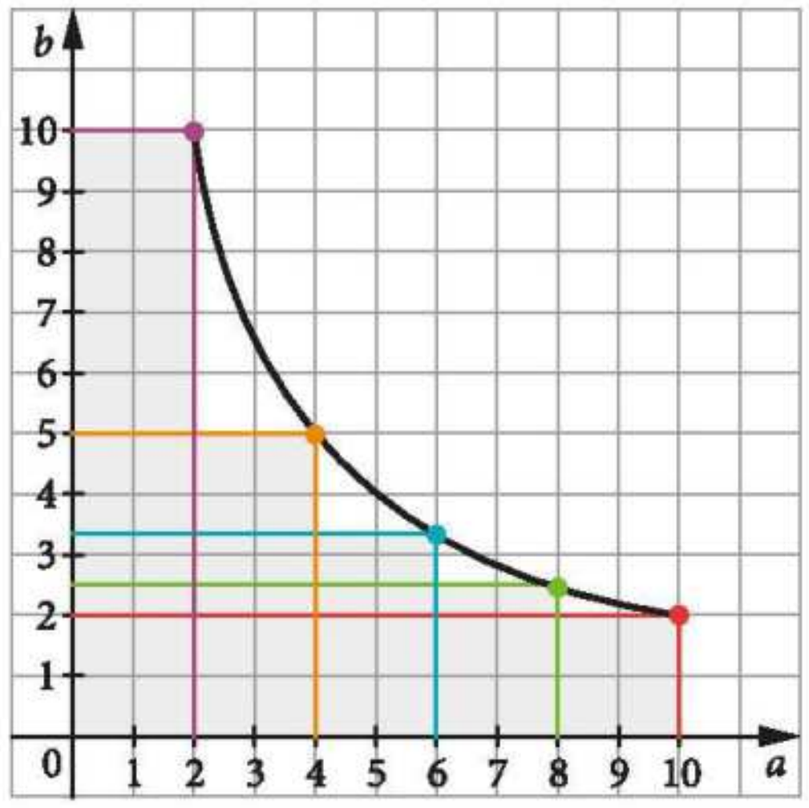
Jak dobrać wymiary prostokąta, aby jego pole było równe 20? Przedstawimy kilka wyników w tabeli, w której a i b oznaczają długości boków prostokąta, a P jego pole.

a	2	10	2,5	8	$5\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	4	5
b	10	2	8	2,5	$2\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	5	4
P	20	20	20	20	20	20	20	20

Zależność między długościami boków prostokąta o polu 20 zapisujemy w postaci:

$$a \cdot b = 20$$

Prostokątów spełniających taki warunek jest nieskończenie wiele. Możemy zilustrować to na wykresie. Każdy z narysowanych prostokątów ma pole równe 20. Jeżeli przyjmiemy, że długość boku a zmienia wartość od zera do nieskończoności, to odpowiadająca mu długość boku b będzie się odpowiednio zmieniała od nieskończoności do zera. Każdy z prostokątów ma trzy wierzchołki leżące na osiach. Czwarte wierzchołki wszystkich prostokątów wyznaczają krzywą zwaną hiperbolą.



Definicja

Rozważamy dwie dodatnie zmienne wielkości x i y. Zależność między x i y taką, w której iloczyn a tych wielkości jest stały, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**.

$$xy = a, \quad x > 0, \quad y > 0$$

Mówimy wówczas, że x i y są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Przy stałym polu prostokąta długość jednego z boków prostokąta jest odwrotnie proporcjonalna do długości drugiego boku.

Przykład 1

Ojciec Karola dojeżdża do pracy samochodem. Codziennie pokonuje trasę 20 km z różną prędkością średnią. Czas przejazdu t jest odwrotnie proporcjonalny do prędkości średniej v, ponieważ:

$$t \cdot v = 20$$

Jeżeli ojciec Karola jedzie ze średnią prędkością $v = 60$ km/h, to dojazd do pracy zajmuje mu 20 minut.

$$t = \frac{20}{60}\ \text{h} = 20\ \text{min}$$

Jeżeli jedzie ze średnią prędkością $v = 40$ km/h, to dojeżdża po półgodzinie. Pewnego dnia trafił na korek i całą trasę pokonał ze średnią prędkością 10 km/h. Zajęło mu to wówczas 2 godziny.

Przykład 2 ◀ zad. 9.5

Na polu może równocześnie pracować maksymalnie 6 traktorów i wówczas zaorzą pole w ciągu 8 godzin. W jakim czasie wykonają tę samą pracę 4 traktory pracujące w tym samym tempie?



Rozwiązanie

Skoro 6 traktorów może zaorać pole w ciągu 8 godzin, to znaczy, że na zaoranie tego pola przez jeden traktor potrzeba $6 \cdot 8 = 48$ godzin. Cztery traktory tę samą pracę wykonałyby 4 razy szybciej, czyli w 12 godzin.

Liczba godzin pracy jest odwrotnie proporcjonalna do liczby traktorów.

Odp.: Cztery traktory wykonają tę pracę w ciągu 12 godzin.

Przykład 3 ◀ zad. 9.6

Narciarską trasę zjazdową ubijają trzy ratraki w czasie 2 godzin. Ile czasu potrzeba na ubicie śniegu, jeżeli na trasę wyjedzie pięć ratraków? Zakładamy, że wszystkie ratraki pracują z taką samą wydajnością i mogą pracować na tej trasie jednocześnie.



Rozwiązanie

Jeden ratrak wykonałby tę pracę w czasie 6 godzin.

Pięć ratraków – w czasie $\frac{6}{5}$ godziny.

Odp.: Pięć ratraków przygotuje trasę zjazdową w czasie 1 godziny i 12 minut.

Przykład 4 ◂ zad. 9.16

Pan Piotr, wykwalifikowany malarz, może pomalować całą altanę ogrodową w czasie 8 godzin. Jego pomocnik Krzyś tę samą pracę wykona w czasie 16 godzin. Ile czasu zajmie im pomalowanie altany, jeżeli będą pracować wspólnie?

Rozwiązanie

W ciągu godziny pan Piotr pomaluje $\frac{1}{8}$ altany, a Krzyś $\frac{1}{16}$ altany. Wspólnie wykonają zatem w ciągu godziny $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$ pracy.

W czasie 16 godzin pomalowaliby 3 takie domki, a pomalowanie jednego zajmie im $\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$ godziny.

Odp.: Pomalowanie altany zajmie im 5 godzin i 20 minut.

Przykład 5

Władze pewnej gminy ogłosiły przetarg na wykonanie przed sezonem letnim drogi prowadzącej nad pobliskie jezioro. Oferty złożyły trzy firmy. Pierwsza zobowiązała się wykonać pracę w ciągu 4 dni, druga w 6 dni, a trzecia w 12 dni. Ile dni zajęłoby zbudowanie całej drogi, gdyby wszystkie te firmy pracowały jednocześnie, i jak należałoby podzielić między nie kwotę wynagrodzenia?

Rozwiązanie

Należy przyjąć, że każda z firm wykona zaplanowany przez siebie fragment drogi: w wypadku pierwszej firmy oznacza to $\frac{1}{4}$ całości, drugiej – $\frac{1}{6}$ całości, a trzeciej – $\frac{1}{12}$ całości.

Pracując wspólnie (choć nad różnymi fragmentami drogi), firmy wykonają w ciągu jednego dnia $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ część pracy.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$$

Skoro w ciągu jednego dnia firmy mogłyby wykonać połowę pracy, to cała praca zajęłaby im 2 dni.

W tym czasie pierwsza firma zbudowałaby $\frac{2}{4}$, czyli połowę drogi, druga firma – $\frac{2}{6}$, czyli $\frac{1}{3}$ drogi, a trzecia firma – $\frac{2}{12}$, czyli $\frac{1}{6}$ drogi. Na takie części należałoby również podzielić kwotę wynagrodzenia między te firmy.

Odp.: Zbudowanie drogi zajęłoby 2 dni; firmy powinny otrzymać odpowiednio $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$ kwoty wynagrodzenia.

Przykład 6 ◀ zad. 9.10

Grupa n robotników maluje s samochodów w r dni. Przez ile dni grupa k robotników pomaluje p samochodów przy założeniu tej samej wydajności i wykonalności pracy?

Rozwiązanie

nr ⟵ tyle dni 1 robotnik maluje s samochodów

$\frac{nr}{s}$ ⟵ tyle dni 1 robotnik maluje 1 samochód

$\frac{pnr}{s}$ ⟵ tyle dni 1 robotnik maluje p samochodów

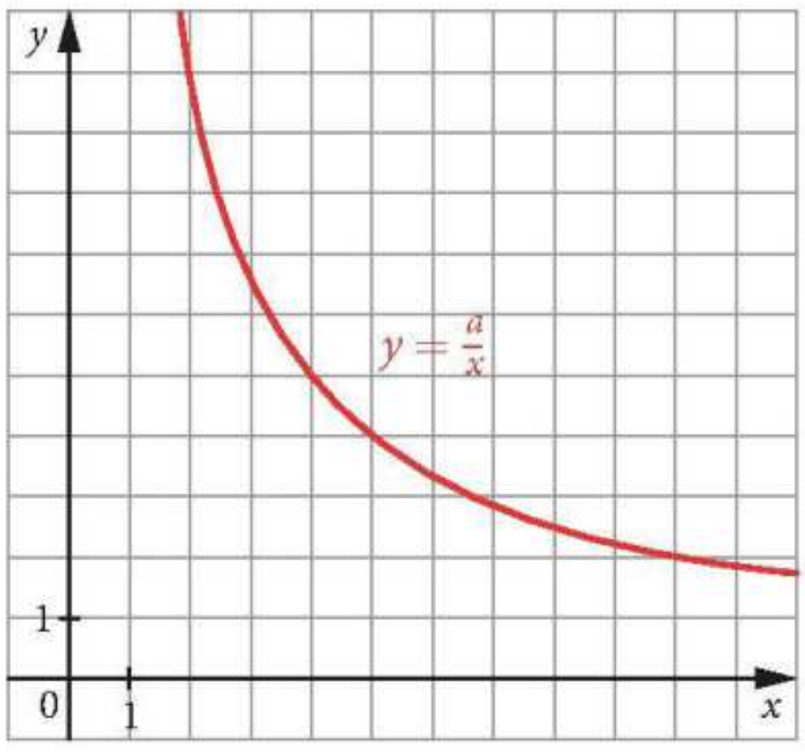
$\frac{pnr}{ks}$ ⟵ tyle dni k robotników maluje p samochodów

Odp.: Grupa k robotników pomaluje p samochodów w $\frac{pnr}{ks}$ dni.

Zgodnie z definicją dwie dodatnie wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, gdy ich iloczyn a jest stały. Jedną z nich możemy wyznaczyć w zależności od drugiej, wykonując dzielenie:

$$y = \frac{a}{x} \quad (a > 0)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wzór funkcji, której zarówno argumenty, jak i wartości są liczbami dodatnimi. Wykres tej funkcji znajduje się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.



Załóżmy teraz, że wielkości x i y przyjmują zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne. Wtedy $y = \frac{a}{x}$ jest wzorem funkcji, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera. Dla różnych wartości współczynnika a otrzymujemy w ten sposób różne zależności funkcyjne, np.:

- dla $a = 1$ mamy $y = \frac{1}{x}$
- dla $a = \frac{1}{3}$ mamy $y = \frac{\frac{1}{3}}{x}$, czyli $y = \frac{1}{3x}$
- dla $a = -2$ mamy $y = -\frac{2}{x}$
- dla $a = \sqrt{5}$ mamy $y = \frac{\sqrt{5}}{x}$

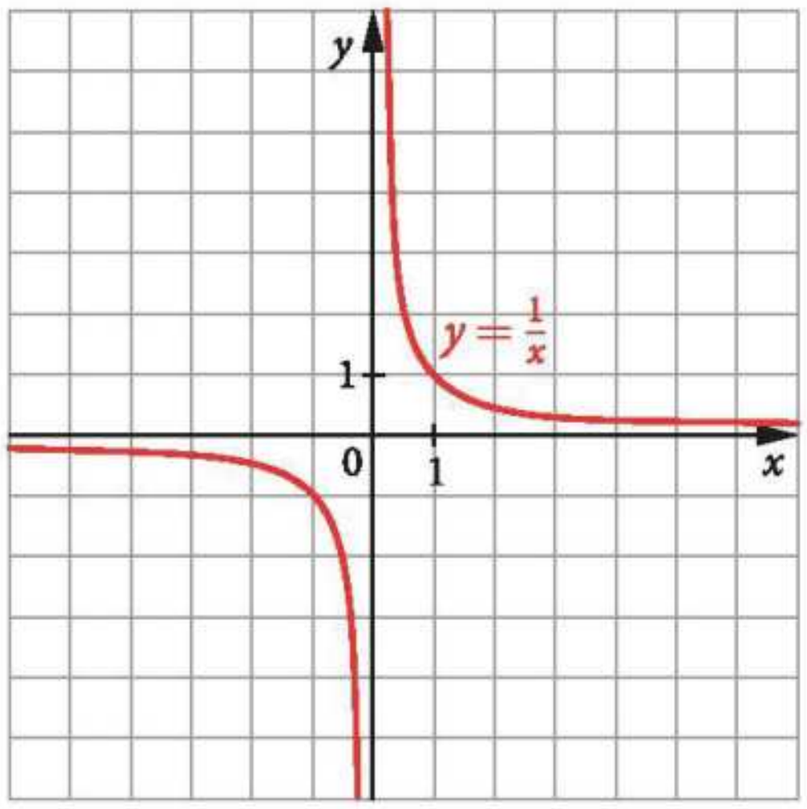
Zajmiemy się najpierw funkcjami postaci $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a > 0$.

Narysujmy wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór nieskończony. W tabeli możemy uwzględnić tylko kilka wybranych argumentów.

x	-10	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{4}$	1	3	1000
$f(x)$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-2	-100	100	4	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{1000}$

Z tabeli można wnioskować, że:

- dla dodatnich argumentów wartości funkcji są dodatnie, a dla ujemnych – ujemne,
- dla argumentów przeciwnych (np. 3 i −3) wartości funkcji są również liczbami przeciwnymi $\left(\frac{1}{3}\text{ i }-\frac{1}{3}\right)$,
- dla dużych dodatnich argumentów wartości funkcji są małe,
- dla małych dodatnich argumentów wartości funkcji są duże.



Do dokładnego narysowania wykresu można wykorzystać komputer lub kalkulator graficzny.

Wykresem funkcji $f(x)=\frac{1}{x}$ jest krzywa nazywana **hiperbolą**. Początek układu współrzędnych jest jej środkiem symetrii.

Funkcje o wzorze $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą różną od zera, mają podobne własności.

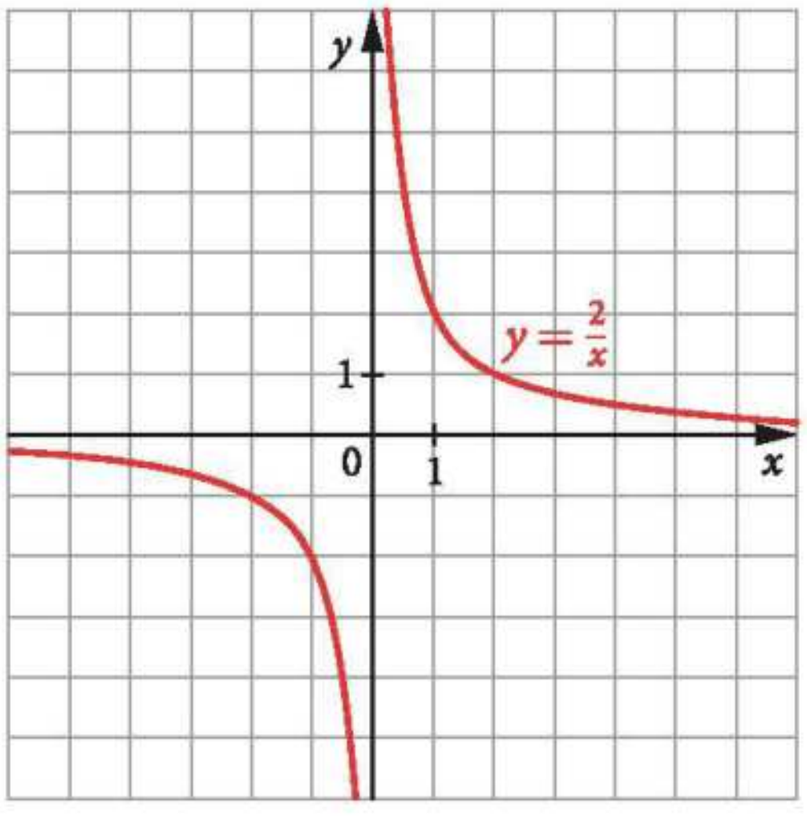
Przykład 7

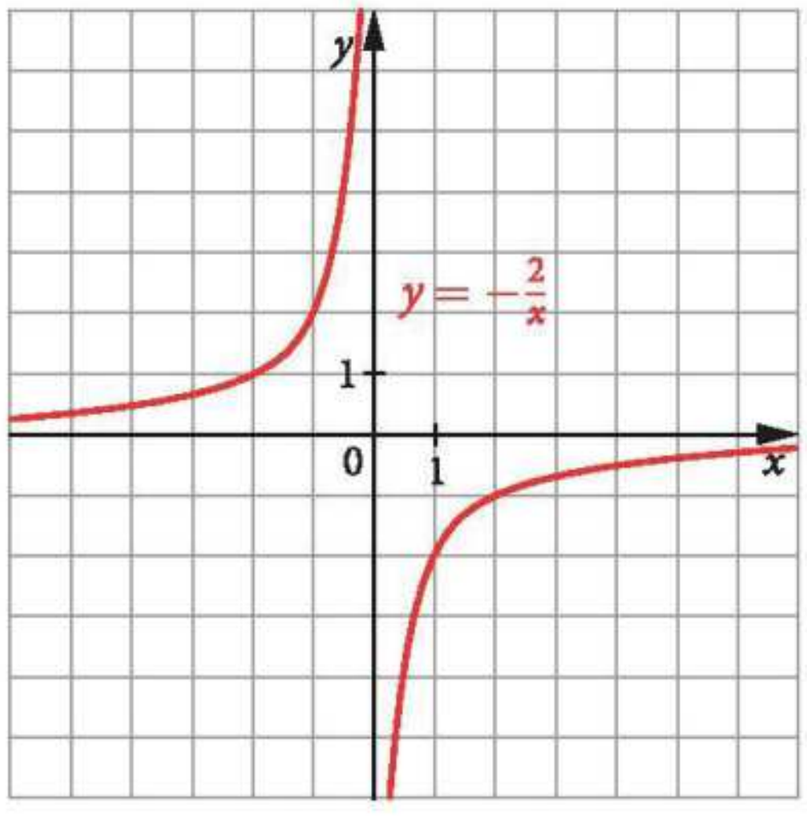
Narysujemy wykresy funkcji $f(x)=\frac{2}{x}$ i $g(x)=-\frac{2}{x}$.

Rozwiązanie

x	-4	-1	$-\frac{1}{2}$	1	4
$f(x)=\frac{2}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-4	2	$\frac{1}{2}$

Tabela dla funkcji g wyglądałaby bardzo podobnie, tylko wartość funkcji g dla danego argumentu jest liczbą przeciwną do wartości funkcji f dla tego samego argumentu.





Wykresy funkcji $f_1(x) = \frac{1}{x}$ i $f_2(x) = \frac{2}{x}$ mają podobny kształt. Wykres funkcji $f_2(x) = \frac{2}{x}$ jest bardziej oddalony od początku układu współrzędnych.

Aby dokładniej porównać własności funkcji o wzorze $f(x) = \frac{a}{x}$, warto narysować kilka wykresów w jednym układzie współrzędnych.

Przykład 8

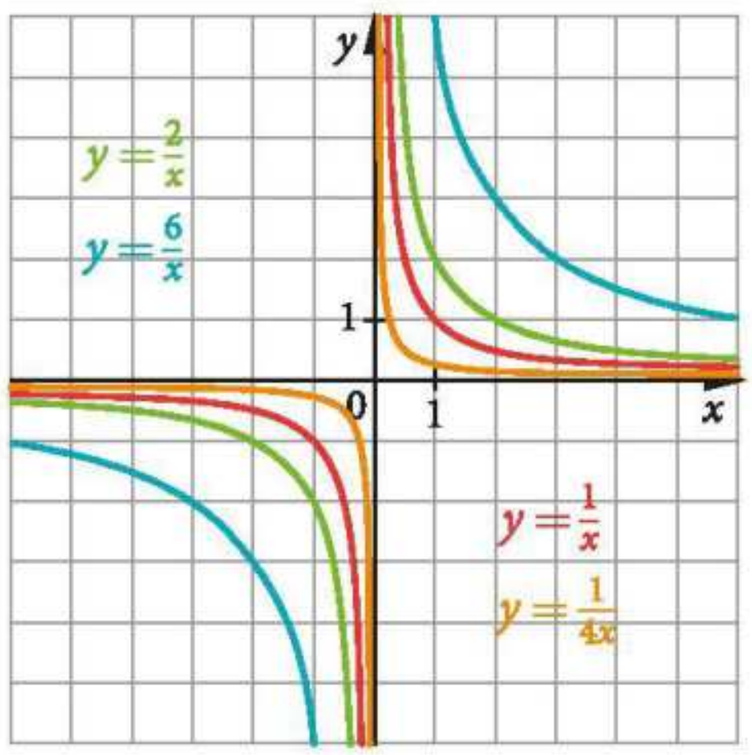
Sporządzimy wykresy funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$ i $g(x) = \frac{1}{4x}$ oraz umieścimy je (wraz z dwoma już poznanymi) na jednym rysunku.

Jeżeli $g(x) = \frac{a}{x}$ i $g(x) = \frac{1}{4x}$, to $a = \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie

x	-6	-3	-1	$\frac{1}{2}$	2
$f(x) = \frac{6}{x}$	-1	-2	-6	12	3

x	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$
$g(x) = \frac{1}{4x}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{4}$	-1	4	$\frac{1}{2}$



Zauważmy, że im bliższa zera jest wartość współczynnika a funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, tym bardziej wykres tej funkcji przybliża się do początku układu współrzędnych.

Wykres każdej funkcji o wzorze $f(x) = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0,\ x \neq 0)$ nazywamy **hiperbolą**.

Zauważmy, że $|y| = \frac{|a|}{|x|}$.

Jeżeli wartość bezwzględna x jest coraz większa, to wartość bezwzględna y maleje do zera – na wykresie funkcji punkty hiperboli są coraz bliższe osi x. Mówimy, że oś x jest **asymptotą poziomą** wykresu.

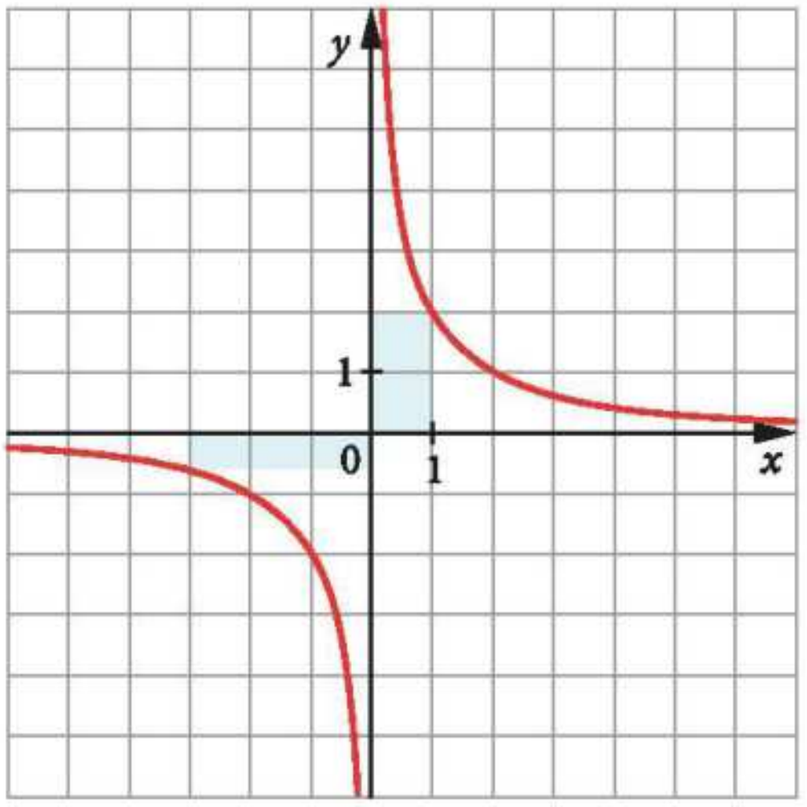
Z kolei gdy wartość bezwzględna x zbliża się do zera (mimo że nigdy go nie osiąga!), to wartość bezwzględna y nieograniczenie rośnie – na wykresie punkty hiperboli są coraz bliższe osi y. Mówimy, że oś y jest **asymptotą pionową** wykresu.

Zwróćmy uwagę na jeszcze jedną własność hiperboli. Dla dowolnego punktu $P = (x, y)$ leżącego na hiperboli o równaniu $y = \frac{a}{x}$ prostokąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(x, 0)$, P, $(0, y)$ ma pole równe $|a|$.

Jest to prosta konsekwencja równości:

$$|x| \cdot |y| = |a|$$

ponieważ boki rozważanego prostokąta mają długości równe $|x|$ oraz $|y|$.



Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

9.1. Jaką liczbę należy wstawić do tabeli w miejsce a, aby przedstawiała wielkości odwrotnie proporcjonalne?

30	5	$\frac{1}{3}$
4	24	a

A. $\frac{1}{40}$ **B.** 40 **C.** 120 **D.** 360

9.2. Wskaż wartość, którą funkcja $f(x) = \frac{1}{3x}$ przyjmuje dla argumentu -6.

A. $-\frac{1}{18}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** -2 **D.** -18

9.3. Darmowe minuty w abonamencie telefonicznym wystarczają Ani na rozmawianie przez 30 dni średnio po 4 minuty dziennie. Na ile dni wystarczy jej darmowych minut, jeżeli codziennie będzie rozmawiała 3 razy, a każda rozmowa będzie trwała 2 minuty?

A. 10 **B.** 20 **C.** 40 **D.** 80

9.4. Czy wielkości podane w tabeli są odwrotnie proporcjonalne?

a)

x	3	7	10
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

b)

a	8	4	1
b	2	4	16

c)

p	10	6	9
q	2	3	1

9.5. Pewna ilość mąki pszennej wystarcza na upieczenie 120 bułek po 0,3 kg każda. Ile pięciodekagramowych kajzerek można upiec z tej samej ilości mąki?

9.6. Jadąc na rowerze ze średnią prędkością 14 km/h, Jola dojeżdża do szkoły w czasie 30 minut. Krysia, która mieszka w tej samej odległości od szkoły co Jola, potrzebuje 20 minut na dojazd. Z jaką średnią prędkością dojeżdża do szkoły Krysia?

9.7. Pan Jan wyszedł z domu do pracy o godzinie 7^{25}. Jego żona Ewa, pracująca w tym samym budynku co mąż, wyszła z domu później. Oboje dotarli do celu o godzinie 7^{50}. Pani Ewa jechała do pracy ze średnią prędkością 45 km/h, natomiast pan Jan – ze średnią prędkością 36 km/h. O której godzinie pani Ewa wyszła z domu?

9.8. Motocyklista, jadąc drogą, na której dozwolona prędkość wynosiła 90 km/h, przejechał 1 km w czasie 40 sekund. Czy popełnił wykroczenie?

9.9. Dwie samotne ciotki Julii prowadzą wspólne gospodarstwo. Co miesiąc każda z nich wkłada do wspólnej kasy pewną kwotę pieniędzy przeznaczoną na zakup żywności. Jeżeli dziennie wydają średnio 20 zł, to składka wystarcza im na 30 dni. Na ile dni wystarczy składka, jeżeli zwiększą dzienne wydatki do 24 zł, a na ile – jeżeli zaczną oszczędzać i wydawać średnio 15 zł dziennie? Jaka jest wysokość składki każdej z ciotek, jeżeli płacą po równo?

9.10. Jeżeli Danka będzie odkładała do skarbonki miesięcznie kwotę p zł, to uzbiera potrzebną sumę w czasie t miesięcy. Ile czasu zajmie jej uzbieranie tej samej sumy przy comiesięcznej składce s zł?

9.11. Motocyklista przejechał m kilometrów w h godzin. Jaki dystans pokonywał średnio w czasie jednej minuty?

9.12. Szkoła wypłaca co miesiąc 12 uczniom stypendium w wysokości 80 zł. O ile zmniejszy się stypendium dla każdego ucznia, jeśli suma przeznaczona na wypłaty nie wzrośnie, a stypendium dostaną jeszcze cztery dodatkowe osoby?

9.13. Joanna grabi cały trawnik przed domem w ciągu 20 minut. Jej młodsza siostra tę samą pracę wykonuje 10 minut dłużej. Ile czasu zajmie im zagrabienie trawnika, jeżeli będą pracowały razem?

9.14. Podłoga sklepu została wyszlifowana za pomocą pierwszej szlifierki w czasie 35 godzin. Wykonanie tej samej pracy przy użyciu drugiej szlifierki zajęło 40 godzin. Ile czasu zajmie wyszlifowanie podłogi, jeśli szlifierki będą pracować jednocześnie?

9.15. Właściciel wyciągu narciarskiego kupił nową armatkę śnieżną. Poprzednia pokrywała śniegiem trasę zjazdową w czasie 24 godzin. Jeżeli obydwie armatki pracują równocześnie, to trasa jest gotowa po upływie 6 godzin. Ile czasu zaśnieża trasę nowa armatka?



9.16. Stefan jest właścicielem fabryczki produkującej kapsle do butelek. Jedna z jego maszyn tłoczy partię kapsli w s dni, a druga takie samo zamówienie wykonuje w t dni. Ile dni zajmie realizacja tego zamówienia, jeżeli Stefan uruchomi obydwie maszyny równocześnie?

9.17. Materiały dla uczestników konferencji miały być wydrukowane w ciągu 40 minut na dwóch drukarkach o różnej wydajności używanych jednocześnie. Ponieważ jednak po 10 minutach pierwsza drukarka została uszkodzona, resztę materiałów wydrukowano tylko na drugiej, co wydłużyło czas drukowania do 55 minut. Ile czasu zajęłoby wydrukowanie wszystkich materiałów na każdej drukarce z osobna?

9.18. Naszkicuj wykres i podaj własności funkcji.

a) $f(x) = \frac{3}{x}$ b) $f(x) = \frac{8}{x}$ c) $f(x) = \frac{12}{x}$ d) $f(x) = \frac{1}{2x}$

9.19. Dla jakich wartości a wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ przechodzi przez dany punkt?

a) $A = (1, 2)$ b) $B = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ c) $C = \left(\frac{1}{8}, 2\right)$ d) $D = (0, 3)$

9.20. Zacieniuj zbiór punktów płaszczyzny, przez które przechodzą wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdy

a) $a \in \langle 1; 6\rangle$. b) $a \in (2; 8)$. c) $a \in \langle 4; \infty)$. d) $a \in (0; 2)$.

9.21. Wymień wszystkie punkty o obydwu współrzędnych całkowitych, przez które przechodzi wykres funkcji $y = f(x)$.

a) $f(x) = \frac{6}{x}$ b) $f(x) = \frac{8}{x}$ c) $f(x) = \frac{12}{x}$ d) $f(x) = -\frac{9}{x}$

9.22. Rozwiąż graficznie nierówność.

a) $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{x} < 2$ c) $-\frac{1}{x} \leqslant 2$ d) $-\frac{1}{x} > 1$

Prosto do matury

1. Niech c będzie ustaloną liczbą cukierków. Rozdajemy je wszystkie między n dzieci, tak aby każde dostało k cukierków. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Liczba n jest odwrotnie proporcjonalna do liczby c.

B. Liczba n jest odwrotnie proporcjonalna do liczby k.

C. Liczba k jest odwrotnie proporcjonalna do liczby c.

2. Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją tak, by wielkości x i y były odwrotnie proporcjonalne.

x	3	6	?	$\frac{1}{2}$	?
y	2	?	3	?	4

3. Odczytaj rozwiązanie nierówności $\frac{4}{x} \leqslant 2$, korzystając z wykresu funkcji $f(x)=\frac{4}{x}$.

4. Tomek i Romek malowali płot rozdzielający ich posesje, każdy po swojej stronie. Romek w ciągu każdej godziny malował o 20% mniej niż sąsiad. Tomek skończył malować swoją stronę po 5 godzinach. Po jakim czasie skończył pracę Romek?

5. W stałej temperaturze ciśnienie gazu jest odwrotnie proporcjonalne do jego objętości. Na początku ciśnienie gazu w naczyniu o pojemności 200 cm^3 wynosiło p. Ile będzie wynosiło ciśnienie gazu, jeżeli nie zmienimy temperatury, a objętość gazu

a) zmniejszymy do 150 cm^3?

b) zwiększymy do 300 cm^3?

c) zmniejszymy o 20 cm^3?

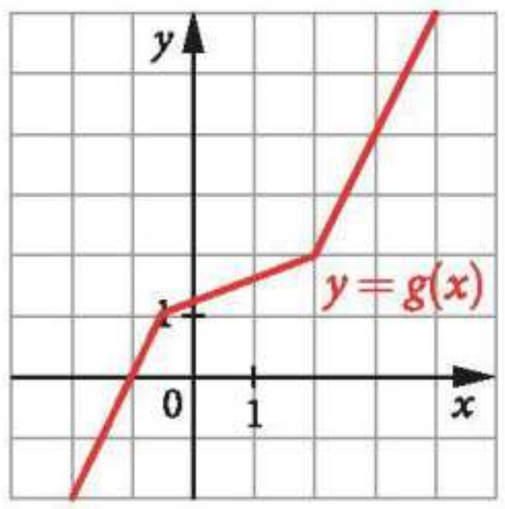
10. Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu

Umiejętności:

- odczytywanie własności funkcji z jej wykresu
- graficzne rozwiązywanie równań $f(x) = g(x)$ oraz układów nierówności

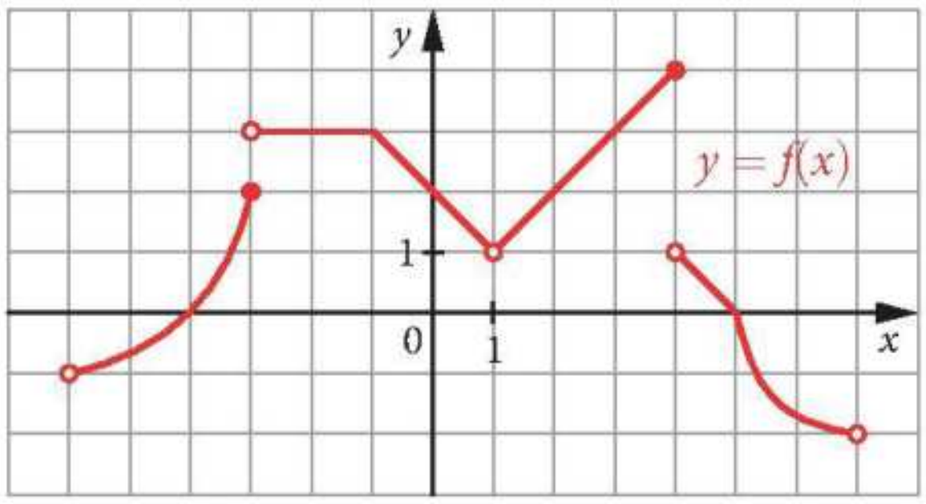
W przykładach 1, 2, 3 na podstawie wykresu funkcji odczytamy: jej dziedzinę, zbiór wartości, wartość największą i wartość najmniejszą (jeżeli funkcja je przyjmuje), miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m.

Przykład 1 ◂ zad. 10.4 a



- $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$
- Funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej.
  Funkcja nie przyjmuje wartości największej.
- Miejscem zerowym jest argument $x = -1$.
- $g(x) > 0$ dla $x \in (-1; \infty)$,
  $g(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -1)$.
- Funkcja jest monotoniczna – jest rosnąca.
- Równanie $f(x) = m$ ma dla dowolnej wartości m jedno rozwiązanie.

Przykład 2 ◂ zad. 10.4 d



- $D = (-6; 7) - \{1\}$, $ZW = (-2; 4\rangle$
- Funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej; przyjmuje wartość największą równą 4 dla $x = 4$.
- Miejscami zerowymi są $x = -4$, $x = 5$.
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; 1) \cup (1; 5)$,
  $f(x) < 0$ dla $x \in (-6; -4) \cup (5; 7)$.
- Funkcja nie jest monotoniczna, natomiast: w przedziale $(-6; -1\rangle$ jest funkcją niemalejącą, w przedziale $\langle -1; 1)$ funkcja maleje, w przedziale $(1; 4\rangle$ funkcja rośnie, w przedziale $\langle 4; 7)$ funkcja maleje.
- Równanie $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2\rangle \cup (4; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-2; -1\rangle \cup \{1\} \cup (3; 4\rangle$, 2 rozwiązania dla $m \in (-1; 1) \cup (2; 3)$, 3 rozwiązania dla $m \in (1; 2\rangle$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 3$.

Przykład 3 ◀ zad. 10.5

Narysujemy wykres i na jego podstawie opiszemy własności funkcji

$f(x) = \frac{4}{x}$ dla $1 \leqslant |x| \leqslant 4$.

Rozwiązanie

Wyznaczymy najpierw dziedzinę funkcji.

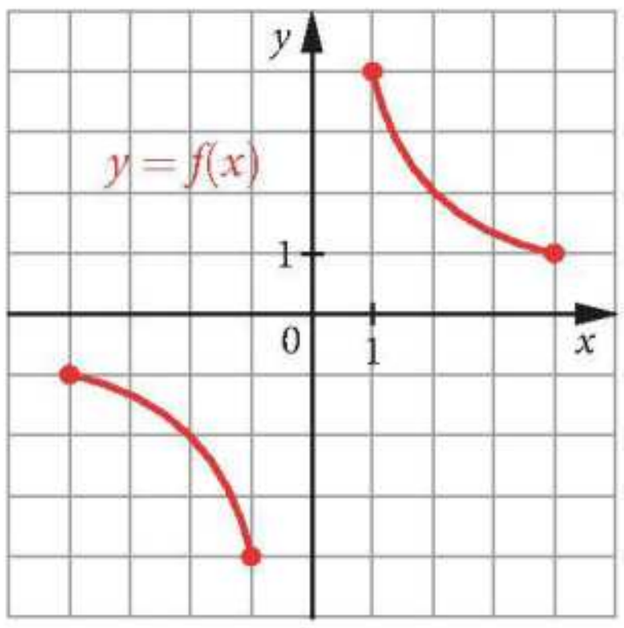
Podwójną nierówność $1 \leqslant |x| \leqslant 4$ zapiszemy w postaci układu.

$$\begin{cases} |x| \leqslant 4 \\ |x| \geqslant 1 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x \in \langle -4; 4\rangle \\ x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty) \end{cases} \text{ i ostatecznie } x \in \langle -4; -1\rangle \cup \langle 1; 4\rangle$$

Zatem $f(x) = \frac{4}{x}$ dla $x \in \langle -4; -1\rangle \cup \langle 1; 4\rangle$.

Wykres funkcji jest sumą fragmentów hiperboli.

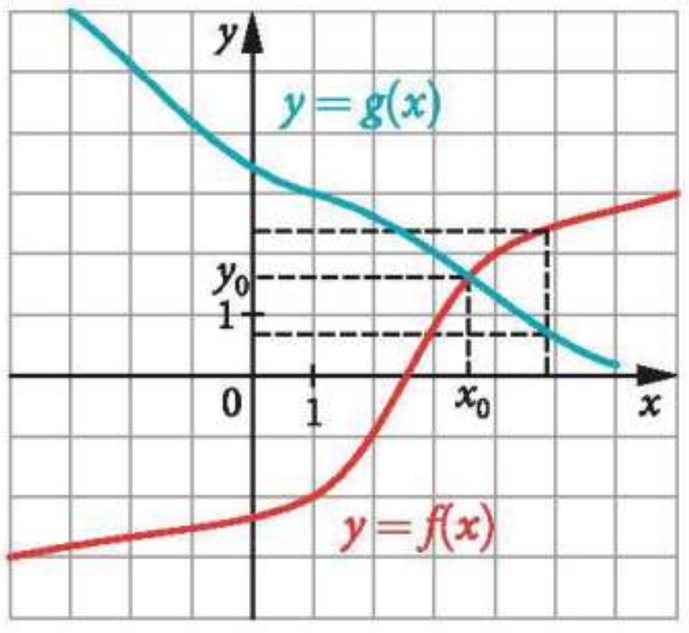
- $D = \langle -4; -1\rangle \cup \langle 1; 4\rangle$, $ZW = \langle -4; -1\rangle \cup \langle 1; 4\rangle$
- Funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą -4 dla $x = -1$;
  przyjmuje wartość największą równą 4 dla $x = 1$.
- Funkcja nie ma miejsc zerowych.
- $f(x) > 0$ dla $x \in \langle 1; 4\rangle$, $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -4; -1\rangle$.
- Funkcja nie jest monotoniczna, natomiast:
  w przedziale $\langle -4; -1\rangle$ funkcja maleje,
  w przedziale $\langle 1; 4\rangle$ funkcja maleje.
- Równanie $f(x) = m$ ma:
  0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (4; \infty)$,
  1 rozwiązanie dla $m \in \langle -4; -1\rangle \cup \langle 1; 4\rangle$.



Graficzne rozwiązywanie równań i nierówności postaci $f(x) \geqslant g(x)$

W układzie współrzędnych umieszczone są wykresy dwóch funkcji: $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$.

Sprawdźmy, dla jakich argumentów wartości funkcji f są równe wartościom funkcji g, dla jakich są większe od wartości funkcji g, a dla jakich – mniejsze. Inaczej mówiąc, odczytajmy z wykresu zbiór rozwiązań odpowiedniego równania bądź nierówności.



$f(x) = g(x) = y_0$ dla $x = x_0$ ⟵ obie funkcje mają identyczną wartość

$f(x) > g(x)$ dla $x > x_0$ ⟵ wykres funkcji f leży ponad wykresem funkcji g

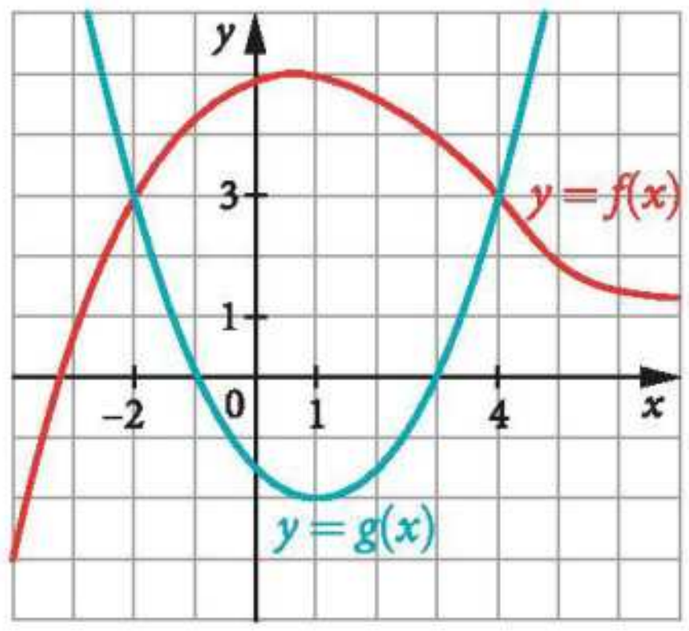
$f(x) < g(x)$ dla $x < x_0$ ⟵ wykres funkcji f leży poniżej wykresu funkcji g

Podsumujmy:

- graficzne rozwiązywanie równania $f(x) = g(x)$ polega na narysowaniu w jednym układzie współrzędnych wykresów $y = f(x)$ i $y = g(x)$, znalezieniu punktów wspólnych tych wykresów i odczytaniu pierwszych współrzędnych tych punktów;
- graficzne rozwiązywanie nierówności $f(x) > g(x)$ polega na narysowaniu w jednym układzie współrzędnych wykresów $y = f(x)$ i $y = g(x)$ oraz odczytaniu pierwszych współrzędnych wszystkich punktów, dla których wykres funkcji f leży ponad wykresem funkcji g.

Przykład 4 ◀ zad. 10.12

Odczytamy z wykresu rozwiązania równania $f(x) = g(x)$ oraz nierówności $f(x) < g(x)$ i $f(x) > g(x)$.



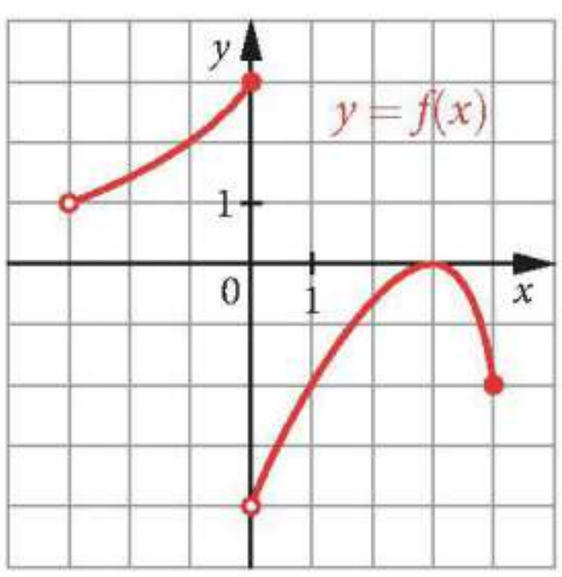
Rozwiązanie

- $f(x) = g(x)$ dla $x = -2$ lub $x = 4$
- $f(x) < g(x)$ dla $x \in (-\infty; -2)$ oraz $x \in (4; \infty)$
- $f(x) > g(x)$ dla $x \in (-2; 4)$

Przykład 5 ◀ zad. 10.16

Odczytamy z wykresu rozwiązanie układu nierówności

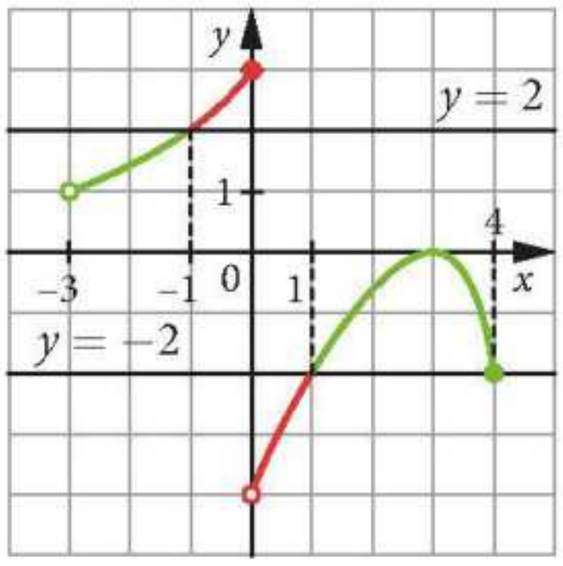
$$\begin{cases} f(x) < 2 \\ f(x) \geqslant -2 \end{cases}$$



Rozwiązanie

Dziedziną funkcji f jest przedział $(-3; 4\rangle$.
Prowadzimy proste $y = -2$ i $y = 2$. Interesujące nas punkty wykresu leżą pomiędzy tymi prostymi.

- Odczytujemy współrzędne punktów przecięcia tych prostych z wykresem: $(-1, 2)$, $(1, -2)$, $(4, -2)$.
- Pomiędzy poprowadzonymi prostymi znajdują się dwa fragmenty wykresu, na rysunku obok zaznaczone zielonym kolorem. Znajdujemy odpowiadające im przedziały na osi x, uwzględniając dziedzinę funkcji.

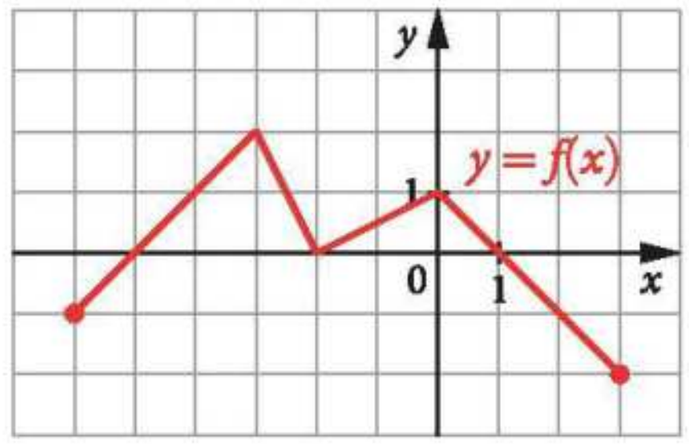


Zwróćmy uwagę, że odcięte punktów przecięcia wykresu z prostą $y = 2$ nie należą do rozwiązania, natomiast punktów przecięcia z prostą $y = -2$ do niego należą.

Odp.: $x \in (-3; -1) \cup \langle 1; 4\rangle$

Zadania

Rozwiąż zadania 10.1–10.3 na podstawie zamieszczonego obok wykresu funkcji f. W każdym z tych zadań jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.



10.1. Wskaż nierówność, której zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -5; 1\rangle$.

A. $f(x) < 0$ **B.** $f(x) \leqslant 0$ **C.** $f(x) > 0$ **D.** $f(x) \geqslant 0$

10.2. Wskaż najmniejszą wartość funkcji f.

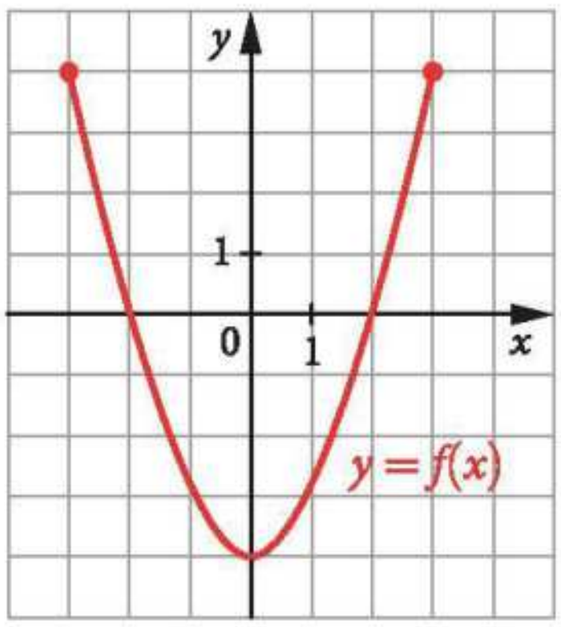
A. -6 **B.** -2 **C.** -1 **D.** 0

10.3. W którym z podanych przedziałów funkcja f jest rosnąca?

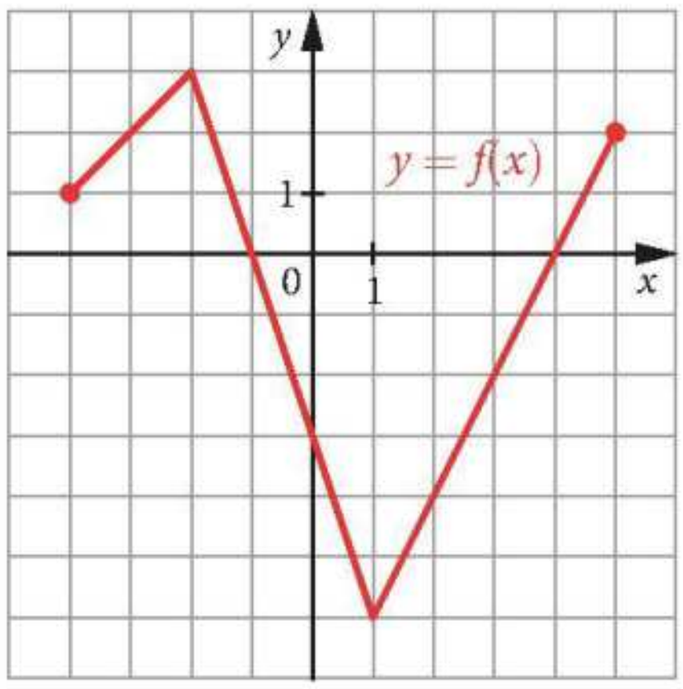
A. $\langle -6; 2\rangle$ **B.** $\langle -6; 0\rangle$ **C.** $\langle -2; 0\rangle$ **D.** $\langle -2; 1\rangle$

10.4. Odczytaj z wykresu funkcji $y = f(x)$: jej dziedzinę, zbiór wartości, wartość największą i wartość najmniejszą (jeżeli funkcja je przyjmuje), miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, przedziały monotoniczności oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m.

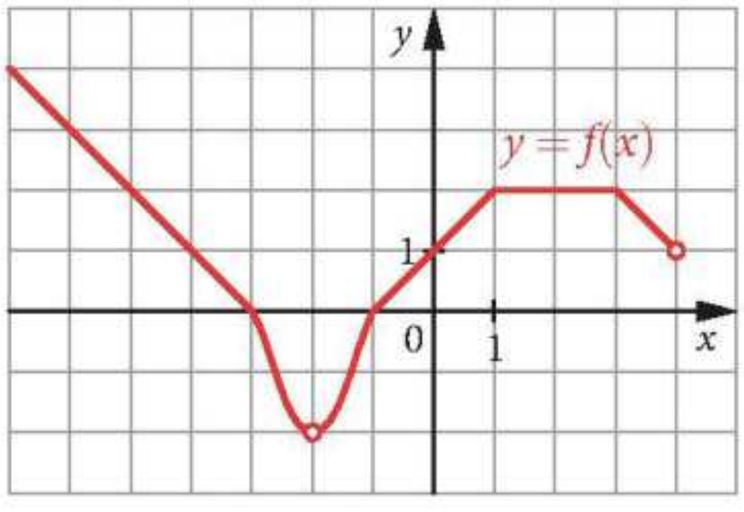
a)



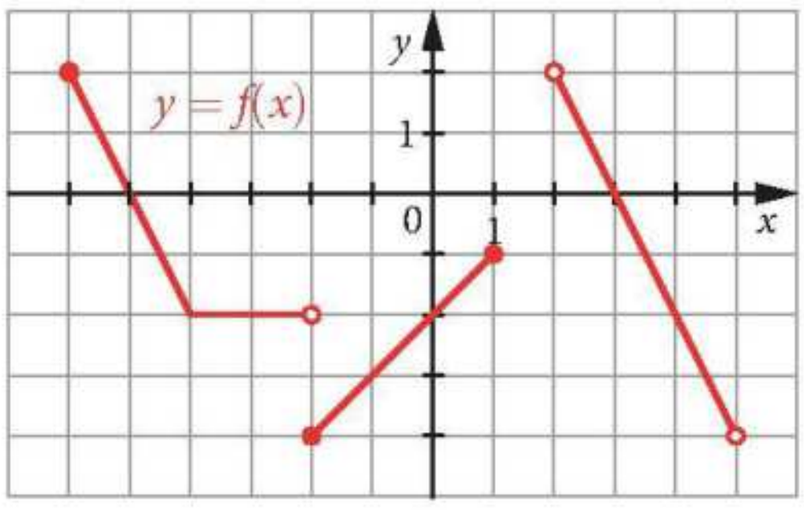
c)



b)



d)



10.5. Sporządź wykres funkcji $y = f(x)$ i odczytaj z niego: dziedzinę funkcji, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, wartość największą i wartość najmniejszą (jeżeli funkcja je przyjmuje), przedziały monotoniczności oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x \in \langle 0; 1\rangle \cup (4; \infty)$

b) $f(x) = \frac{6}{x}$ dla $x \in (-6; -2) \cup \langle 1; 3\rangle$

c) $f(x) = \frac{-2}{x}$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$

10.6. Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$, która spełnia dane warunki.

a) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -1; \infty)$

Wartość najmniejszą równą -1 funkcja przyjmuje dla $x = -2$.
$f(x) = 0$ dla $x = -3$ oraz dla $x = -1$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; -1)$.
Funkcja w przedziale $(-\infty; -2\rangle$ jest malejąca, a w przedziale $\langle -2; \infty)$ rośnie.
Równanie $f(x) = m$ ma dla $m \in (-\infty; -1)$ zero rozwiązań,
dla $m = -1$ jedno rozwiązanie, dla $m \in (-1; \infty)$ dwa rozwiązania.

b) $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; 2\rangle$

Wartość największą równą 2 funkcja przyjmuje dla $x = 0$.
$f(x) = 0$ dla $x = -2$ oraz dla $x = 2$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-2; 2)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.
Funkcja w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ jest rosnąca, a w przedziale $\langle 0; \infty)$ jest malejąca.
Dla $m \in (-\infty; 2)$ równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania,
dla $m = 2$ ma jedno rozwiązanie, dla $m \in (2; \infty)$ równanie nie ma rozwiązań.

c) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \{2\}$

Funkcja nie ma miejsc zerowych, jest monotoniczna.

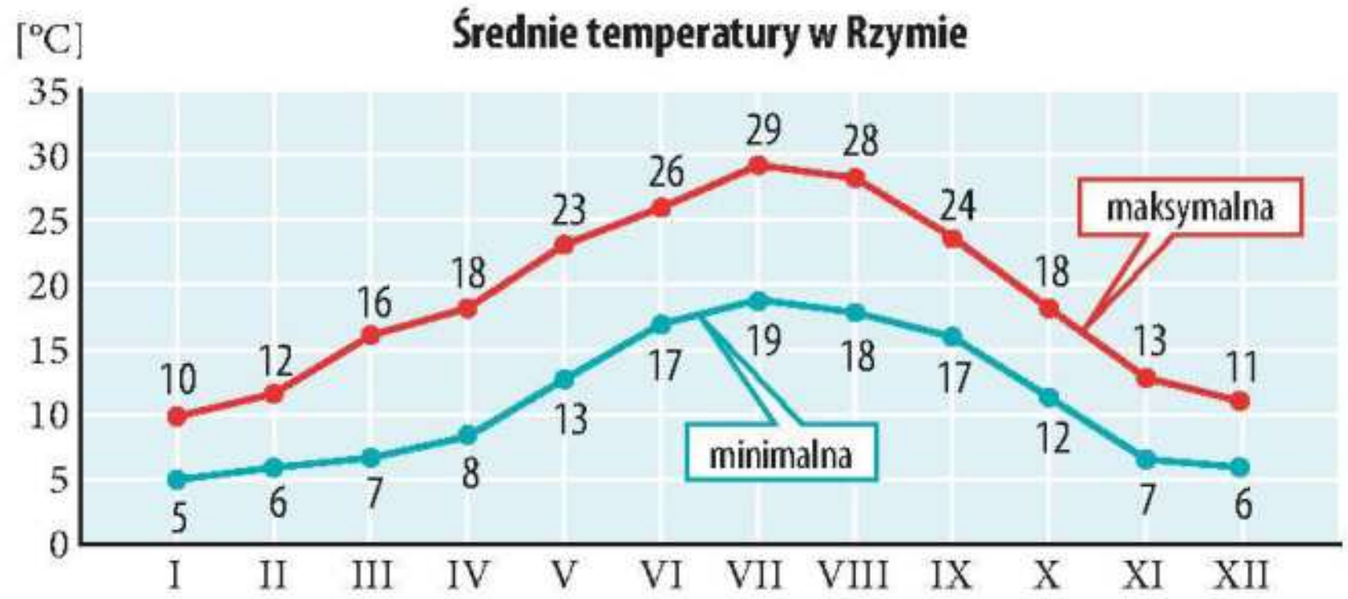
* **10.7.** Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$, która spełnia warunki:

- $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$
- $f(x) = 0$ dla $x = -4$, $x = -1$ oraz $x = 5$,
  $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -1) \cup (5; \infty)$,
  $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; 5)$.
- Funkcja nie jest monotoniczna, natomiast: w przedziale $(-\infty; -2\rangle$ jest rosnąca, w przedziale $\langle -2; 1\rangle$ jest malejąca, a w przedziale $\langle 1; \infty)$ jest rosnąca.
- Równanie $f(x) = m$ dla $m \in (-\infty; -4)$ ma jedno rozwiązanie,
  dla $m = -4$ ma dwa rozwiązania, dla $m \in (-4; 2)$ ma trzy rozwiązania,
  dla $m = 2$ ma dwa rozwiązania, dla $m \in (2; \infty)$ ma jedno rozwiązanie.

10.8. Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$, która spełnia warunki:

- $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -6; \infty)$
- Wartość najmniejszą równą -6 funkcja przyjmuje dla $x = -2$.
- Funkcja ma trzy miejsca zerowe: $x = -4$, $x = 0$, $x = 2$.
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup (2; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-4; 0) \cup (0; 2)$.
- W przedziale $(-\infty; -2\rangle$ funkcja jest malejąca, w przedziale $\langle -2; 0\rangle$ jest rosnąca, w przedziale $\langle 0; 1\rangle$ jest malejąca, w przedziale $\langle 1; \infty)$ jest rosnąca.
- Równanie $f(x) = m$ dla $m \in (-\infty; -6)$ nie ma rozwiązań,
  dla $m = -6$ ma jedno rozwiązanie, dla $m \in (-6; -1)$ ma dwa rozwiązania,
  dla $m = -1$ ma trzy rozwiązania, dla $m \in (-1; 0)$ ma cztery rozwiązania,
  dla $m = 0$ ma trzy rozwiązania, dla $m \in (0; \infty)$ ma dwa rozwiązania.

10.9. Poniższe wykresy przedstawiają wartości średnie najniższych oraz najwyższych temperatur w Rzymie w poszczególnych miesiącach (na podstawie obserwacji z wielu lat). W których miesiącach różnica wartości tych funkcji jest największa?

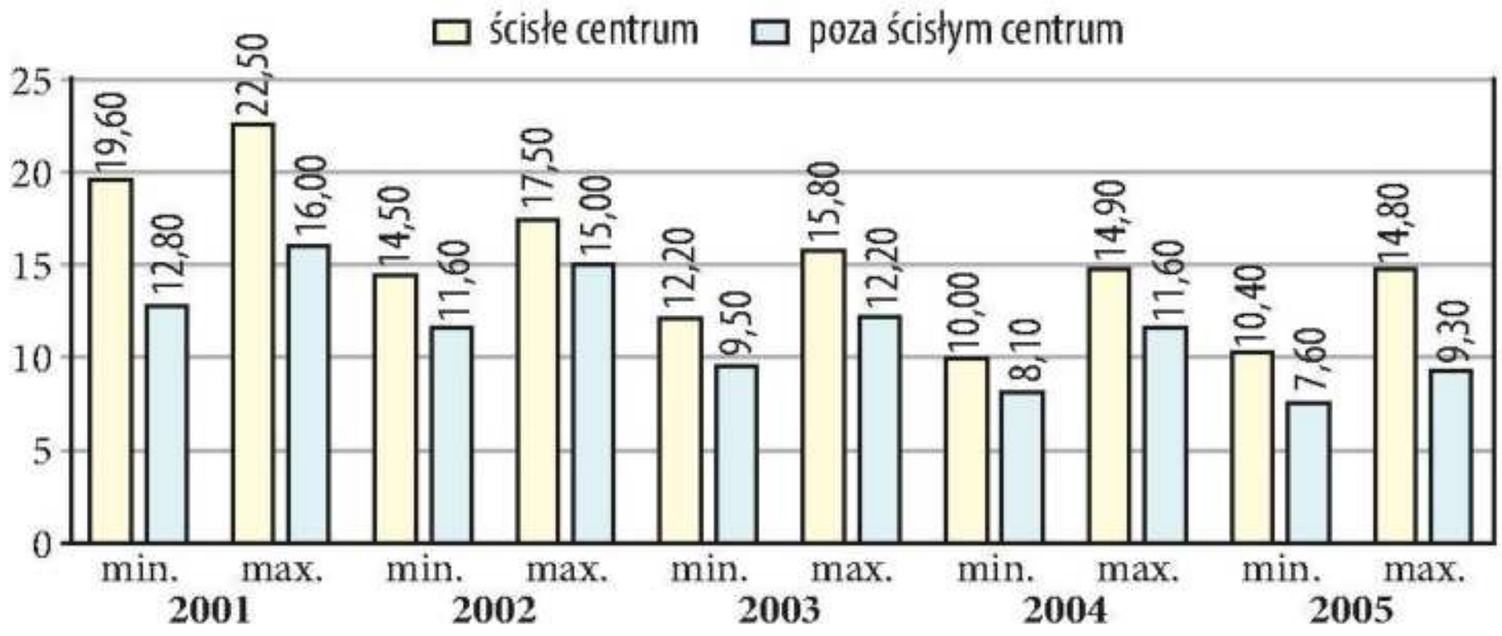


10.10. Na podstawie danych z diagramu „Stawki czynszu w Nowograjkach" narysuj wykresy czterech funkcji (w jednym układzie współrzędnych, różnymi kolorami), które kolejnym latom przyporządkowują stawki czynszu:

- minimalne w ścisłym centrum miasta,
- minimalne poza ścisłym centrum,
- maksymalne w ścisłym centrum,
- maksymalne poza ścisłym centrum.

Zbadaj monotoniczność każdej funkcji. Czy stawki czynszu poza centrum Nowograjek były w badanym okresie niższe od stawek w ścisłym centrum?

Stawki czynszu w Nowograjkach (w zł za m^2 miesięcznie)

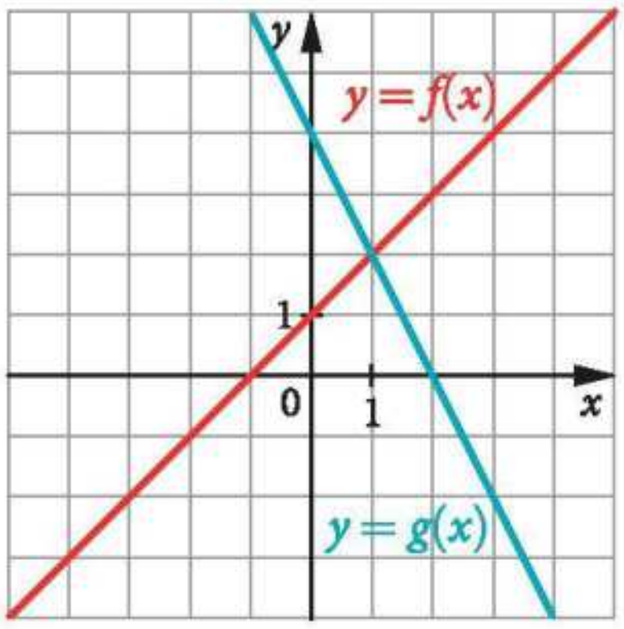


10.11. Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, dla której zbiorem rozwiązań podanej nierówności jest zbiór A.

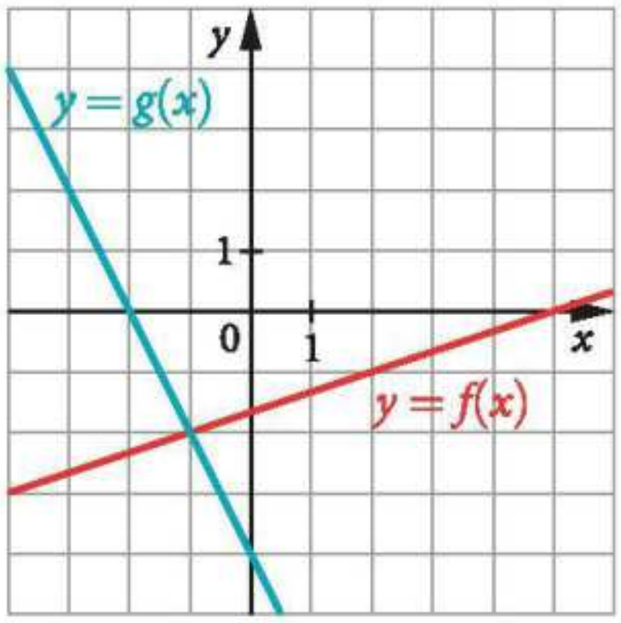
a) $f(x) > 1$ $A = (0; \infty)$
b) $f(x) > 2$ $A = (-\infty; -1)$
c) $f(x) > 1$ $A = (-3; 2)$
d) $f(x) \leqslant -1$ $A = (-2; 1)$
e) $f(x) > -1$ $A = (-\infty; -1) \cup \{3\}$
f) $f(x) \leqslant 3$ $A = (-\infty; -2) \cup \langle 0; 3\rangle$

10.12. Odczytaj z wykresów funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$ rozwiązania równania $f(x) = g(x)$ oraz rozwiązania nierówności $f(x) < g(x)$ i $f(x) > g(x)$.

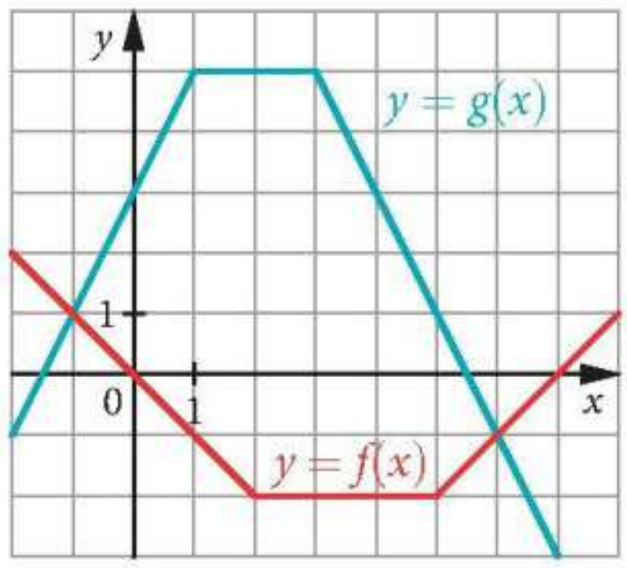
a)



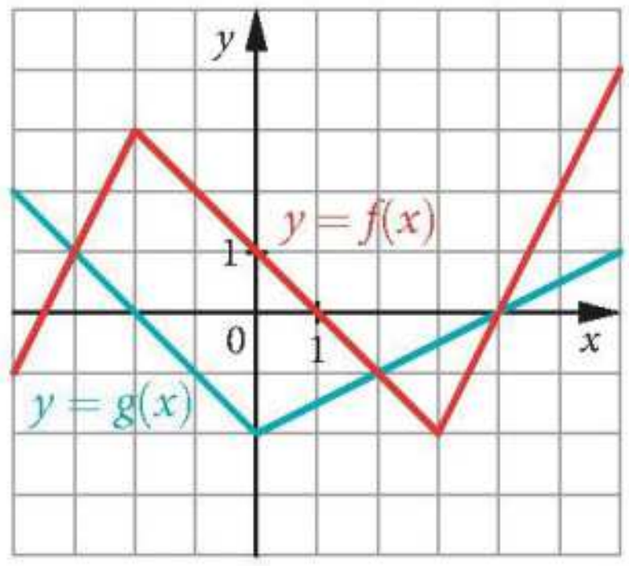
b)



c)



d)



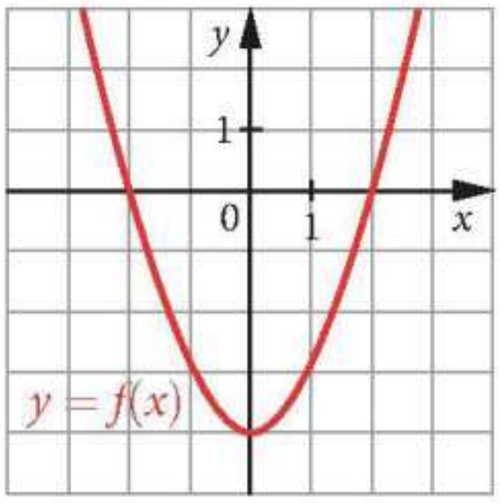
10.13. Podaj przykład wykresów dwóch funkcji: $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$ o dziedzinie $\mathbf{R}$, takich, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \geqslant g(x)$.

10.14. Podaj przykład wykresów dwóch funkcji: $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$ o dziedzinie $\mathbf{R}$, takich, że funkcja f jest rosnąca, funkcja g jest malejąca oraz dla $x \in (-\infty; 2\rangle$ zachodzi nierówność $g(x) \geqslant f(x)$, a dla $x \in \langle 2; \infty)$ zachodzi nierówność $g(x) \leqslant f(x)$.

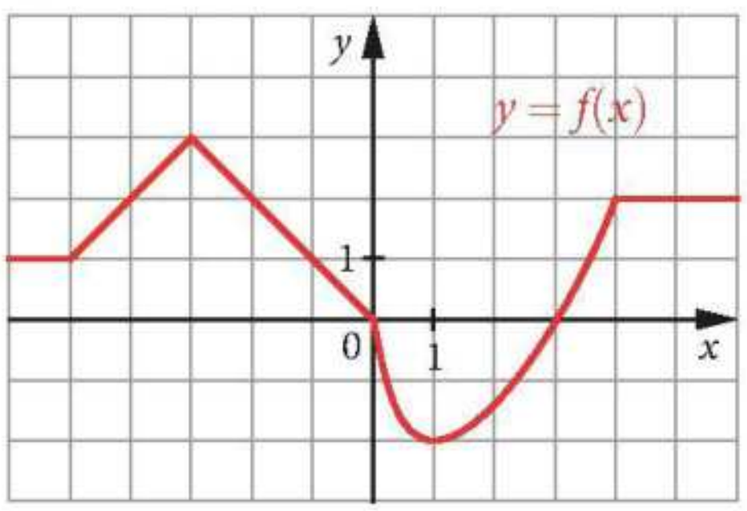
* **10.15.** Podaj przykład wykresów dwóch funkcji: $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$, których dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, funkcja f jest malejąca, funkcja g jest rosnąca i dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ zachodzi nierówność $f(x) > g(x)$.

10.16. Odczytaj z wykresu rozwiązanie podanego układu nierówności.

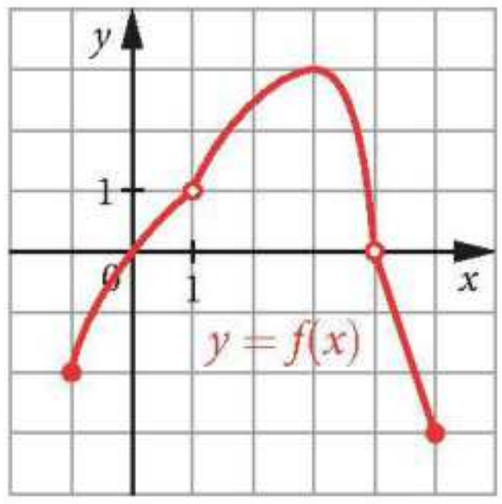
a) $\begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) > -3 \end{cases}$



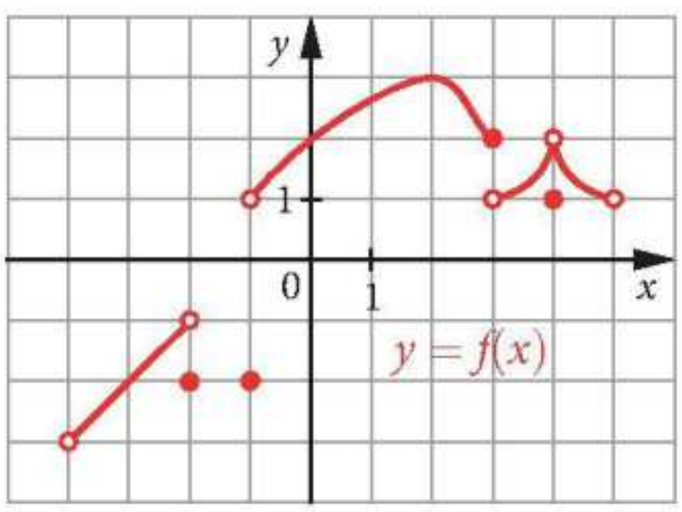
b) $\begin{cases} f(x) \leqslant 2 \\ f(x) > 0 \end{cases}$



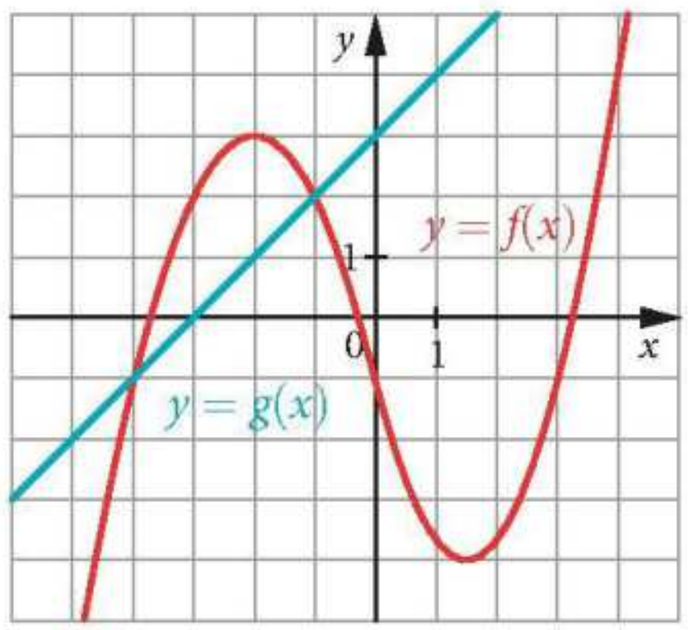
c) $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < 3 \end{cases}$



d) $\begin{cases} f(x) \leqslant 2 \\ f(x) > -2 \end{cases}$



10.17. Odczytaj z wykresu rozwiązanie układu nierówności $\begin{cases} f(x) < -1 \\ |g(x) + 1| < 2 \end{cases}$.



10.18. Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$, która spełnia następujące warunki: $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -2; 2)$. Funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą -2 dla każdego argumentu postaci $x = 4k$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. Miejscami zerowymi funkcji są wszystkie argumenty postaci $x = 4k+2$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. $f(x) > 0$ dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $(4k - 2; 4k)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, $f(x) < 0$ dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $(4k; 4k + 2)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów postaci $\langle 4k; 4k + 4)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

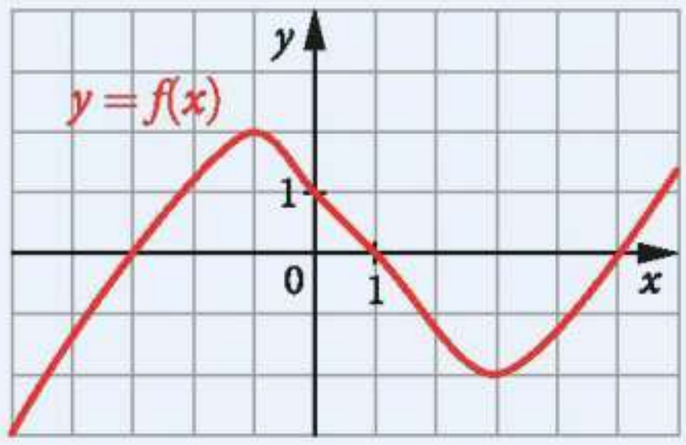
Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Równanie $f(x) = 1$ ma dwa rozwiązania.

B. Równanie $f(x) = 2$ ma jedno rozwiązanie.

C. Równanie $f(x) = 0{,}5$ ma trzy rozwiązania.

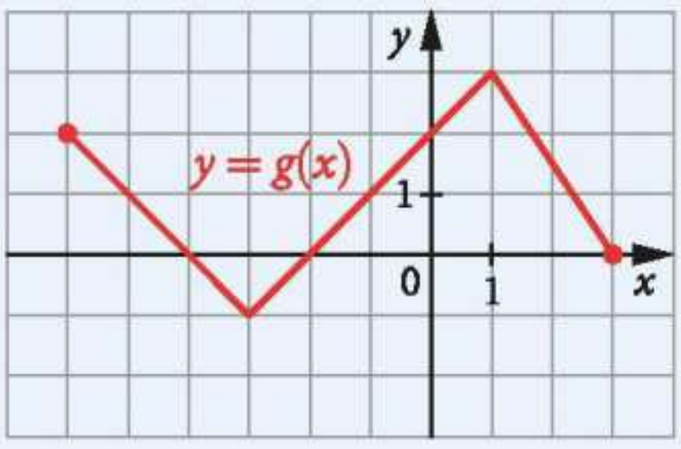


2. Odczytaj z podanego wykresu funkcji g (rys. 1) jej własności. Dla jakich wartości parametru m równanie $g(x) = m$ ma trzy rozwiązania?

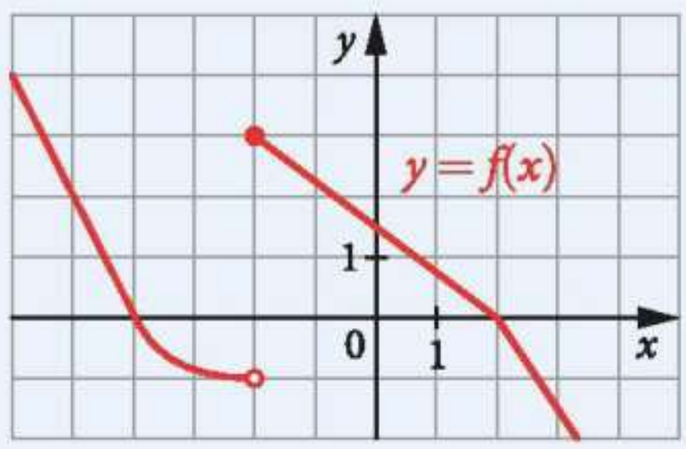
3. Na rysunku 2 przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$.

a) Odczytaj z wykresu: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, wartość największą i wartość najmniejszą (jeżeli funkcja je przyjmuje) oraz przedziały monotoniczności.

b) Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie?



Rys. 1.



Rys. 2.

4. Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$, która spełnia warunki:
$D = \langle -2; 5\rangle$, $ZW = \langle -4; 1\rangle$; $f(x) = 0$ dla $x = -1$, $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -2; -1)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-1; 5\rangle$; w przedziale $\langle -2; 3\rangle$ funkcja jest malejąca, a w przedziale $\langle 3; 5\rangle$ jest rosnąca; równanie $f(x) = m$ dla $m = -4$ ma jedno rozwiązanie, dla $m \in (-4; -2\rangle$ ma dwa rozwiązania, dla $m \in (-2; 1\rangle$ ma jedno rozwiązanie.

5. Wykres przedstawia średni kurs euro w kolejnych miesiącach 2017 r. (źródło: NBP). Na podstawie wykresu wyznacz najdłuższy okres, w którym ten kurs nie spadał.



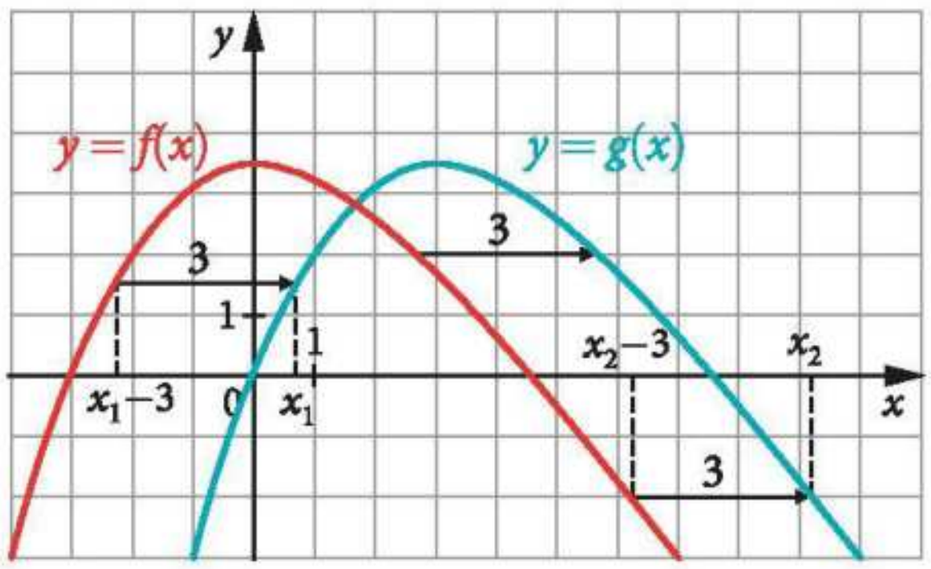
11. Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż osi

Umiejętności:

- szkicowanie wykresu funkcji $y = f(x + a)$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$
- szkicowanie wykresu funkcji $y = f(x) + a$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$

Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż osi x

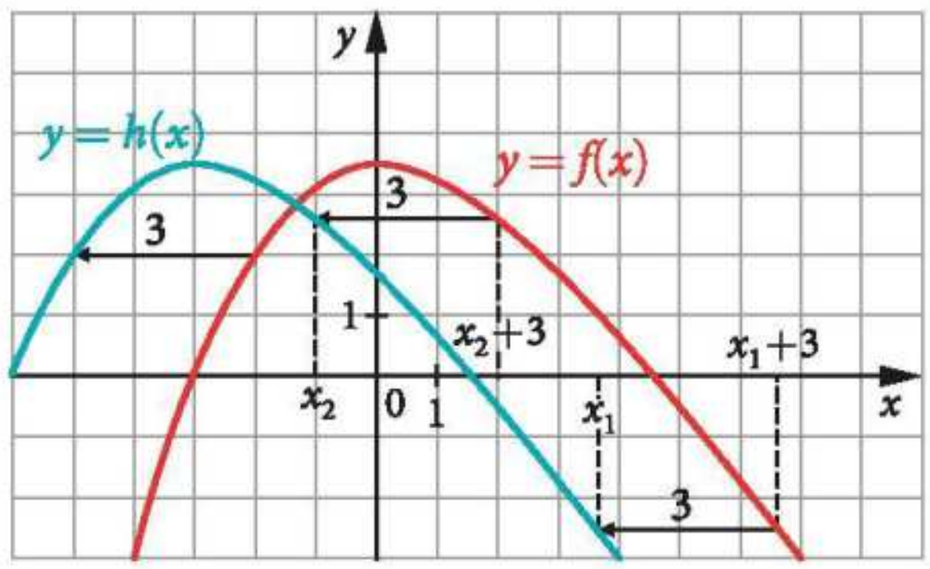
Przesuńmy wykres funkcji $y = f(x)$ o trzy jednostki **w prawo** wzdłuż osi x i oznaczmy nową funkcję $y = g(x)$.



$g(x) = f(x - 3)$

Wartości funkcji g są takie same, jakie funkcja f przyjmuje dla argumentów o trzy jednostki mniejszych.

Przesuńmy wykres funkcji $y = f(x)$ o trzy jednostki **w lewo** wzdłuż osi x i oznaczmy nową funkcję $y = h(x)$.



$h(x) = f(x + 3)$

Wartości funkcji h są takie same, jakie funkcja f przyjmuje dla argumentów o trzy jednostki większych.

Wniosek

Jeżeli $a > 0$, to:

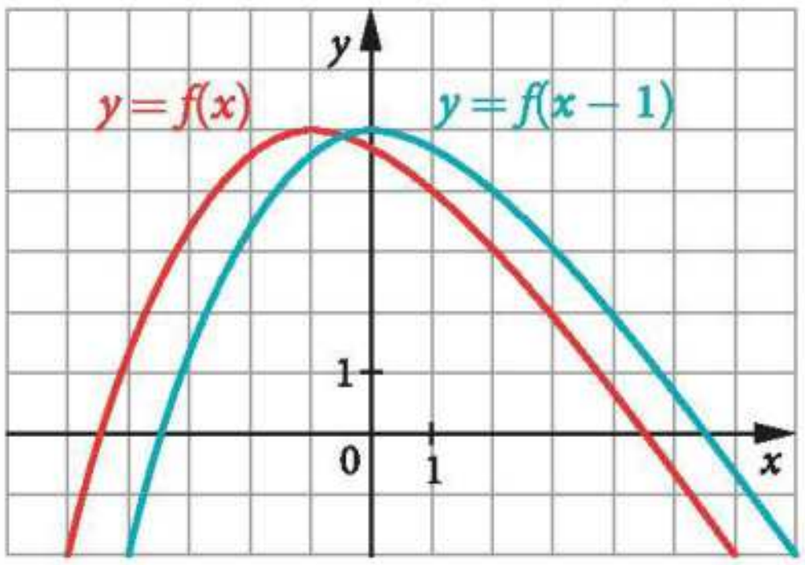
- aby otrzymać wykres funkcji $y = f(x - a)$, przesuwamy wykres funkcji $y = f(x)$ o a jednostek w prawo wzdłuż osi x,
- aby otrzymać wykres funkcji $y = f(x + a)$, przesuwamy wykres funkcji $y = f(x)$ o a jednostek w lewo wzdłuż osi x.

Zauważmy, że po przesunięciu wykresu danej funkcji wzdłuż osi x otrzymujemy wykres nowej funkcji, która może mieć inną dziedzinę.

Przykład 1 ◀ zad. 11.4

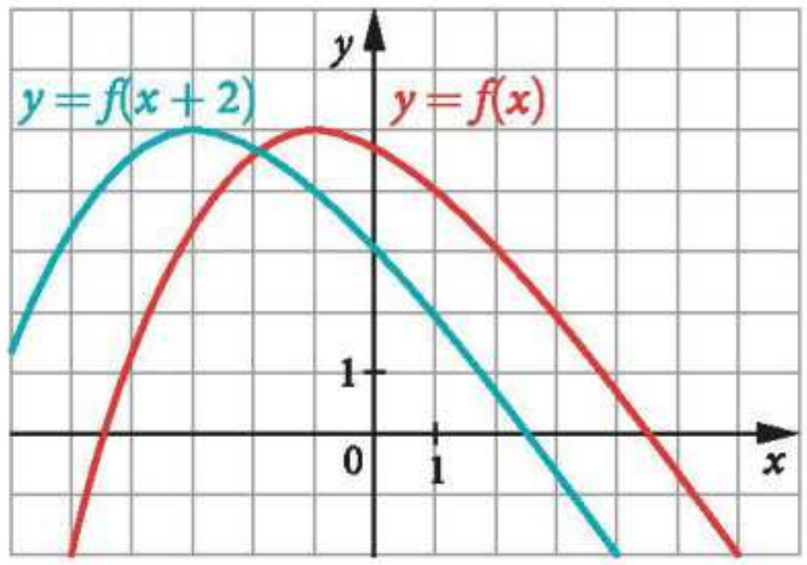
Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, narysujemy wykres funkcji:

a) $y = f(x - 1)$.



Wykres funkcji f przesuwamy o 1 jednostkę w prawo.

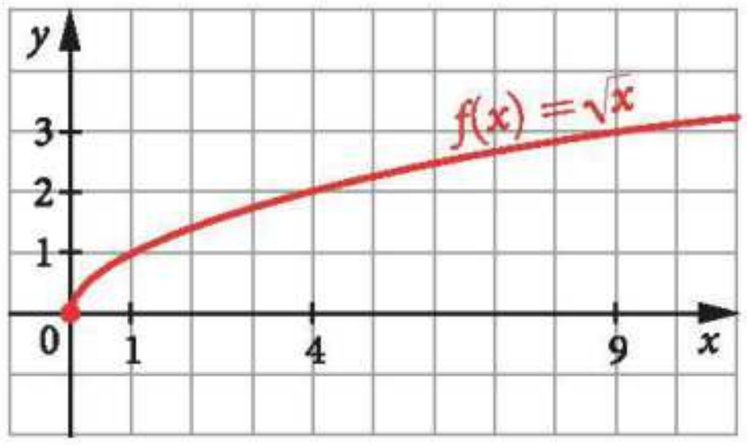
b) $y = f(x + 2)$.



Wykres funkcji f przesuwamy o 2 jednostki w lewo.

Przykład 2 ◀ zad. 11.5

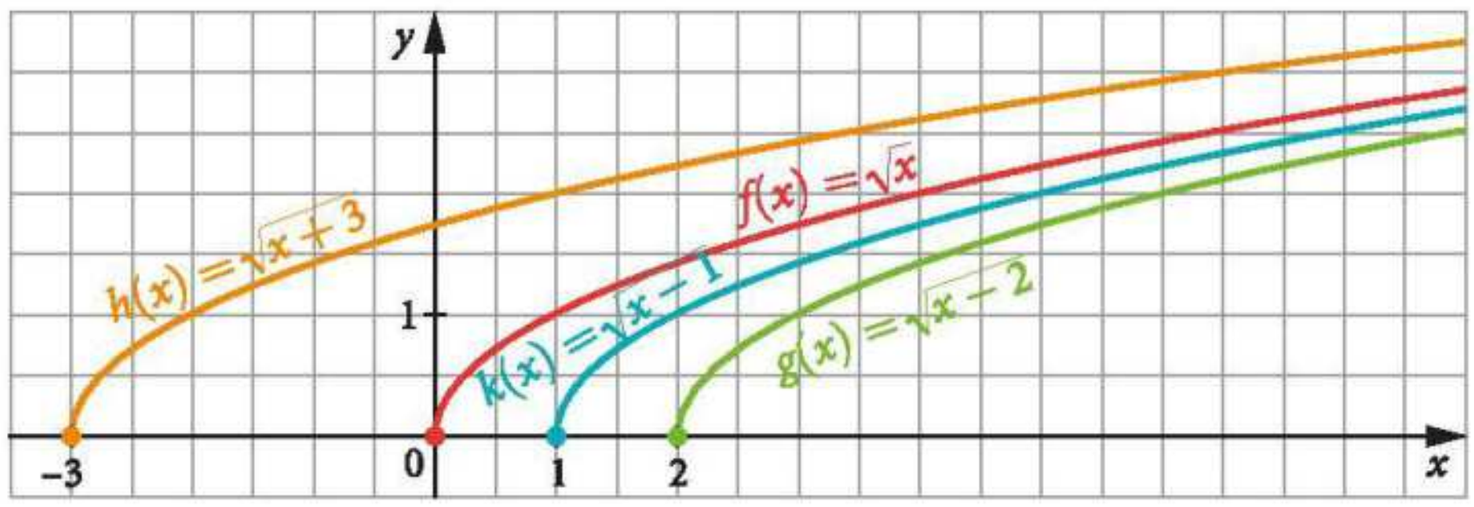
Na rysunku obok mamy wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$. Wykonując odpowiednie przesunięcia, narysujemy wykresy funkcji: $g(x) = \sqrt{x - 2}$, $h(x) = \sqrt{x + 3}$ i $k(x) = \sqrt{x - 1}$ oraz wyznaczymy dziedziny tych funkcji.



Rozwiązanie

Zauważmy, że:

- $g(x) = f(x - 2)$ ⟵ przesunięcie o 2 jednostki w prawo
- $h(x) = f(x + 3)$ ⟵ przesunięcie o 3 jednostki w lewo
- $k(x) = f(x - 1)$ ⟵ przesunięcie o 1 jednostkę w prawo

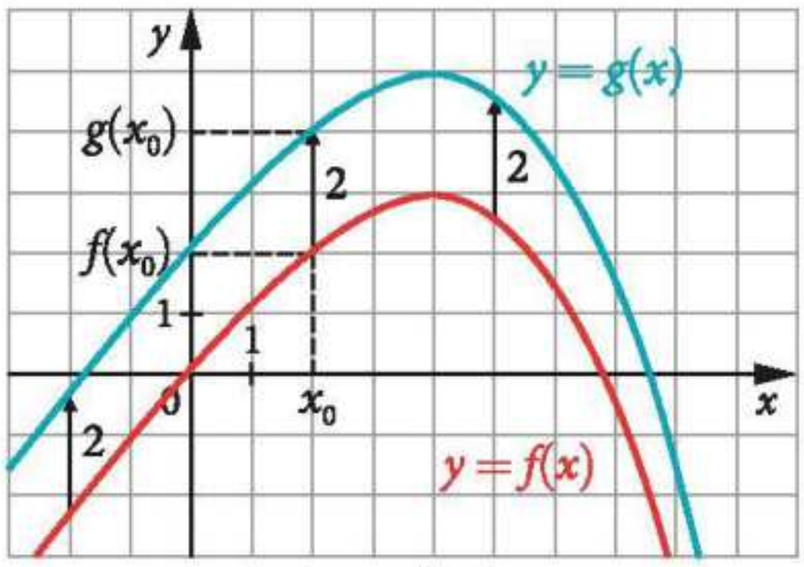


Zwróćmy uwagę na to, że dziedzina nowej funkcji jest zgodna z przesunięciem wzdłuż osi x. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\langle 0; \infty)$. Wykres funkcji $g(x) = \sqrt{x - 2}$ otrzymujemy po przesunięciu wykresu f o 2 w prawo, więc dziedziną funkcji g jest zbiór $\langle 2; \infty)$. Jest to też zgodne z założeniem, że $x - 2 \geqslant 0$.

Odp.: Dziedziną funkcji g jest zbiór $\langle 2; \infty)$, funkcji h – zbiór $\langle -3; \infty)$, funkcji k – zbiór $\langle 1; \infty)$.

Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż osi y

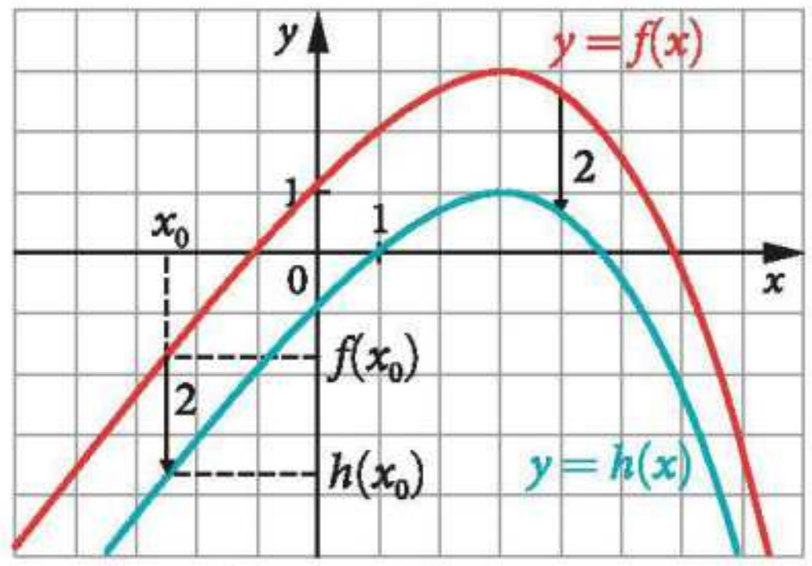
Przesuńmy wykres funkcji $y = f(x)$ o dwie jednostki **w górę** wzdłuż osi y i oznaczmy nową funkcję $y = g(x)$.



$g(x) = f(x) + 2$

Dla każdego argumentu wartość funkcji g jest o 2 większa od wartości funkcji f.

Przesuńmy wykres funkcji $y = f(x)$ o dwie jednostki **w dół** wzdłuż osi y i oznaczmy nową funkcję $y = h(x)$.



$h(x) = f(x) - 2$

Dla każdego argumentu wartość funkcji h jest o 2 mniejsza od wartości funkcji f.

Wniosek

Jeżeli $b > 0$, to:

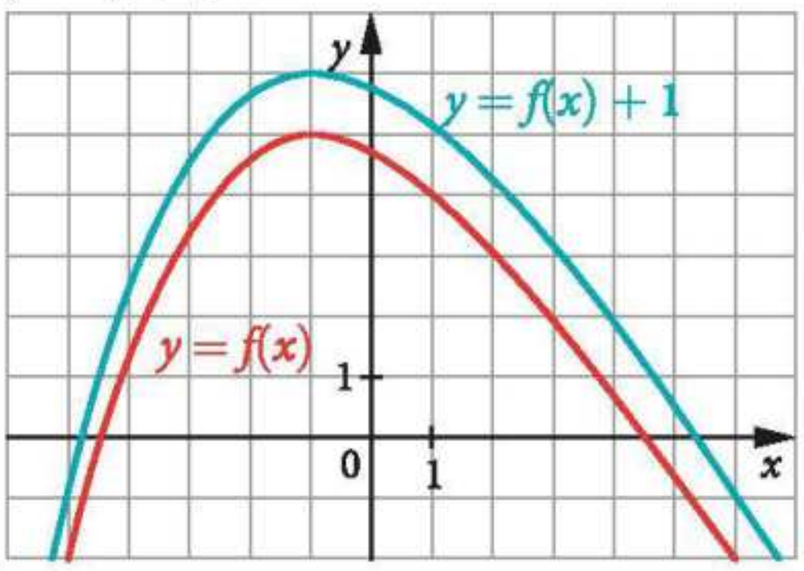
- aby otrzymać wykres funkcji $y = f(x) + b$, przesuwamy wykres funkcji $y = f(x)$ o b jednostek w górę wzdłuż osi y,
- aby otrzymać wykres funkcji $y = f(x) - b$, przesuwamy wykres funkcji $y = f(x)$ o b jednostek w dół wzdłuż osi y.

Zauważmy, że po przesunięciu wykresu danej funkcji wzdłuż osi y otrzymujemy wykres nowej funkcji o tej samej dziedzinie.

Przykład 3 ◂ zad. 11.6

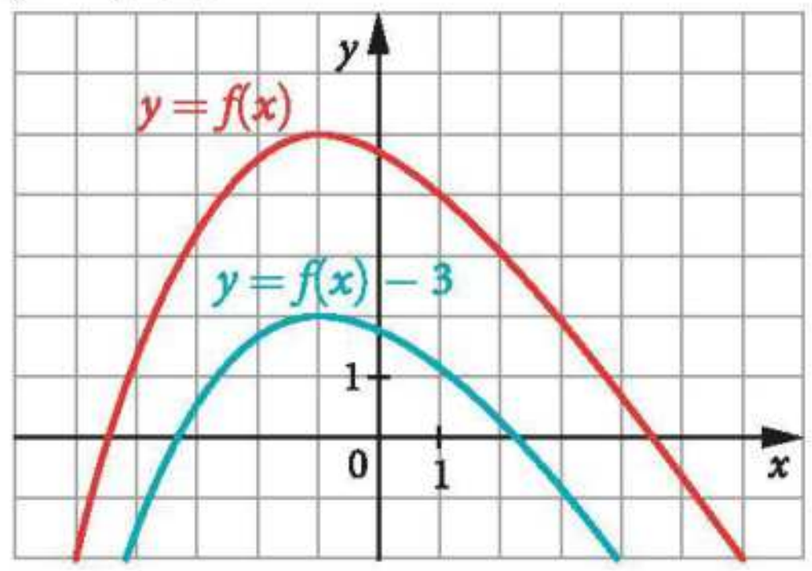
Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, narysujemy wykres funkcji:

a) $y = f(x) + 1$.



Wykres funkcji f przesuwamy o 1 jednostkę w górę.

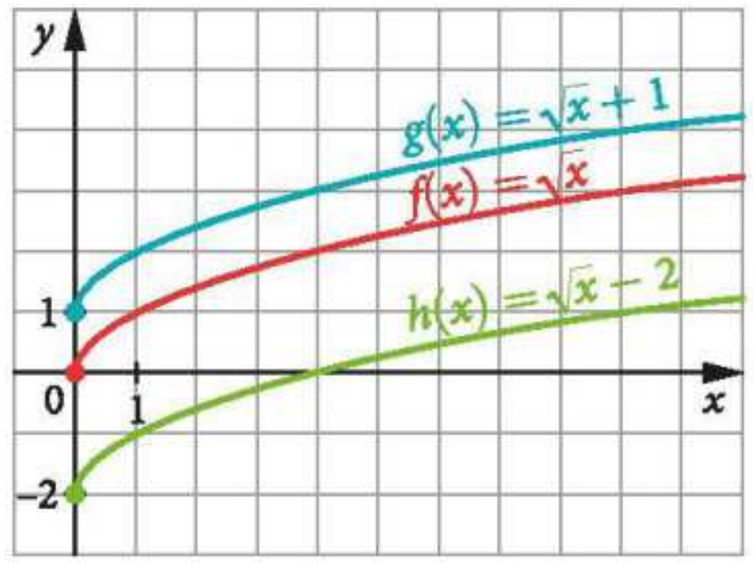
b) $y = f(x) - 3$.



Wykres funkcji f przesuwamy o 3 jednostki w dół.

Przykład 4 ◀ zad. 11.9

Narysujemy wykresy funkcji $g(x) = \sqrt{x} + 1$ oraz $h(x) = \sqrt{x} - 2$, mając dany wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$.



Rozwiązanie

Zauważmy, że:

- $g(x) = f(x) + 1$ ⟵ przesunięcie o 1 jednostkę w górę
- $h(x) = f(x) - 2$ ⟵ przesunięcie o 2 jednostki w dół

Przykład 5 ◀ zad. 11.11

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\langle 2; 10\rangle$. Podamy dziedzinę funkcji $g(x) = f(x - 3)$.

Rozwiązanie

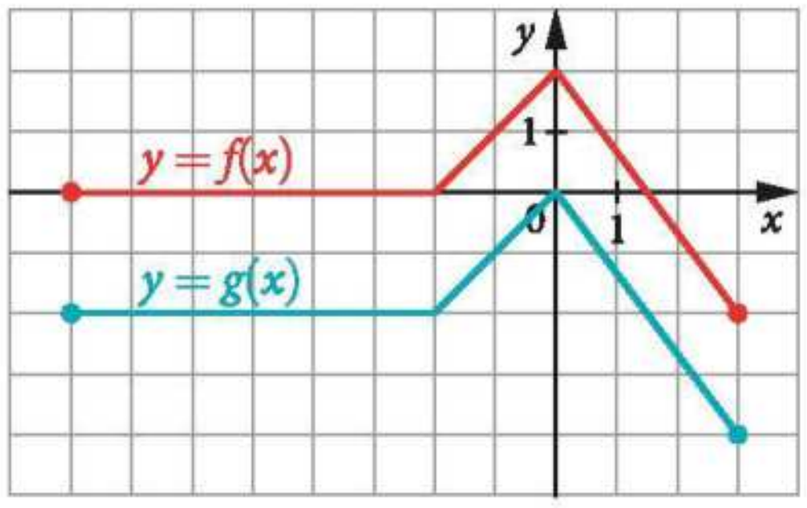
Wykres funkcji $g(x) = f(x - 3)$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 3 jednostki w prawo wzdłuż osi x. Dziedziną funkcji g będzie zatem dziedzina funkcji f przesunięta na osi x o 3 jednostki w prawo.

Odp.: Dziedziną funkcji $g(x) = f(x - 3)$ jest przedział $\langle 5; 13\rangle$.

Zadania

W każdym z zadań 11.1–11.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

11.1. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f i g. Wskaż prawdziwą zależność.



A. $g(x) = f(x) + 2$
B. $g(x) = f(x) - 2$
C. $g(x) = f(x + 2)$
D. $g(x) = f(x - 2)$

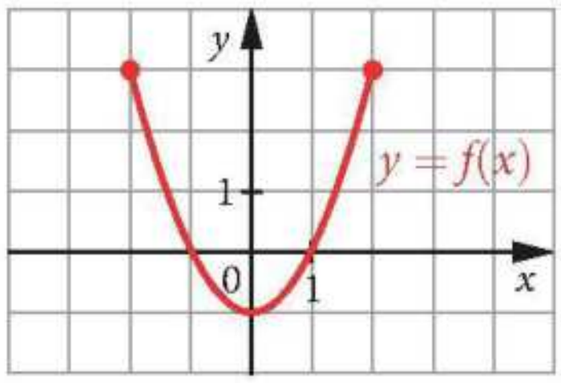
11.2. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle 2; 7\rangle$. Dziedzina funkcji $y = f(x + 4)$

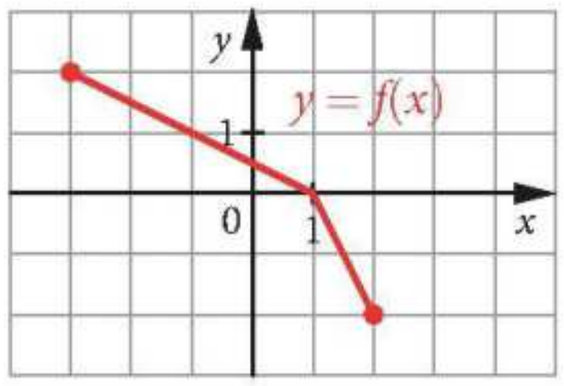
A. to przedział $\langle -2; 3\rangle$.
B. to przedział $\langle 2; 7\rangle$.
C. to przedział $\langle 4; 11\rangle$.
D. jest niemożliwa do określenia.

11.3. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -11; 3\rangle$. Zbiór wartości funkcji $y = f(x) - 5$

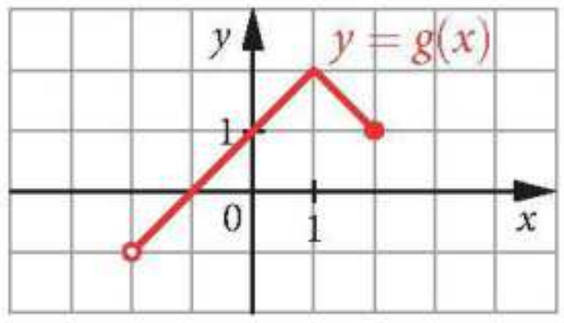
A. to przedział $\langle -16; -2\rangle$.
B. to przedział $\langle -11; 3\rangle$.
C. to przedział $\langle -6; 8\rangle$.
D. jest niemożliwy do określenia.

11.4. Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, narysuj wykresy funkcji:
I. $y = f(x-1)$, II. $y = f(x+3)$, III. $y = f(x-2)$, IV. $y = f(x+5)$.

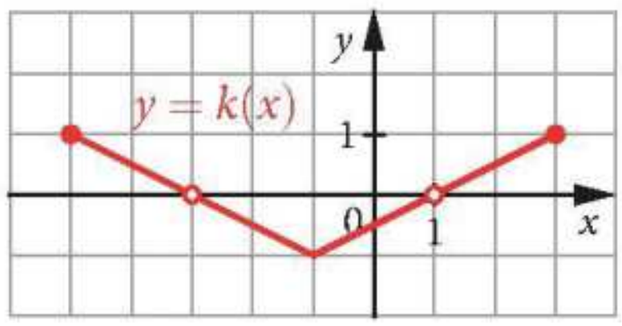
a)


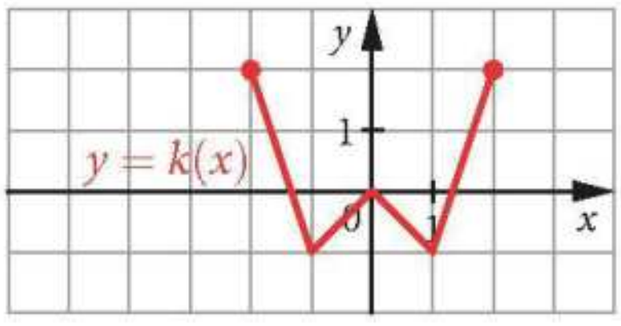
b)


11.5. Mając dany wykres funkcji $y = g(x)$, narysuj wykres funkcji $y = h(x)$ i podaj dziedzinę funkcji h.
a) $h(x) = g(x+1)$
b) $h(x) = g(x-4)$
c) $h(x) = g(x-2)$
d) $h(x) = g(x+3)$



11.6. Mając dany wykres funkcji $y = k(x)$, narysuj wykresy funkcji:
I. $y = k(x)+1$, II. $y = k(x)-1$, III. $y = k(x)+2$, IV. $y = k(x)-3$.

a)


b)


11.7. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, a następnie, wykonując odpowiednie przesunięcie, wykres funkcji o podanym wzorze.
a) $y = \frac{1}{x+1}$ b) $y = \frac{1}{x-2}$ c) $y = \frac{1}{x} + 3$ d) $y = \frac{1}{x} - 4$

11.8. Przekształć wykres odpowiedniej funkcji $y = \frac{a}{x}$ i naszkicuj wykres funkcji
a) $y = \frac{6}{x+3}$. b) $y = \frac{3}{x} - 5$. c) $y = \frac{8}{x} + 1$. d) $y = \frac{2}{x-2}$.

11.9. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, a następnie, wykonując odpowiednie przesunięcie, wykres funkcji o podanym wzorze.
a) $y = \sqrt{x+1}$ b) $y = \sqrt{x} + 5$ c) $y = \sqrt{x} - 3$ d) $y = \sqrt{x-4}$

11.10. Zapisz wzór funkcji $y = g(x)$, która powstanie po przesunięciu wykresu funkcji $y = f(x)$:
I. o 7 jednostek w górę wzdłuż osi y, II. o 5 jednostek w prawo wzdłuż osi x.
a) $f(x) = |x|$
b) $f(x) = 2x - 3$
c) $f(x) = x^2 - 3x + 3$
d) $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$
e) $f(x) = 2^{x-4}$
f) $f(x) = \log(x-3) + 6$

11.11. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -5; 10\rangle$, a zbiorem jej wartości przedział $\langle 2; 8\rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji
a) $y = f(x-5)$. b) $y = f(x+1)$. c) $y = f(x) - 4$. d) $y = f(x) + 7$.

11.12. Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty; -3\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle -3; \infty)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji

a) $y = f(x-2)$. b) $y = f(x+3)$. c) $y = f(x)+7$. d) $y = f(x)-100$.

11.13. Funkcja f osiąga wartość największą równą 7 dla $x = -3$. Podaj wartość największą funkcji

a) $y = f(x+1)$. b) $y = f(x-10)$. c) $y = f(x)+5$. d) $y = f(x)-9$.

D **11.14.** Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle 2; 8\rangle$, a zbiorem jej wartości przedział $(2; 5)$. Wykaż, że funkcja $g(x) = f(x) - 2$ nie ma miejsc zerowych.

11.15. Wykres funkcji $g(x) = 8 \cdot 2^x$ powstał z wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ po przesunięciu o k jednostek w lewo wzdłuż osi x. Wyznacz k.

* **11.16.** Wykres funkcji $g(x) = x^2 - 12x + m$ powstał po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 3$ o k jednostek w prawo wzdłuż osi x. Wyznacz k i m.

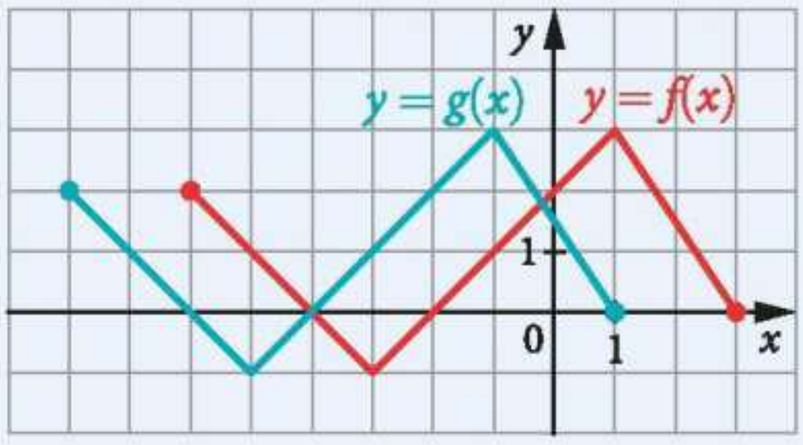
Prosto do matury

1. Na rysunku 1 przedstawiono wykresy funkcji f i g.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

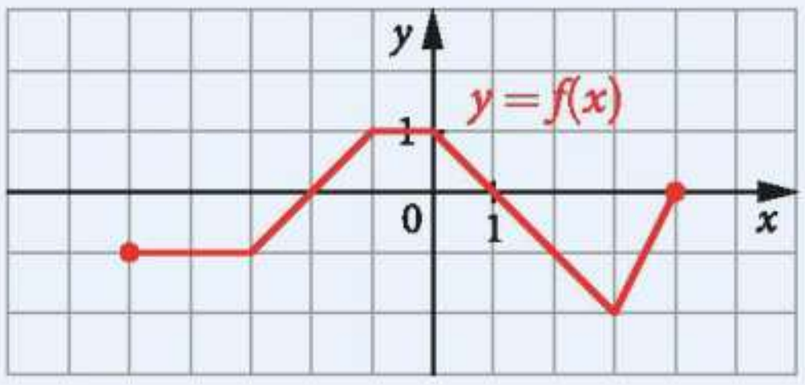
A. $g(x) = f(x+2)$ **B.** $f(x) = g(x+2)$ **C.** $f(x) = g(x-2)$

2. Na rysunku 2 przedstawiono wykres funkcji f. Sporządź wykres funkcji

a) $y = f(x-5)$. b) $y = f(x)+4$.



Rys. 1.



Rys. 2.

3. Miejscami zerowymi funkcji g są liczby: -2, 3 i 5. Podaj miejsca zerowe funkcji $y = g(x+2)$.

4. Funkcja h jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 4\rangle$, stała w przedziale $\langle 4; 6\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 6; \infty)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji $y = h(x-5)$.

D **5.** Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-3; \infty)$. Wykaż, że funkcja $g(x) = f(x) + 3$ nie ma miejsc zerowych.

12. Wykresy funkcji $y = -f(x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(-x)$

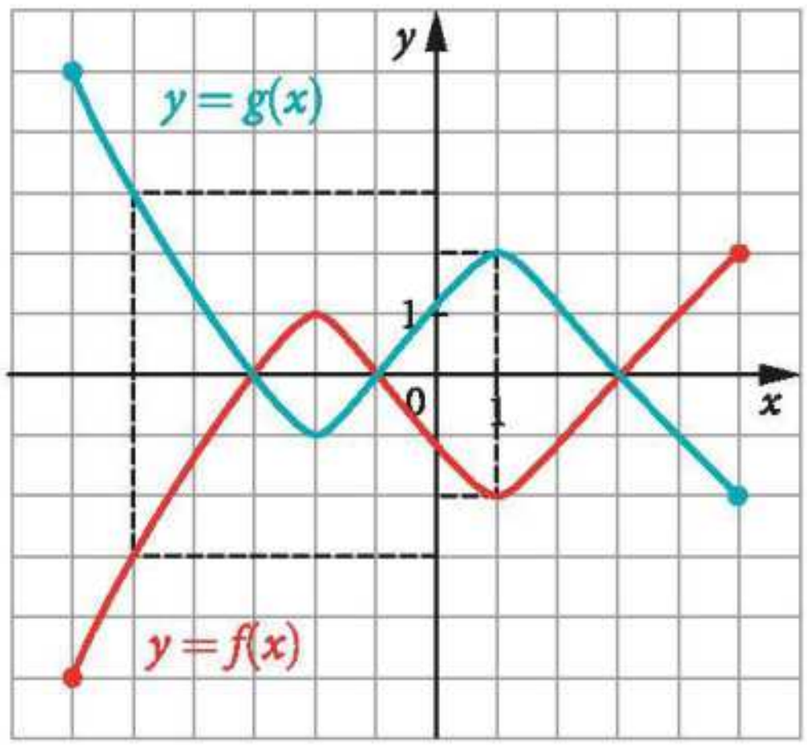
Umiejętności:

- szkicowanie wykresu funkcji $y = -f(x)$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$
- szkicowanie wykresu funkcji $y = |f(x)|$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$
- szkicowanie wykresu funkcji $y = f(-x)$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$

Wykres funkcji $y = -f(x)$

Przekształćmy wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi x i oznaczmy nową funkcję $y = g(x)$.

Wartości funkcji g są liczbami przeciwnymi do wartości, jakie funkcja f przyjmuje dla tych samych argumentów.



$g(x) = -f(x)$

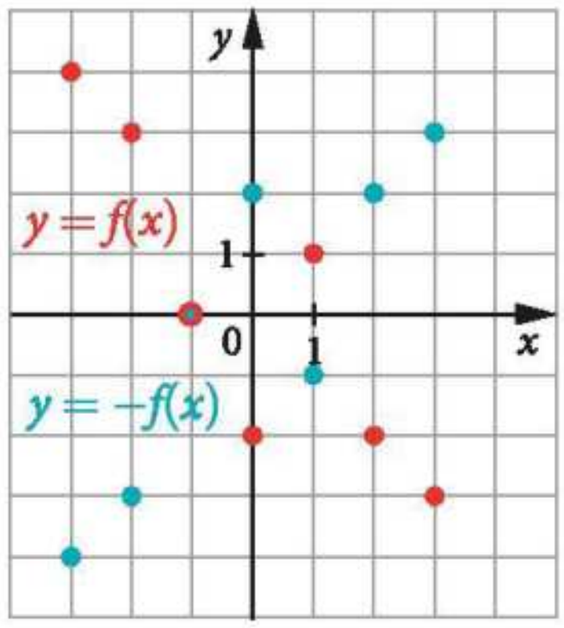
Przykład 1 ◀ zad. 12.4

Mając daną tabelę funkcji $y = f(x)$, narysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy obu funkcji: $y = f(x)$ i $y = -f(x)$.

Rozwiązanie

Tabelę funkcji $y = f(x)$ uzupełniamy wartościami funkcji $y = -f(x)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	4	3	0	-2	1	-2	-3
$y = -f(x)$	-4	-3	0	2	-1	2	3



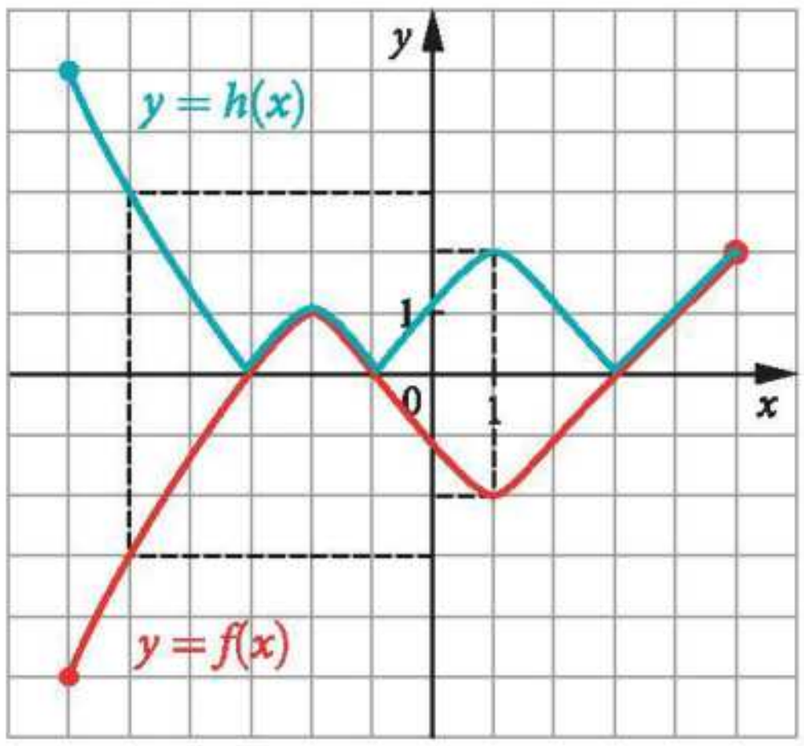
Wniosek

Aby otrzymać wykres funkcji $y = -f(x)$, przekształcamy wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi x. Dziedziny obu funkcji są identyczne.

Wykres funkcji $y = |f(x)|$

Przykład 2 ◀ zad. 12.6

Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, narysujemy wykres funkcji $h(x) = |f(x)|$.



$h(x) = |f(x)|$

Rozwiązanie

Zgodnie z definicją wartości bezwzględnej funkcja h jest określona w następujący sposób:

- $h(x) = f(x)$ dla wszystkich argumentów x, dla których $f(x) \geqslant 0$,
- $h(x) = -f(x)$ dla wszystkich argumentów x, dla których $f(x) < 0$.

Dziedziny funkcji f oraz h są równe.

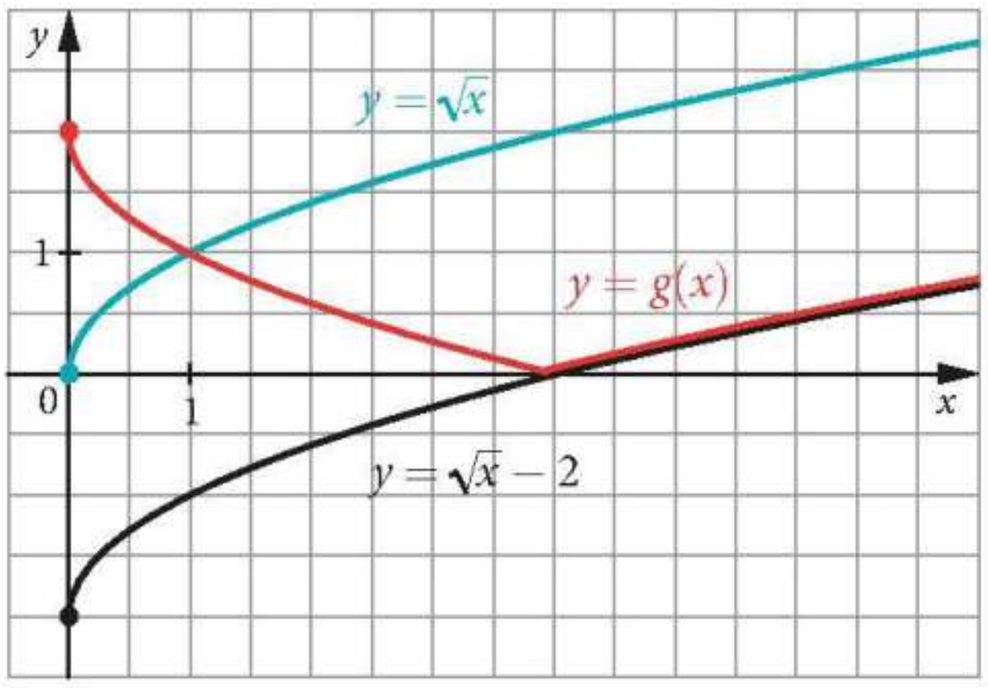
Jeżeli funkcja $y = f(x)$ ma miejsca zerowe, to funkcje $y = -f(x)$ oraz $y = |f(x)|$ mają identyczne miejsca zerowe, zatem ich wykresy mają te same punkty wspólne z osią x.

Wniosek

Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, przekształcamy przez symetrię względem osi x tylko te fragmenty wykresu funkcji $y = f(x)$, które leżą poniżej osi x, a pozostałe zachowujemy bez zmian. Dziedziny obu funkcji są identyczne.

Przykład 3 ◀ zad. 12.7

Przekształcimy odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ i sporządzimy wykres funkcji $g(x) = |\sqrt{x} - 2|$.



Rozwiązanie

Dziedziną obydwu funkcji: f i g, jest przedział $\langle 0; \infty)$.

Wykres funkcji $g(x) = |\sqrt{x} - 2|$ otrzymamy w kolejnych krokach.

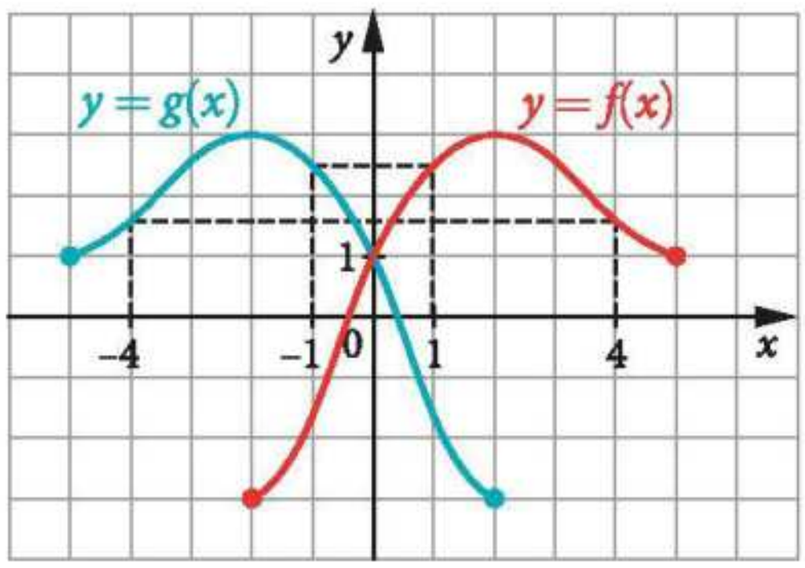
Krok 1: $h(x) = f(x) - 2 = \sqrt{x} - 2$ ⟵ przesuwamy wykres f o 2 jednostki w dół

Krok 2: $g(x) = |h(x)| = |\sqrt{x} - 2|$ ⟵ przekształcamy przez symetrię względem osi x tylko ten fragment wykresu h, który leży poniżej osi x

Wykres funkcji $y = f(-x)$

Przekształćmy wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi y i oznaczmy otrzymany wykres funkcji $y = g(x)$.

Wartości funkcji g oraz f są identyczne dla przeciwnych argumentów.
Dziedziny funkcji g oraz f są symetryczne względem 0.



$g(x) = f(-x)$

Przykład 4 ◂ zad. 12.8

Mając daną tabelę funkcji $y = f(x)$, narysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: $y = f(x)$ i $y = f(-x)$.

Jeżeli 0 jest argumentem funkcji $y = f(x)$, to jest też argumentem funkcji $y = f(-x)$. Wykresy obu funkcji przecinają wówczas oś y w tym samym punkcie.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	6	5	4	3	2	2	1

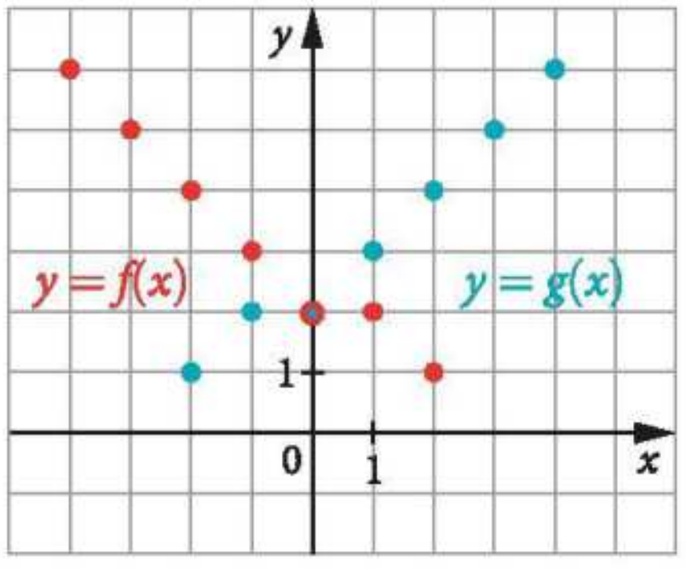
Rozwiązanie

Uzupełniamy tabelę o dziedzinę i wartości funkcji $g(x) = f(-x)$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	6	5	4	3	2	2	1	×	×
$g(x) = f(-x)$	×	×	1	2	2	3	4	5	6

Zauważmy:

- dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$,
- argumentami funkcji $g(x) = f(-x)$ są liczby przeciwne do argumentów funkcji f, czyli dziedziną funkcji g jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$,
- dla każdej pary argumentów będących liczbami przeciwnymi wartości funkcji $y = f(x)$ oraz $y = f(-x)$ są takie same, zatem odpowiednie punkty wykresu są symetryczne względem osi y.



Wniosek

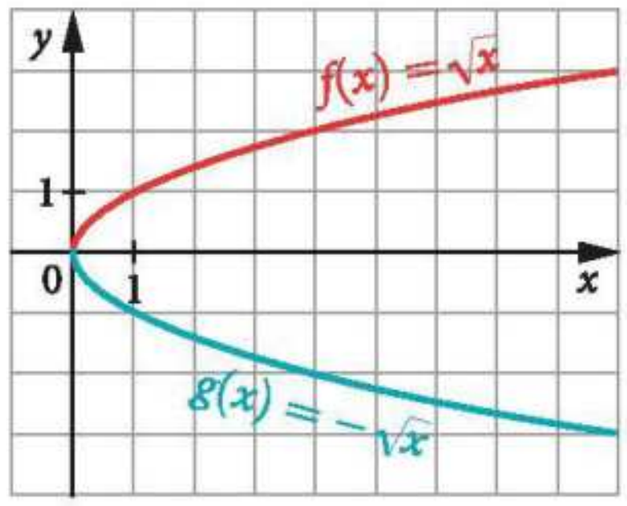
Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(-x)$, przekształcamy wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi y. Dziedziny obu funkcji są symetryczne względem punktu 0.

Przykład 5 ◀ zad. 12.9

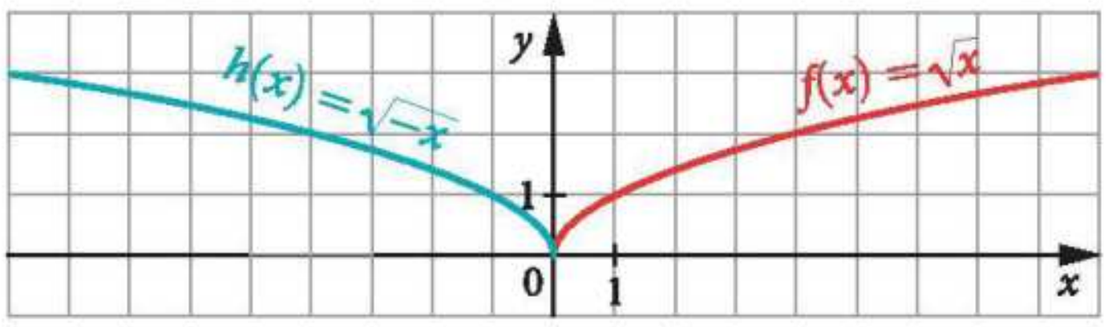
Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, sporządzimy wykresy funkcji $g(x) = -\sqrt{x}$, $h(x) = \sqrt{-x}$ oraz $k(x) = -\sqrt{-x}$.

Rozwiązanie

Wykres funkcji $g(x) = -\sqrt{x} = -f(x)$ otrzymamy, przekształcając wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ przez symetrię osiową względem osi x.
Dziedziny obu funkcji są równe.

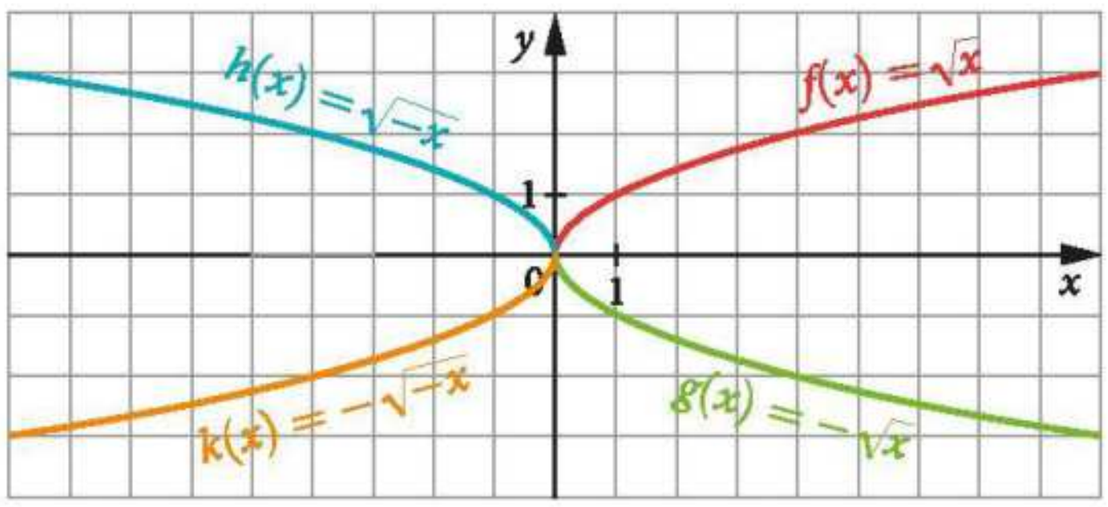


Wykres funkcji $h(x) = \sqrt{-x} = f(-x)$ otrzymamy, przekształcając wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ przez symetrię osiową względem osi y. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle 0; \infty)$, zaś dziedziną funkcji h – przedział $(-\infty; 0\rangle$.



Aby uzyskać wykres funkcji $k(x) = -\sqrt{-x} = -f(-x)$, należy wykonać oba wyżej wymienione przekształcenia. Ich kolejność nie ma znaczenia, zatem:

- albo przekształcamy wykres funkcji $g(x) = -\sqrt{x}$ przez symetrię osiową względem osi y,
- albo przekształcamy wykres funkcji $h(x) = \sqrt{-x}$ przez symetrię osiową względem osi x.



Przykład 6 ◀ zad. 12.14, 12.15

O funkcji f wiadomo, że:
- jej dziedziną jest przedział $\langle 0; 10\rangle$,
- jest rosnąca w przedziale $\langle 0; 5\rangle$,
- jest malejąca w przedziale $\langle 5; 10\rangle$.

Zbadamy przedziały monotoniczności funkcji
a) $y = -f(x)$. b) $y = f(-x)$.

Rozwiązanie

a) Wykres funkcji $y = -f(x)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ w wyniku symetrii osiowej względem osi x. Taka symetria nie zmienia dziedziny funkcji, zmienia jednak w odpowiednich przedziałach jej monotoniczność. Zatem funkcja $y = -f(x)$ jest **malejąca** w przedziale $\langle 0; 5\rangle$ i **rosnąca** w przedziale $\langle 5; 10\rangle$.

b) Wykres funkcji $y = f(-x)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ w wyniku symetrii osiowej względem osi y. Dziedziną funkcji $y = f(-x)$ jest przedział $\langle -10; 0\rangle$. Skoro funkcja f jest **rosnąca** w przedziale $\langle 0; 5\rangle$, to funkcja $y = f(-x)$ jest w przedziale $\langle -5; 0\rangle$ **malejąca**. Podobnie, skoro funkcja f jest **malejąca** w przedziale $\langle 5; 10\rangle$, to funkcja $y = f(-x)$ jest w przedziale $\langle -10; -5\rangle$ **rosnąca**. Zatem funkcja $y = f(-x)$ rośnie w przedziale $\langle -10; -5\rangle$ i maleje w przedziale $\langle -5; 0\rangle$.

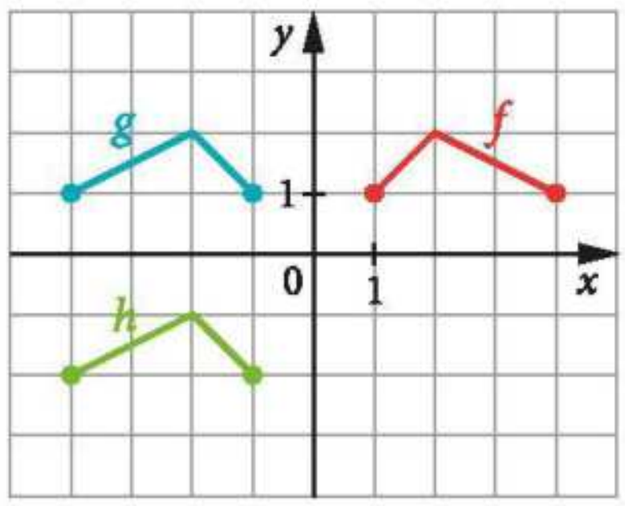
Zadania

W każdym z zadań 12.1–12.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

12.1. Zbiorem wartości funkcji $y = -f(x)$ jest przedział $\langle -7; -3\rangle$. Wskaż zbiór wartości funkcji $y = f(x)$.

A. $\langle 0; 3\rangle$ **B.** $\langle -7; -3\rangle$ **C.** $\langle -3; 0\rangle$ **D.** $\langle 3; 7\rangle$

12.2. W układzie współrzędnych narysowane są wykresy trzech funkcji: f, g oraz h. Wskaż prawdziwą zależność.

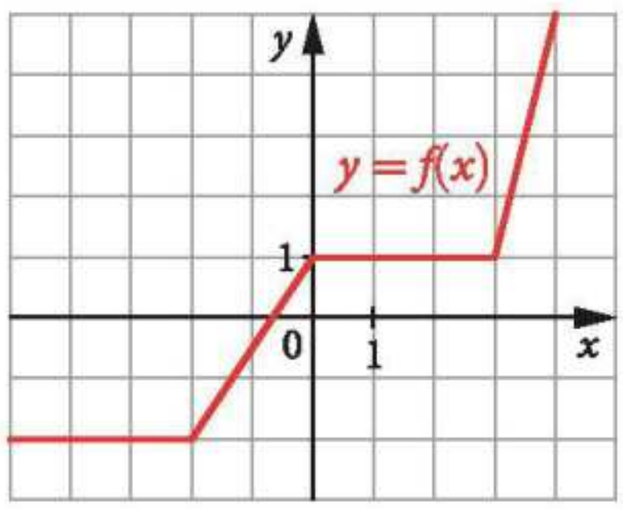


A. $g(x) = -f(x)$ **C.** $g(x) = f(-x)$
B. $h(x) = -g(x)$ **D.** $h(x) = g(-x)$

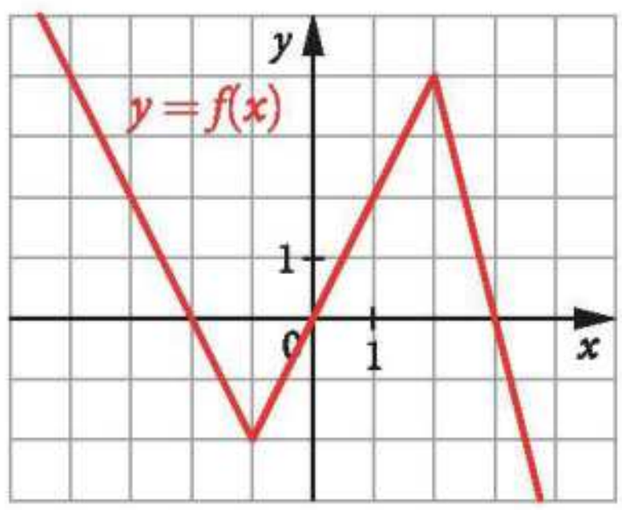
12.3. Funkcja $y = f(x)$ jest rosnąca w przedziale $\langle 2; 7\rangle$. Wynika z tego, że funkcja $y = f(-x)$ jest
A. rosnąca w przedziale $\langle 2; 7\rangle$.
B. rosnąca w przedziale $\langle -7; -2\rangle$.
C. malejąca w przedziale $\langle 2; 7\rangle$.
D. malejąca w przedziale $\langle -7; -2\rangle$.

12.4. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji $y = -f(x)$.

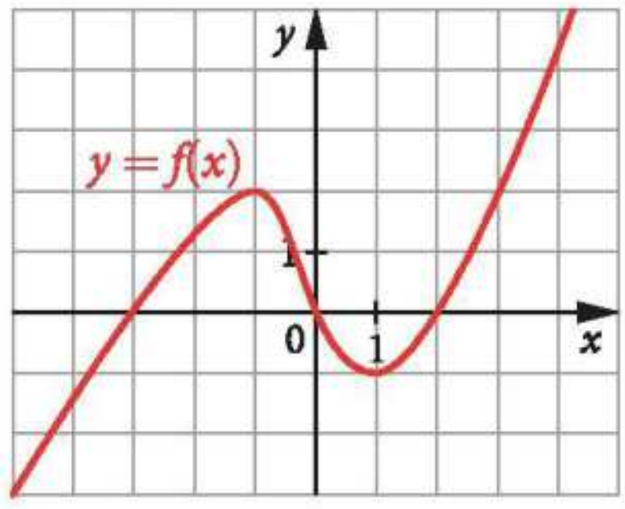
a)



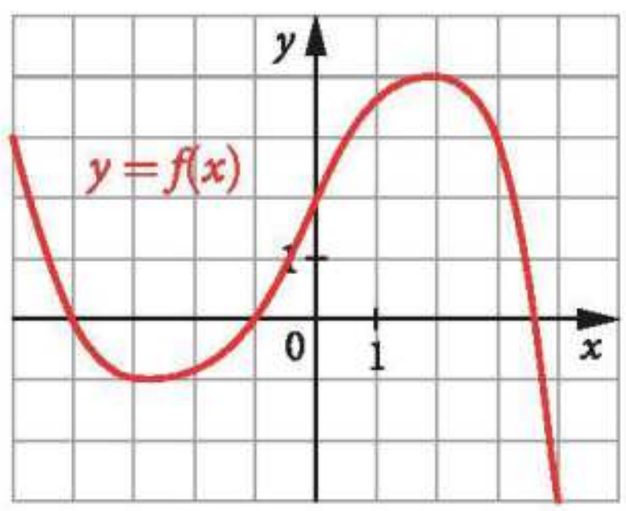
b)



c)



d)



12.5. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór D, a zbiorem wartości – zbiór ZW. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = -f(x)$.

a) $D = (0; \infty)$ $ZW = (0; \infty)$

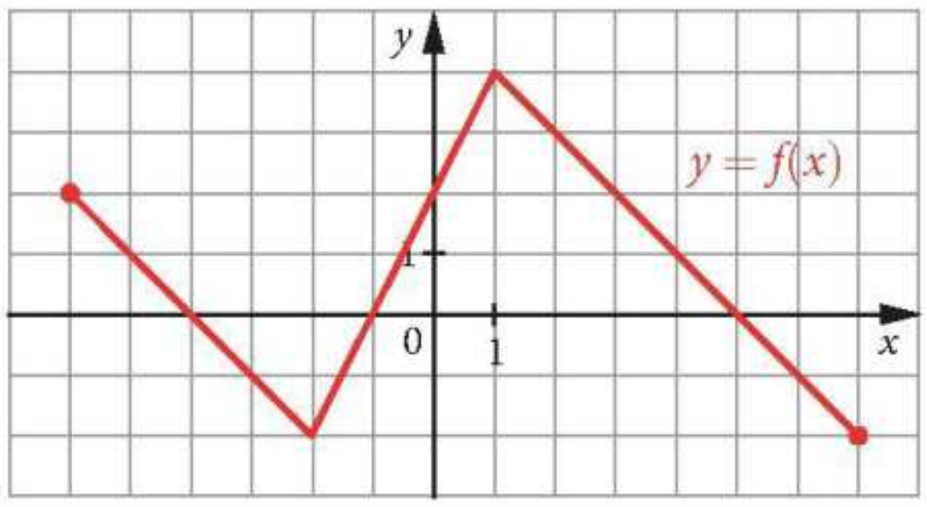
b) $D = \langle -3; 5\rangle$ $ZW = \langle 2; 7\rangle$

c) $D = (-4; \infty)$ $ZW = (-\infty; 2)$

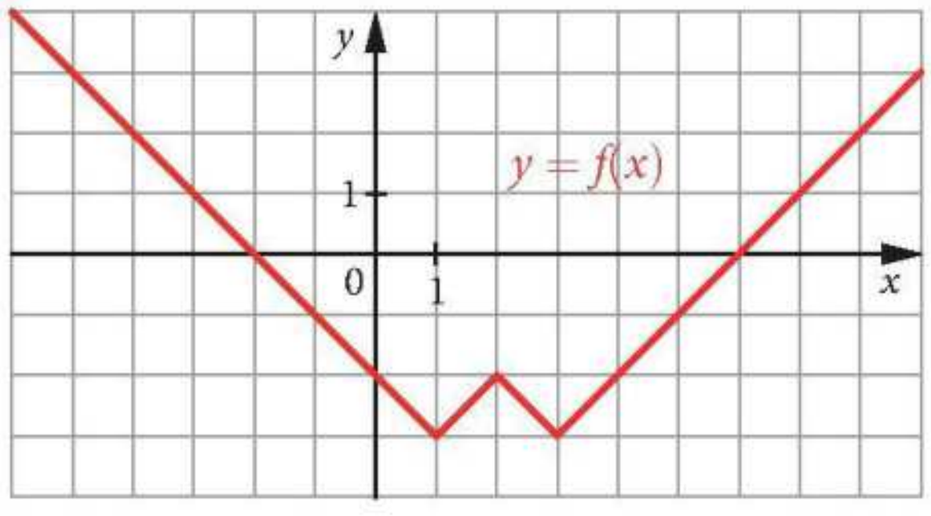
d) $D = (3; 9)$ $ZW = \langle -4; 5\rangle$

12.6. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji $y = |f(x)|$.

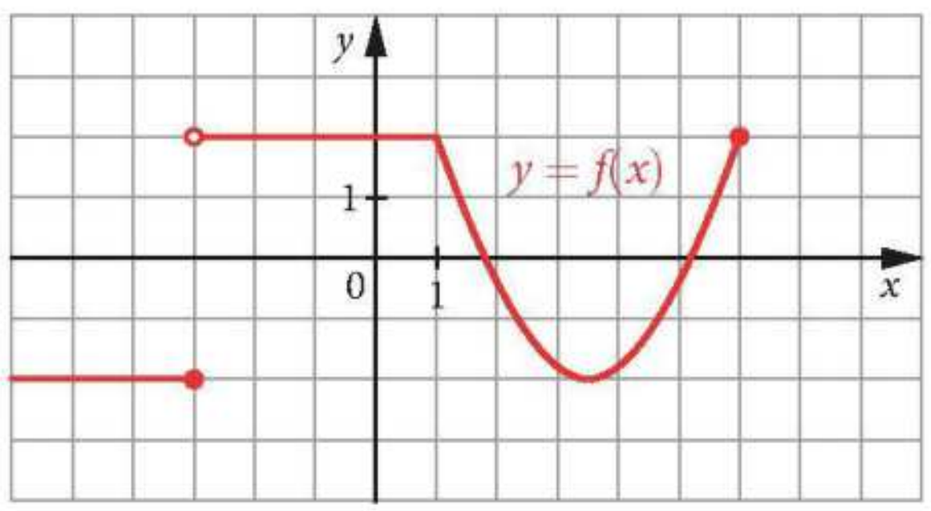
a)



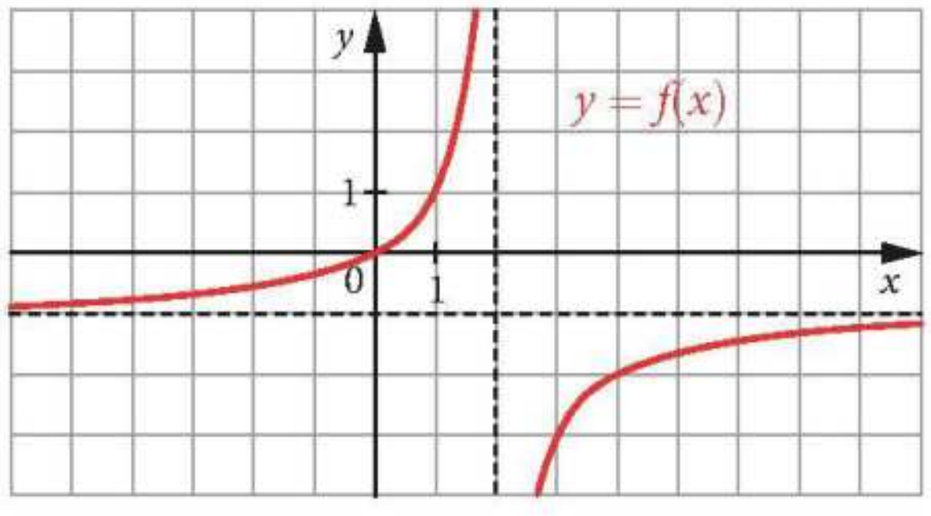
b)



c)



d)



12.7. Przekształć wykres funkcji f i naszkicuj wykres funkcji g.

a) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = -f(x)$

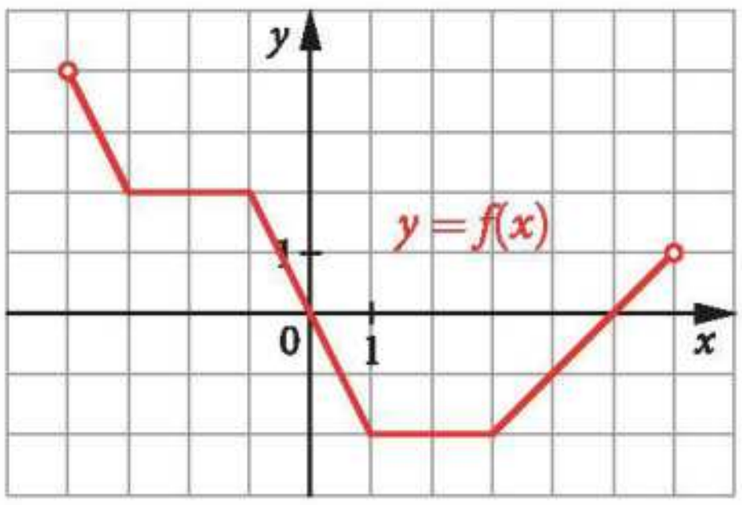
b) $f(x) = \frac{12}{x}$, $g(x) = -f(x)$

c) $f(x) = \frac{5}{x}$, $g(x) = f(-x)$

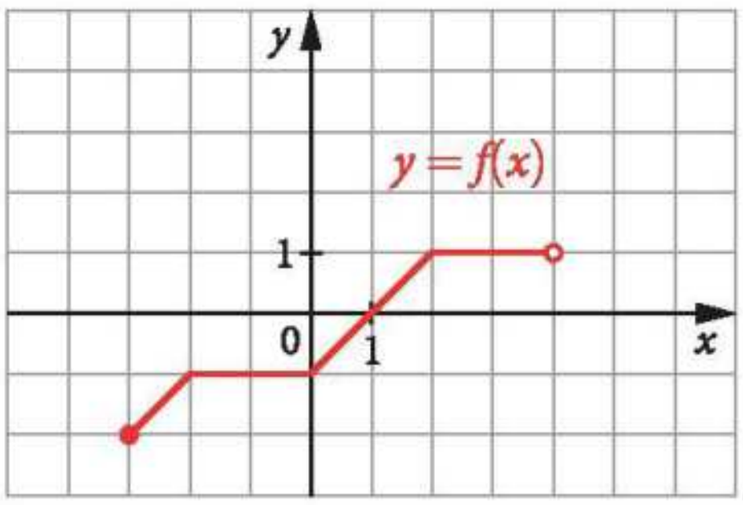
d) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = |f(x)|$

12.8. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji $y = f(-x)$.

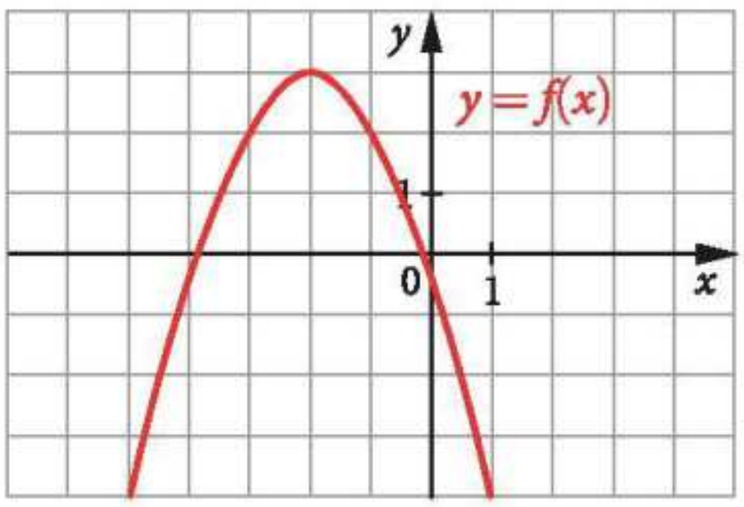
a)



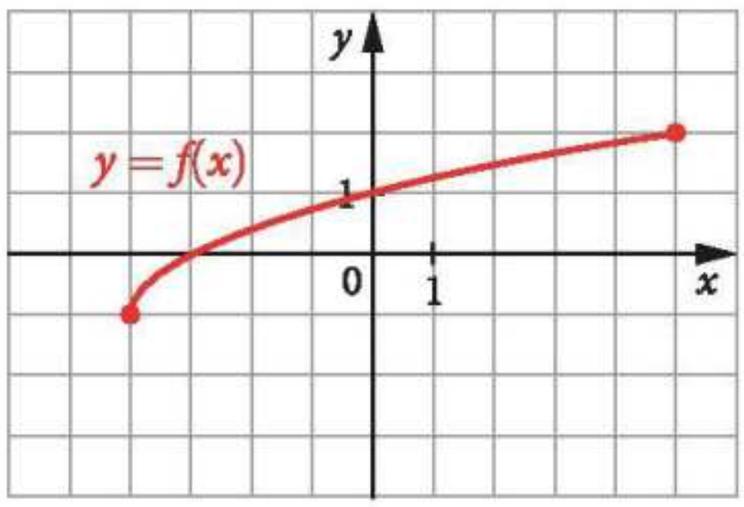
c)



b)



d)



12.9. Przekształć odpowiednio wykres funkcji $y = \sqrt{x}$ lub $y = \frac{1}{x}$ i naszkicuj wykres funkcji o podanym wzorze.

a) $y = |\sqrt{x} - 1|$

b) $y = \left|\frac{1}{x} - 2\right|$

c) $y = \left|\frac{1}{x} + 1\right|$

d) $y = |\sqrt{x} - \sqrt{2}|$

12.10. Wśród podanych funkcji wskaż pary takich, których wykresy są symetryczne względem osi x lub osi y. Wybrane pary wpisz do tabeli w zeszycie, wg wzoru.

Pary funkcji, których wykresy są symetryczne względem osi x	Pary funkcji, których wykresy są symetryczne względem osi y
$k_1(x) = 5x - 4$ i $k_3(x) = -5x + 4$	$k_1(x) = 5x - 4$ i $k_2(x) = -5x - 4$

$f_1(x) = 2x - 3$
$f_2(x) = -2x - 3$
$f_3(x) = -2x + 3$

$g_1(x) = x^2 + 2x + 7$
$g_2(x) = x^2 - 2x + 7$
$g_3(x) = -x^2 - 2x + 7$
$g_4(x) = -x^2 - 2x - 7$

$h_1(x) = 10^{x-2}$
$h_2(x) = -10^{x-2}$
$h_3(x) = 10^{-x-2}$
$h_4(x) = 10^{-x+2}$

12.11. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór D, a zbiorem wartości – zbiór ZW. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(-x)$.

a) $D = \{-3, 6, 8\}$ $ZW = \{0, 2, 8\}$ c) $D = (-\infty; 9)$ $ZW = (0; \infty)$

b) $D = (0; \infty)$ $ZW = (0; \infty)$ d) $D = \langle 2; 9\rangle$ $ZW = \langle -1; 3\rangle$

12.12. Miejscami zerowymi funkcji $y = f(x)$ są: $x = -3$, $x = -2$ oraz $x = 5$. Wyznacz miejsca zerowe funkcji

a) $y = -f(x)$. b) $y = f(-x)$.

12.13. Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartość najmniejszą równą -3 dla $x = 5$ i przyjmuje wartość największą równą 5 dla $x = 1$. Podaj wartość najmniejszą, wartość największą oraz argumenty, dla których te wartości przyjmuje funkcja

a) $y = -f(x)$. b) $y = f(-x)$.

12.14. O funkcji f wiadomo, że jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 1\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 1; \infty)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji $y = -f(x)$.

12.15. O funkcji f wiadomo, że jej dziedziną jest przedział $(-3; 12)$, że jest stała w przedziale $(-3; 3\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 3; 12)$. Podaj dziedzinę oraz przedziały monotoniczności funkcji $y = f(-x)$.

12.16. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -4; 2)$. Czy funkcja $y = |f(x)|$ przyjmuje wartość największą lub wartość najmniejszą? Jeżeli tak, podaj te wartości.

12.17. Wiadomo, że dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle -3; 5\rangle$, a jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -2; 3\rangle$. Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$ spełniającej takie założenia.

12.18. Podaj przykład wykresu funkcji f, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych i która spełnia warunek $f(-x) = -f(x)$.

12.19. O funkcji f wiadomo, że jej dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}$, jest monotoniczna, do zbioru jej wartości należą liczby o różnych znakach oraz że funkcja $y = |f(x)|$ też jest monotoniczna. Podaj przykład wykresu funkcji spełniającej te założenia.

12.20. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej x z przedziału $\langle 0; 8\rangle$ liczbę o 4 mniejszą od kwadratu połowy liczby x.

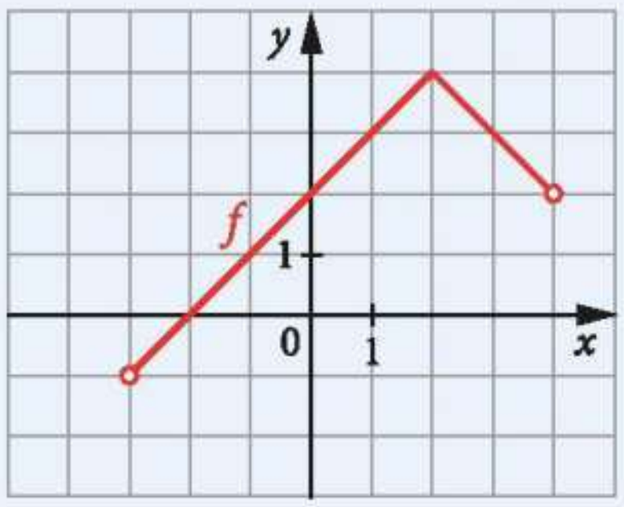
a) Podaj wzór funkcji f i sporządź jej wykres.

b) Przekształcając odpowiednio wykres funkcji f, naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$.

12.21. Sporządź wykres funkcji $y = f(x)$, która spełnia następujące warunki:
$D = \langle -2; 5\rangle$, $ZW = \langle -2; 2\rangle$, wartość największą równą 2 funkcja przyjmuje dla $x = 1$, wartość najmniejszą równą -2 funkcja przyjmuje dla $x = 3$; funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x = -1$, $x = 2$.
$f(x) > 0$ dla $x \in (-1; 2)$, $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -2; -1)$ oraz dla $x \in (2; 5\rangle$; w przedziale $\langle -2; 1\rangle$ funkcja jest rosnąca, w przedziale $\langle 1; 3\rangle$ jest malejąca, w przedziale $\langle 3; 5\rangle$ jest rosnąca.
Równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$, ma jedno rozwiązanie dla $m = -2$ oraz dla $m = 2$, ma dwa rozwiązania dla $m \in (-2; -1) \cup (-1; 2)$, ma trzy rozwiązania dla $m = -1$.
Przekształć odpowiednio narysowany wykres funkcji f i narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$.

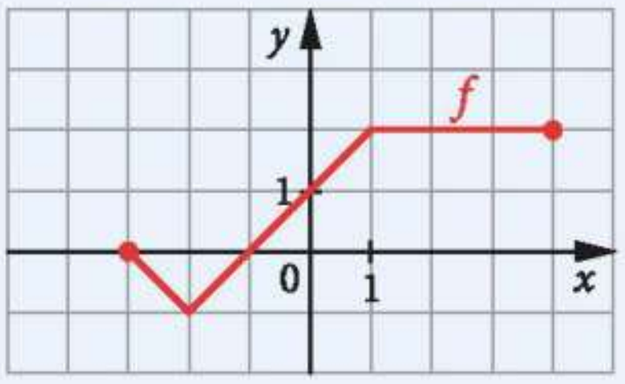
Prosto do matury

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.
Oceń prawdziwość podanych zdań.



A. Dziedziną funkcji $g(x) = f(-x)$ jest przedział $(-4; 3)$.
B. Miejscem zerowym funkcji $g(x) = f(-x)$ jest 2.
C. Zbiorem wartości funkcji $h(x) = -f(x)$ jest przedział $(-4; 1)$.

2. Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, narysuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj dziedziny i przedziały monotoniczności obu funkcji.



3. Posługując się wykresem funkcji $y = f(x)$ z poprzedniego zadania, narysuj wykres funkcji $h(x) = f(-x)$. Podaj dziedziny i miejsca zerowe obu funkcji.

4. Wiadomo, że dziedziną funkcji $y = f(-x)$ jest przedział $\langle 1; 5\rangle$, a zbiorem wartości funkcji $y = -f(x)$ jest przedział $\langle -1; 2\rangle$. Podaj przykład wykresu funkcji $y = f(x)$ spełniającej takie założenia.

5. Wiadomo, że dziedziną funkcji $y = f(-x)$ jest przedział $\langle 1; 5\rangle$, zbiorem wartości funkcji $y = -f(x)$ jest przedział $\langle -1; 2\rangle$, a równanie $|f(x)| = 1$ ma 3 rozwiązania. Narysuj przykładowy wykres funkcji $y = f(x)$ spełniającej takie założenia.

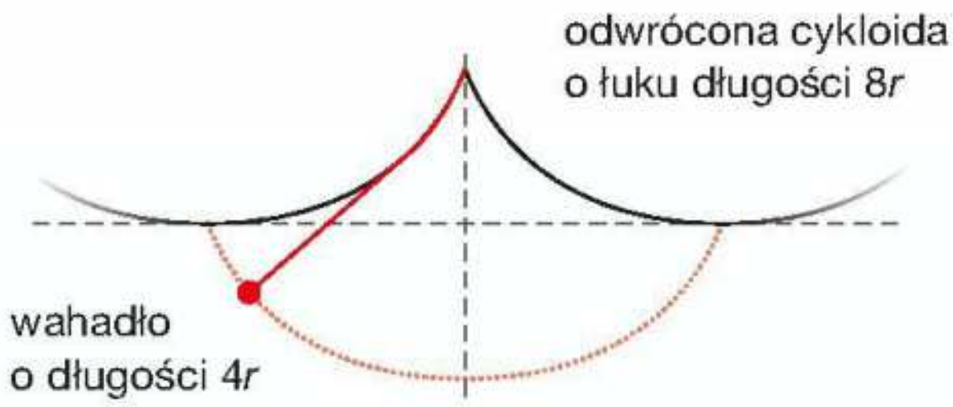
Cykloida i elipsa

Punkt okręgu toczącego się bez poślizgu po prostej zakreśla krzywą zwaną cykloidą. Taką nazwę nadał jej w 1599 r. Galileusz. Długość łuku cykloidy zakreślonego przez punkt okręgu o promieniu r jest równy $8r$, a pole pod łukiem wynosi $3\pi r^2$.



Wahadło cykloidalne

Holenderski fizyk, astronom i matematyk, Christiaan Huygens [czyt. höjchens], próbował ulepszyć zbudowany przez siebie zegar wahadłowy (1657 r.) tak, aby działał prawidłowo także w trudnych warunkach, np. na statku. Odkrył, że jeżeli wahadło porusza się po cykloidzie, okres drgań zegara nie zależy od początkowego wychylenia wahadła.



Niestety inne czynniki, jak tarcie wahadła o elementy ograniczające w kształcie cykloidy, uniemożliwiły prawidłowe działanie zegara.



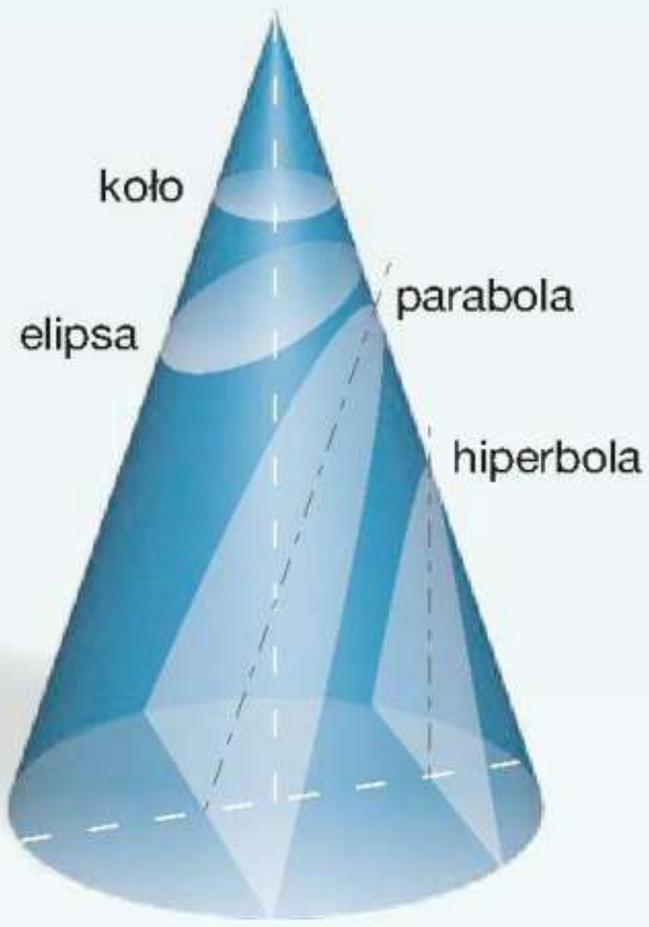
Szczególne właściwości

Rozważmy punkty A i B nieleżące jeden pod drugim. Krzywa, po której ciało poruszające się pod wpływem siły ciężkości pokona drogę z A do B w najkrótszym czasie, jest nazywana **brachistochroną**. Okazuje się, że brachistochrona zawsze jest fragmentem cykloidy.

Droga z A do B po cykloidzie jest najszybsza nawet wówczas, gdy jej fragment znajduje się poniżej punktu końcowego B. Czy warto nadawać kształt cykloidy rampom budowanym w skateparkach?

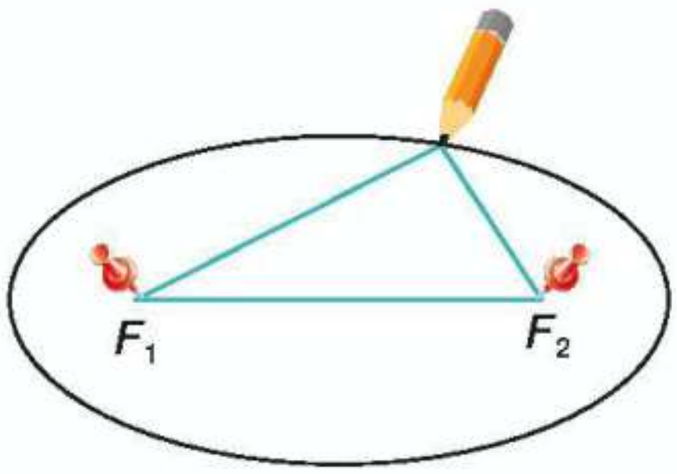
Przekroje stożka

Rozwój geometrii zawdzięczamy starożytnym Grekom. Około III wieku p.n.e. Apoloniusz z Pergi napisał złożony z 8 ksiąg traktat *Konika* poświęcony przekrojom stożka. To on nadał krzywym powstającym przy przekroju stożka obrotowego płaszczyzną nazwy **elipsa**, **hiperbola** i **parabola**.



Dwa ogniska

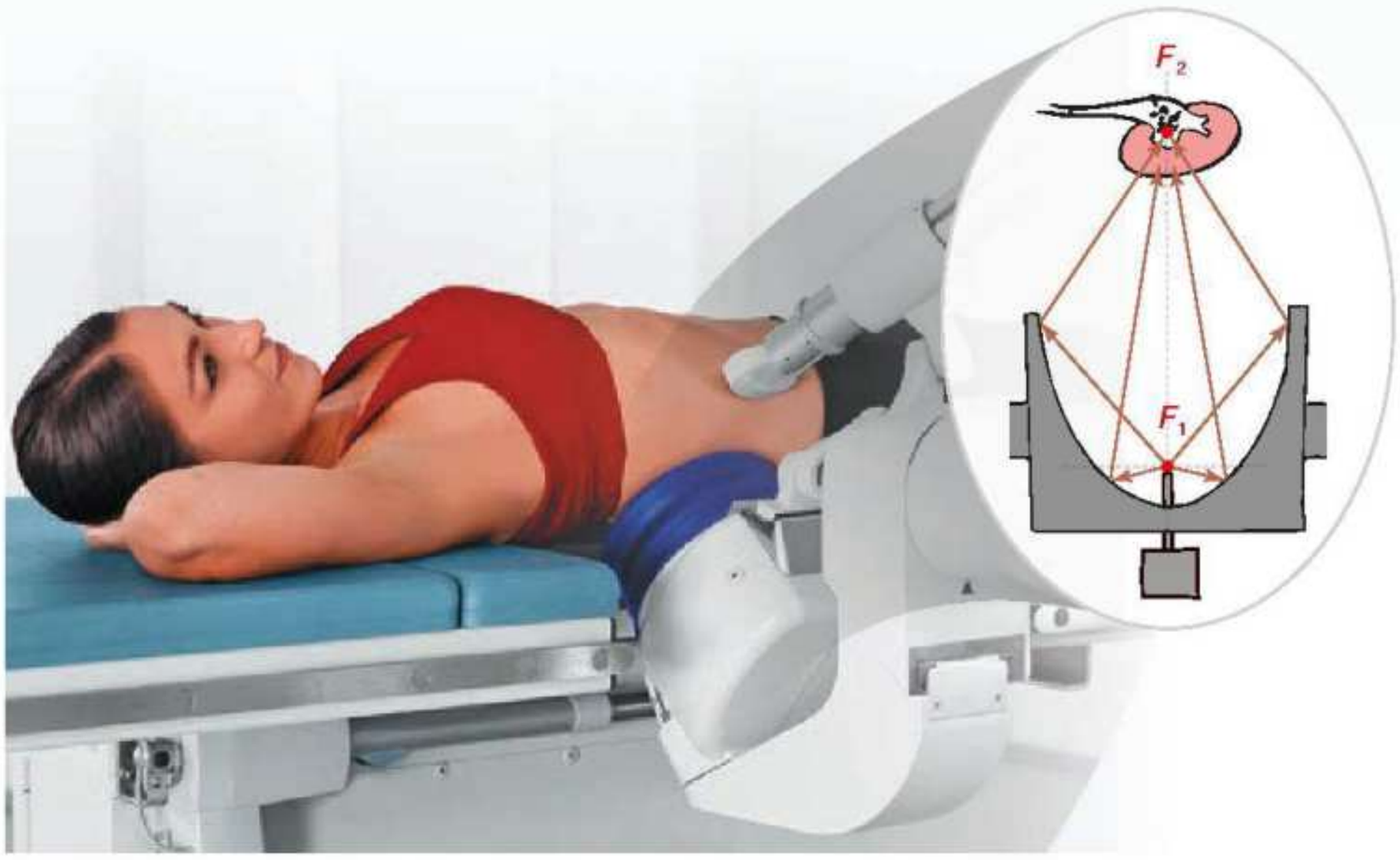
Elipsa składa się z tych wszystkich punktów płaszczyzny, dla których suma odległości od dwóch ustalonych punktów F_1 i F_2 (zwanych ogniskami) jest stała. Na rysunku pokazano jeden ze sposobów jej wyznaczania, znany już w starożytności.





Elipsa w medycynie

Skupiające własności ognisk elipsy wykorzystuje się do bezoperacyjnego usuwania kamieni nerkowych. Podczas zabiegu generator umieszczony w ognisku F_1 elipsy wytwarza wysokoenergetyczne fale uderzeniowe. Po odbiciu od czaszy reflektora fale te skupiają się w ognisku F_2, w którym znajduje się kamień nerkowy. Kamień zostaje rozkruszony, co ułatwia jego wydalenie z organizmu.



13. Wektory

Umiejętności:

- dodawanie i odejmowanie wektorów oraz mnożenie wektora przez liczbę
- interpretacja geometryczna działań na wektorach
- swobodne operowanie pojęciem wektora

W kolejnych tematach zdefiniujemy wektory i działania na nich, omówimy własności tych działań oraz pokażemy przykłady zastosowania wektorów w zadaniach geometrycznych.

Przykład 1

Marta wybrała się w podróż z Gdańska do Krakowa. Spójrzmy na mapę Polski. Ilustracją początku i końca tej podróży jest narysowana na mapie strzałka. Natomiast z rysunku nie można odczytać rzeczywistej drogi, którą przebyła Marta.



Definicja

Niech A i B będą dwoma punktami na płaszczyźnie. Uporządkowaną parę punktów (A, B) nazywamy **wektorem o początku A i końcu B** i oznaczamy symbolem $\overrightarrow{AB}$. Jeśli $A = B$, to wektor $\overrightarrow{AB}$ nazywamy wektorem zerowym.

Niezerowy wektor $\overrightarrow{AB}$ jednoznacznie wyznacza:

- prostą AB,
- półprostą AB,
- odcinek AB.

Definicja

- Dwa niezerowe wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są **równoległe** $\left(\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}\right)$, inaczej: mają **ten sam kierunek**, jeżeli proste AB i CD są równoległe.
- **Długością** wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy długość odcinka AB i oznaczamy $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ albo $|AB|$.
- **Wektorem przeciwnym** do wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{BA}$.

Na dwóch oddzielnych rysunkach zaznaczyliśmy wektory przeciwne.

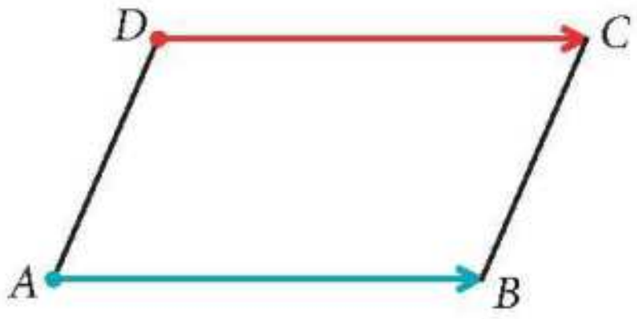
Wektory przeciwne mają ten sam kierunek i równe długości.





Zgodnie z definicją każdy wektor ma swój początek i koniec. O wektorze $\overrightarrow{AB}$ często mówimy, że jest **wektorem zaczepionym** lub **związanym**.

Przyjrzyjmy się wektorom wyznaczonym przez przeciwległe boki równoległoboku $ABCD$. Wektory położone tak, jak $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$, nazwiemy wektorami równymi.

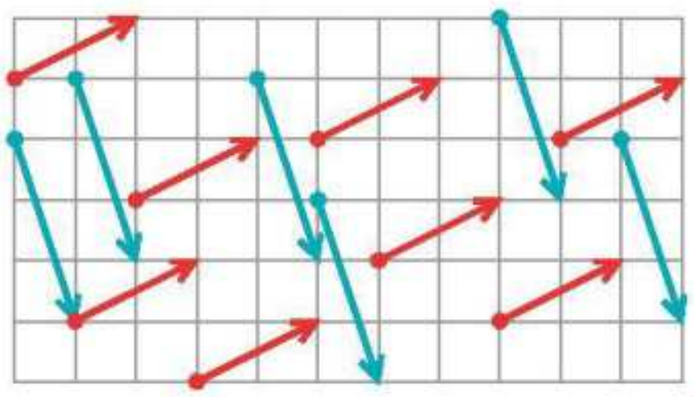


Definicja

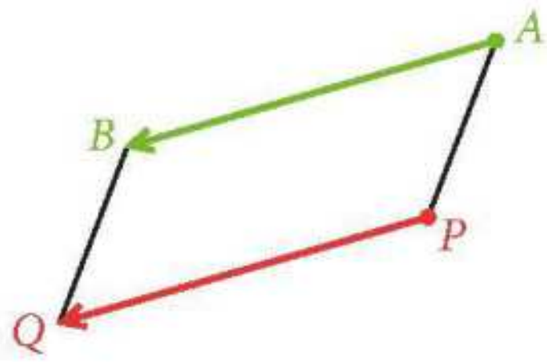
Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ nazywamy **równymi** $\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\right)$, jeśli odcinki AB i DC są równej długości i równoległe oraz odcinki AD i BC są równej długości i równoległe.

Przykład 2

Wszystkie wektory zaznaczone na rysunku kolorem czerwonym są równe. Również wszystkie wektory zaznaczone kolorem niebieskim są równe.



W dowolnym punkcie płaszczyzny można zaczepić wektor $\overrightarrow{PQ}$ równy danemu wektorowi $\overrightarrow{AB}$.



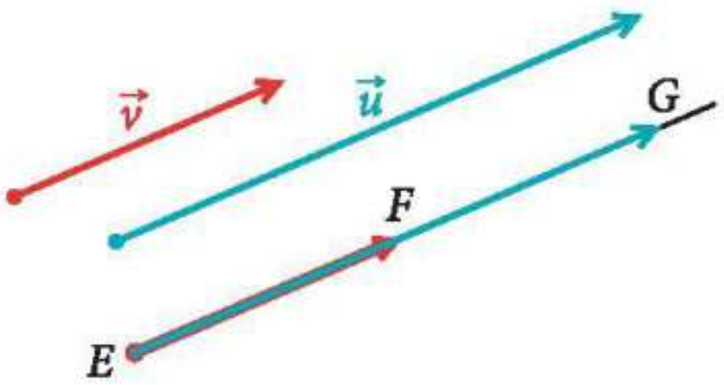
Definicja

Wektorem swobodnym wyznaczonym przez wektor zaczepiony $\overrightarrow{AB}$ nazywamy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych równych wektorowi $\overrightarrow{AB}$.

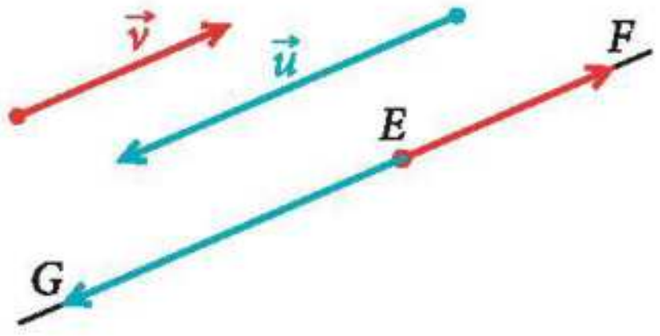
Wektory swobodne często oznaczamy pojedynczymi literami, np.: $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{w}$.
Zapis $\overrightarrow{MP} = \vec{v}$ oznacza, że wektor $\overrightarrow{MP}$ zaczepiony w punkcie M należy do wektora swobodnego $\vec{v}$. W takim wypadku mówimy również, że wektor $\vec{v}$ został zaczepiony w punkcie M lub że wektor $\overrightarrow{MP}$ reprezentuje wektor $\vec{v}$. Każdy wektor zaczepiony jest reprezentantem dokładnie jednego wektora swobodnego. W dalszych rozważaniach będziemy używać uproszczonych określeń, np. „niezerowy wektor $\vec{w}$" oznacza, że niezerowy jest każdy wektor zaczepiony reprezentujący wektor $\vec{w}$. Wektor swobodny zerowy oznaczamy symbolem $\vec{0}$.

Definicja

- Dwa niezerowe wektory $\vec{v}$ i $\vec{u}$ są **równoległe**, jeżeli po zaczepieniu ich w dowolnych punktach półproste wyznaczone przez te wektory są równoległe.
- Dwa niezerowe i równoległe wektory $\vec{v}$ i $\vec{u}$ mają **ten sam zwrot**, inaczej: **zwroty zgodne**, jeśli po zaczepieniu obu wektorów w jednym punkcie półproste wyznaczone przez te wektory się pokrywają. Jeśli zaś te półproste tworzą w sumie prostą, to wektory $\vec{v}$ i $\vec{u}$ mają **zwroty przeciwne**.



wektory o zgodnych zwrotach

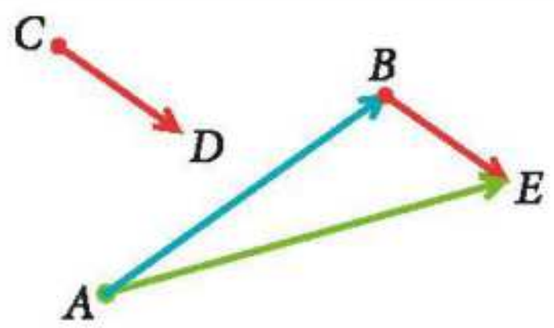


wektory o przeciwnych zwrotach

Zdefiniujemy teraz dodawanie wektorów swobodnych.

Definicja

Jeżeli $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są dowolnymi wektorami swobodnymi, to $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$, gdzie E jest takim punktem, że $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$.



Przykład 3

Niech punkt G oznacza Gdańsk, punkt K – Kraków, punkt W – Wrocław. Ilustracją pierwszego etapu podróży Marty jest wektor $\overrightarrow{GK}$. Z Krakowa Marta pojechała do Wrocławia i tam swoją podróż zakończyła. Ilustracją drugiego etapu podróży jest wektor $\overrightarrow{KW}$. Wektor $\overrightarrow{GW}$, będący sumą wektorów $\overrightarrow{GK}$ oraz $\overrightarrow{KW}$, mówiąc poglądowo, podsumowuje całą podróż, której punktem startowym był Gdańsk, a końcowym – Wrocław.

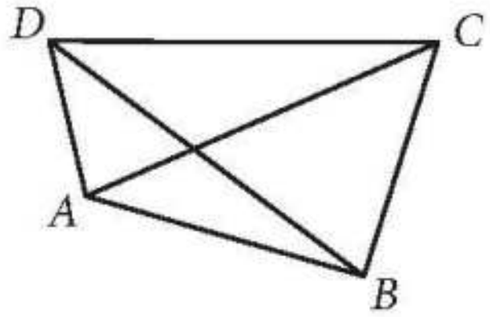


$$\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KW} = \overrightarrow{GW}$$

Zauważmy, że długość wektora $\overrightarrow{GW}$ nie jest równa sumie długości wektorów $\overrightarrow{GK}$ oraz $\overrightarrow{KW}$.

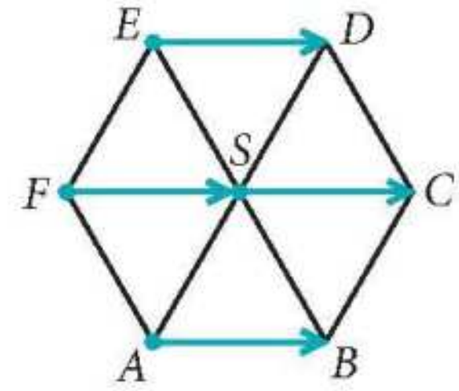
Przykład 4 ◀ zad. 13.6

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$
- $\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$
- $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

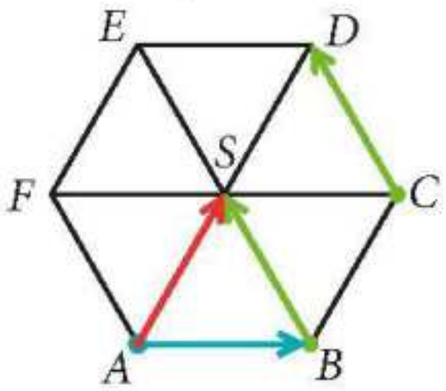


Przykład 5 ◀ zad. 13.11

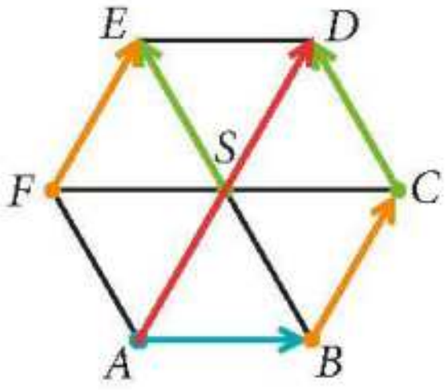
W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FS}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{ED}$ są równe. Wynika to bezpośrednio z własności sześciokąta foremnego. Wykonamy podane działania na wektorach.



Rozwiązanie



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AS}$ ⟵ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BS}$



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{SE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ⟵ $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{CD}$

Definicja

Iloczynem niezerowego wektora $\vec{v}$ i liczby $k \neq 0$, co zapisujemy $k \cdot \vec{v}$, nazywamy równoległy do wektora $\vec{v}$ wektor $\vec{w}$ taki, że $|\vec{w}| = |k| \cdot |\vec{v}|$ oraz:

- jeżeli $k > 0$, to zwroty wektorów $\vec{w}$ oraz $\vec{v}$ są zgodne,
- jeżeli $k < 0$, to zwroty wektorów $\vec{w}$ oraz $\vec{v}$ są przeciwne.

Jeżeli $k = 0$ lub $\vec{v}$ jest wektorem zerowym, to $k \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

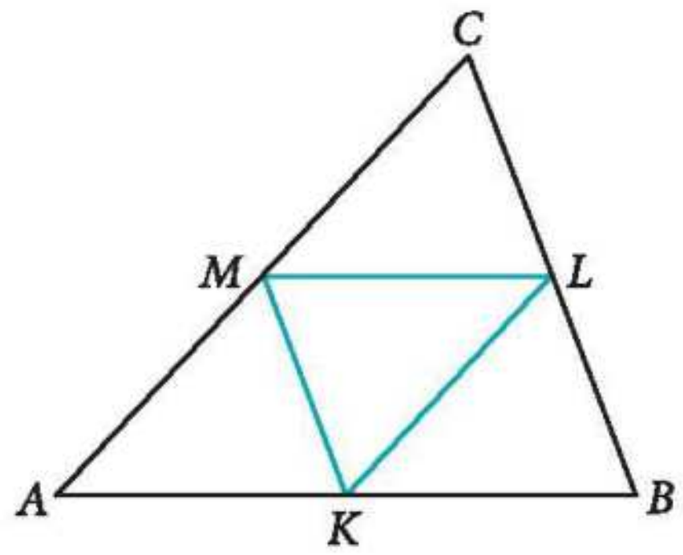
Przykład 6

Droga z Gdańska do Krakowa (w linii prostej) wiedzie przez Łódź. Przyjmijmy, że odległość z Gdańska do Łodzi stanowi $\frac{5}{8}$ odległości z Gdańska do Krakowa. Jeśli oznaczymy Gdańsk, Kraków i Łódź odpowiednio punktami G, K i $Ł$, to możemy użyć wektorów i zapisać, że $\overrightarrow{GŁ} = \frac{5}{8}\overrightarrow{GK}$.



Przykład 7 ◀ zad. 13.14

W trójkącie ABC punkty K, L, M są środkami boków, jak na rysunku.



Udowodnimy, że $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Dowód

$$\begin{cases} \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CL} \\ \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} \end{cases}$$

$$2\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL}$$

$$2\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{AB} \qquad \longleftarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \text{ i } \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{BL} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Koniec dowodu

Podobnie można wykazać inne równości, np.:

$$2\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{KL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{ML}.$$

Twierdzenie

Własności działań na wektorach

Jeżeli $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ są wektorami oraz k, p są liczbami rzeczywistymi, to:

- $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$,
- $\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}$,
- $k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$,
- $(k + p)\vec{u} = k\vec{u} + p\vec{u}$.

Dowód tego twierdzenia pominiemy.

Zilustrujemy własność:

$$k \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$$

czyli rozdzielność mnożenia przez liczbę względem dodawania wektorów, dla $k = 2$.

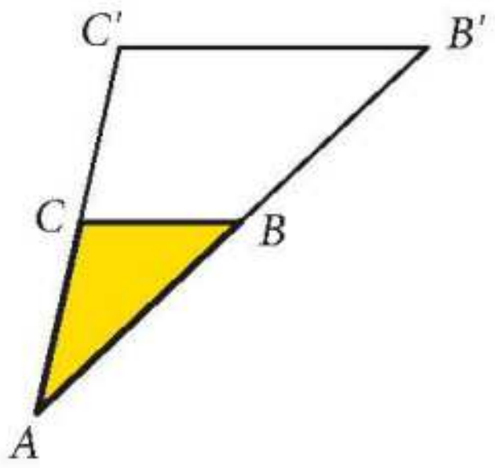
Zakładamy, że:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \ \vec{v} = \overrightarrow{BC} \text{ oraz } \overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AC}, \ \overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$$

Zatem $2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ (zob. przykład 7).

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$$



Jeżeli pomnożymy wektor przez -1, otrzymamy wektor przeciwny.
Między wektorem $\overrightarrow{AB}$ a wektorem do niego przeciwnym zachodzi związek:

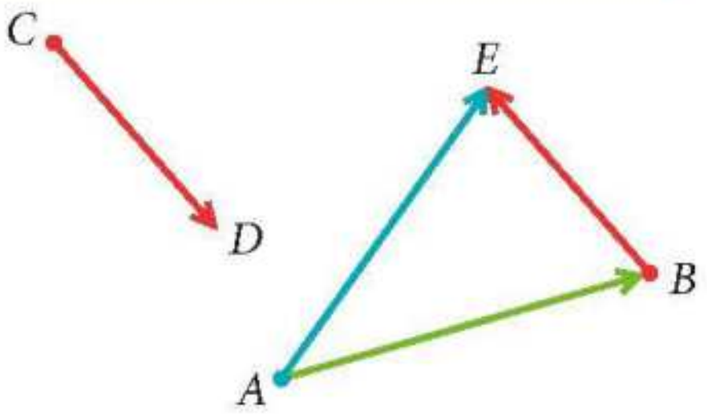
$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

Z tej własności korzystamy, definiując odejmowanie wektorów.

Definicja

Aby **od wektora $\vec{v}$ odjąć wektor $\vec{w}$**, do wektora $\vec{v}$ dodajemy wektor przeciwny do $\vec{w}$.

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} =$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \quad \longleftarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BE}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$$



Przykład 8 ◀ zad. 13.15

Wykażemy, że dla dowolnych czterech punktów A, B, C, D prawdziwa jest równość:

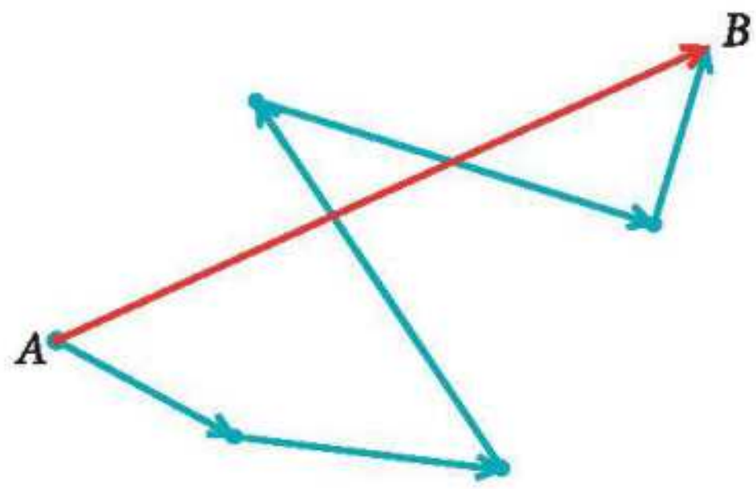
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

Dowód

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} =$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

Koniec dowodu

Zauważmy, że każdy wektor można przedstawić w postaci sumy innych wektorów na nieskończenie wiele sposobów. O takiej operacji mówimy, że **rozkładamy wektor na składowe**.
Na przykład na rysunku obok wektor $\overrightarrow{AB}$ został rozłożony na pięć składowych.



Zadania

13.1. Punkt M jest środkiem odcinka KL. Oceń prawdziwość podanych zdań.

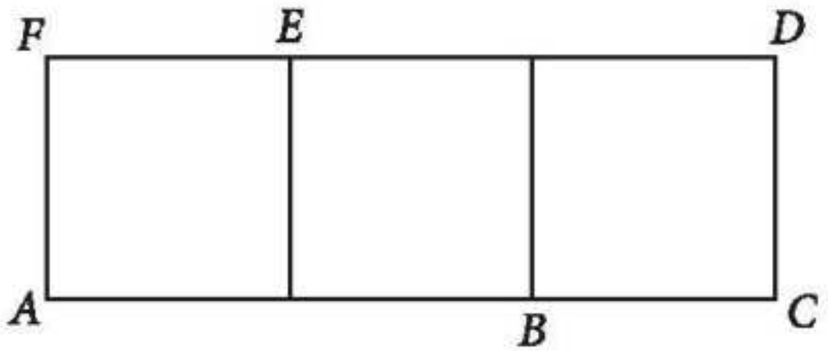
A. $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{LM}$ **B.** $\overrightarrow{KM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{LK}$ **C.** $\overrightarrow{KM} = -\overrightarrow{LM}$

13.2. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych prostokąta $ABCD$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{BS}$ **B.** $\left|\overrightarrow{AS}\right| = \left|\overrightarrow{BS}\right|$ **C.** $\left|\overrightarrow{AS}\right| + \left|\overrightarrow{SB}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$

13.3. Trzy kwadraty, z których zbudowany jest prostokąt $ACDF$, są przystające. Korzystając z oznaczeń, wskaż wszystkie pary wektorów

a) niezerowych równych.
b) niezerowych przeciwnych.
c) o zgodnych zwrotach i różnych długościach.
d) tej samej długości, ale o różnych kierunkach.



13.4. Dane są punkty A i B. Wyznacz taki punkt P, aby $\overrightarrow{PA}$ i $\overrightarrow{PB}$ były wektorami przeciwnymi.

13.5. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami prostokąta. Wyznacz sumy i różnice wektorów.

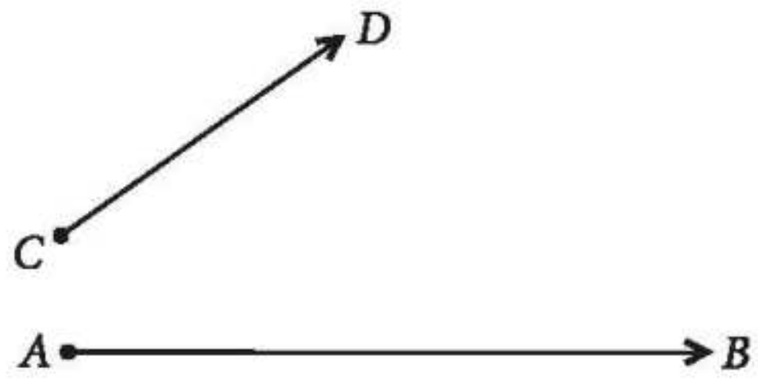
a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}$

13.6. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wyznacz sumy i różnice wektorów.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$
b) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$
c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$
d) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$

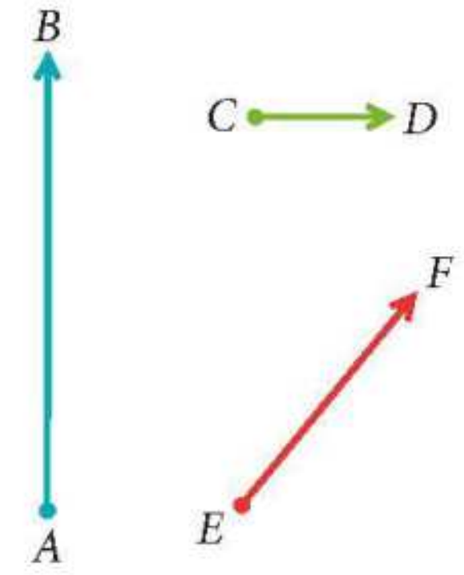
13.7. Dane są wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, takie jak na rysunku. Skonstruuj wektor $\vec{v}$.

a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$
b) $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$
c) $\vec{v} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CD}$
d) $\vec{v} = 3\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{AB}$



13.8. Dane są wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{EF}$, takie jak na rysunku. Skonstruuj wektor $\vec{v}$.

a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF}$
b) $\vec{v} = \overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
c) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$
d) $\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}\right) - 2\overrightarrow{DC}$



13.9. Wiadomo, że $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$. Wyznacz wektor $\overrightarrow{AC}$ w zależności od wektora $\overrightarrow{AB}$.

13.10. W równoległoboku $ABCD$ punkty K i L są odpowiednio środkami boków AB i BC. Wyznacz wektor $\vec{u} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ za pomocą wektorów $\overrightarrow{DK} = \vec{v}$ i $\overrightarrow{DL} = \vec{w}$.

13.11. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Przedstaw wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FC}$ oraz $\overrightarrow{EC}$ w postaci $m \cdot \overrightarrow{AD} + p \cdot \overrightarrow{BE}$, gdzie m, p są odpowiednio dobranymi liczbami.

13.12. S jest punktem przecięcia przekątnych w sześciokącie foremnym $ABCDEF$. Przedstaw wektor $\vec{w}$ za pomocą wektora o jednym z końców w punkcie S lub wielokrotności takiego wektora.

a) $\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$

b) $\vec{w} = \overrightarrow{AC} - \left(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FE}\right)$

13.13. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkty K i L spełniają warunki:

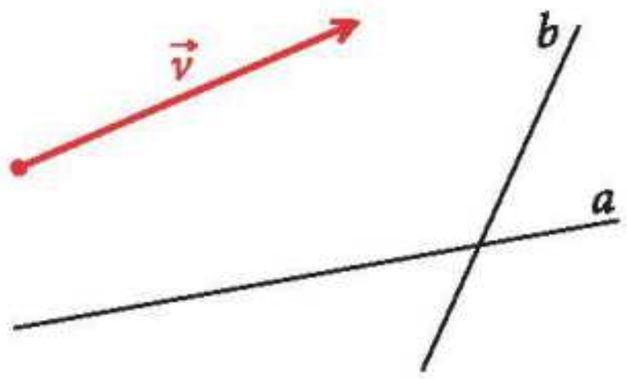
- $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{DB}$
- $\overrightarrow{AL} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$

Wyznacz wektor $\overrightarrow{KL}$ za pomocą wektora $\overrightarrow{DC}$.

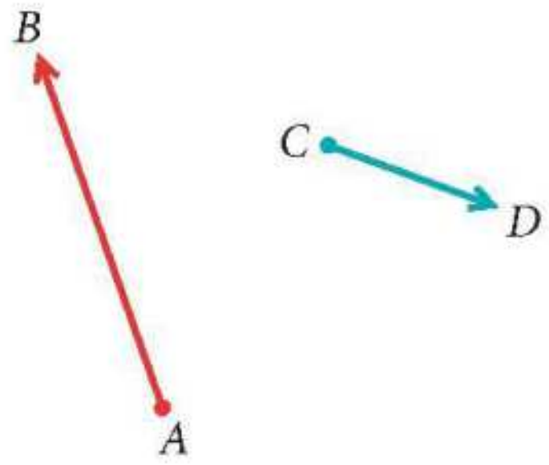
D **13.14.** Dany jest trójkąt ABC. Punkty K, L, M są środkami odpowiednio boków AB, BC oraz AC. Wykaż, że $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

D **13.15.** Dany jest pięciokąt $ABCDE$. Wykaż, że $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$.

13.16. Rozłóż wektor $\vec{v}$ (zob. rysunek) na dwie składowe tak, aby jedna z nich była równoległa do prostej a, a druga – do prostej b. Wykonaj odpowiedni rysunek.



13.17. Rozłóż wektor $\overrightarrow{AB}$ (zob. rysunek) na pięć składowych w taki sposób, aby jedną z nich był wektor $\overrightarrow{CD}$. Wykonaj odpowiedni rysunek.



* **13.18.** Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają różne kierunki. Dla jakich wartości parametrów m i k prawdziwa jest równość $(m-3)\vec{u} + (k+5)\vec{v} = \vec{0}$?

D **13.19.** W równoległoboku $ABCD$ punkt K jest środkiem boku AB, zaś punkt M jest środkiem boku DC. Oceń prawdziwość podanych zdań. Uzasadnij odpowiedź.

A. $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{CB}$

B. $\left|\overrightarrow{KM}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$

C. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KC}$

D. $\left|\overrightarrow{MC}\right| + \left|\overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$

E. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

F. $\left|\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD}\right| = \left|\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB}\right|$

D **13.20.** W trójkącie ABC na boku AB zaznaczono taki punkt D, że $|AD|:|AB| = 2:3$, a na boku AC taki punkt E, że $|AE| : |AC| = 1 : 5$. Wykaż, że $\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{AE} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.

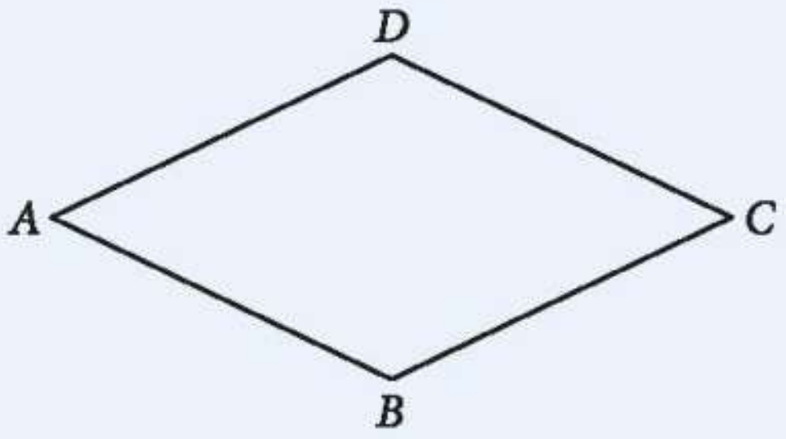
D * **13.21.** W kwadracie $ABCD$, w którym punkt S jest środkiem boku CD, dane są wektory $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ i $\overrightarrow{BS} = \vec{v}$. Wykaż, że $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$ oraz $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$.

Prosto do matury

1. Punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

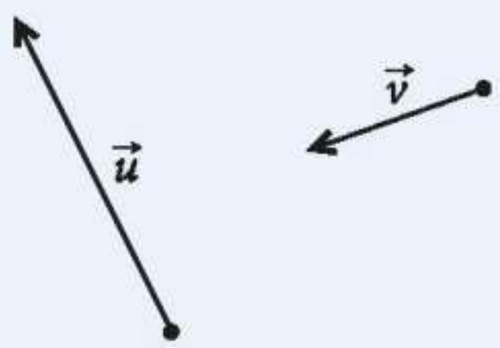
A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

2. Punkty A, B, C, D są wierzchołkami rombu, jak na rysunku. Wyznacz sumy i różnice wektorów.



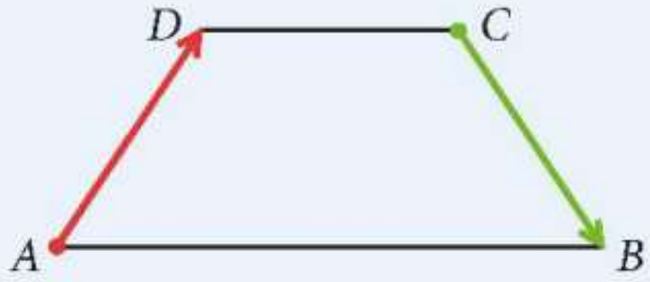
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$
c) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

3. Mając dane wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, położone jak na rysunku, skonstruuj wektor $\vec{w} = 2\vec{u} - \frac{5}{2}\vec{v}$.



4. Dane są trzy wektory o tym samym kierunku: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, przy czym $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 4$, wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mają zwroty zgodne, zaś wektory $\vec{a}$ i $\vec{c}$ zwroty przeciwne. Wyraź wektory $\vec{b}$ i $\vec{c}$ za pomocą wektora $\vec{a}$.

5. W trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$, jak na rysunku, kąt DAB jest równy $60°$ oraz $|AD| = |DC|$. Wyznacz współczynniki k i m, dla których prawdziwa jest równość $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AD} + m \cdot \overrightarrow{CB}$.



14. Wektory w układzie współrzędnych

Umiejętności:

- obliczanie współrzędnych oraz długości wektora
- dodawanie i odejmowanie wektorów, mnożenie wektora przez liczbę
- sprawdzanie współliniowości punktów

Wygodnym narzędziem do opisywania wektorów na płaszczyźnie jest układ współrzędnych. Zaczniemy od opisu wektora na osi liczbowej.

Wektory na osi liczbowej

Wektor swobodny wyznaczony przez wektor zaczepiony o początku w punkcie 0 i końcu w punkcie 1 nazywamy **wektorem jednostkowym**.
Oznaczymy ten wektor $\vec{i}$.

Ograniczyliśmy nasze rozważania do jednej prostej, zatem, mówiąc obrazowo, wektor jednostkowy może się dowolnie przesuwać tylko na tej prostej.

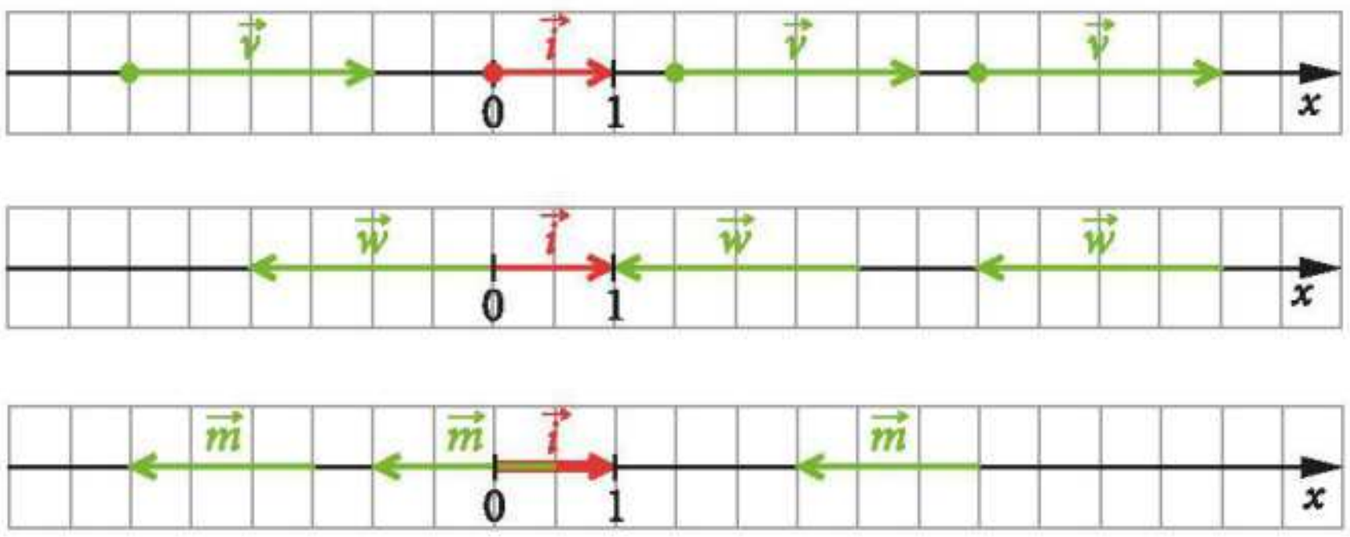
Przykład 1

Narysujemy na osi kilka wektorów postaci $k \cdot \vec{i}$ $(k \neq 0)$.

a) $k = 2$
$\vec{v} = 2 \cdot \vec{i}$

b) $k = -2$
$\vec{w} = -2 \cdot \vec{i}$

c) $k = -\frac{3}{2}$
$\vec{m} = -\frac{3}{2} \cdot \vec{i}$



Zgodnie z definicją mnożenia wektora przez liczbę każdy wektor równy wektorowi $k \cdot \vec{i}$ $(k \neq 0)$ ma ten sam kierunek, długość równą $|k|$ oraz dla $k < 0$ zwrot przeciwny, a dla $k > 0$ zwrot zgodny ze zwrotem wektora jednostkowego osi. Wektor $0 \cdot \vec{i}$ jest wektorem zerowym.

Definicja

Liczbę k nazywamy **współrzędną wektora** $\vec{w} = k \cdot \vec{i}$ na osi. Zapis $\vec{w} = [k]$ odczytujemy: wektor $\vec{w}$ ma na osi współrzędną k.

Zatem dla wektorów z przykładu 1 mamy:

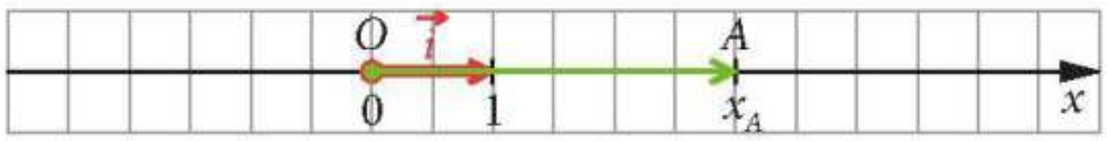
$$\vec{v} = [2], \quad \vec{w} = [-2], \quad \vec{m} = \left[-\frac{3}{2}\right]$$

Wniosek

Dwa wektory na osi liczbowej są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe współrzędne.

Oznaczmy początek osi liczbowej literą O.
Każdemu punktowi na osi liczbowej odpowiada dokładnie jedna współrzędna. Zauważmy, że współrzędna dowolnego punktu A na osi jest równa współrzędnej wektora $\overrightarrow{OA}$.

Niech $A = (x_A)$. Wówczas $\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{i}$, czyli $\overrightarrow{OA} = [x_A]$.



Mając dane współrzędne punktów A i B, można wyznaczyć współrzędną wektora $\overrightarrow{AB}$.

Niech $A = (x_A)$, $B = (x_B)$. Wówczas:

$$\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{i}, \ \overrightarrow{OB} = x_B \cdot \vec{i} \text{ oraz } \overrightarrow{AB} = k \cdot \vec{i}$$

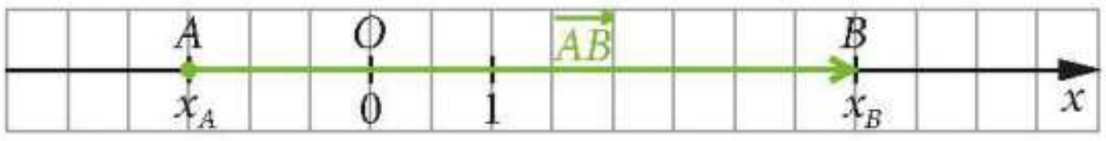
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ ⟵ definicja dodawania wektorów

$x_A \cdot \vec{i} + k \cdot \vec{i} = x_B \cdot \vec{i}$

$k \cdot \vec{i} = x_B \cdot \vec{i} - x_A \cdot \vec{i}$

$k \cdot \vec{i} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i}$

$k = x_B - x_A$



Wniosek

Jeżeli $A = (x_A)$ oraz $B = (x_B)$, to $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A]$.

Zatem aby obliczyć współrzędną wektora na osi, od współrzędnej końca tego wektora odejmujemy współrzędną jego początku.

Przykład 2

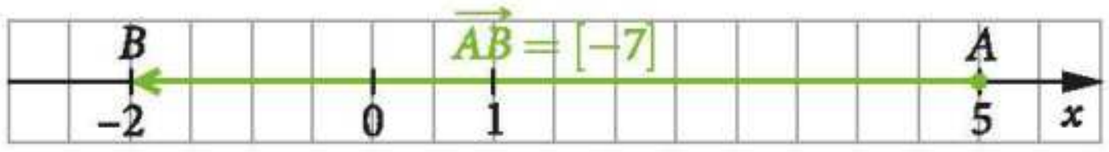
Wyznaczymy współrzędną i długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

Rozwiązanie

a) $A = (5),\ B = (-2)$

$\overrightarrow{AB} = [-2 - 5] = [-7]$

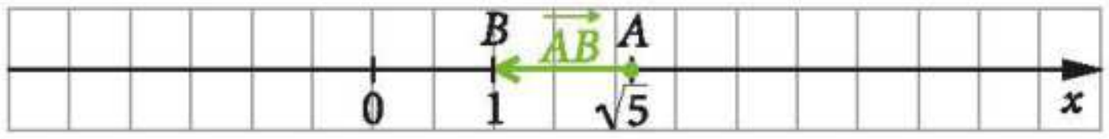
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 7$



b) $A = \left(\sqrt{5}\right),\ B = (1)$

$\overrightarrow{AB} = \left[1 - \sqrt{5}\right]$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|1 - \sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - 1$



Twierdzenie

Jeżeli $\vec{v} = [a],\ \vec{p} = [b]$ i $k \in \mathbf{R}$, to:

- wektor $\vec{w} = \vec{v} + \vec{p}$ ma współrzędną równą sumie współrzędnych, czyli $\vec{w} = [a + b]$,
- wektor $\vec{w} = \vec{v} - \vec{p}$ ma współrzędną równą różnicy współrzędnych, czyli $\vec{w} = [a - b]$,
- wektor $\vec{w} = k \cdot \vec{v}$ ma współrzędną równą iloczynowi liczby k i współrzędnej wektora $\vec{v}$, czyli $\vec{w} = [ka]$.

Dowód tego twierdzenia zostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania.

Przykład 3

Dane są punkty $A = (3),\ B = (-7),\ C = (5)$. Wyznaczymy taki punkt $D = (x)$, aby zachodziła podana równość.

Rozwiązanie

a) $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AD} = [x - 3],\ \overrightarrow{BC} = [12]$

$[x - 3] = 3 \cdot [12]$

$x - 3 = 36$

$x = 39$

Odp.: $D = (39)$

b) $-2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} = 5\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD} = [x - 3],\ \overrightarrow{BD} = [x + 7],\ \overrightarrow{AC} = [2]$

$-2 \cdot [x - 3] + [x + 7] = 5 \cdot [2]$

$-2x + 6 + x + 7 = 10$

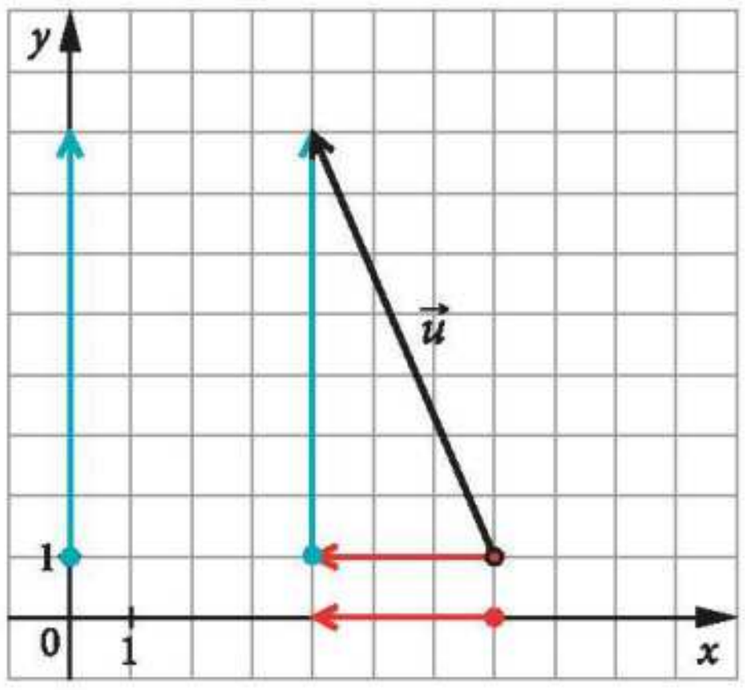
$x = 3$

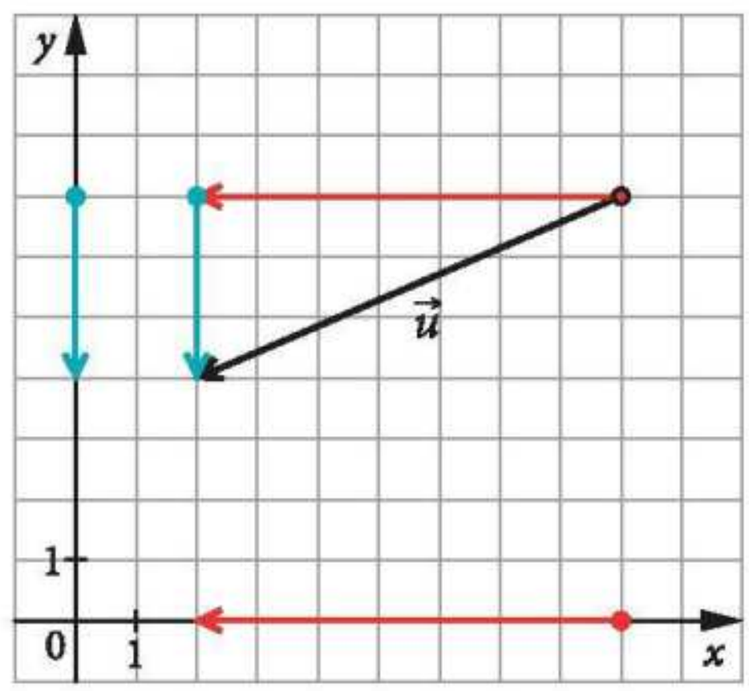
Odp.: $D = (3)$

Wektory w układzie współrzędnych

Jeżeli na płaszczyźnie dane są dwie przecinające się proste, to rozkład niezerowego wektora na dwie składowe równoległe odpowiednio do tych prostych jest (z dokładnością do wektorów równych) jednoznaczny. Wprowadzimy na płaszczyźnie układ współrzędnych i skorzystamy z tej własności.

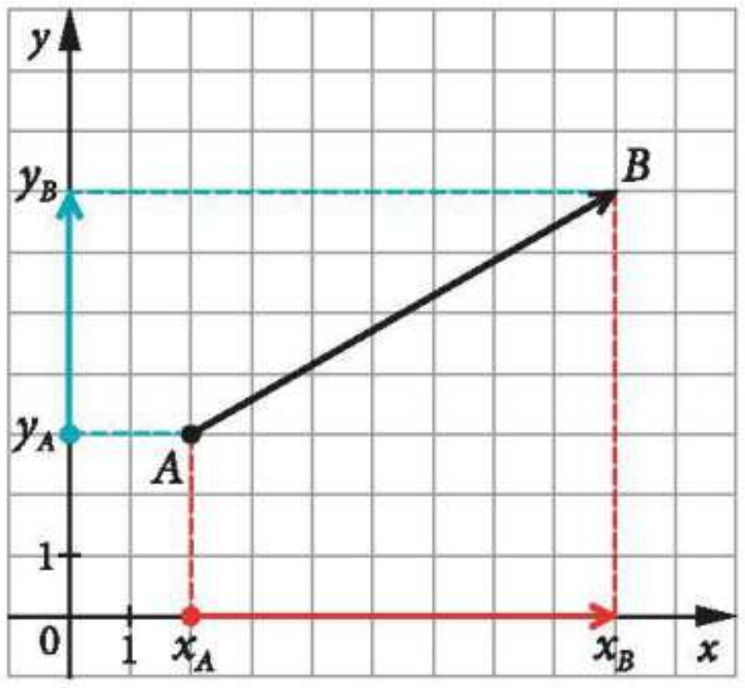
Przyjrzyjmy się przykładom rozkładu niezerowego wektora $\vec{u}$ na dwie składowe równoległe do osi układu współrzędnych. Aby zwiększyć czytelność rysunku, wektor $\vec{u}$ został umieszczony w pierwszej ćwiartce układu.





Na rysunkach czerwonym kolorem zaznaczone są składowe równoległe do osi x, niebieskim – składowe równoległe do osi y. Każda z nich ma na odpowiedniej osi swoją współrzędną.

Jeżeli wektor $\vec{u}$ jest równoległy do jednej z osi układu współrzędnych, to jego składowa równoległa do drugiej osi jest wektorem zerowym.



⟵ na osi x współrzędną składowej jest liczba $x_B - x_A$

⟵ na osi y współrzędną składowej jest liczba $y_B - y_A$

Definicja

Współrzędnymi wektora $\overrightarrow{AB}$ o początku w punkcie $A = (x_A, y_A)$ i o końcu w punkcie $B = (x_B, y_B)$ nazywamy uporządkowaną parę liczb:

$$[x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Wektor zerowy ma obydwie współrzędne równe 0 i oznaczamy go $\vec{0} = [0, 0]$.

Jeżeli np. $A = (-7, 2)$, $B = \left(-4, \sqrt{2}\right)$, to $\overrightarrow{AB} = \left[3, \sqrt{2} - 2\right]$, $\overrightarrow{BA} = \left[-3, 2 - \sqrt{2}\right]$.

Przykład 4 ◀ zad. 14.2

Wektor $\overrightarrow{AB} = [-3, 5]$ jest zaczepiony w punkcie $A = (0, -2)$. Wyznaczymy współrzędne końca wektora, czyli punktu B.

Rozwiązanie

Jeżeli oznaczymy $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to prawdziwe są dwie równości:

$$\begin{cases} x_B - x_A = -3 \\ y_B - y_A = 5 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x_B - 0 = -3 \\ y_B - (-2) = 5 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x_B = -3 \\ y_B = 3 \end{cases}$$

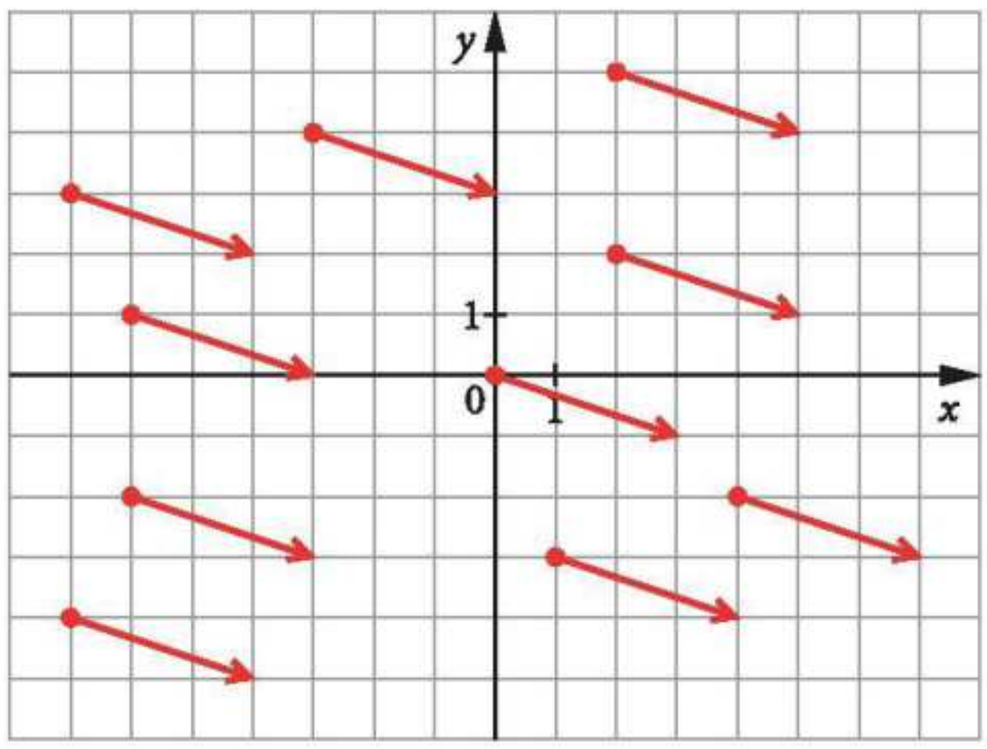
Odp.: $B = (-3, 3)$

Przypomnijmy – płaszczyznę, na której wprowadzony został prostokątny układ współrzędnych, nazywamy **płaszczyzną kartezjańską**. Na płaszczyźnie kartezjańskiej każdemu punktowi przyporządkowana jest dokładnie jedna uporządkowana para liczb, nazywanych współrzędnymi tego punktu. Podobnie – każdemu wektorowi przyporządkowana jest dokładnie jedna uporządkowana para liczb, nazywanych współrzędnymi tego wektora.

Przykład 5

Na rysunku prezentujemy kilka wektorów, które mają współrzędne $[3, -1]$.

Wszystkie te wektory mają ten sam kierunek (są równoległe), zgodne zwroty i równe długości, czyli są równe.



Wniosek

Dwa wektory na płaszczyźnie kartezjańskiej są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe współrzędne.

Korzystając z własności wektorów, możemy wyznaczać współrzędne punktów dzielących odcinek w różnych stosunkach. Na przykład aby wyznaczyć punkty M i N dzielące dany odcinek AB na trzy równe części, możemy najpierw wykorzystać zależność $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, a następnie skorzystać z faktu, że punkt N jest środkiem odcinka MB.

Wzory na współrzędne środka odcinka warto znać na pamięć, bo często się z nich korzysta.

Twierdzenie

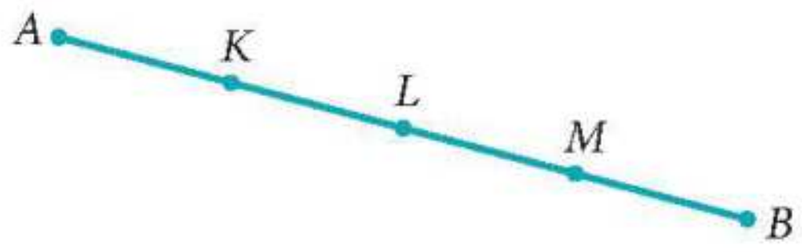
Środek odcinka o końcach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ ma współrzędne:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Dowód twierdzenia pozostawiamy do samodzielnego przeprowadzenia.

Przykład 6 ◀ zad. 14.5

Dane są punkty $A = (1, 2)$, $B = (13, -26)$. Wyznaczymy współrzędne punktów K, L, M, które dzielą odcinek AB na cztery równe części.



Rozwiązanie

Współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych końców tego odcinka.

$$L = \left(\frac{1 + 13}{2}, \frac{2 - 26}{2}\right) = (7, -12) \quad \longleftarrow L \text{ jest środkiem odcinka } AB$$

$$K = \left(\frac{1 + 7}{2}, \frac{2 - 12}{2}\right) = (4, -5) \quad \longleftarrow K \text{ jest środkiem odcinka } AL$$

$$M = \left(\frac{7 + 13}{2}, \frac{-12 - 26}{2}\right) = (10, -19) \quad \longleftarrow M \text{ jest środkiem odcinka } LB$$

Odp.: $K = (4, -5)$, $L = (7, -12)$, $M = (10, -19)$

Przykład 7 ◀ zad. 14.7

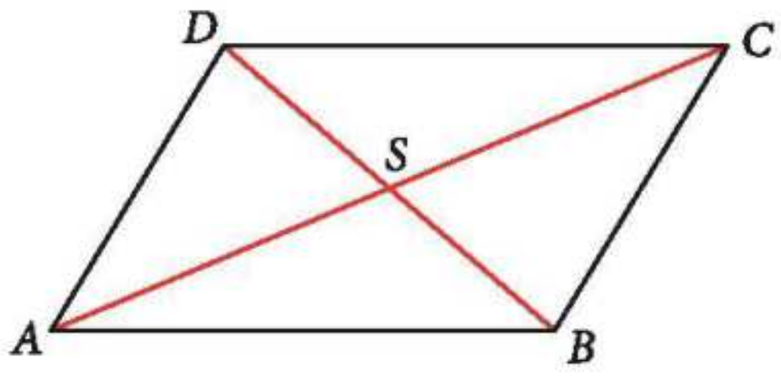
Punkty $A = (1, 13)$ i $B = (-6, 0)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $S = (5, -2)$ jest punktem przecięcia jego przekątnych. Wyznaczymy współrzędne wierzchołków C i D tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Niech $C = (x_C, y_C)$. Ponieważ punkt S jest środkiem odcinka AC, więc:

$$\left(\frac{1 + x_C}{2}, \frac{13 + y_C}{2}\right) = (5, -2)$$

$$\begin{cases} \frac{1 + x_C}{2} = 5 \\ \frac{13 + y_C}{2} = -2 \end{cases}, \text{ stąd } x_C = 9 \text{ i } y_C = -17$$



Zatem $C = (9, -17)$.

Niech $D = (x_D, y_D)$. Wówczas $\overrightarrow{DC} = [9 - x_D, -17 - y_D]$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ⟵ $ABCD$ jest równoległobokiem

$[-7, -13] = [9 - x_D, -17 - y_D]$ ⟵ $\overrightarrow{AB} = [-7, -13]$

$$\begin{cases} -7 = 9 - x_D \\ -13 = -17 - y_D \end{cases}$$

$x_D = 16$ i $y_D = -4$

Zatem $D = (16, -4)$.

Odp.: $C = (9, -17)$, $D = (16, -4)$

Bezpośrednio z definicji mnożenia wektora przez liczbę wynika, że dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $k \neq 0$ spełniająca równość:

$$\vec{u} = k \cdot \vec{w}$$

Na przykład:

- wektor $\vec{v} = [-2, 9]$ jest równoległy do wektora $\vec{w} = [6, -27]$, ponieważ $\frac{6}{-2} = \frac{-27}{9} = -3$, czyli $\vec{w} = -3 \cdot \vec{v}$,
- wektor $\vec{u} = [8, 5]$ nie jest równoległy wektora $\vec{w} = [6, -27]$, ponieważ $\frac{6}{8} \neq \frac{-27}{5}$.

Korzystając z tej własności, możemy badać współliniowość punktów danych w układzie współrzędnych.

Przykład 8 ◂ zad. 14.10

Zbadamy, czy punkty $A = (-2, 1)$, $B = (3, 3)$ oraz $C = (33, 15)$ są współliniowe.

Rozwiązanie

Zauważmy, że aby odpowiedzieć na postawione pytanie, wystarczy sprawdzić, czy wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ są równoległe.

$\overrightarrow{AB} = [5, 2]$, $\overrightarrow{AC} = [35, 14]$

Zatem:

$$\overrightarrow{AC} = 7 \cdot \overrightarrow{AB}$$

Odp.: Punkty A, B, C są współliniowe.

Aby zbadać współliniowość punktów A, B, C, możemy sprawdzać, czy różne pary wektorów są równoległe, np.: pary $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ albo pary $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ itd.

Wykorzystanie rozkładu wektora na dwie składowe równoległe do osi układu współrzędnych, przedstawienie wektora w postaci współrzędnych oraz zastosowanie twierdzenia o działaniach na wektorach na osi (zob. s. 305) prowadzi do następującego twierdzenia.

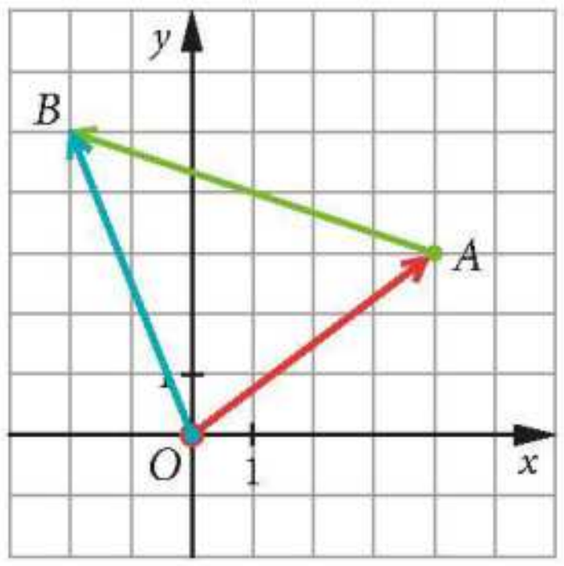
Twierdzenie

Dane są wektory $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$. Wówczas:

- $\vec{u} + \vec{v} = [a + c, b + d]$
- $\vec{u} - \vec{v} = [a - c, b - d]$
- $k \cdot \vec{u} = [k \cdot a, k \cdot b]$

Przykład 9

Dane są punkty $O = (0, 0)$, $A = (4, 3)$, $B = (-2, 5)$. Skorzystamy z powyższego twierdzenia i zbadamy zależność między wektorem $\overrightarrow{OB}$ a wektorami $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{AB}$.



Rozwiązanie

$\overrightarrow{OA} = [4 - 0, 3 - 0] = [4, 3]$

$\overrightarrow{AB} = [-2 - 4, 5 - 3] = [-6, 2]$

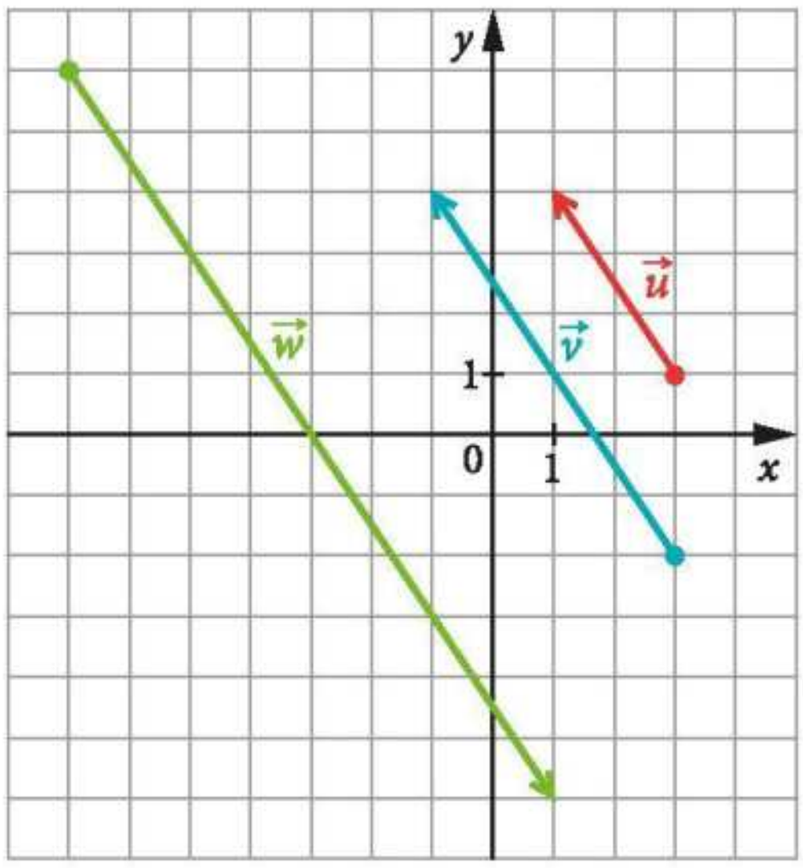
$\overrightarrow{OB} = [-2 - 0, 5 - 0] = [-2, 5]$

Wektor $\overrightarrow{OB}$ jest sumą wektorów $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{AB}$.
Można to zapisać następująco:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = [4, 3] + [-6, 2] = [-2, 5] = \overrightarrow{OB}$

Przykład 10

Na rysunku zaznaczyliśmy wektory
$\vec{v} = [-4, 6]$, $\vec{u} = [-2, 3]$, $\vec{w} = [8, -12]$.
Zbadamy zależności między tymi wektorami.



Rozwiązanie

Z rysunku odczytujemy, że zachodzą równości:

$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$ oraz $\vec{w} = -2\vec{v}$

Te same równości uzyskamy, porównując współrzędne wektorów:

$\vec{u} = [-2, 3] = \frac{1}{2}[-4, 6] = \frac{1}{2}\vec{v}$

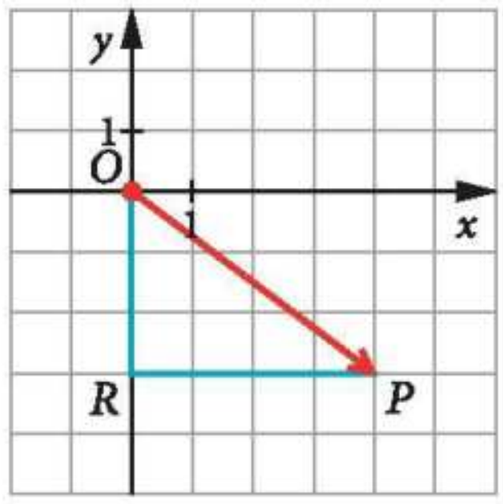
$\vec{w} = [8, -12] = -2[-4, 6] = -2\vec{v}$

Przykład 11

Obliczymy długość wektora $\vec{u} = [4, -3]$.

Rozwiązanie

Jeżeli zaczepimy wektor $\vec{u} = [4, -3]$ w punkcie $O = (0, 0)$, to jego końcem będzie punkt $P = (4, -3)$.



Rozważmy trójkąt prostokątny OPR. Przyprostokątne tego trójkąta mają długości $|OR| = |-3| = 3$ i $|RP| = 4$. Zatem na mocy twierdzenia Pitagorasa:

$$|OP|^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25, \text{ czyli } \left|\overrightarrow{OP}\right| = 5$$

Odp.: $\left|\vec{u}\right| = 5$

Wniosek

Jeżeli $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to **długość wektora** $\overrightarrow{AB}$ jest równa:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Przykład 12 ◀ zad. 14.20

Punkty $A = (1, 3)$, $B = (-1, -2)$, $D = (4, 4)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznaczymy współrzędne wierzchołka C oraz długości przekątnych tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Punkt $C = (x, y)$ jest wierzchołkiem równoległoboku $ABCD$ tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB} = [-2, -5], \ \overrightarrow{DC} = [x - 4, y - 4]$$

$$\begin{cases} x - 4 = -2 \\ y - 4 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Zatem $C = (2, -1)$.

Długości przekątnych równoległoboku $ABCD$ są długościami wektorów $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{AC} = [1, -4]$, stąd $|AC| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$

$\overrightarrow{BD} = [5, 6]$, stąd $|BD| = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$

Odp.: $C = (2, -1)$, $|AC| = \sqrt{17}$, $|BD| = \sqrt{61}$

Zadania

14.1. Dane są punkty A i B. Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$.

a) $A = (1, 3)$ $B = (4, 5)$ c) $A = (-1, 5)$ $B = (-3, 5)$

b) $A = (-5, -2)$ $B = (-1, -1)$ d) $A = (6, -3)$ $B = (6, 1)$

14.2. Dane są współrzędne punktu M oraz współrzędne wektora $\overrightarrow{MP}$. Wyznacz współrzędne punktu P.

a) $M = (6, 3)$ $\overrightarrow{MP} = [-3, -2]$ c) $M = (2, 1)$ $\overrightarrow{MP} = [-4, -3]$

b) $M = (-2, -3)$ $\overrightarrow{MP} = [4, 2]$ d) $M = (1, 2)$ $\overrightarrow{MP} = \left[-\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right]$

14.3. Dane są współrzędne wektora $\overrightarrow{KL}$ oraz współrzędne punktu L. Wyznacz współrzędne punktu K.

a) $\overrightarrow{KL} = [3, 5]$ $L = (5, 1)$ c) $\overrightarrow{KL} = [-2, 3]$ $L = (1, 1)$

b) $\overrightarrow{KL} = [5, 0]$ $L = (7, 2)$ d) $\overrightarrow{KL} = [0, 3]$ $L = (5, -2)$

14.4. Podaj współrzędne wektora

a) równoległego do osi x, o zwrocie zgodnym z osią x i o długości 5.

b) równoległego do osi y, o zwrocie zgodnym z osią y i o długości 1.

c) równoległego do osi x, o zwrocie przeciwnym do zwrotu osi x i o długości 3.

d) równoległego do osi y, o zwrocie przeciwnym do zwrotu osi y i o długości $2\frac{1}{2}$.

14.5. Wyznacz środek odcinka PQ.

a) $P = (3, -2)$ $Q = (-5, 6)$ c) $P = \left(2\frac{1}{2}, -3\right)$ $Q = \left(5\frac{1}{2}, 9\right)$

b) $P = (-3, 7)$ $Q = (3, -1)$ d) $P = \left(-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $Q = \left(3\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$

14.6. Punkt S jest środkiem odcinka AB. Znając współrzędne punktów A i S, wyznacz współrzędne punktu B.

a) $A = (-3, 1)$ $S = \left(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$ c) $A = \left(0, 5\frac{1}{3}\right)$ $S = (3, 3)$

b) $A = (2, 4)$ $S = \left(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$ d) $A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right)$ $S = (2, 0)$

14.7. Punkty $A = (3, -5)$ i $B = (-7, 11)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, zaś punkt $S = (-5, 0)$ jest środkiem boku CD. Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D.

14.8. Punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$ jest $P = (-1, -1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków B, C i D, wiedząc, że $\overrightarrow{BC} = [2, 6]$ oraz $A = (-4, -4)$.

14.9. Zbadaj współliniowość punktów A, B, C.

a) $A = (0, 0)$ $B = (-3, 2)$ $C = (9, -6)$
b) $A = (-4, 5)$ $B = (0, -3)$ $C = (2, -8)$
c) $A = (6, 1)$ $B = (-3, -1)$ $C = (-11, -2)$

14.10. Punkty K, L, M są współliniowe. Wyznacz niewiadomą współrzędną.

a) $K = (2, 1)$ $L = (-2, 6)$ $M = (x, -9)$
b) $K = (18, y)$ $L = (10, 2)$ $M = (-2, 8)$

14.11. Dane są punkty $A = (-3, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, -1)$. Wyznacz współrzędne podanego wektora.

a) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$
b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
c) $\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
d) $2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\right)$

14.12. Dane są punkty $A = (-4, -2)$, $B = (-2, -2)$, $C = (2, 2)$. Wyznacz współrzędne takiego punktu D, aby spełniona była podana równość.

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$
b) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
c) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
d) $2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

14.13. Dany jest wektor $\vec{a} = [-3, 2]$. Wyznacz taką liczbę k (o ile ona istnieje), aby zachodziła równość $\vec{b} = k\vec{a}$.

a) $\vec{b} = [-9, 6]$ b) $\vec{b} = \left[\frac{3}{2}, -1\right]$ c) $\vec{b} = [3, 2]$ d) $\vec{b} = \left[-\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

14.14. Dane są wektory: $\vec{a} = [1, -2]$, $\vec{b} = [-3, 5]$. Wyznacz taki wektor $\vec{c}$, aby zachodziła podana równość.

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ b) $2\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ c) $-5\vec{a} + 3\vec{b} = 2\vec{c}$ d) $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c} = -2\vec{b}$

14.15. Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

a) $A = (2, -5)$ $B = (-2, -2)$
b) $A = (3, 3)$ $B = (7, 0)$
c) $A = (-4, 1)$ $B = (2, -2)$
d) $A = \left(2\sqrt{5}, \sqrt{2} + 1\right)$ $B = \left(\sqrt{5}, 1 + 3\sqrt{2}\right)$

14.16. Dane są punkty: $A = (-3, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, -1)$. Oblicz współrzędne i długości podanych wektorów.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ b) $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}$ c) $\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AC}$

14.17. Dane są wektory $\vec{v} = [1, -3]$, $\vec{u} = [2, -1]$, $\vec{w} = [-4, 2]$. Oblicz długość wektora $\vec{m} = \overrightarrow{2v} - \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w}$.

D **14.18.** Wykaż, że trójkąt KLM o wierzchołkach $K = (6, 19)$, $L = (7, 6)$, $M = (17, 12)$ jest równoramienny.

D **14.19.** Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (4, 1)$, $B = (6, 5)$, $C = (-2, 2)$, $D = (-4, -2)$ jest równoległobokiem.

14.20. W równoległoboku $ABCD$ dany jest punkt $A = (2, 2)$ oraz współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB} = [8, 1]$ i $\overrightarrow{AC} = [4, 5]$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków.

D **14.21.** Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-5, 2)$, $B = (-1, 4)$, $C = (2, 10)$, $D = (-2, 8)$ jest równoległobokiem, ale nie jest rombem.

D * **14.22.** Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (6, -1)$, $B = (1, 5)$, $C = (-5, 0)$, $D = (0, -6)$ jest kwadratem.

D **14.23.** Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (-2, 1)$, $B = (2, 3)$, $C = \left(\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3}\right)$ jest równoboczny i oblicz jego pole.

Prosto do matury

1. Dane są punkty $A = (-5, 1)$ i $B = (3, -2)$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\overrightarrow{AB} = [8, -3]$ **B.** $\overrightarrow{AB} = [-8, 3]$ **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{73}$

2. Dane są współrzędne wektora $\overrightarrow{PQ} = \left[\sqrt{3}, -2\sqrt{2}\right]$ oraz współrzędne punktu $Q = \left(-3\sqrt{3}, 5\sqrt{2}\right)$. Wyznacz współrzędne punktu P.

3. Zbadaj, czy punkt $Q = \left(\frac{2}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ należy do prostej przechodzącej przez punkty $K = (-2, -1)$ i $L = (3, -13)$.

4. Punkty $A = (-5, 2)$, $B = (2, -2)$ i $D = (-4, 10)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C i oblicz pole tego rombu.

D **5.** Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-10, -3)$, $B = (8, 3)$, $C = (4, 15)$, $D = (-14, 9)$ jest prostokątem.

15. Przekształcanie wykresów funkcji

Umiejętności:
- przesunięcie wykresu funkcji o wektor
- składanie symetrii i przesunięć wykresów funkcji

Wykorzystamy teraz pojęcie wektora do zdefiniowania pewnej funkcji, której dziedziną jest zbiór wszystkich punktów płaszczyzny.

Definicja

Przesunięciem równoległym o wektor $\vec{u}$ nazywamy przekształcenie, w którym obrazem punktu A jest taki punkt B, że $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Przykład 1 ◂ zad. 15.4

Punkt $B = \left(4, \sqrt{3}\right)$ jest obrazem punktu A w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [-1, 7]$. Wyznaczymy współrzędne punktu A.

Rozwiązanie

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, jeśli więc oznaczymy $A = (x, y)$, to $\overrightarrow{AB} = \left[4 - x, \sqrt{3} - y\right]$ i spełniony ma być układ równań:

$$\begin{cases} 4 - x = -1 \\ \sqrt{3} - y = 7 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = 5 \\ y = \sqrt{3} - 7 \end{cases}.$$

Odp.: $A = \left(5, \sqrt{3} - 7\right)$

Przesunięcie punktu płaszczyzny o wektor $[a, 0]$ jest przesunięciem tego punktu:
- o a jednostek w prawo wzdłuż osi x, gdy $a > 0$,
- o $-a$ jednostek w lewo wzdłuż osi x, gdy $a < 0$.

Gdy przesuniemy wykres funkcji $y = f(x)$ o wektor $[a, 0]$, otrzymamy zatem wykres funkcji $y = f(x - a)$.

Przesunięcie punktu płaszczyzny o wektor $[0, b]$ jest przesunięciem tego punktu:
- o b jednostek w górę wzdłuż osi y, gdy $b > 0$,
- o $-b$ jednostek w dół wzdłuż osi y, gdy $b < 0$.

Gdy przesuniemy wykres funkcji $y = f(x)$ o wektor $[0, b]$, otrzymamy wykres funkcji $y = f(x) + b$.

Wniosek

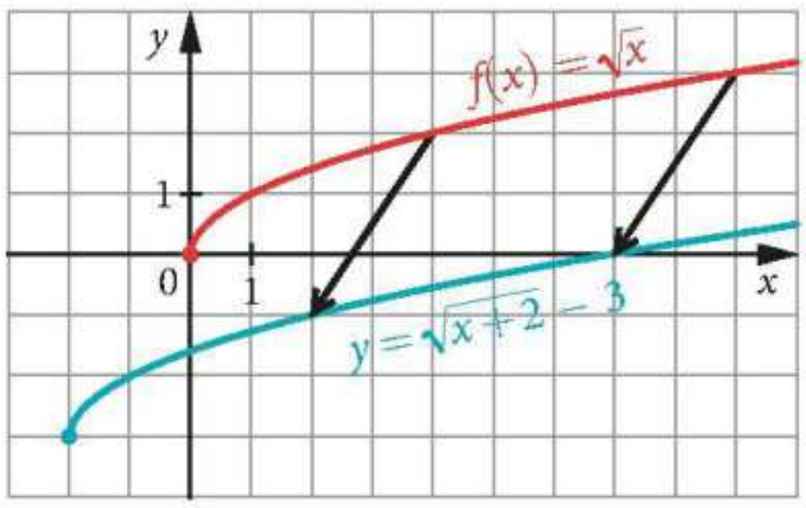
Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = f(x)$ o wektor $[a, b]$, otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - a) + b$.

Przykład 2 ◀ zad. 15.10

Narysujemy wykres funkcji $y = \sqrt{x + 2} - 3$.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że jeżeli wprowadzimy funkcję pomocniczą $f(x) = \sqrt{x}$, to funkcję $y = \sqrt{x + 2} - 3$ możemy zapisać w postaci $y = f(x + 2) - 3$.



⟵ wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ przesuwamy o wektor $[-2, -3]$

Przykład 3 ◀ zad. 15.11

Przekształcimy odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{x}$ i narysujemy wykres funkcji $g(x) = 4 - \frac{3}{x + 2}$.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji g jest przedział $\mathbf{R} - \{-2\}$. Rysujemy kolejne wykresy.

Krok 1: wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{x}$

Krok 2: wykres funkcji

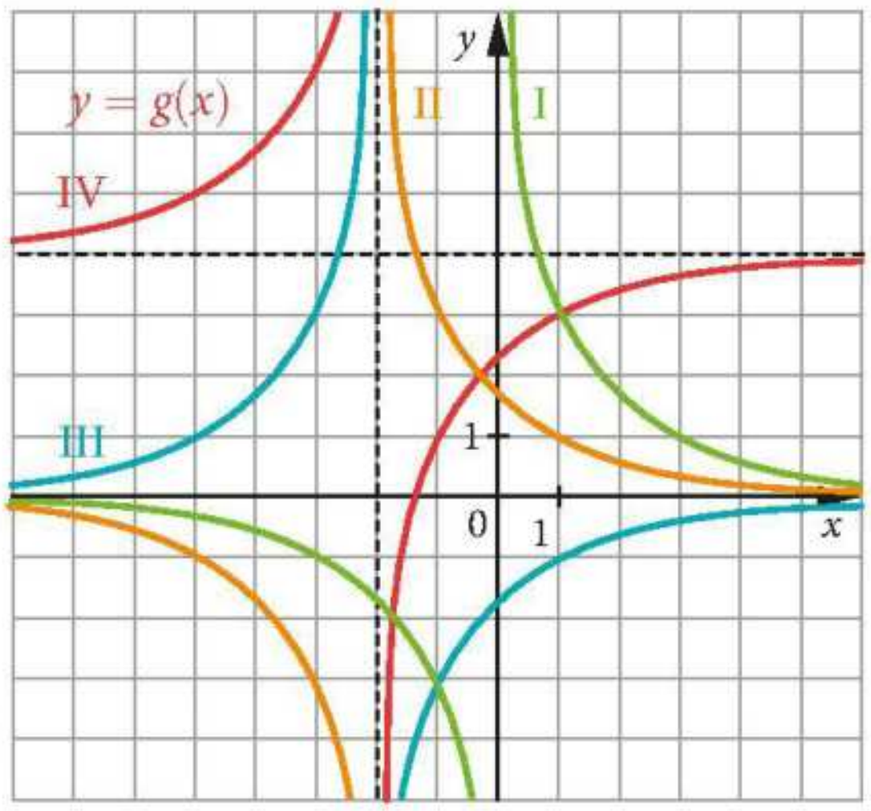
$y = \frac{3}{x + 2}$ ⟵ przesunięcie o wektor $[-2, 0]$

Krok 3: wykres funkcji

$y = -\frac{3}{x + 2}$ ⟵ symetria względem osi x

Krok 4: wykres funkcji

$g(x) = -\frac{3}{x + 2} + 4$ ⟵ przesunięcie o wektor $[0, 4]$



Przykład 4 ◀ zad. 15.13–15.16

Funkcja f ma następujące własności:

- $D = \langle -4; 5\rangle$, $ZW = \langle -1; 2\rangle$, miejscem zerowym funkcji jest liczba -2,
- funkcja przyjmuje wartość największą równą 2 dla $x = 2$.

Na podstawie tych informacji opiszemy własności funkcji $g(x) = f(x-3) - 1$.

Rozwiązanie

Wykres funkcji $g(x) = f(x-3) - 1$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o wektor $[3, -1]$. Funkcja g ma zatem następujące własności:

- $D = \langle -1; 8\rangle$, ⟵ przesunięcie przedziału $\langle -4; 5\rangle$ o wektor $[3, 0]$
- $ZW = \langle -2; 1\rangle$, ⟵ przesunięcie przedziału $\langle -1; 2\rangle$ o wektor $[0, -1]$
- wartość największą równą 1 przyjmuje dla $x = 5$.

Miejscami zerowymi funkcji $g(x) = f(x-3) - 1$ są argumenty, dla których funkcja $y = f(x-3)$ przyjmuje wartość 1. Nie mamy informacji, które to argumenty, więc miejsc zerowych funkcji g nie można określić.

Przykład 5 ◀ zad. 15.21

Mając dany wykres funkcji f, narysujemy wykres funkcji $g(x) = \big|\,|f(x+4)+2| - 3\big|$ oraz odczytamy, dla jakich wartości m równanie $g(x) = m$ ma 5 rozwiązań.

Rozwiązanie

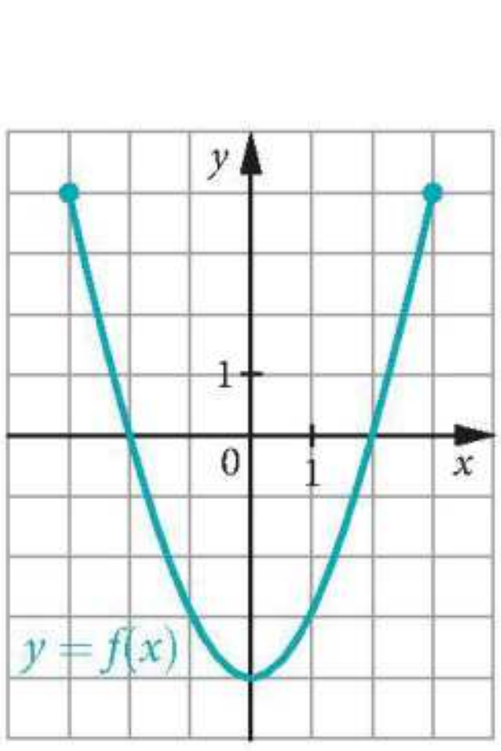
Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -3; 3\rangle$. Rysujemy kolejne wykresy.

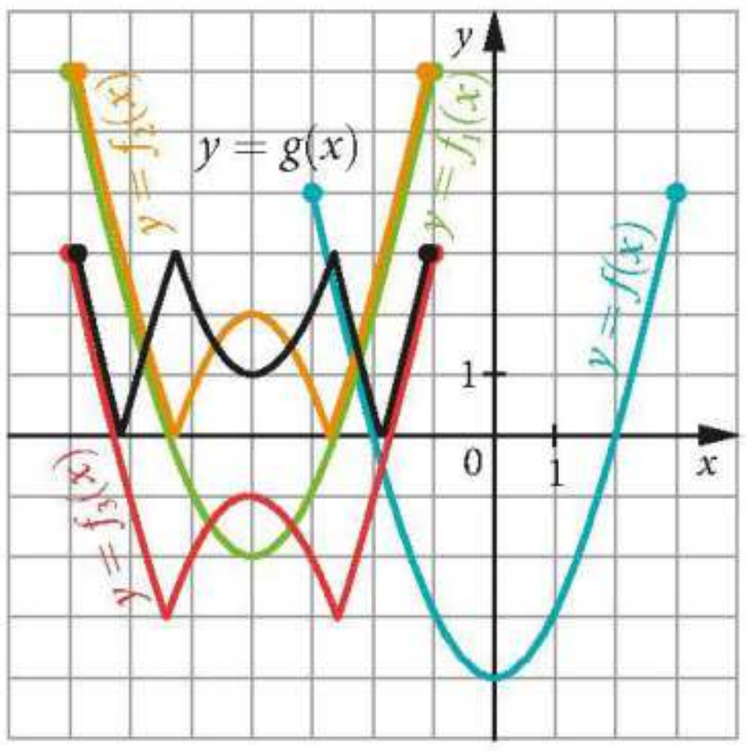
Krok 1: $f_1(x) = f(x+4) + 2$ ⟵ przesunięcie o wektor $[-4, 2]$

Krok 2: $f_2(x) = |f_1(x)| = |f(x+4)+2|$ ⟵ symetria względem osi x części wykresu leżącego pod osią x

Krok 3: $f_3(x) = f_2(x) - 3 = |f(x+4)+2| - 3$ ⟵ przesunięcie o wektor $[0, -3]$

Krok 4: $g(x) = |f_3(x)| = \big||f(x+4)+2| - 3\big|$ ⟵ symetria względem osi x części wykresu leżącego pod osią x





Odp.: Równanie $g(x) = m$ ma 5 rozwiązań dla $m = 1$.

Zadania

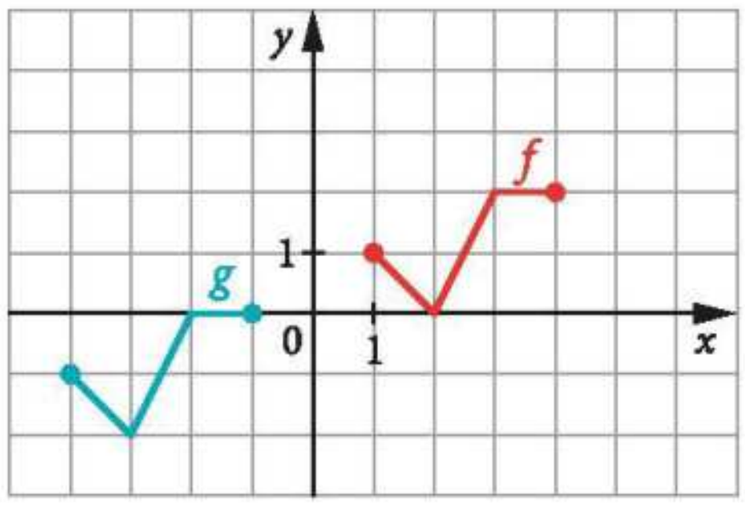
W każdym z zadań 15.1–15.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

15.1. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $(-\infty; 0)$. Wskaż dziedzinę funkcji $y = f(x - 1) + 2$.

A. $(-\infty; 2)$ **B.** $(-\infty; -1)$ **C.** $(-\infty; 1)$ **D.** $(-\infty; -2)$

15.2. W układzie współrzędnych narysowane są wykresy funkcji f oraz g.
Wskaż prawdziwą zależność.

A. $g(x) = f(x + 5) + 2$
B. $g(x) = f(x - 5) + 2$
C. $g(x) = f(x + 5) - 2$
D. $g(x) = f(x - 5) - 2$



15.3. Wskaż funkcję, która ma taki sam zbiór wartości jak funkcja $y = f(x)$.

A. $y = f(x + 5) + 3$ **B.** $y = f(x) + 7$ **C.** $y = f(x - 8)$ **D.** żadna z podanych

15.4. Wyznacz współrzędne punktu M, który jest obrazem punktu P w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$.

a) $\vec{u} = [3, 1]$ $P = (-1, -2)$
b) $\vec{u} = \left[-2, \sqrt{5}\right]$ $P = (4, 0)$
c) $\vec{u} = [1, -7]$ $P = (-1, 2)$
d) $\vec{u} = \left[-\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right]$ $P = (\sqrt{2}, -9)$

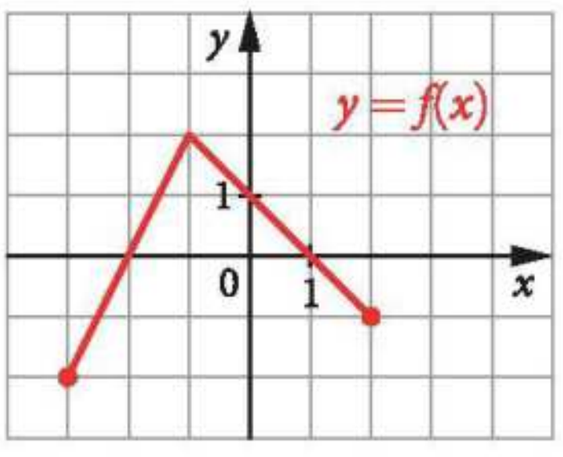
15.5. Dane są punkty $A = (6, 2)$ i $B = (2, 5)$. Wyznacz współrzędne obrazu punktu $(3, -1)$ w przesunięciu równoległym o wektor $\overrightarrow{AB}$.

15.6. Obrazem punktu M w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$ jest punkt P. Wyznacz współrzędne punktu M.

a) $\vec{u} = [-3, 7]$ $P = (-1, -2)$
b) $\vec{u} = [3, -5]$ $P = (7, 2)$
c) $\vec{u} = \left[1, \sqrt{3}\right]$ $P = (8, 5)$
d) $\vec{u} = [-5, -9]$ $P = (-3, 4)$

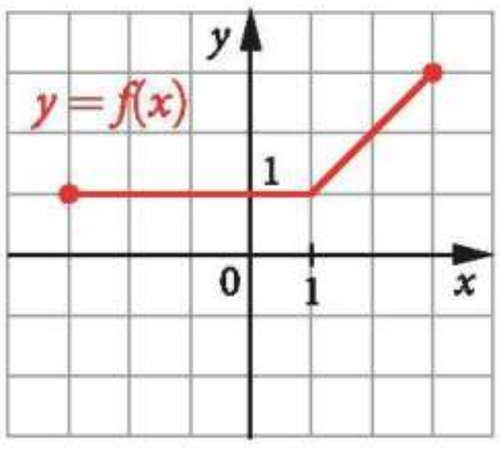
15.7. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji

a) $y = f(x - 1) + 2$.
b) $y = f(x + 2) + 3$.
c) $y = f(x - 3) - 1$.
d) $y = f(x + 4) - 2$.



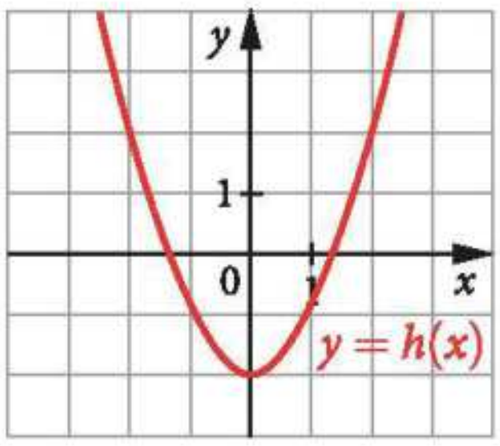
15.8. Przekształć wykres funkcji $y = f(x)$ zgodnie z podanym wzorem, a następnie wyznacz dziedzinę i zbiór wartości otrzymanej funkcji.

a) $y = -f(x) + 2$
b) $y = f(-x) - 3$
c) $y = -f(x - 1)$
d) $y = f(-x) + 4$



15.9. Przekształć wykres funkcji $y = h(x)$ zgodnie z podanym wzorem, a następnie opisz przedziały monotoniczności otrzymanej funkcji.

a) $y = -h(x - 1) + 2$
b) $y = -h(x - 1) - 2$
c) $y = 1 - h(x + 3)$
d) $y = 3 - h(-x)$



15.10. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ lub $f(x) = \frac{a}{x}$, narysuj wykres funkcji $y = g(x)$ i wyznacz jej dziedzinę.

a) $g(x) = \sqrt{x - 2} - 1$
b) $g(x) = \sqrt{x + 3} + 2$
c) $g(x) = \frac{1}{x - 2} + 1$
d) $g(x) = \frac{4}{x + 3} + 2$

15.11. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ lub $f(x) = \frac{a}{x}$, narysuj wykres funkcji $y = g(x)$ i wyznacz jej dziedzinę.

a) $g(x) = -\sqrt{x + 5} - 4$
b) $g(x) = 3 - \sqrt{x - 2}$
c) $g(x) = -\frac{8}{x + 4} - 5$
d) $g(x) = 2 - \frac{6}{x - 1}$

15.12. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ lub $f(x) = \frac{a}{x}$, narysuj wykres funkcji $y = g(x)$ i wyznacz jej dziedzinę.

a) $g(x) = \left|\sqrt{x + 2} - 1\right|$
b) $g(x) = -\left|\sqrt{-x} - 2\right|$
c) $g(x) = 3 - \left|\frac{2}{x}\right|$
d) $g(x) = \left|\frac{4}{x + 3} - 2\right|$

15.13. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle 0; 4\rangle$, a jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -3; -1\rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x - 6) + 3$.

15.14. Funkcja f osiąga wartość największą równą 25 dla $x = 17$. Wyznacz wartość najmniejszą funkcji $y = -f(x+2) - 7$ oraz argument, dla którego funkcja tę wartość osiąga.

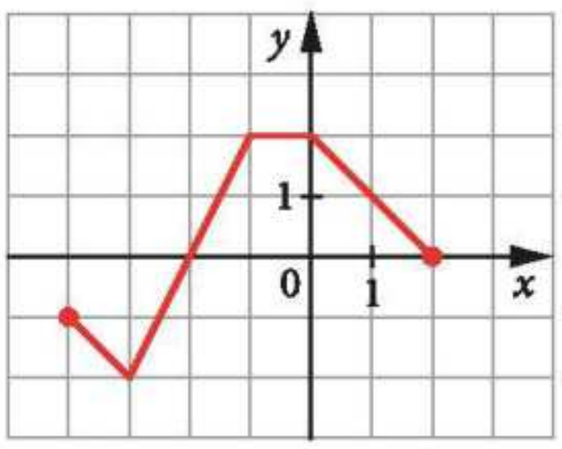
15.15. Funkcja f przyjmuje wartość największą równą 6 dla $x = -3$, a wartość najmniejszą równą 2 dla $x = 0$. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $y = -|f(x-3)+1| - 2$.

15.16. Tabela przedstawia liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą. Sporządź taką tabelę dla funkcji $g(x) = -f(x+1)+3$.

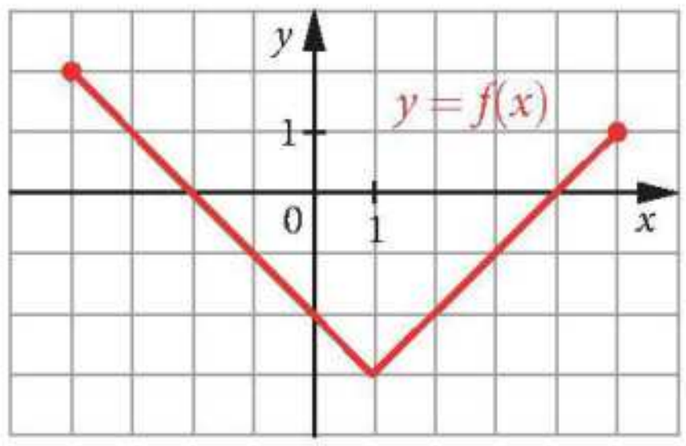
Wartość m	Liczba rozwiązań równania $f(x) = m$
$m \in (-\infty; -2)$	2
$m = -2$	1
$m \in (-2; \infty)$	0

15.17. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle 3; 10\rangle$. Funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle 3; 5\rangle$, malejąca w przedziale $(5; 10\rangle$, ale nie jest monotoniczna. Narysuj przykład takiej funkcji. Podaj dziedzinę oraz przedziały monotoniczności funkcji $y = f(x+9) - 5$.

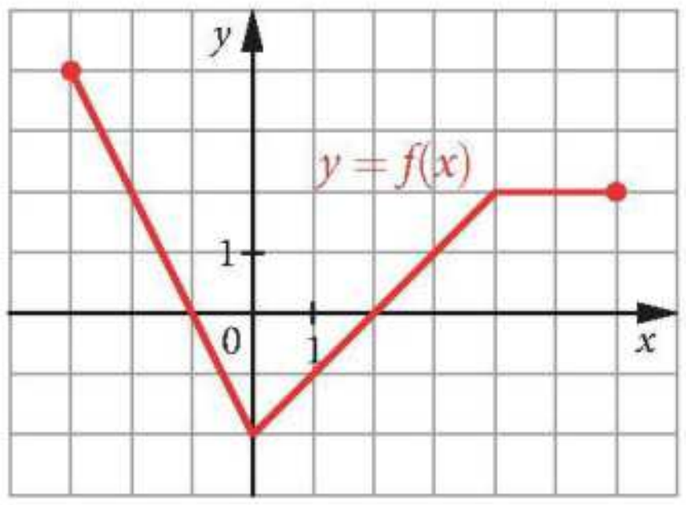
15.18. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(-x) + 2$. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$.



15.19. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Narysuj wykres funkcji $g(x) = \big||f(x)| - 1\big|$. Rozwiąż równanie $g(x) = 1$.



15.20. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Narysuj wykres funkcji $g(x) = \big||f(x+3) - 1| - 2\big|$. Dla jakich wartości m równanie $g(x) = m$ ma 4 rozwiązania?



15.21. Przekształć odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \dfrac{8}{x}$ i narysuj wykres funkcji $g(x) = \left|\left|\dfrac{8}{x-1} - 2\right| - 1\right|$.

15.22. Dziedziną funkcji f jest przedział $(-4; 5)$, zbiorem wartości jest przedział $\langle -2; 3\rangle$, jej miejscami zerowymi są liczby 1 i 3.

a) Podaj dziedzinę funkcji $y = f(-x) + 1$.

b) Podaj zbiór wartości funkcji $y = |f(x) - 2|$.

c) Podaj liczbę rozwiązań równania $|f(x + 2) - 3| = 3$.

Prosto do matury

1. Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartość największą równą 10 dla $x = 1$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

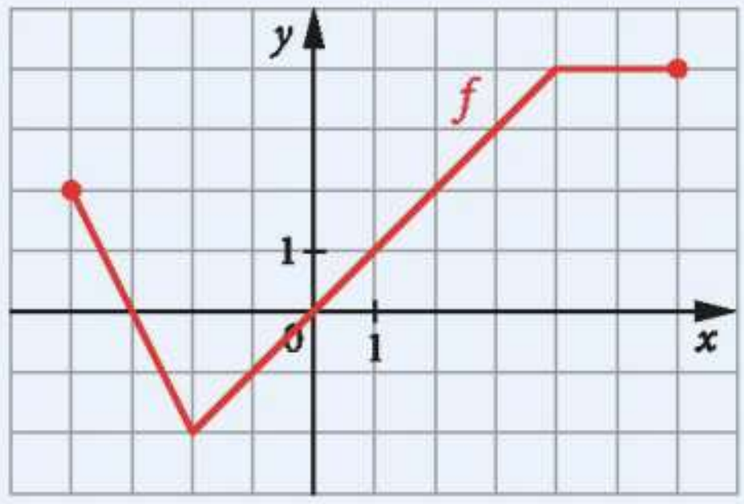
A. Funkcja $g(x) = f(x - 1) + 5$ przyjmuje wartość największą równą 15 dla $x = 2$.

B. Funkcja $h(x) = f(x+3)-11$ przyjmuje wartość największą równą 13 dla $x = -10$.

C. Funkcja $k(x) = f(x-10)-10$ przyjmuje wartość największą równą 0 dla $x = 11$.

2. Miejscem zerowym funkcji $y = f(x)$ jest liczba 5. Podaj wartość, jaką funkcja $y = f(x + 3) - 2$ przyjmuje dla argumentu 2.

3. Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, narysuj wykres funkcji $y = f(x - 2) - 1$. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x - 2) - 1 < 0$.



4. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$, sporządź wykres funkcji $g(x) = \left|\frac{6}{x - 2} + 3\right|$ i wyznacz liczbę rozwiązań równania $g(x) = 3$.

5. Podaj przykład wykresu takiej funkcji $y = f(x)$, która spełnia jednocześnie następujące warunki:

- funkcja $y = f(x)$ nie ma miejsc zerowych,
- funkcja $y = f(-x) - 1$ ma jedno miejsce zerowe,
- funkcja $y = -f(x) + 2$ ma dwa miejsca zerowe.

16. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–25 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Który z podanych punktów leży na osi odciętych?

A. $A = (-5, 7)$ **B.** $B = \left(0, \sqrt{3}\right)$ **C.** $C = \left(2\sqrt{2}, 0\right)$ **D.** $D = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$

2. Który z podanych punktów leży na osi rzędnych?

A. $A = \left(0, 2+\sqrt{3}\right)$ **B.** $B = (-3, -1)$ **C.** $C = (-4, 0)$ **D.** $D = \left(-3\sqrt{2}, 0\right)$

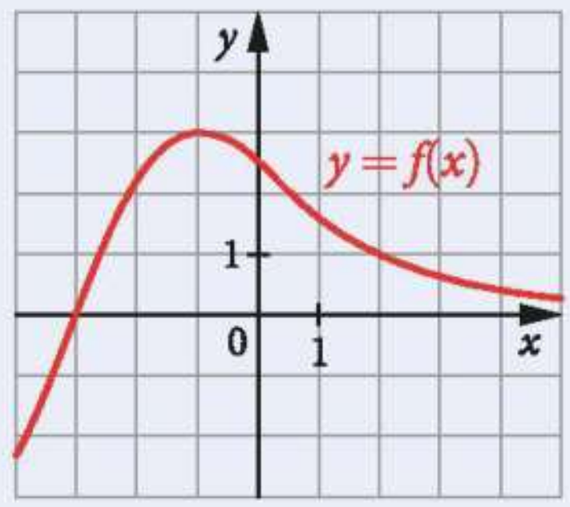
3. Dany jest wykres funkcji $f(x)$. Które zdanie jest fałszywe?

A. $D = \mathbf{R}$

B. $ZW = (-\infty; 3)$

C. Funkcja nie jest monotoniczna.

D. Funkcja ma jedno miejsce zerowe.



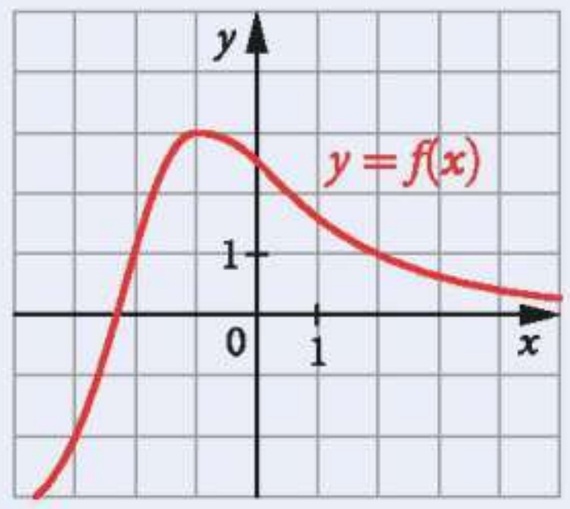
4. Wskaż zbiór wartości funkcji $y = -x + 5$ o dziedzinie $D = \left\{-1, 2, 0, \sqrt{7}\right\}$.

A. $\mathbf{R}$ **B.** $\left\{5 - \sqrt{7}, 6, 5, 3\right\}$ **C.** $\left\{\sqrt{7} - 5, 3, 5, 6\right\}$ **D.** $\{-2{,}35, 3, 5, 6\}$

5. Funkcja przedstawiona na rysunku obok przyjmuje wartości większe od 1 dla

A. $x > 1$. **C.** $x \in \langle -2; 2)$.

B. $x \in (-2; 2)$. **D.** $x > -2$.



6. Wskaż liczbę, która nie należy do zbioru wartości funkcji $y = 3\sqrt{x}$.

A. $\sqrt{2}$ **B.** $3\sqrt{2} + \sqrt{7}$ **C.** $4 - \sqrt{2}$ **D.** $2 - \sqrt{7}$

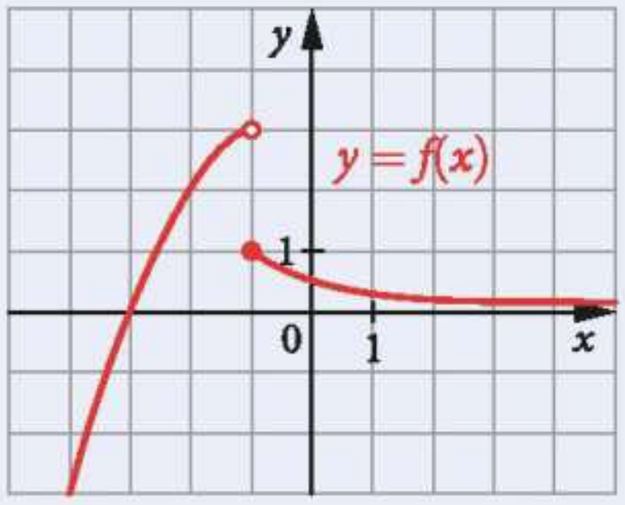
7. Wykres funkcji $y = \sqrt{x - 2}$ powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ o wektor

A. $\vec{v} = [0, 2]$. **B.** $\vec{v} = [0, -2]$. **C.** $\vec{v} = [2, 0]$. **D.** $\vec{v} = [-2, 0]$.

8. Wykres funkcji $y = 2\sqrt{x} + 3$ powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2\sqrt{x}$ o wektor

A. $\vec{v} = [0, 3]$. **B.** $\vec{v} = [0, -3]$. **C.** $\vec{v} = [3, 0]$. **D.** $\vec{v} = [-3, 0]$.

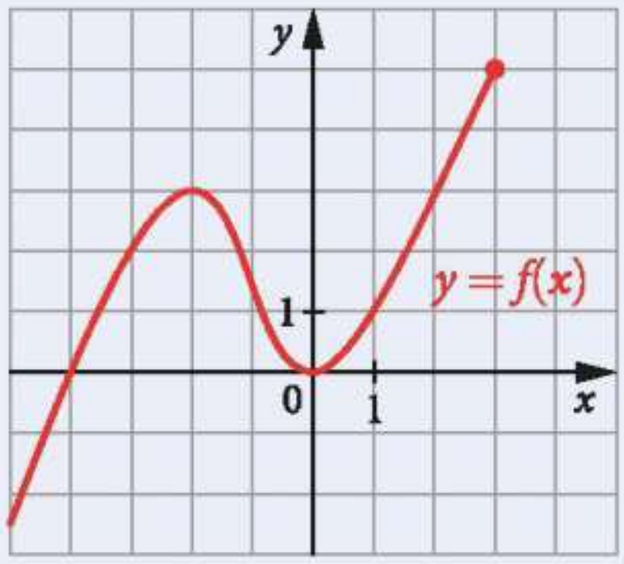
9. Dany jest wykres funkcji f. Które zdanie jest prawdziwe?



A. Funkcja nie przyjmuje wartości największej i nie przyjmuje wartości najmniejszej.
B. Funkcja przyjmuje wartość największą równą 3 i nie przyjmuje wartości najmniejszej.
C. Funkcja przyjmuje wartość największą równą 1 i nie przyjmuje wartości najmniejszej.
D. Funkcja przyjmuje wartość największą równą -1 i nie przyjmuje wartości najmniejszej.

10. Jeżeli x oznacza długość ramienia trójkąta równoramiennego o podstawie równej 20 oraz $f(x) = 2x + 20$, to funkcja f przyporządkowuje zmiennej x
A. obwód tego trójkąta i jej dziedziną jest $D = (0; \infty)$.
B. pole tego trójkąta i jej dziedziną jest $D = (0; \infty)$.
C. obwód tego trójkąta i jej dziedziną jest $D = (10; \infty)$.
D. obwód tego trójkąta i jej dziedziną jest $D = (20; \infty)$.

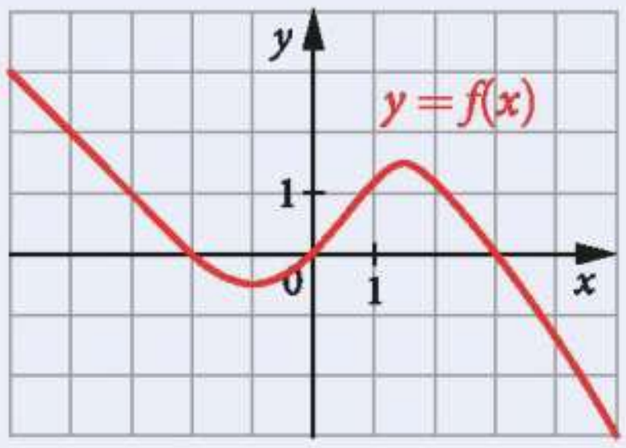
11. Poniższe zdania dotyczą funkcji $y = f(x)$, której wykres jest narysowany obok.



I. Dziedziną funkcji jest przedział $(-\infty; 3\rangle$.
II. Funkcja ma dwa miejsca zerowe.
III. $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -4)$.
IV. Wartość największą równą 5 funkcja przyjmuje dla $x = 3$.

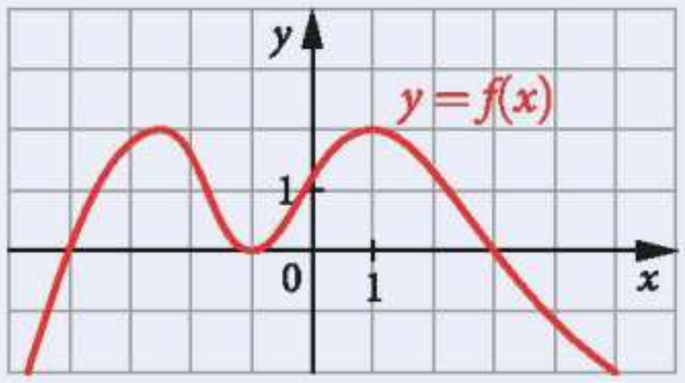
Które zdania są prawdziwe?
A. tylko I i II **B.** wszystkie **C.** tylko I, II i IV **D.** tylko II, III i IV

12. Dany jest wykres funkcji. Które ze zdań jest fałszywe?



A. Funkcja nie przyjmuje wartości największej i nie przyjmuje wartości najmniejszej.
B. Funkcja ma trzy miejsca zerowe.
C. Dla $x \in (0; 3)$ wartości funkcji są dodatnie.
D. Wykres funkcji ma oś symetrii.

13. Jakie miejsca zerowe ma funkcja przedstawiona na wykresie?



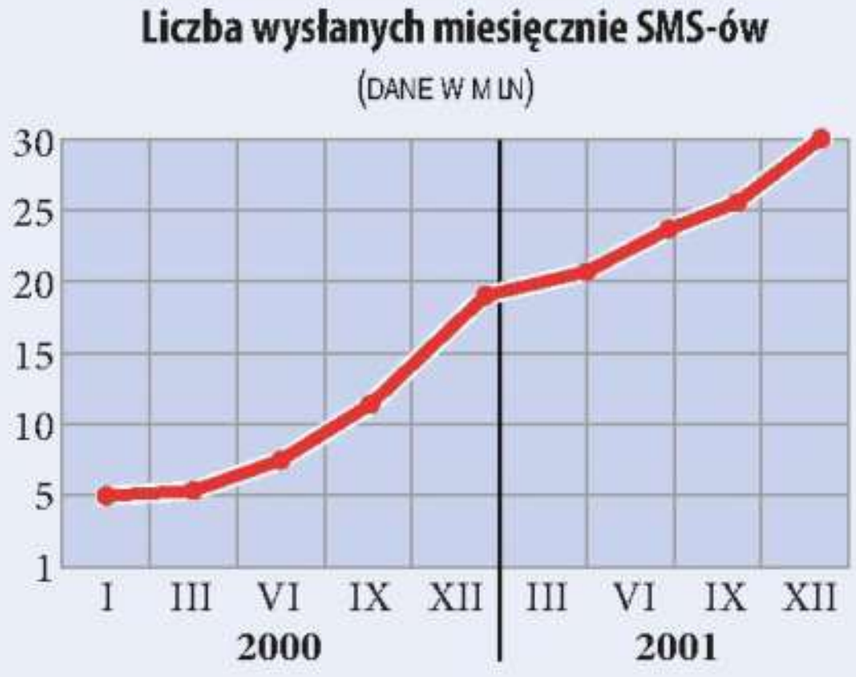
A. $-4, -1, 3$ **C.** $-5, 1, 6$
B. $-5, -1, 6$ **D.** $-4, 3$

14. Na podstawie wykresu stwierdzono, że w badanym okresie liczba wysyłanych miesięcznie SMS-ów

I. wzrosła o 600%.
II. rosła.
III. wzrosła o 25 mln.

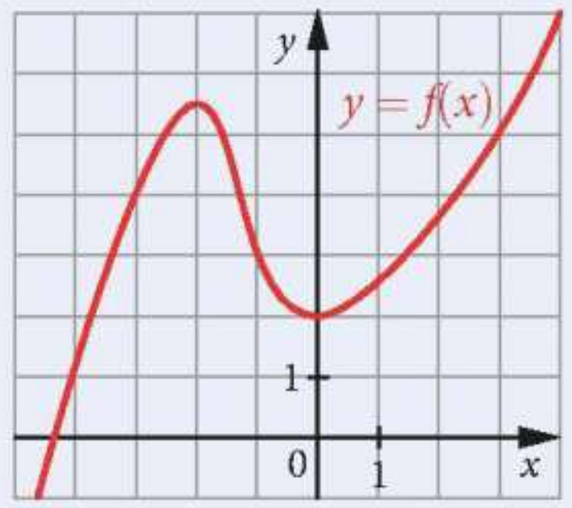
Które z tych stwierdzeń jest fałszywe?

A. I **C.** III
B. II **D.** żadne



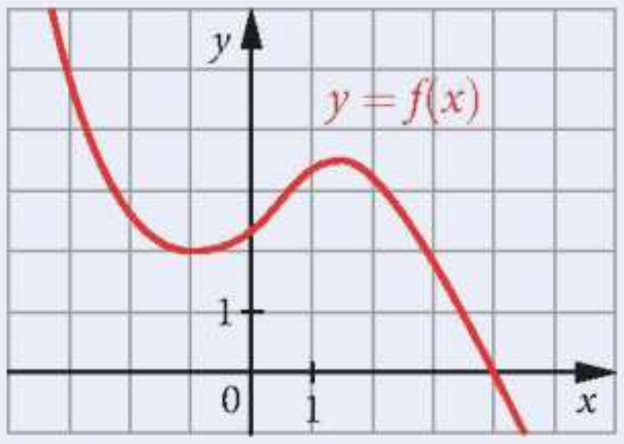
15. Ile razy funkcja przedstawiona na wykresie przyjmuje wartość równą 3?

A. dokładnie raz
B. dokładnie dwa razy
C. dokładnie trzy razy
D. nieskończenie wiele razy

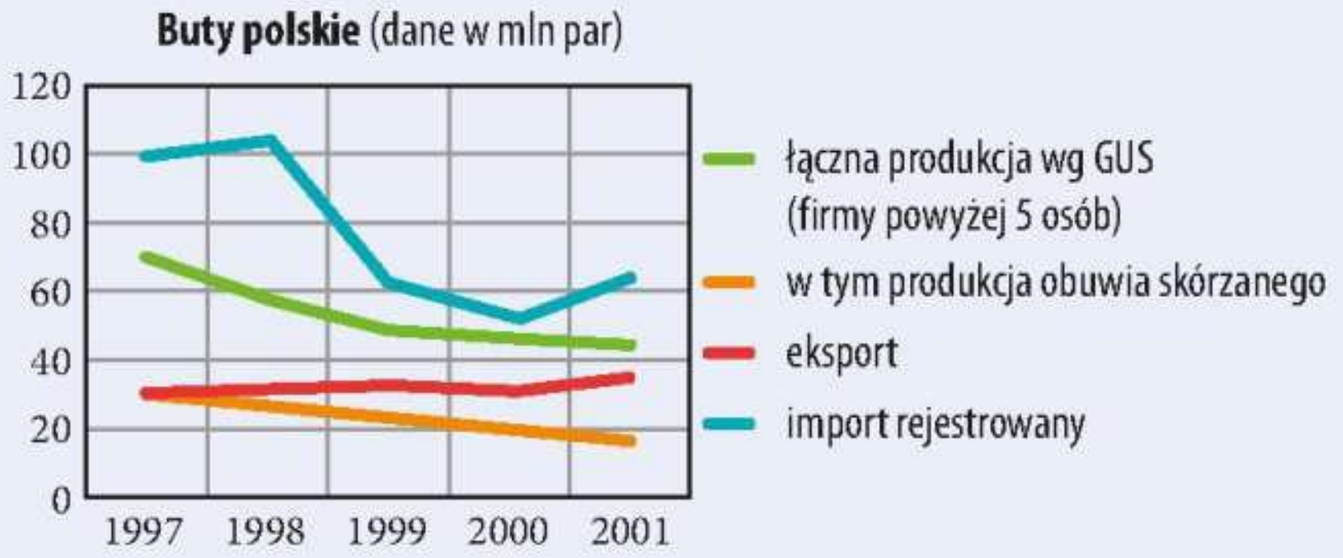


16. Funkcja przedstawiona na wykresie przyjmuje ujemne wartości dla wszystkich

A. $x < 0$.
B. $x \in (-2; 1)$.
C. $x \in \{-2, -1, 0, 5, 6\}$.
D. $x > 4$.



17. Na podstawie wykresu przedstawiającego rynek obuwniczy oceń, które zdanie jest fałszywe.



A. W pokazanym okresie produkcja butów w Polsce malała.
B. W latach 1997–2001 wzrósł eksport butów.
C. Od 1998 r. do 2000 r. import (rejestrowany) butów zmalał o prawie 50 mln par.
D. W danym okresie zmalał procentowy udział produkcji obuwia skórzanego w stosunku do całej produkcji.

18. Jeżeli zbiorem wartości funkcji $f(x) = 3x + 2$ jest zbiór $\{0, 3, 2, 17\}$, to dziedziną tej funkcji jest zbiór

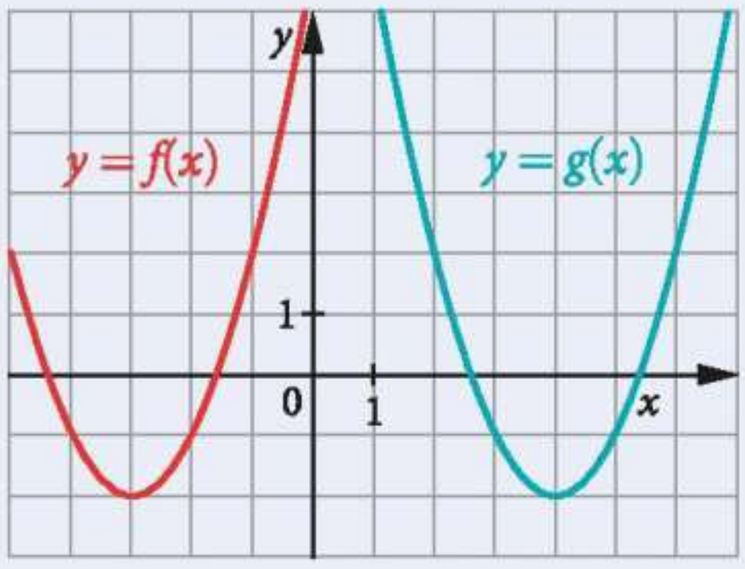
A. $\left\{-\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 5\right\}$. **B.** $\left\{-\frac{2}{3}, 0, \frac{19}{3}, 5\right\}$. **C.** $\left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 5\right\}$. **D.** $\{2, 3, 4, 5\}$.

19. Na rysunku 1 przedstawiono wykresy funkcji f i g. Która równość jest prawdziwa?

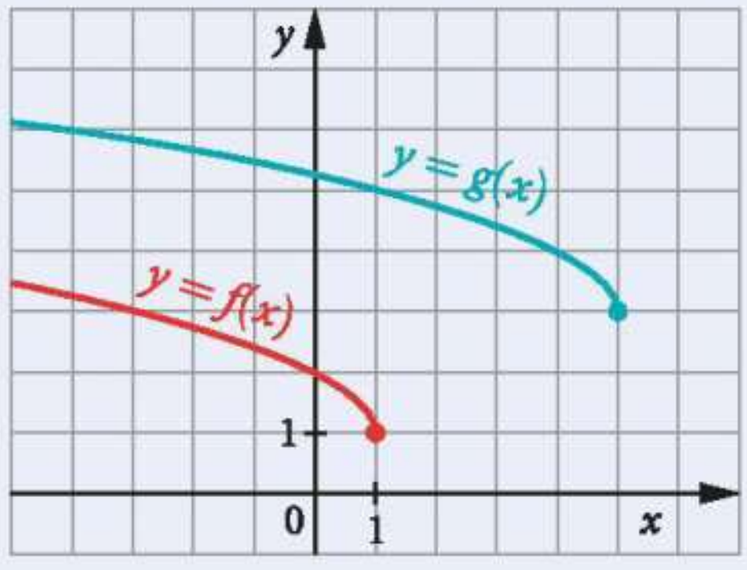
A. $f(x) = g(x - 7)$
B. $f(x - 7) = g(x)$
C. $f(x) - 7 = g(x)$
D. $g(x) = f(x + 7)$

20. Na rysunku 2 przedstawiono wykresy funkcji f i g. Która równość jest prawdziwa?

A. $g(x) = f(x - 4) + 2$
B. $g(x) - 2 = f(x + 4)$
C. $g(x - 4) = f(x) + 2$
D. $g(x + 4) = f(x) - 2$



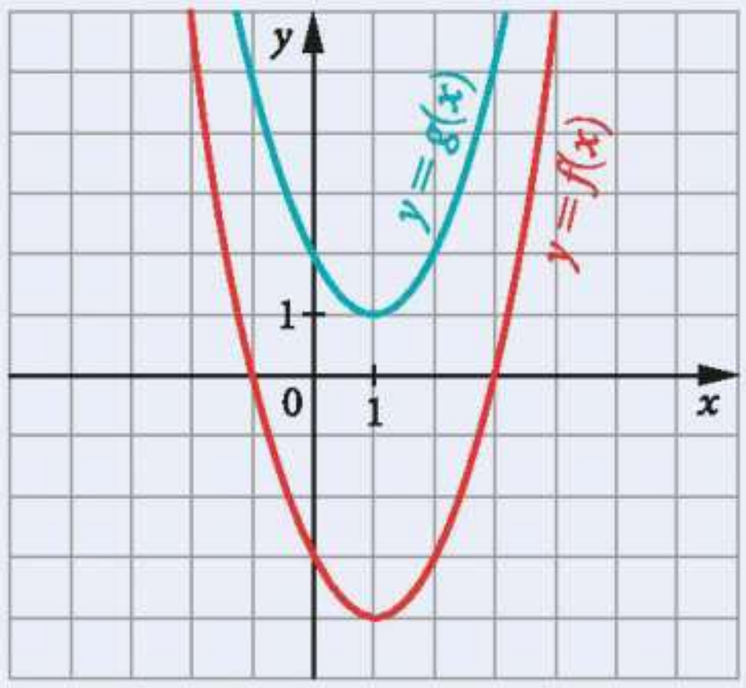
Rys. 1.



Rys. 2.

21. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f i g. Która równość jest prawdziwa?

A. $g(x) = f(x) - 1$
B. $g(x) - 5 = f(x)$
C. $g(x - 5) = f(x)$
D. $g(x) = f(x + 5)$



22. Za pomocą n kosiarek można skosić trawniki w ośrodku wypoczynkowym w ciągu t godzin. Ile godzin to zajmie, jeśli użyje się k kosiarek?

A. $\frac{tk}{n}$ **B.** $\frac{tn}{k}$ **C.** $\frac{k}{nt}$ **D.** $\frac{n}{kt}$

23. Które ze zdań dotyczacych funkcji f (rys. 1) są prawdziwe?

I. $D = \mathbf{R}$ i $ZW = \mathbf{R}$.

II. Miejscami zerowymi funkcji f są liczby -3, -1 i 3.

III. Wartość największą równą 2 funkcja f przyjmuje dla $x = -2$ oraz dla $x = 6$.

IV. Funkcja f nie jest monotoniczna.

A. wszystkie **B.** tylko II, III i IV **C.** tylko I, II i IV **D.** tylko II

24. Wykres na rysunku 2 przedstawia funkcję $y = f(x)$. Która z podanych funkcji przyjmuje wartość największą?

A. $y = f(x) - 1$ **B.** $y = f(x - 1)$ **C.** $y = -f(x)$ **D.** $y = f(-x)$

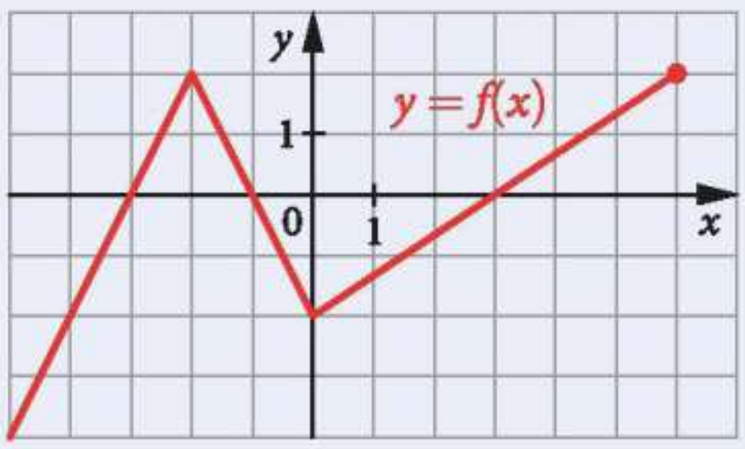
25. Wykres na rysunku 3 przedstawia funkcję $y = f(x)$. Wskaż zdanie fałszywe.

A. Oś y jest osią symetrii wykresu funkcji f.

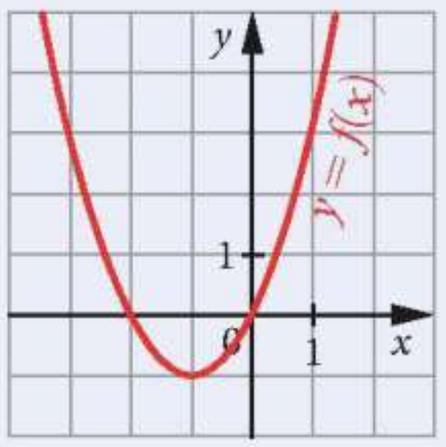
B. Funkcja f jest monotoniczna.

C. W przedziale $(-\infty; 0\rangle$ funkcja f jest rosnąca.

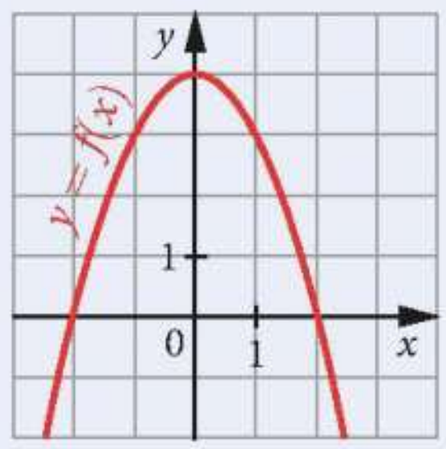
D. Największą wartością funkcji f jest 4.



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

W zadaniach 26–39 oceń prawdziwość podanych zdań.

26. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej ostatnią cyfrę jej sześcianu.

A. $f(-2) = -8$

B. $f(-10) = 0$

C. Dla każdej liczby całkowitej k spełniony jest warunek $f(-k) = f(k)$.

27. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej połowę liczby do niej przeciwnej.

A. $f(-50) = 100$

B. Każda liczba całkowita należy do zbioru wartości funkcji f.

C. Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb całkowitych.

28. Funkcja f wyrażona jest wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.

A. Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą.

B. Funkcja f przyjmuje wartość największą.

C. Funkcja f ma miejsce zerowe.

29. Funkcja f wyrażona jest wzorem $f(x) = \sqrt{x + 2020}$.

A. Dziedziną funkcji f jest przedział $D = \langle 2020; \infty)$.

B. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $ZW = \langle 2020; \infty)$.

C. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 2020.

30. Funkcja f określona jest za pomocą wzoru $f(x) = \sqrt{mx - 1}$.

A. Dla $m = -3$ dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \left\langle \frac{1}{3}; \infty \right)$.

B. Dla $m = \frac{1}{3}$ dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \langle -3; \infty)$.

C. Dla pewnej wartości m dziedzina funkcji f jest zbiorem pustym.

31. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej liczbę o 2 większą od jej kwadratu.

A. Liczba 3 należy do zbioru wartości funkcji f.

B. Liczba 5 należy do zbioru wartości funkcji f.

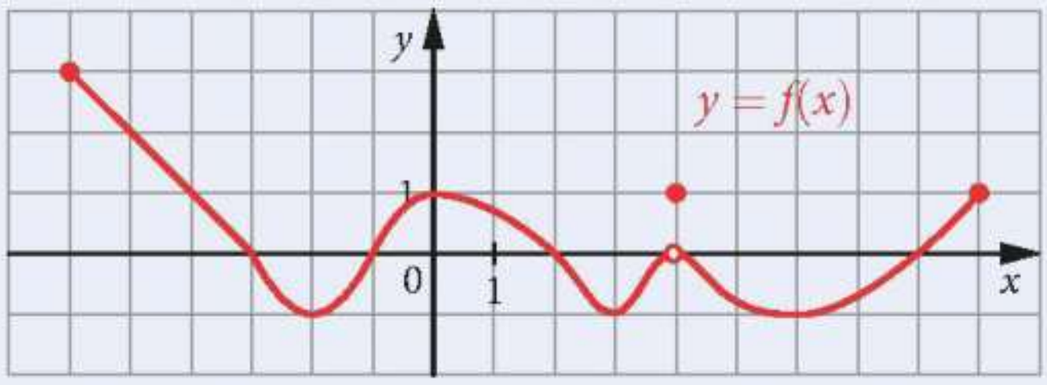
C. Liczba 51 należy do zbioru wartości funkcji f.

32. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

A. Równanie $f(x) = 0$ ma dokładnie trzy rozwiązania.

B. Funkcja f ma co najmniej trzy miejsca zerowe.

C. Funkcja f ma pięć miejsc zerowych.



33. Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartość najmniejszą równą 5 dla $x = 1$.

A. Funkcja $g(x) = -f(x + 1)$ przyjmuje wartość największą równą 5 dla $x = 0$.

B. Funkcja $h(x) = f(x+3)-11$ przyjmuje wartość najmniejszą równą -6 dla $x = 4$.

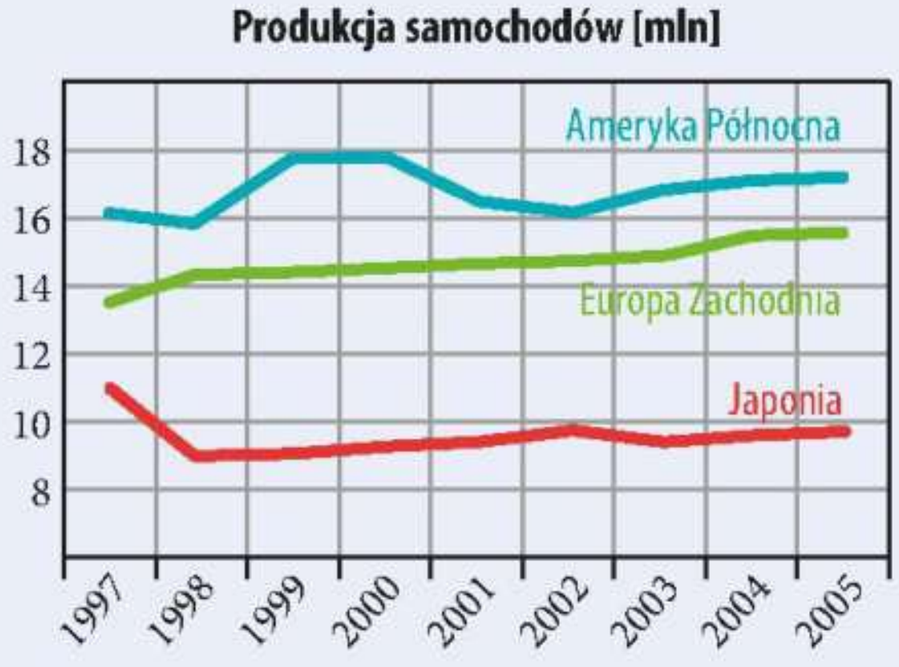
C. Funkcja $k(x) = f(x - 5) - 5$ przyjmuje wartość najmniejszą równą 0 dla $x = 6$.

34. Oceń na podstawie wykresu, które ze zdań dotyczących produkcji samochodów w badanym okresie są prawdziwe.

A. Tylko w Europie Zachodniej produkcja samochodów w latach 1997–2005 była stale rosnąca.

B. Między 1997 a 1998 r. produkcja samochodów w Japonii spadła o ponad 30%.

C. W drugiej połowie 2000 r. nastąpił spadek produkcji samochodów w Ameryce Północnej.

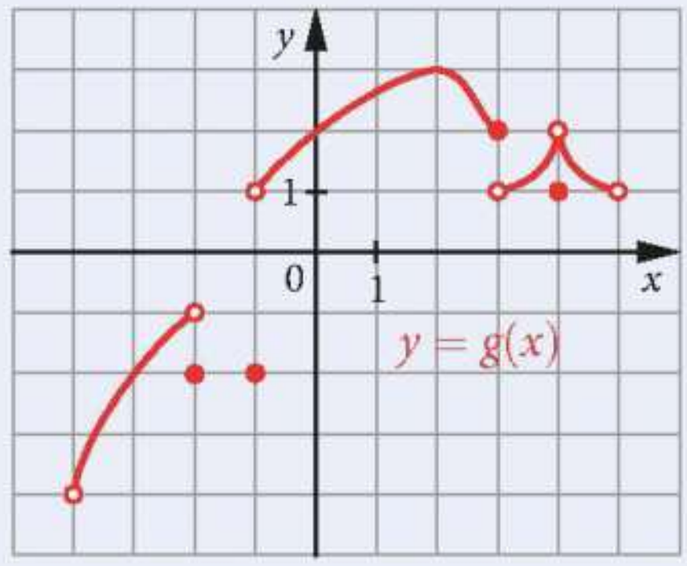


35. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g.

A. W przedziale $\langle -1;\ 2\rangle$ funkcja g jest rosnąca.

B. W przedziale $\langle 4;\ 5)$ funkcja g jest malejąca.

C. W przedziale $\langle 2;\ 3)$ funkcja g jest malejąca.



36. Punkt C należy do odcinka AB i jest różny od jego końców. Wynika stąd, że

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$. **C.** $\left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

37. Punkt P jest środkiem boku AB w trójkącie ABC. Wynika stąd, że

A. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP}$. **B.** $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. **C.** $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CP}$.

38. Dane są dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$.

A. Jeżeli $|\vec{u} + \vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{w}|$, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równoległe.

B. Jeżeli wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równoległe, to $|\vec{u} + \vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{w}|$.

C. Dla każdej pary wektorów $\vec{u}$ i $\vec{w}$ prawdziwa jest nierówność $|\vec{u} + \vec{w}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{w}|$.

39. Dany jest wektor $\vec{u} = [-3,\ 5]$ oraz punkty $M = (7,\ -2)$ i $N = (-2,\ 13)$.

A. Obrazem punktu M w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$ jest punkt $M' = (4,\ 3)$.

B. Dla pewnego punktu P prawdziwa jest równość $2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PN}$.

C. Dla pewnej liczby m prawdziwa jest równość $m \cdot \vec{u} = \overrightarrow{NM}$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

40. Dane są zbiór $A = \left\{1,\ \sqrt{3},\ 2,\ 2\sqrt{3}\right\}$ i funkcja $f(x) = \frac{2+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$. Oblicz wartości funkcji f dla tych liczb ze zbioru A, które należą do dziedziny funkcji f.

41. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = -2x + \frac{3}{x}$ c) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}$ e) $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{2x-6}$

b) $f(x) = \sqrt{3x-6}$ d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}$ f) $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

42. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \frac{1}{|x-7|}$ c) $f(x) = \sqrt{|x-5|-5}$ e) $f(x) = \frac{\sqrt{3x+2}}{|3x+1|-2}$

b) $f(x) = \frac{1}{|x+1|-2}$ d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|+3}}$ f) $f(x) = \frac{\sqrt{2-|x-3|}}{\sqrt{|5x-7|+4}}$

43. Dane są funkcja f i jej dziedzina D. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

a) $f(x) = 3x + 1 \quad D = \{-3, -1, 0, 5\}$

b) $f(x) = \frac{x}{x+2} \quad D = \left\{-1, \frac{1}{2}, 0\right\}$

c) $f(x) = x\sqrt{x} \quad D = \{0, 1, 4\}$

d) $f(x) = x^4 \quad D = \{-2, -1, 0, 1\}$

44. Dana jest funkcja $f(x) = -7x + 3$, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych. Sprawdź, które z liczb: $-25, -7, -4, 17$ należą do zbioru wartości tej funkcji.

D **45.** Wykaż, że liczba 2 nie należy do zbioru wartości funkcji $f(x) = \big||x-1|+5\big| - 2$.

46. Dane są funkcja f i jej zbiór wartości ZW. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = -2x + 3 \quad ZW = \{-1, 1, 5\}$

b) $f(x) = \frac{4}{x-5} \quad ZW = \left\{-1, \frac{4}{5}, 2\right\}$

c) $f(x) = \sqrt{2x} \quad ZW = \{0, 1, 4\}$

d) $f(x) = x^3 \quad ZW = \{-1, 1, 8\}$

47. Sporządź tabelę funkcji, która każdej liczbie naturalnej z przedziału $\langle 20; 25\rangle$ przyporządkowuje sumę jej wszystkich naturalnych dzielników.

48. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = \sqrt{5}x - 2\sqrt{5}$

b) $f(x) = 2x(x+6)(x+3)$

c) $f(x) = |x-1| - 6$

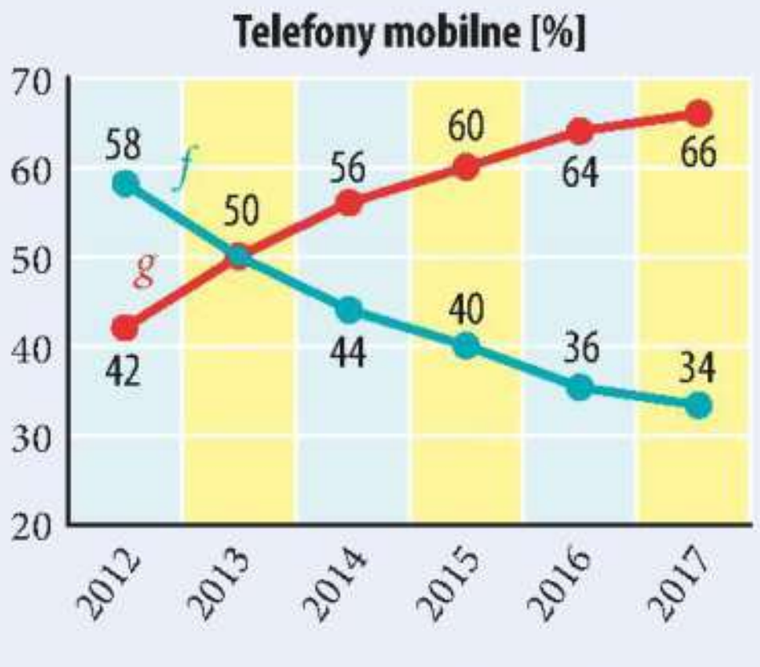
d) $f(x) = |x+2| + 2$

e) $f(x) = 4 - 8x, \ D = \mathbf{Z}$

f) $f(x) = 2^{11}x - 4^7, \ D = \mathbf{N}$

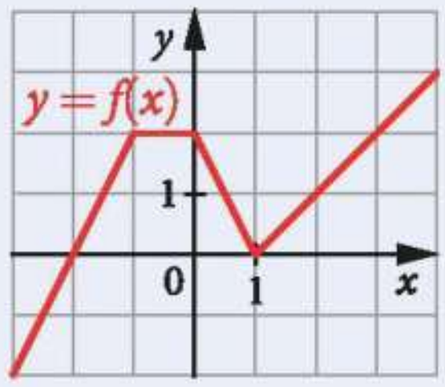
D **49.** Wykaż, że funkcja $f(x) = \big||x-1|+1\big| + 2$ nie ma miejsc zerowych.

50. Funkcje f i g przedstawiają odpowiednio procentowy udział klasycznych telefonów komórkowych i smartfonów w ogólnej liczbie sprzedawanych na świecie telefonów mobilnych. Opisz monotoniczność każdej z tych funkcji.



51. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle 2; 22\rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle 4; 6\rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x+3) - 8$.

52. Na podstawie wykresu funkcji f sporządź wykres funkcji $y = f(x+2) - 3$.

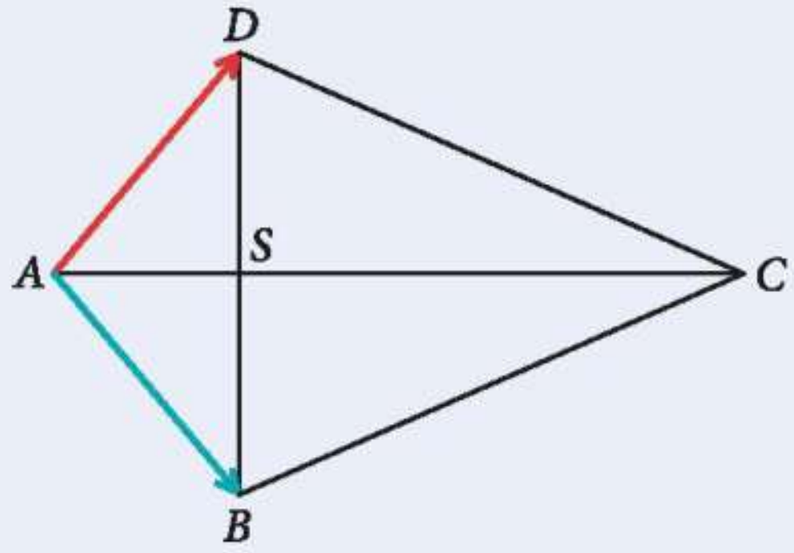


53. Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartości dodatnie jedynie w przedziale $(-2; 5)$ oraz wartości ujemne jedynie w przedziale $(5; 9)$. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x-4) > 0$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x-4) < 0$.

54. Funkcja $y = g(x)$ jest malejąca w przedziale $\langle -3; 3\rangle$, stała w przedziale $\langle 3; 4\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 4; 6\rangle$. Określ przedziały monotoniczności funkcji $y = g(-x)$.

55. Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartość największą równą 10 dla $x = 3$ i przyjmuje wartość najmniejszą równą -5 dla $x = 11$. Podaj wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji $y = f(x + 7) + 2$.

56. Dla deltoidu $ABCD$ przedstawionego na rysunku obok prawdziwa jest równość $|SC| = 3|AS|$. Przedstaw wektory $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{BC}$ za pomocą wektorów $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{AD}$.



57. Dane są punkty $A = (3, -6)$, $B = (11, 0)$, $C = (0, -1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków A', B', C' trójkąta będącego obrazem trójkąta ABC w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [5, -3]$.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

58. Funkcja g przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej sumę cyfr tej liczby.

a) Z ilu elementów składa się dziedzina funkcji g?
b) Wyznacz zbiór wartości funkcji g.
c) Dla jakiego argumentu funkcja g przyjmuje wartość najmniejszą, a dla jakiego wartość największą?
d) Uzasadnij, że funkcja g nie jest monotoniczna.
e) Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartość 4?

59. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny. Suma długości jego krawędzi jest równa 80. Podaj wzór i określ dziedzinę funkcji, która w zależności od długości krawędzi jego podstawy opisuje

a) objętość graniastosłupa.
b) pole powierzchni graniastosłupa.

60. Podaj przykład wykresu funkcji f spełniającej trzy następujące warunki:

- dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -2; 4\rangle$,
- funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą równą 1 dla $x = -2$,
- funkcja f przyjmuje wartość największą równą 4 dla $x = 0$.

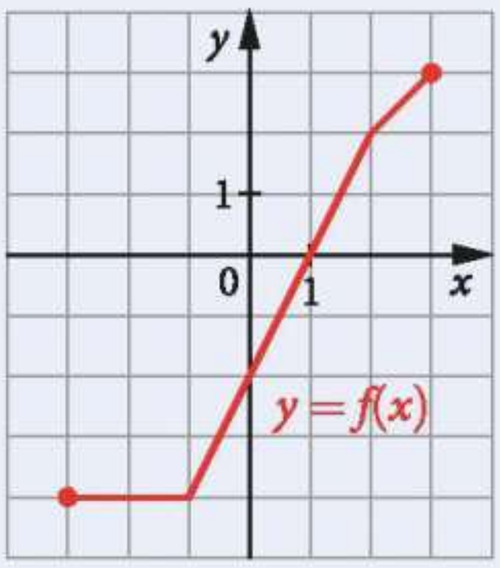
61. Podaj przykład wykresu funkcji f spełniającej trzy następujące warunki:

- dziedziną funkcji f jest przedział $(-1; 5)$,
- zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0; 3\rangle$,
- miejscami zerowymi funkcji f są liczby 1 i 3.

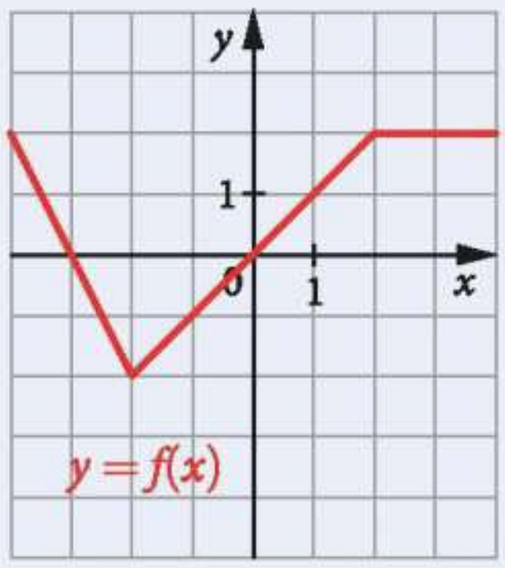
62. Podaj przykład wykresu funkcji f spełniającej trzy następujące warunki:
- funkcja f ma trzy miejsca zerowe,
- funkcja $y = f(x) - 2$ ma jedno miejsce zerowe,
- funkcja $y = f(x) + 2$ nie ma miejsc zerowych.

63. Odczytaj z wykresu:
- dziedzinę funkcji,
- zbiór wartości funkcji,
- najmniejszą wartość i największą wartość funkcji,
- miejsca zerowe funkcji,
- zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
- zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne,
- przedziały monotoniczności funkcji,
- liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m.

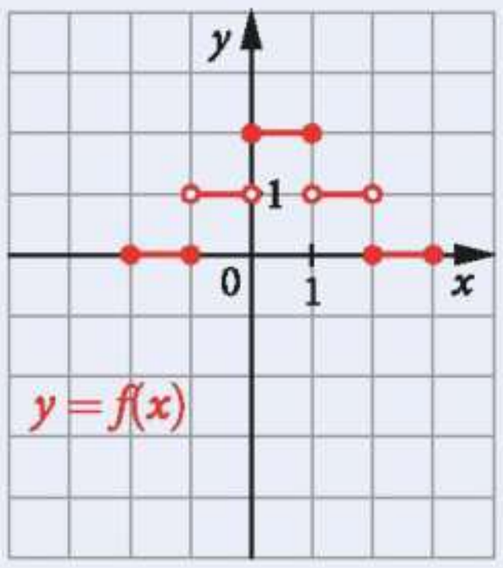
a)



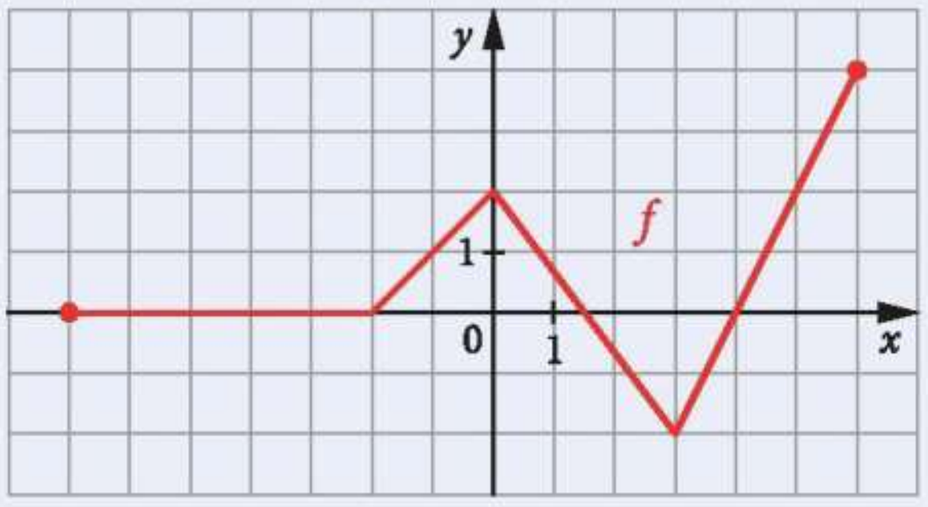
b)



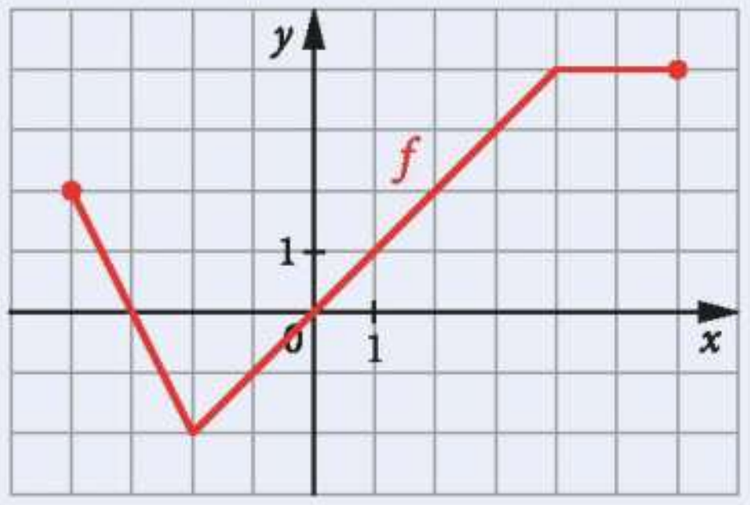
c)



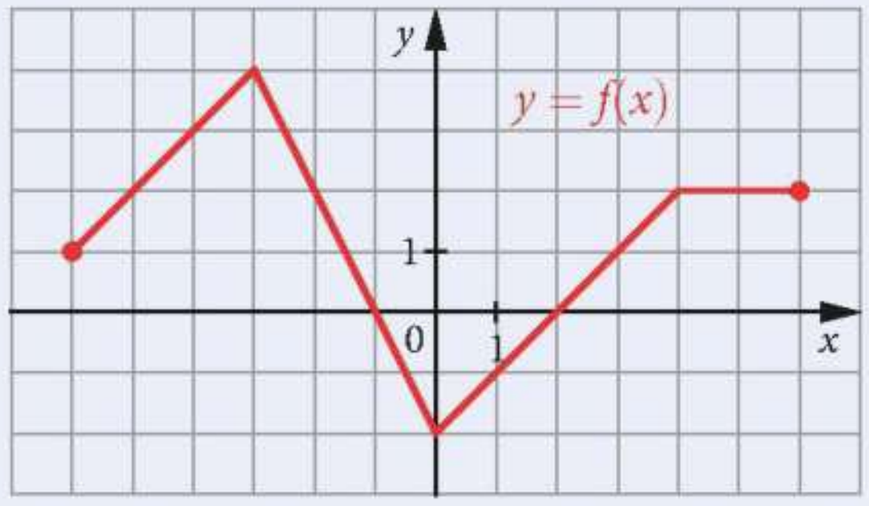
64. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f.
a) Sporządź wykres funkcji $g(x) = f(-x) + 1$.
b) Określ zbiór wartości funkcji g.
c) Podaj miejsca zerowe funkcji g.



65. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f.
a) Sporządź wykres funkcji $g(x) = -f(x - 2)$.
b) Podaj liczbę rozwiązań równania $g(x) = 2$.
c) Podaj maksymalny przedział, w którym funkcja g jest nierosnąca.



66. Na podstawie wykresu funkcji f sporządź wykres funkcji $y = |f(-x) - 2|$.



67. Przekształć odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, i narysuj wykres funkcji $g(x) = 2 - \left|\sqrt{x+2} - 1\right|$. Odczytaj z wykresu rozwiązanie nierówności $g(x) > 0$.

68. Odpowiedz na pytania na podstawie podanych wykresów.



a) Czy można się zgodzić ze stwierdzeniem, że *liczba transakcji dokonywanych kartami przez cały badany okres rosła*? A ze stwierdzeniem, że *wartość transakcji dokonywanych kartami przez cały badany okres rosła*?
b) O ile procent wzrosła w badanym okresie liczba, a o ile wartość transakcji dokonywanych kartami?
c) Ile wynosiła średnia wartość transakcji dokonanej kartą w pierwszym kwartale 2006 r.? Jak zmieniła się ta wielkość w porównaniu z pierwszym kwartałem 2000 r.?
d) O jakiej porze roku Polacy mniej chętnie niż zwykle wydają pieniądze, płacąc kartami?

69. Oblicz współrzędne wierzchołka D równoległoboku $ABCD$, jeśli $A = (2, -10)$, $B = (7, 0)$, $C = (-2, 4)$.

70. Dane są punkty $A = (3, 0)$, $B = (3, -4)$, $C = (-12, -7)$. Wyznacz współrzędne takiego punktu P, aby spełniona była równość $3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CP}$.

D **71.** Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (3, 2)$, $B = (-5, 6)$, $C = (-6, 4)$ jest prostokątny. Oblicz jego obwód i pole.

Funkcja liniowa

4

1. Od proporcjonalności prostej do funkcji $y = ax$

Umiejętności:

- rysowanie wykresu funkcji $y = ax$
- interpretacja współczynnika kierunkowego funkcji $y = ax$

Proporcjonalność prosta

Przykład 1

W pewnym zakładzie fotograficznym cena jednej odbitki wynosi 60 gr. Zatem za dwie odbitki zapłacimy 1,20 zł, za trzy – 1,80 zł itd. Zależność między liczbą odbitek a kwotą do zapłacenia pokazujemy w tabeli.

liczba odbitek	1	2	3	4	5	6
kwota do zapłacenia (w zł)	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60

Przykład 2 ◀ zad. 1.4

Drukarka drukuje w ciągu minuty 8 stron. Oznacza to, że w ciągu 2 minut wydrukuje 16 stron, w ciągu 3 minut – 24 strony itd. Zależność między czasem drukowania a liczbą stron pokazujemy w tabeli.

czas drukowania (w minutach)	1	2	3	4	5	6
liczba stron	8	16	24	32	40	48

Sytuacje przedstawione w przykładach są do siebie pod pewnym względem bardzo podobne. Występują tam **wielkości, których stosunek jest stały**:

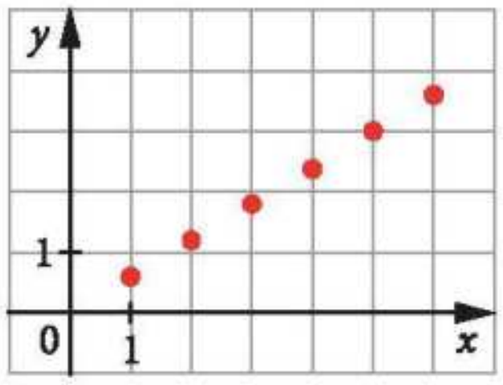
- w przykładzie 1 stosunek należnej kwoty do liczby odbitek jest stały i równy cenie jednej odbitki,
- w przykładzie 2 stosunek liczby wydrukowanych stron do czasu drukowania jest stały i równy liczbie stron wydrukowanych w ciągu minuty.

Wielkości dodatnie, których stosunek jest stały, nazywamy **wielkościami wprost proporcjonalnymi**. Powiemy więc, że:

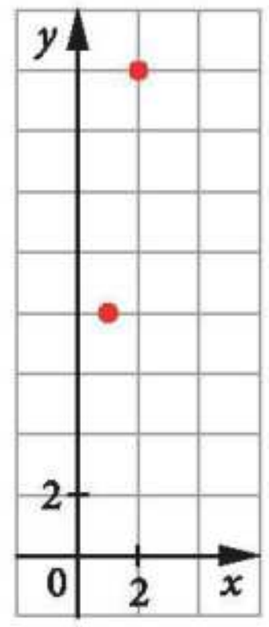
- kwota należna za odbitki jest wprost proporcjonalna do ich liczby,
- liczba wydrukowanych stron jest wprost proporcjonalna do czasu drukowania.

Narysujmy teraz dla każdego z powyższych przykładów wykres funkcji, która pierwszej z wielkości wprost proporcjonalnych przyporządkowuje drugą.
Funkcje te można wyrazić wzorami:

- $y = 0{,}6x$,
- $y = 8x$.



$y = 0{,}6x$



$y = 8x$

Oznaczmy literą a stały iloraz wprost proporcjonalnych dodatnich wielkości x i y. Otrzymany związek możemy wówczas zapisać w postaci:

$$\frac{y}{x} = a, \text{ czyli } y = ax$$

Jest to wzór funkcji opisującej wielkości wprost proporcjonalne. Występujący w tym wzorze współczynnik a nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności**. Punkty wykresu tak określonej funkcji leżą na jednej prostej, a cały wykres znajduje się w I ćwiartce układu współrzędnych.

Funkcja $f(x) = ax$

Rozszerzymy teraz pojęcie proporcjonalności prostej.
Zakładamy, że:

- dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych,
- współczynnik a jest ustaloną liczbą rzeczywistą.

Przykład 3

Naszkicujemy wykres funkcji wyrażonej wzorem $f(x) = 2x$, $D = \mathbf{R}$.

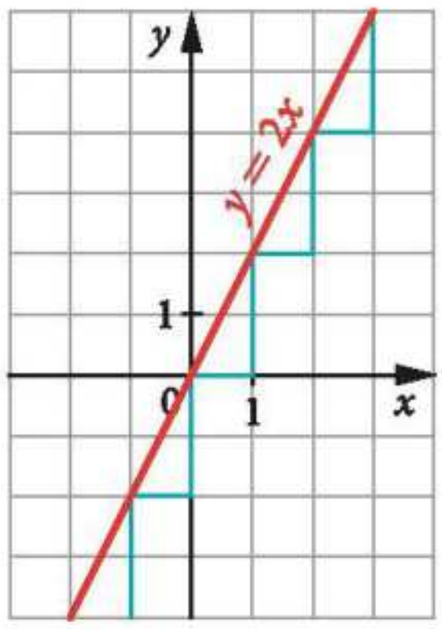
Rozwiązanie

Obliczmy wartości funkcji dla kilku argumentów x.

x	-1	$-0{,}5$	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4	5
y	-2	-1	0	2	3	4	6	8	10

Zauważmy, że jeżeli kolejne argumenty x zwiększamy o 1, to odpowiadające im wartości y zwiększają się o 2.

Oznacza to, że do kolejnych punktów wykresu dochodzimy, robiąc jeden jednostkowy krok w prawo i dwa jednostkowe kroki w górę.



Przykład 4

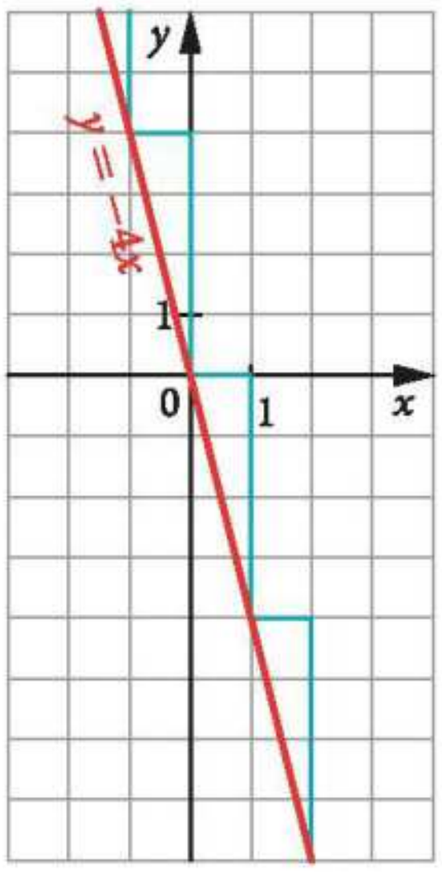
Naszkicujemy wykres funkcji wyrażonej wzorem $f(x) = -4x,\ D = \mathbf{R}$.

Rozwiązanie

Odpowiednia tabela wartości tej funkcji dla wybranych argumentów ma postać:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	4	0	-4	-8	-12	-16	-20

Jeżeli dla tej funkcji kolejne argumenty x zwiększamy o 1, to odpowiadające im wartości y zmniejszają się o 4.



← jedna jednostka w prawo
i cztery jednostki w dół

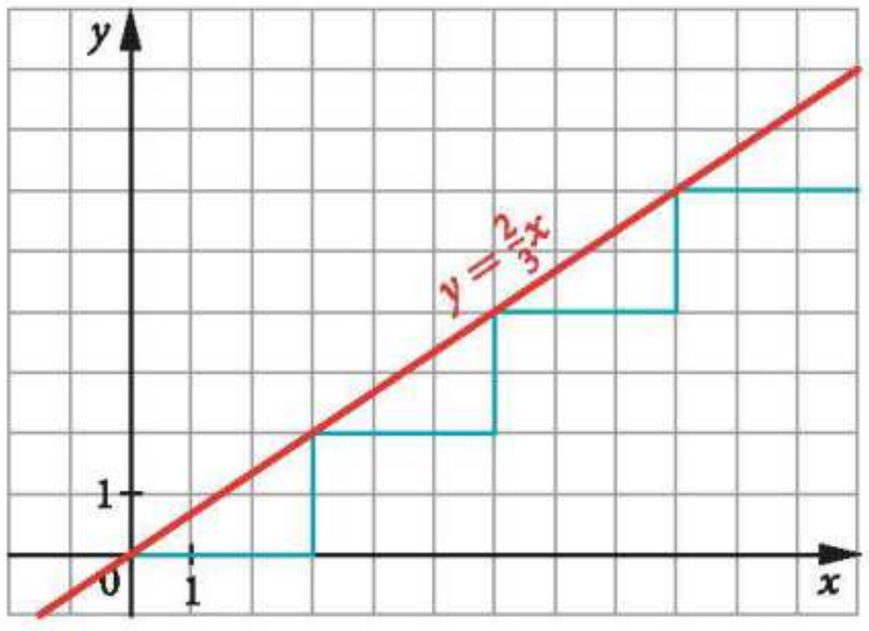
Matematycy w takiej sytuacji powiedzą, że **przyrost wartości funkcji jest ujemny**.

Przykład 5 ◂ zad. 1.7

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x,\ D = \mathbf{R}$.

Rozwiązanie

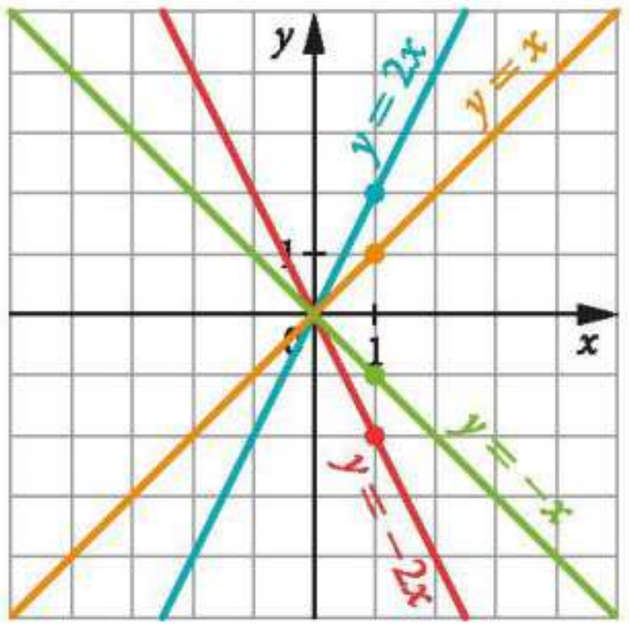
Tutaj zmianie wielkości x o 1 jednostkę odpowiada zmiana wielkości y o $\frac{2}{3}$ jednostki, albo inaczej – zmianie wielkości x o 3 jednostki odpowiada zmiana wielkości y o 2 jednostki.



← trzy jednostki w prawo
i dwie jednostki w górę

Uogólnimy podane przykłady.

Niech $f(x) = ax$, gdzie $a \neq 0$. Wówczas $f(0) = 0$ i $f(1) = a$, zatem wykres funkcji f przechodzi przez punkty $(0, 0)$ oraz $(1, a)$.



Przyjmijmy, że trzy różne punkty A, B oraz C należą do wykresu funkcji f. Wynika stąd, że:

$$A = (x_1, ax_1),\ B = (x_2, ax_2),\ C = (x_3, ax_3)$$

Wówczas:

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, ax_2 - ax_1] = [x_2 - x_1, a(x_2 - x_1)],$$
$$\overrightarrow{AC} = [x_3 - x_1, ax_3 - ax_1] = [x_3 - x_1, a(x_3 - x_1)]$$

Ponieważ $\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_3 - x_1)}{a(x_2 - x_1)}$, więc punkty A, B oraz C są współliniowe.

Jeżeli $a = 0$, to wykres funkcji pokrywa się z osią x.

Wniosek

Jeżeli dziedziną funkcji $f(x) = ax$ jest zbiór liczb rzeczywistych, to jej wykresem jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych.

Definicja

Współczynnik a, występujący we wzorze funkcji $f(x) = ax$ $(D = \mathbf{R})$, nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**.

Zbadajmy, korzystając z definicji, monotoniczność funkcji $f(x) = ax$. Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbf{R}$, a współczynnikiem a ustalona liczba rzeczywista. Weźmy parę argumentów x_1 oraz x_2 i załóżmy, że większy z nich oznaczony jest jako x_2. Zatem:

$$x_2 > x_1$$

Wartości funkcji dla tak oznaczonych argumentów wynoszą:

$$f(x_1) = ax_1, \quad f(x_2) = ax_2$$

Sprawdzimy, która z wartości jest większa, badając znak ich różnicy.

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1)$$

Przyjęliśmy, że $x_2 > x_1$, więc czynnik $(x_2 - x_1)$ jest dodatni.

Zatem różnica $f(x_2) - f(x_1)$ jest dodatnia dla $a > 0$, ujemna dla $a < 0$ oraz równa 0 dla $a = 0$.

Wniosek

- Funkcja $f(x) = ax$ jest rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 0$.
- Funkcja $f(x) = ax$ jest malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 0$.
- Dla $a = 0$ funkcja $f(x) = ax$ jest stała.
- Każda funkcja postaci $f(x) = ax$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą, jest monotoniczna.

Przykład 6 ◀ zad. 1.9, 1.10

Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = (7 - m)x$ jest rosnąca?

Rozwiązanie

$7 - m > 0$ ⟵ współczynnik kierunkowy dodatni

$7 > m$

Odp.: Funkcja $f(x) = (7 - m)x$ jest rosnąca dla $m < 7$.

Przykład 7 ◀ zad. 1.11

Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = 2(|m| - 9)x$ jest rosnąca, dla jakich malejąca, a dla jakich stała?

Rozwiązanie

I. f rosnąca

$2(|m| - 9) > 0$ ⟵ współczynnik kierunkowy dodatni

$|m| - 9 > 0$, czyli $|m| > 9$, stąd $m \in (-\infty; -9) \cup (9; \infty)$

II. f malejąca

$2(|m| - 9) < 0$ ⟵ wykorzystujemy rozwiązanie nierówności I

$m \in (-9; 9)$

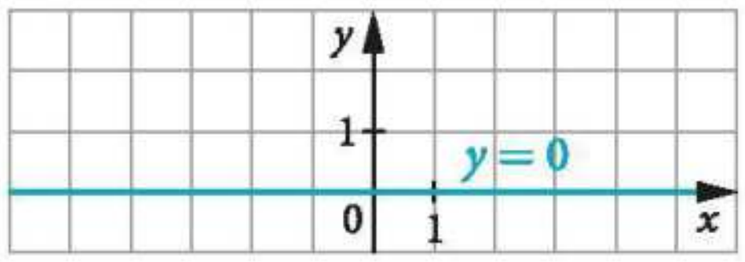
III. f stała

$2(|m| - 9) = 0$, czyli $m = -9$ lub $m = 9$

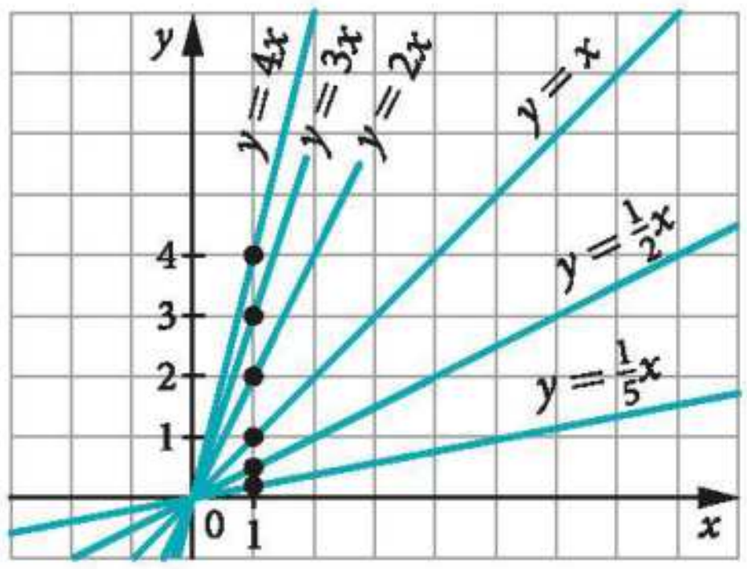
Odp.: Funkcja $f(x) = 2(|m| - 9)x$ jest rosnąca dla $m \in (-\infty; -9) \cup (9; \infty)$, malejąca dla $m \in (-9; 9)$ oraz stała dla $m = -9$ lub $m = 9$.

Podsumujmy własności funkcji $f(x) = ax$ $(D = \mathbf{R})$ w zależności od współczynnika a.

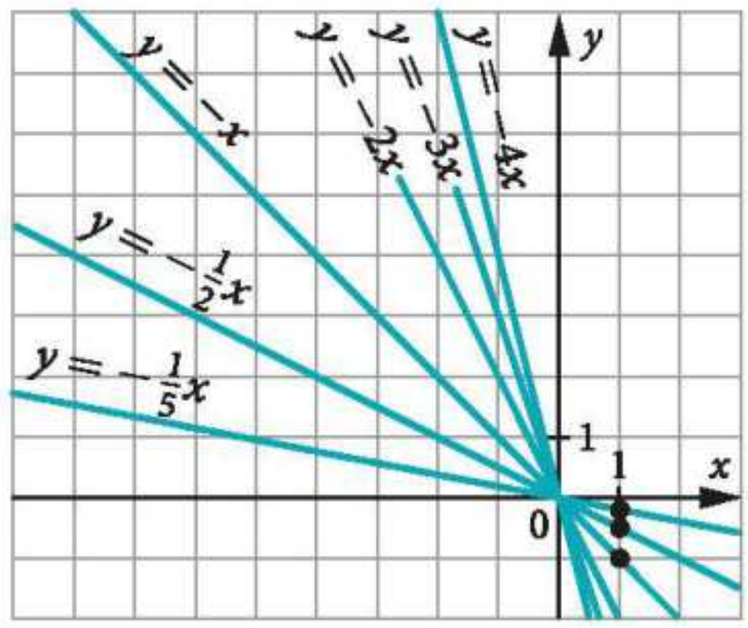
I. Jeżeli $a = 0$, to wzór funkcji ma postać $f(x) = 0$. Wykresem jest wówczas prosta pokrywająca się z osią x. Każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym tej funkcji. Funkcja jest stała, a więc monotoniczna.



II. Jeżeli $a > 0$, to wykres przecina I i III ćwiartkę układu współrzędnych. Zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych. Miejscem zerowym jest liczba 0. Równanie $ax = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnej wartości m. Funkcja jest rosnąca. Wartości dodatnie przyjmuje dla $x > 0$, a wartości ujemne dla $x < 0$.



III. Jeżeli $a < 0$, to wykres przecina II i IV ćwiartkę układu współrzędnych. Zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych. Miejscem zerowym jest liczba 0. Równanie $ax = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnej wartości m. Funkcja jest malejąca. Wartości dodatnie przyjmuje dla $x < 0$, a wartości ujemne dla $x > 0$.



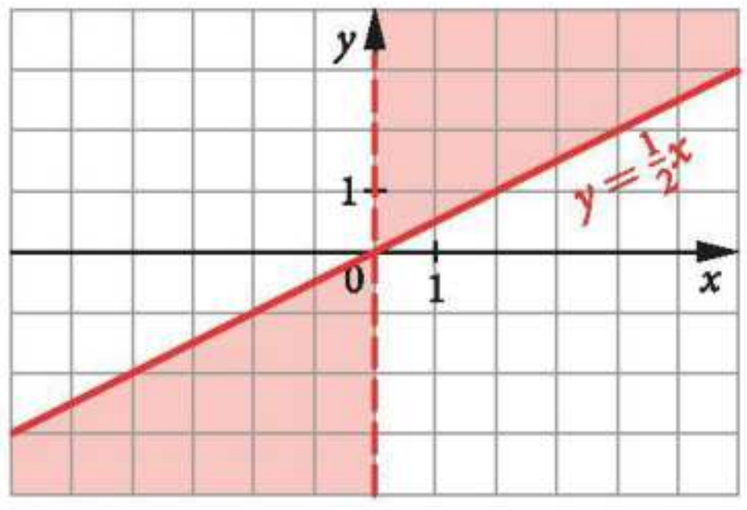
Przykład 8 ◂ zad. 1.13

Zaznaczymy na płaszczyźnie zbiór wszystkich punktów, które należą do wykresów funkcji $y = ax$, gdy $a \geqslant \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Szukany zbiór punktów zaznaczono na rysunku kolorem.

Punkty wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x$ należą do wyznaczonego zbioru, a punkty osi y (poza początkiem układu) do niego nie należą.



Przykład 9 ◂ zad. 1.14

Sprawdzimy, dla jakich argumentów funkcja $f(x) = 2\sqrt{3}x$ przyjmuje wartości większe od $\sqrt{3}$.

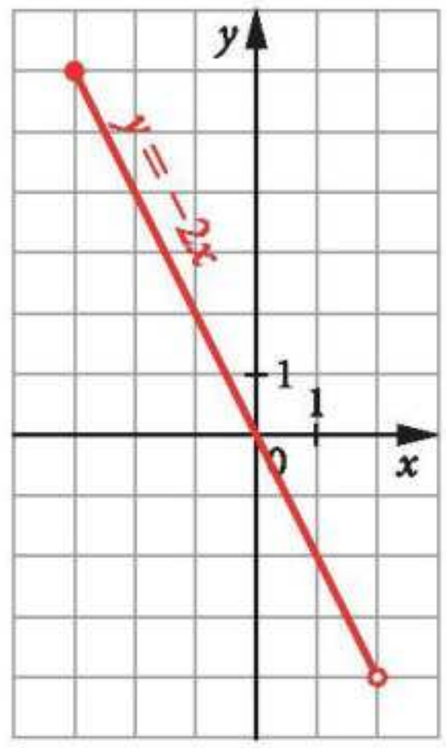
Rozwiązanie

$$f(x) > \sqrt{3}$$
$$2\sqrt{3}x > \sqrt{3}$$
$$x > \frac{1}{2}$$

Odp.: $x \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

Przykład 10 ◀ zad. 1.15

Dziedziną funkcji $f(x) = -2x$ jest przedział $\langle -3;\ 2)$.
Narysujemy wykres i opiszemy własności tej funkcji.



Rozwiązanie

Wykresem funkcji jest odcinek bez jednego końca.

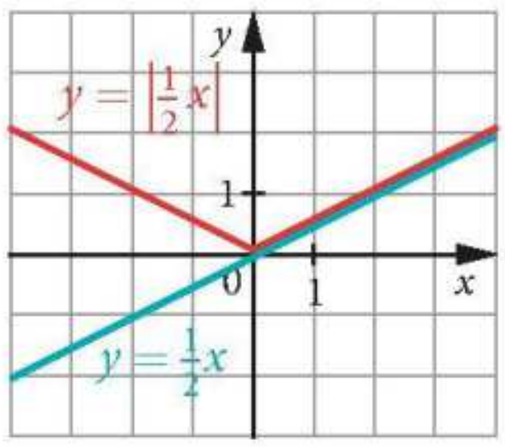
- Zbiorem wartości f jest przedział $(-4;\ 6\rangle$.
- Miejscem zerowym funkcji jest 0.
- Dla $x \in \langle -3;\ 0)$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla $x \in (0;\ 2)$ – wartości ujemne.
- Funkcja jest malejąca.
- Funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej, wartość największą równą 6 funkcja przyjmuje dla $x = -3$.
- Równanie $f(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $m \in (-4;\ 6\rangle$, natomiast dla $m \leqslant -4$ oraz dla $m > 6$ nie ma rozwiązań.

Przykład 11 ◀ zad. 1.16

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$ i opiszemy jej własności.

Rozwiązanie

Jeżeli przyjmiemy, że $g(x) = \frac{1}{2}x$, to $f(x) = |g(x)|$. Zatem wykres funkcji f otrzymamy, odbijając symetrycznie względem osi x tę część prostej $y = \frac{1}{2}x$, która leży pod osią, i zachowując część tej prostej leżącą nad osią.



Wykresem funkcji f jest więc suma dwóch półprostych o wspólnym początku w punkcie (0, 0).

- $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle 0;\ \infty)$
- Miejscem zerowym funkcji jest 0.
- Dla $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie. Funkcja nie przyjmuje wartości ujemnych.
- Funkcja nie jest monotoniczna,
  natomiast w przedziale $(-\infty;\ 0\rangle$ jest malejąca,
  w przedziale $\langle 0;\ \infty)$ jest rosnąca.
- Funkcja nie przyjmuje wartości największej,
  wartość najmniejszą równą 0 funkcja przyjmuje dla $x = 0$.
- Równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązań dla $m < 0$,
  ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $m = 0$,
  ma dwa rozwiązania dla $m > 0$.

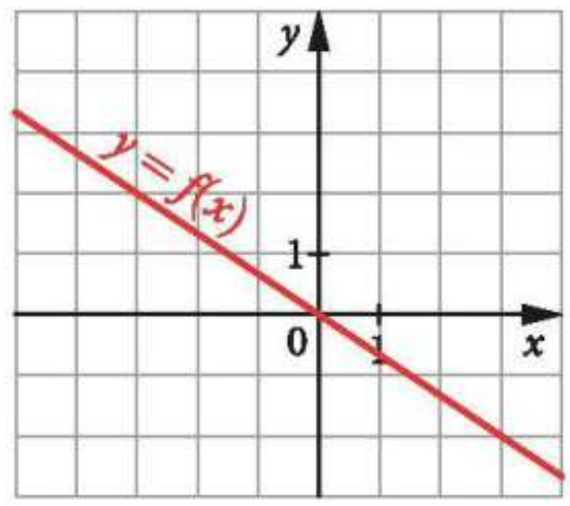
Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Wyciąg narciarski może przetransportować na górę 10 osób w ciągu minuty. Zatem funkcja, która opisuje liczbę narciarzy przetransportowanych na górę w ciągu x minut, jest wyrażona za pomocą wzoru

A. $f(x) = \frac{1}{10}x$. **B.** $f(x) = 10x$. **C.** $f(x) = x + 10$. **D.** $f(x) = \frac{10}{x}$.

1.2. Na wykresie przedstawiono funkcję



A. $f(x) = \frac{2}{3}x$. **C.** $f(x) = -\frac{2}{3}x$.

B. $f(x) = \frac{3}{2}x$. **D.** $f(x) = -\frac{3}{2}x$.

1.3. Wskaż wartość m, dla której wykres funkcji $f(x) = (5m + 7)x$ przechodzi przez punkt $P = (1, -13)$.

A. $m = 4$ **B.** $m = \frac{7}{5}$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = -4$

1.4. Podaj wzór wiążący wymienione wielkości wprost proporcjonalne. Zapisz ich współczynnik proporcjonalności.

a) obwód y okręgu i promień r okręgu

b) długość y przekątnej kwadratu i obwód x kwadratu

c) droga s przebyta ze średnią prędkością 80 km/h i czas t podróży (w godzinach)

1.5. Wyznacz taką wartość współczynnika a, aby wykres funkcji $f(x) = ax$ przechodził przez podany punkt P.

a) $P = (3, -27)$ b) $P = (-7, -11)$ c) $P = (4, -2\pi)$ d) $P = \left(5, \sqrt{125}\right)$

1.6. Punkt $M = \left(\log_{\frac{1}{2}}(4k), -2\right)$ należy do wykresu funkcji liniowej wyrażonej wzorem $f(x) = x$. Wyznacz wartość k.

1.7. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór liczb rzeczywistych. Naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $f(x) = -3x$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x$ c) $f(x) = -\frac{4}{5}x$ d) $f(x) = -\frac{3}{7}x$

1.8. Punkt A należy do wykresu funkcji $f(x) = ax$. Sprawdź, które spośród punktów B, C, D również należą do wykresu tej funkcji.

a) $A = (3, -6)$, $B = (-2, 4)$, $C = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $D = (-10, 5)$

b) $A = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$, $B = (-2, -1)$, $C = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{4}\right)$, $D = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right)$

c) $A = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$, $B = \left(\sqrt{3}, -\sqrt{2}\right)$, $C = \left(\sqrt{6}, -3\right)$, $D = \left(-6, 3\sqrt{6}\right)$

d) $A = \left(2^{11}, 4^{7}\right)$, $B = \left(8^{-3}, 4^{-3}\right)$, $C = \left(\left(\frac{1}{8}\right)^{17}, \left(\frac{1}{8}\right)^{16}\right)$, $D = \left(\left(\sqrt{2}\right)^{20}, \left(\sqrt[3]{2}\right)^{39}\right)$

1.9. Wyznacz wartość m, dla której podana funkcja jest rosnąca.

a) $f(x) = (2m - 1)x$

b) $f(x) = \left(2 - \sqrt{3}m\right)x$

c) $f(x) = (m - 3\pi)x$

d) $f(x) = (5m - 1{,}3)x$

e) $f(x) = \left(5^{-2} + 3^{-2}m\right)x$

f) $f(x) = \left(3m - \log_{\frac{1}{3}} 9\right)x$

1.10. Wyznacz wartość m, dla której podana funkcja jest malejąca.

a) $f(x) = (7m + 2)x$

b) $f(x) = \left(\sqrt{5} + \sqrt{3}m\right)x$

c) $f(x) = (8 - 3m)x$

d) $f(x) = (m - 1{,}9)x$

e) $f(x) = \left(2^{-3} + 3^{-3}m\right)x$

f) $f(x) = \left(4m - \log_{\frac{1}{\pi}} \pi\right)x$

1.11. Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = f(x)$ jest rosnąca, dla jakich malejąca, a dla jakich stała?

a) $f(x) = -2(m - 9)x$

b) $f(x) = (5m - 20)x$

c) $f(x) = -2\sqrt{3}(m + 2)x$

d) $f(x) = -5(3 - |m|)x$

e) $f(x) = \left((m - 2)^2 - m^2\right)x$

f) $f(x) = -\sqrt{3}\left|m^2 - 4\right|x$

1.12. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Funkcja $f(x) = -3x$ jest malejąca.

B. Funkcja $f(x) = -\frac{1}{3}x$ jest malejąca.

C. Wykresy funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x$ i $f(x) = \frac{1}{3}x$ są symetryczne względem osi y.

D. Wykresy funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x$ i $f(x) = \frac{1}{3}x$ są symetryczne względem osi x.

E. Wykresy funkcji $f(x) = -3x$ i $f(x) = 3x$ są symetryczne względem osi x.

F. Wykresy funkcji $f(x) = -3x$ i $f(x) = 3x$ są symetryczne względem osi y.

1.13. Zaznacz tę część płaszczyzny, której punkty należą do wykresów funkcji $y = ax$ dla współczynników a spełniających podany warunek.

a) $a > 1$
b) $0 < a < 1$
c) $a \geqslant 1$
d) $0 < a < 2$
e) $-2 \leqslant a \leqslant 2$
f) $a \leqslant 1$ lub $a \geqslant 2$

1.14. Dla jakich argumentów funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartości mniejsze od k?

a) $f(x) = \sqrt{5}x, \quad k = -3\sqrt{5}$
b) $f(x) = -9x, \quad k = 27\pi$

1.15. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór D. Narysuj wykres tej funkcji i opisz jej własności.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x \quad D = \langle -6; 9\rangle$
b) $f(x) = 3x \quad D = (-\infty; 2\rangle$
c) $f(x) = -\frac{1}{4}x \quad D = (-8; 4\rangle$
d) $f(x) = \frac{1}{5}x \quad D = \langle -5; \infty)$

1.16. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór D. Narysuj wykres tej funkcji i na jego podstawie podaj: zbiór wartości, przedziały monotoniczności, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

a) $f(x) = 2|x| \quad D = \mathbf{R}$
b) $f(x) = |x| \quad D = \mathbf{R} - \{0\}$
c) $f(x) = |x| \quad D = \langle -4; 6\rangle$
d) $f(x) = \left|\frac{1}{3}x\right| \quad D = (-9; 6\rangle$

Prosto do matury

1. Dana jest funkcja $f(x) = -\pi x$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Funkcja f jest malejąca.
B. Wykresy funkcji $f(x) = -\pi x$ i $f(x) = 3{,}14x$ są symetryczne względem osi x.
C. Dla $x > 1$ wartości funkcji są mniejsze od $-3{,}14$.

2. Zaznacz tę część płaszczyzny, której punkty należą do wykresów funkcji $y = ax$ dla współczynników a spełniających podwójną nierówność $-3 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$.

3. Wyznacz taką wartość parametru m, aby wykres funkcji $f(x) = (0{,}5 - |3 - 2m|)x$ przechodził przez punkt $P = (-2, 9)$.

4. Dana jest funkcja $f(x) = -\frac{1}{2}x$ o dziedzinie $D = (-6; 5\rangle$.

a) Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$.
b) Podaj wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $y = f(x)$ (o ile te wartości istnieją) oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.
c) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 1?

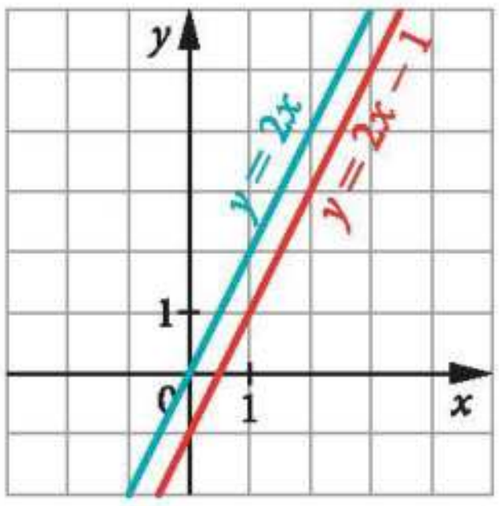
5. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = \left(|m - 1| - \sqrt{3}\right)x$ jest malejąca?

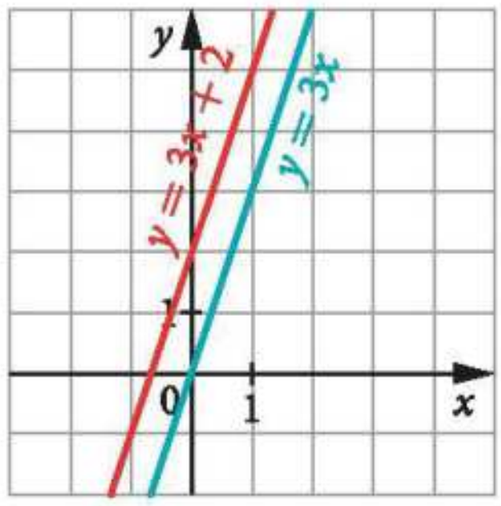
2. Funkcja liniowa i jej wykres

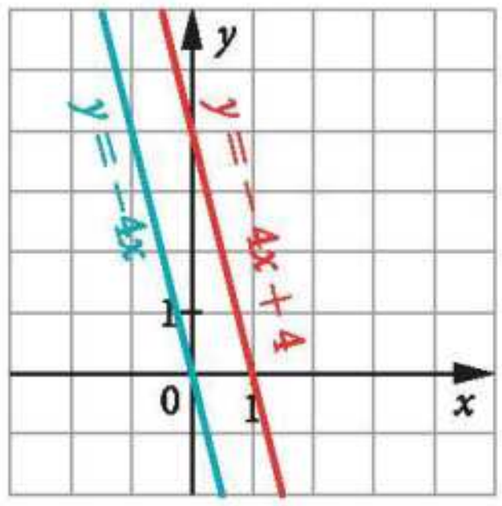
Umiejętności:

- rysowanie wykresu funkcji liniowej opisanej za pomocą wzoru
- wyznaczanie wzoru funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub jej wykresie
- interpretacja współczynników występujących we wzorze funkcji liniowej

Jeżeli wykres funkcji $y = ax$ przesuniemy o b jednostek wzdłuż osi y, czyli o wektor $[0, b]$, to otrzymamy wykres funkcji $f(x) = ax + b$.







Wykres funkcji $f(x) = ax + b$ przecina oś y w punkcie $(0, b)$.

Definicja

Funkcję postaci $f(x) = ax + b$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją liniową**. Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym tej funkcji.

Operacja dodania liczby (dodatniej lub ujemnej) do wartości funkcji nie zmienia monotoniczności tej funkcji. Wykres przesunie się równolegle wzdłuż osi y. W wypadku funkcji $f(x) = ax + b$ mamy zatem:

- dla $a < 0$ funkcja jest malejąca,
- dla $a = 0$ funkcja jest stała,
- dla $a > 0$ funkcja jest rosnąca.

Podsumowując – **funkcja liniowa jest funkcją monotoniczną**.

Ponadto jeśli:

- $a>0$ i $b>0$, to wykres przechodzi przez I, II i III ćwiartkę układu współrzędnych,
- $a>0$ i $b<0$, to wykres przechodzi przez I, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych,
- $a<0$ i $b>0$, to wykres przechodzi przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych,
- $a<0$ i $b<0$, to wykres przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

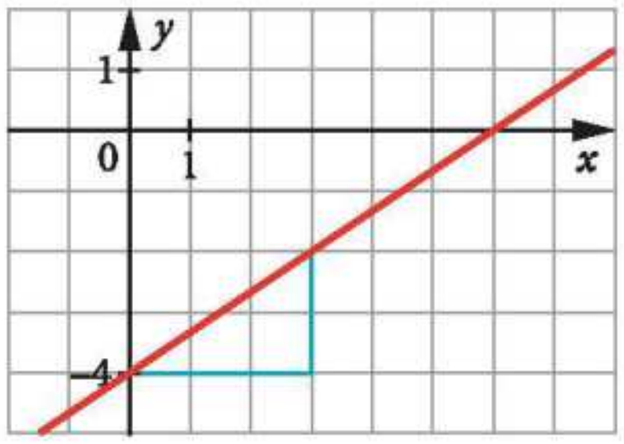
Interpretacja współczynników a i b we wzorze $f(x) = ax + b$ często pozwala na szybkie szkicowanie wykresów funkcji liniowych oraz na czynność odwrotną – odczytywanie wzoru funkcji liniowej na podstawie jej wykresu.

Przykład 1 ◀ zad. 2.4

Naszkicujemy wykres funkcji liniowej $y = f(x)$.

Rozwiązanie

a) $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$

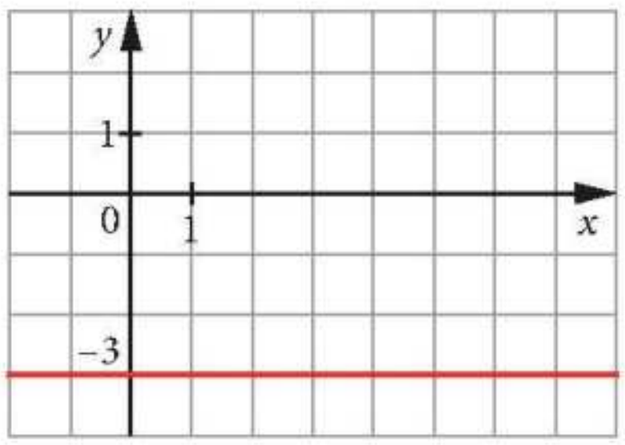


Mówimy, że wykresem funkcji $y = ax + b$ jest prosta **o równaniu** $y = ax + b$.

⟵ $a = \frac{2}{3}$: zmianie wielkości x o 3 jednostki odpowiada zmiana wielkości y o 2 jednostki

⟵ $b = -4$: wykres przecina oś y w punkcie $(0, -4)$

b) $f(x) = -3$



⟵ $a = 0$: wykres jest prostą równoległą do osi x

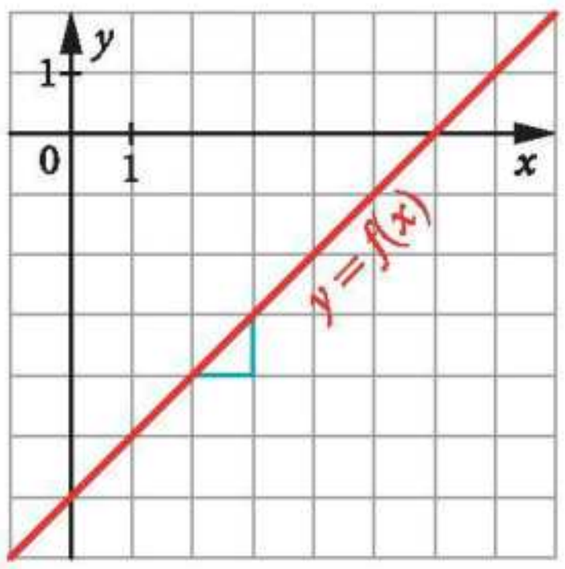
⟵ $b = -3$: wykres przecina oś y w punkcie $(0, -3)$

Przykład 2 ◀ zad. 2.5

Na podstawie wykresu funkcji liniowej wyznaczymy jej wzór.

Rozwiązanie

a)

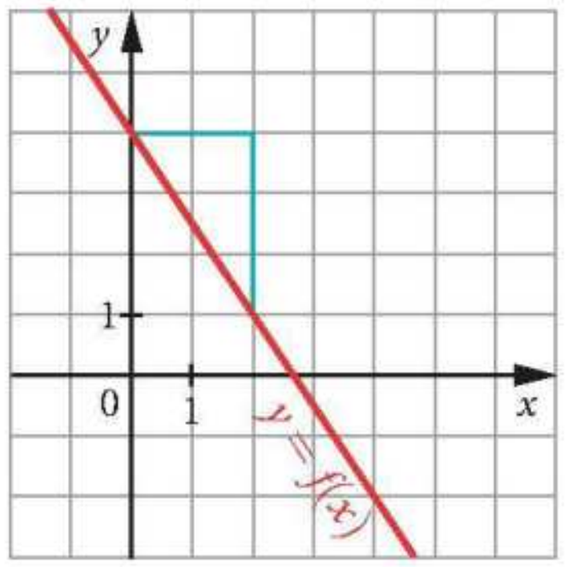


⟵ zmianie wielkości x o 1 jednostkę odpowiada zmiana wielkości y o 1 jednostkę; $a = 1$

⟵ wykres przecina oś y w punkcie $(0, -6)$; $b = -6$

Jest to wykres funkcji o wzorze $f(x) = x - 6$.

b)



⟵ zmianie wielkości x o 2 jednostki odpowiada zmiana wielkości y o -3 jednostki; $a = -\frac{3}{2}$

⟵ wykres przecina oś y w punkcie $(0, 4)$; $b = 4$

Jest to wykres funkcji o wzorze $f(x) = -\frac{3}{2}x + 4$.

Wyznaczymy miejsca zerowe funkcji $f(x) = ax + b$.

$ax + b = 0$ ⟵ rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$

$ax = -b$

Jeżeli $a \neq 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie postaci $x = -\frac{b}{a}$.

Jeżeli $a = 0$ i $b = 0$, to rozwiązaniem równania jest każda liczba rzeczywista.

Jeżeli $a = 0$ i $b \neq 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Wniosek

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, ma albo jedno miejsce zerowe (gdy $a \neq 0$), albo nieskończenie wiele miejsc zerowych (gdy $a = 0$ i $b = 0$), albo nie ma miejsc zerowych (gdy $a = 0$ i $b \neq 0$).

Przykład 3 ◀ zad. 2.7

Wyznaczymy miejsca zerowe funkcji $y = f(x)$.

Rozwiązanie

a) $f(x) = x + 4$

$x + 4 = 0$

Odp.: $x = -4$

b) $f(x) = -2x + 5$

$-2x + 5 = 0$

Odp.: $x = \frac{5}{2}$

c) $f(x) = 0$

Odp.: Każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym tej funkcji.

d) $f(x) = 3$

Odp.: Ta funkcja nie ma miejsc zerowych.

Przykład 4 ◀ zad. 2.9

Wyznaczymy punkty przecięcia wykresu funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 3$ z osiami układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Punkt przecięcia z osią y (czyli dla $x = 0$).

$A = (0, 3)$ ⟵ dla $x = 0$ wartość $y = 3$

Punkt przecięcia z osią x (czyli dla $y = 0$).

$0 = -\frac{1}{2}x + 3$ ⟵ rozwiązujemy równanie $y = 0$

$x = 6$, zatem szukany punkt to $B = (6, 0)$.

Odp.: Wykres funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 3$ przecina osie układu współrzędnych w punktach $A = (0, 3)$ i $B = (6, 0)$.

Przykład 5 ◀ zad. 2.10

Narysujemy wykres i opiszemy własności funkcji $f(x) = -2x + 6$.

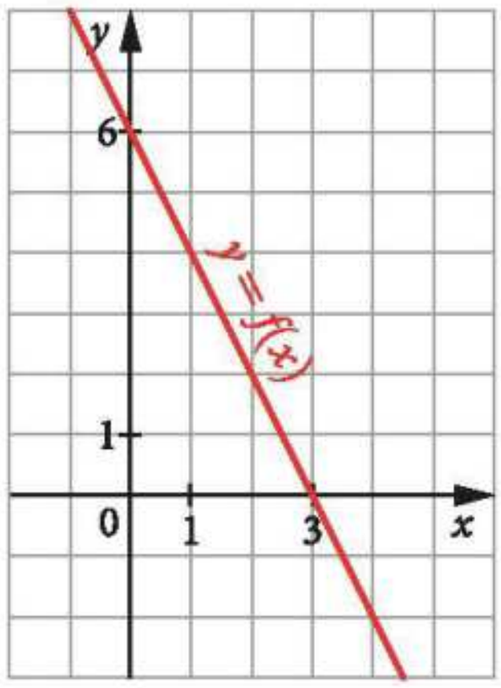
Rozwiązanie

Najpierw znajdziemy punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych:

z osią y: punkt $(0, 6)$

z osią x: punkt $(3, 0)$ ⟵ rozwiązanie równania $0 = -2x + 6$

Własności tej funkcji odczytujemy z wykresu.

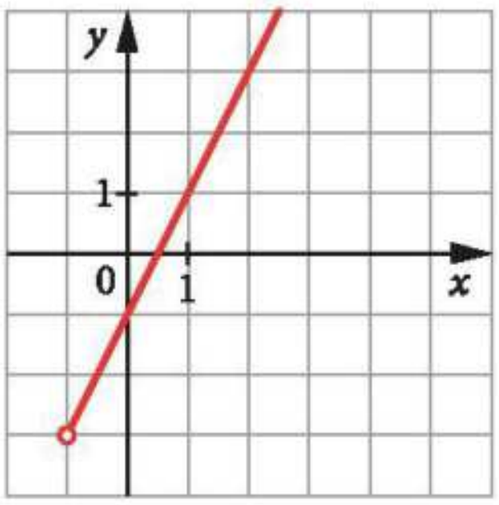


- $D = \mathbf{R}$
- $ZW = \mathbf{R}$
- Miejscem zerowym funkcji jest $x = 3$.
- Funkcja jest malejąca.
- Dla $x \in (-\infty; 3)$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
- Dla $x \in (3; \infty)$ funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Przykład 6 ◀ zad. 2.11

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = 2x - 1$ o dziedzinie $D = (-1; \infty)$.

Rozwiązanie



⟵ punkt $(-1, -3)$ nie należy do wykresu

Wykresem funkcji jest półprosta bez punktu początkowego.

Przykład 7 ◀ zad. 2.12

Dla jakiego argumentu x funkcja o wzorze $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$ przyjmuje wartość -2?

Rozwiązanie

$\frac{1}{2}x - 5 = -2$ ⟵ rozwiązujemy równanie $f(x) = -2$

$\frac{1}{2}x = 3$

$x = 6$

Odp.: Funkcja f przyjmuje wartość -2 dla $x = 6$.

Przykład 8 ◀ zad. 2.13

Dla jakich argumentów x funkcja $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ przyjmuje wartości większe od 3?

Rozwiązanie

$-\frac{1}{2}x + 2 > 3$ ⟵ rozwiązujemy nierówność $g(x) > 3$

$-\frac{1}{2}x > 1$

$x < -2$

Odp.: Wartości funkcji g są większe od 3 dla $x < -2$.

Przykład 9 ◀ zad. 2.16

Sprawdzimy, czy punkty $A = \left(\sqrt{2}, 1\right)$ oraz $B = \left(3, 2\sqrt{2}\right)$ należą do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{2}x - 1$.

Rozwiązanie

Punkt należy do wykresu funkcji, jeżeli jego współrzędne spełniają wzór tej funkcji.

$f(x) = \sqrt{2}x - 1, \quad A = \left(\sqrt{2}, 1\right)$

$f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 1$ ⟵ w miejsce x we wzorze funkcji podstawiamy $\sqrt{2}$

$f\left(\sqrt{2}\right) = 2 - 1 = 1$ ⟵ jest to druga współrzędna punktu A

Odp.: Punkt A należy do wykresu funkcji f.

$f(x) = \sqrt{2}x - 1, \quad B = \left(3, 2\sqrt{2}\right)$

$f(3) = \sqrt{2} \cdot 3 - 1$

$f(3) = 3\sqrt{2} - 1 \neq 2\sqrt{2}$

Odp.: Punkt B nie należy do wykresu funkcji f.

Przykład 10 ◀ zad. 2.17

Sprawdzimy, dla jakich wartości m punkt $A = (m - 1, 2m - 5)$ leży na prostej o równaniu $y = 3x - 7$.

Rozwiązanie

$2m - 5 = 3(m - 1) - 7$ ⟵ współrzędne punktu A mają spełniać równanie prostej

$2m - 3m = 5 - 3 - 7$

$-m = -5$, czyli $m = 5$

Odp.: Punkt A leży na prostej o równaniu $y = 3x - 7$, gdy $m = 5$.

Przykład 11 ◀ zad. 2.23

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których wykres funkcji liniowej $f(x) = (m-2)x + m + 7$ przechodzi przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Warunek zadania będzie spełniony, gdy współczynniki spełnią układ nierówności:

$$\begin{cases} m - 2 < 0 \\ m + 7 > 0 \end{cases}$$

⟵ współczynnik kierunkowy ujemny

⟵ wykres przecina oś y powyżej punktu $(0, 0)$

$$\begin{cases} m < 2 \\ m > -7 \end{cases}$$

Odp.: $m \in (-7; 2)$

Przykład 12 ◀ zad. 2.25

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru k, dla których funkcja liniowa $f(x) = (4 - 3k)x - 1 + k$ jest rosnąca, a jej wykres przecina oś y poniżej punktu $M = (0, -3)$.

Rozwiązanie

Warunki zadania będą spełnione, gdy współczynniki spełnią układ nierówności:

$$\begin{cases} 4 - 3k > 0 \\ -1 + k < -3 \end{cases}$$

⟵ współczynnik kierunkowy dodatni

⟵ wykres przecina oś y poniżej punktu $(0, -3)$

$$\begin{cases} -3k > -4 \\ k < -2 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} k < \frac{4}{3} \\ k < -2 \end{cases}$$

Odp.: $k \in (-\infty; -2)$

Przykład 13 ◀ zad. 2.28

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = |x - 1| - 4$ i podamy zbiór jej wartości.

Rozwiązanie

Rysujemy kolejne wykresy.

Krok 1: $g(x) = x - 1$

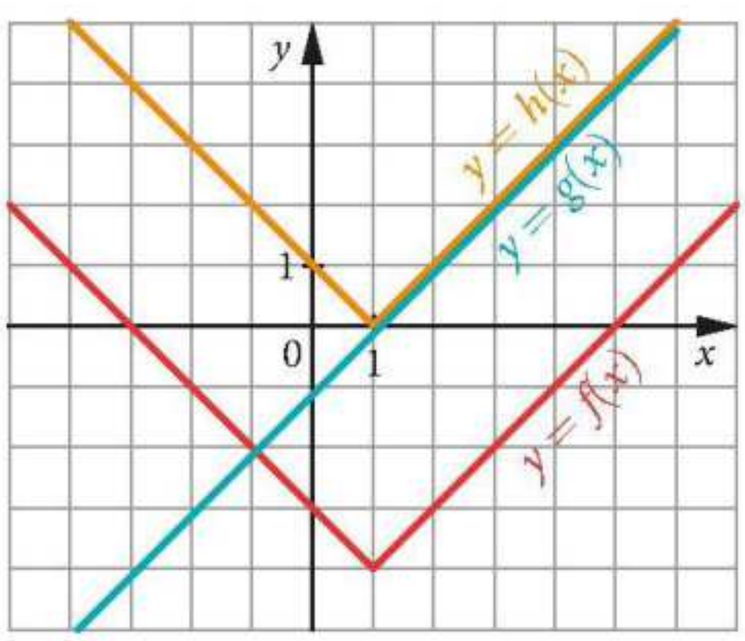
(przesunięcie równoległe prostej $y = x$ o wektor $[0, -1]$)

Krok 2: $h(x) = |g(x)| = |x - 1|$

(symetria części wykresu g leżących pod osią x względem tej osi)

Krok 3: $f(x) = h(x) - 4 = |x - 1| - 4$

(przesunięcie wykresu h o wektor $[0, -4]$)



Odp.: $ZW = \langle -4; \infty)$

Przykład 14 ◂ zad. 2.29

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = ||x + 2| - 3|$ i na jego podstawie podamy liczbę rozwiązań równania $f(x) = k$, gdzie $k \in \mathbf{R}$.

Rozwiązanie

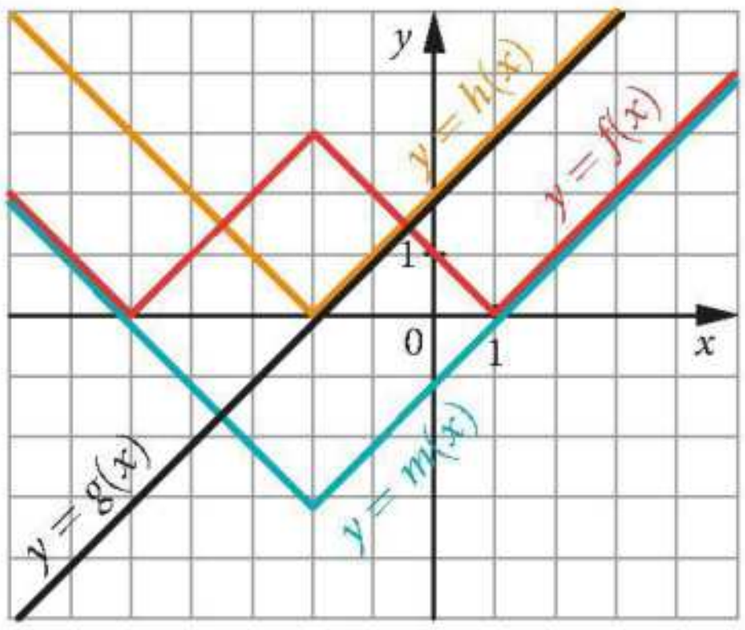
Rysujemy kolejne wykresy.

Krok 1: $g(x) = x + 2$ ⟵ przesunięcie równoległe prostej $y = x$ o wektor $[0, 2]$

Krok 2: $h(x) = |g(x)| = |x + 2|$ ⟵ symetria części wykresu g leżących poniżej osi x względem tej osi

Krok 3: $m(x) = h(x) - 3 = |x + 2| - 3$ ⟵ przesunięcie wykresu h o wektor $[0, -3]$

Krok 4: $f(x) = |m(x)| = ||x + 2| - 3|$ ⟵ symetria części wykresu m leżących poniżej osi x względem tej osi



Wartość k	Liczba rozwiązań równania $f(x) = k$
$k \in (-\infty; 0)$	0
$k = 0$	2
$k \in (0; 3)$	4
$k = 3$	3
$k \in (3; \infty)$	2

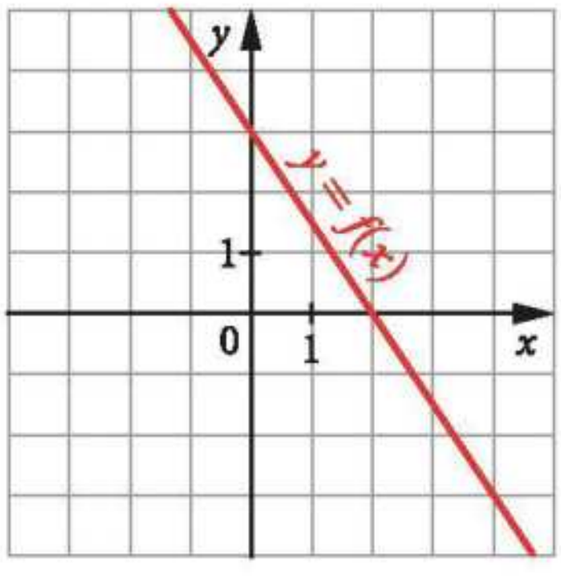
Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Wskaż punkt, w którym wykres funkcji $f(x) = -2x + 5$ przecina oś y.

A. $(0, -5)$ **B.** $(0, -2)$ **C.** $(0, 2)$ **D.** $(0, 5)$

2.2. Wskaż wzór funkcji, której wykres przedstawiony jest na rysunku.



A. $f(x) = \frac{2}{3}x + 3$

B. $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$

C. $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$

D. $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$

2.3. Wskaż miejsce zerowe funkcji $f(x) = 12x + 3$.

A. -3 **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 3

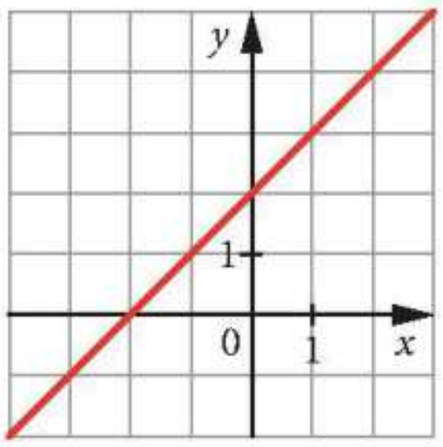
2.4. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$, wykorzystując interpretację graficzną jej współczynników.

a) $y = x + 2$ c) $y = -x - 4$ e) $y = 2x + 3$ g) $y = -3x - 1$

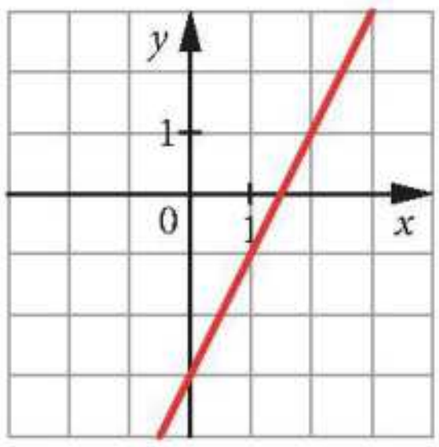
b) $y = -\frac{1}{2}x$ d) $y = \frac{1}{3}x - 2$ f) $y = \frac{3}{5}x$ h) $y = -\frac{7}{4}x + 1$

2.5. Podaj wzór funkcji f przedstawionej na wykresie.

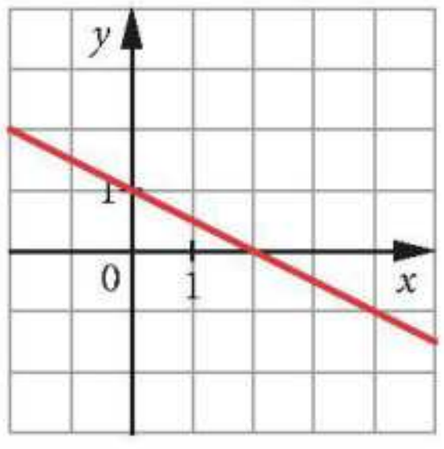
a)



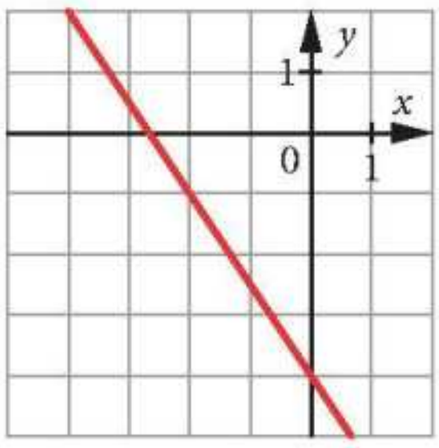
b)



c)



d)



2.6. Zaznacz tę część płaszczyzny, której punkty należą do wykresów funkcji $y = -x + b$ dla współczynników b spełniających podany warunek.

a) $b \geqslant 1$ b) $-2 \leqslant b \leqslant 2$ c) $|b| \geqslant 3$ d) $|b - 2| \leqslant \frac{1}{2}$

2.7. Wyznacz miejsce zerowe funkcji $y = f(x)$.

a) $f(x) = 5x - 2$ c) $f(x) = x - \sqrt{2}$ e) $f(x) = -4$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$ d) $f(x) = \sqrt{2}x$ f) $f(x) = \sqrt{3}x - 3$

2.8. Wyznacz miejsca zerowe funkcji $y = f(x)$.

a) $f(x) = |x + 5|$ c) $f(x) = |3x - 4| + \sqrt{2}$ e) $f(x) = |x + 4| - 7$

b) $f(x) = |2x - 6|$ d) $f(x) = |x - 1| - 4$ f) $f(x) = |2x - 1| - 5$

2.9. Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.

a) $f(x) = 3x - 6$ c) $f(x) = -7x$ e) $f(x) = 0$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$ d) $f(x) = -\sqrt{5}x + \frac{\sqrt{5}}{10}$ f) $f(x) = 2x - 1{,}6$

2.10. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ i opisz jej własności.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ c) $f(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ d) $f(x) = 4$

2.11. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ o podanym wzorze i dziedzinie D.

a) $f(x) = -x + 1$ $\quad D = (-\infty;\ 3\rangle$

b) $f(x) = x + 3$ $\quad D = \mathbf{N}$

c) $f(x) = -2x$ $\quad D = \mathbf{Z}$

d) $f(x) = x - 4$ $\quad D = (-1;\ 6\rangle$

2.12. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = -2x+1$ przyjmuje wartości: $-1, 0, 3, -2$?

2.13. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = 6x + 11$ przyjmuje wartości większe od -7?

2.14. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = -\frac{3}{7}x + 2$ przyjmuje wartości nieujemne?

2.15. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = 2\sqrt{5}x - 3\sqrt{5}$ przyjmuje wartości mniejsze od $\sqrt{5}$?

2.16. Sprawdź, które z podanych punktów należą do wykresu danej funkcji.

a) $f(x) = 3x - 4$ $\quad A = (1,\ 0),\ B = (-2,\ -5),\ C = (2,\ 2),\ D = (0,\ -4)$

b) $f(x) = -\sqrt{3}x + 2$ $\quad A = \left(\sqrt{3},\ -1\right),\ B = (0,\ 2),\ C = (-1,\ 3),\ D = \left(1,\ 2 - \sqrt{3}\right)$

2.17. Dla jakich wartości m punkt A leży na prostej l?

a) $A = (m,\ 2m)$ $\quad l\colon\ y = 5x + 3$

b) $A = (m + 1,\ 13)$ $\quad l\colon\ y = 7x - 1$

c) $A = (m - 2,\ m - 1)$ $\quad l\colon\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

d) $A = (2,\ -2)$ $\quad l\colon\ y = (m - 3)x + 4$

Zapis $l\colon\ y = 5x + 3$ czytamy „prosta l o równaniu $y = 5x + 3$”.

2.18. Wyznacz taką wartość parametru m, aby wykres funkcji $f(x) = mx + 3$ przechodził przez punkt $(2,\ -3)$.

2.19. Wyznacz wartość parametru m tak, aby do wykresu funkcji $y = f(x)$ należał punkt A. Dla obliczonego m napisz wzór funkcji.

a) $f(x) = 3mx - m + 7$ $\quad A = (3,\ -1)$

b) $f(x) = \frac{2}{5}x - (2m - 3)$ $\quad A = \left(2\frac{1}{2},\ 5\right)$

c) $f(x) = (7 - 4m)x + 11$ $\quad A = (-2,\ 1)$

d) $f(x) = 3\left(2 - 1\frac{2}{3}m\right) - 2x$ $\quad A = (-2,\ -5)$

2.20. Wyznacz taką wartość k, aby miejscem zerowym funkcji $f(x) = 2x + k$ była liczba -4.

2.21. Narysuj wykres funkcji $y = -3x + 5$.

a) Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji.

b) Sprawdź rachunkowo, czy punkty $A = (1, 2)$ i $B = (-3, -4)$ należą do wykresu tej funkcji.

c) Czy funkcja ta jest rosnąca, malejąca czy stała?

2.22. Dana jest funkcja $y = \frac{5}{4}x - 2$.

a) Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji.

b) Jaką wartość przyjmuje ta funkcja dla argumentu $\frac{4\sqrt{2}+8}{5}$?

c) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nie mniejsze od 8?

2.23. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wykres funkcji liniowej $f(x) = (m-2)x - 2(m+1)$ przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

2.24. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wykres funkcji liniowej $f(x) = \left(1 - 2\frac{1}{2}m\right)x + m + 5$ przechodzi przez I, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

2.25. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których funkcja liniowa $f(x) = (1-k)x - k + 5$ jest malejąca, a jej wykres przecina oś y powyżej punktu $A = (0, -2)$.

2.26. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których funkcja liniowa $f(x) = (6-k) - 2(k-1)x$ jest rosnąca, a jej wykres przecina oś y powyżej punktu $K = (0, 7)$.

2.27. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których funkcja liniowa $f(x) = (1-2k)x - (3k-2)$ jest malejąca, a jej wykres przecina oś y poniżej punktu $M = (0, -1)$.

2.28. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ i na jego podstawie określ zbiór wartości funkcji.

a) $f(x) = |x-2| + 1$

b) $f(x) = |x+5| + 2$

c) $f(x) = |x-4| - 7$

d) $f(x) = 2|x-3| - 4$

e) $f(x) = |3x+6| + 1$

f) $f(x) = \left|\frac{1}{2}x - 1\right| - 3$

2.29. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ i na jego podstawie podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, gdzie $m \in \mathbf{R}$.

a) $f(x) = \big||x-5|-7\big|$

b) $f(x) = \big||x-7|-2\big|$

c) $f(x) = \big||2x+6|-6\big|$

d) $f(x) = \left|\left|\frac{1}{3}x-2\right|-5\right|$

2.30. Dla jakich wartości m wykres funkcji $y = f(x)$ pokrywa się z osią x?

a) $f(x) = (7-|m|)x$

b) $f(x) = \left(m^2-16\right)x-m-4$

c) $f(x) = -2\left(m^2-9\right)x+m-3$

d) $f(x) = (|m|-9)x+m-3$

Prosto do matury

1. Dana jest funkcja $f(x) = 12x+3$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Funkcja f jest malejąca.

B. Funkcja f przyjmuje wartości nieujemne dla $x \leqslant -\frac{1}{4}$.

C. Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie $(0, 3)$.

2. Zaznacz tę część płaszczyzny, której punkty należą do wykresów funkcji $y = -\frac{1}{2}x+b$ dla współczynników b spełniających podwójną nierówność $-2 \leqslant b \leqslant \frac{3}{2}$.

3. Dana jest funkcja $g(x) = -2x+3$.

a) Znajdź miejsce zerowe funkcji g.

b) Jaka jest wartość funkcji g dla $x = 4\frac{1}{2}$?

c) Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości większe od 5?

4. Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji $f(x) = \big||x-7|-8\big|-2$ z osiami układu współrzędnych.

5. Dziedziną funkcji $f(x) = \left|\frac{3}{2}x-3\right|$ jest przedział $\langle 0; 4\rangle$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f.

b) Czy funkcja przyjmuje wartość największą? Jeśli tak, podaj tę wartość oraz argumenty, dla których funkcja ją przyjmuje.

c) Czy funkcja przyjmuje wartość najmniejszą? Jeśli tak, podaj tę wartość oraz argumenty, dla których funkcja ją przyjmuje.

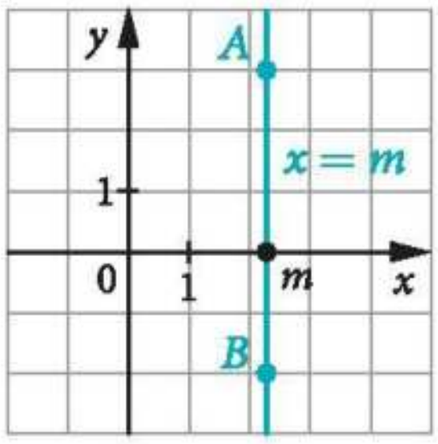
3. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Umiejętności:

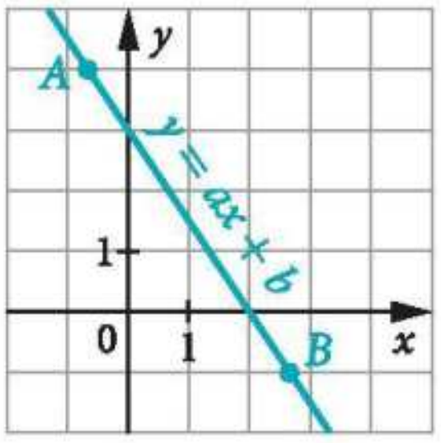
- wyznaczanie równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty
- wykorzystywanie własności funkcji liniowej do interpretacji zagadnień osadzonych w kontekście praktycznym

Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Na płaszczyźnie z układem współrzędnych rozpatrzymy dwa przypadki.

I. Punkty wyznaczają prostą, która **jest prostopadła do osi x**. Taka prosta nie jest wykresem żadnej funkcji, a jej równanie ma postać $x = m$.



II. Punkty wyznaczają prostą, która **nie jest prostopadła do osi x**. Taka prosta jest wykresem pewnej funkcji liniowej, a jej równanie ma postać $y = ax + b$.



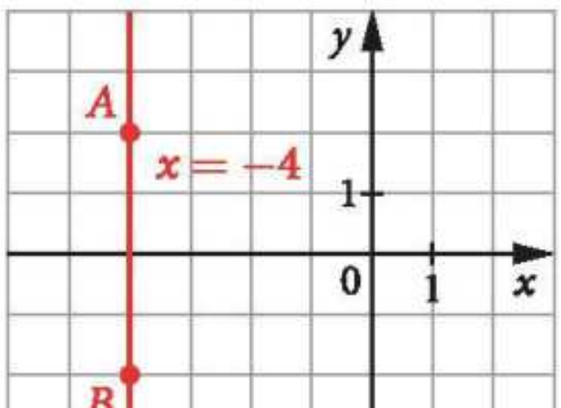
Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

Przykład 1 ◂ zad. 3.4

Wyznaczymy równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B.

Rozwiązanie

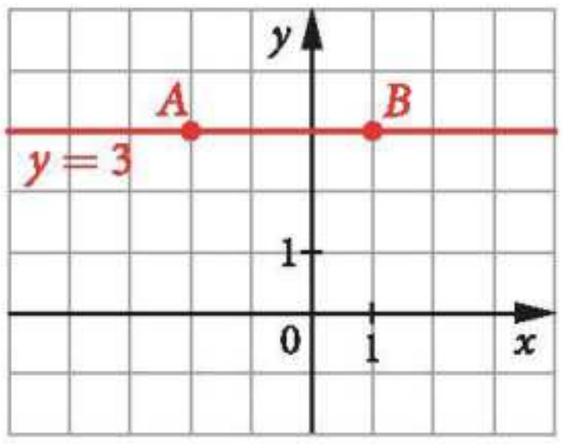
a) $A = (-4, 2)$ i $B = (-4, -2)$ ⟵ pierwsze współrzędne punktów A i B są takie same



⟵ prosta jest prostopadła do osi x

Odp.: Prosta AB ma równanie $x = -4$.

b) $A = (-2, 3)$ i $B = (1, 3)$ ⟵ drugie współrzędne punktów A i B są takie same

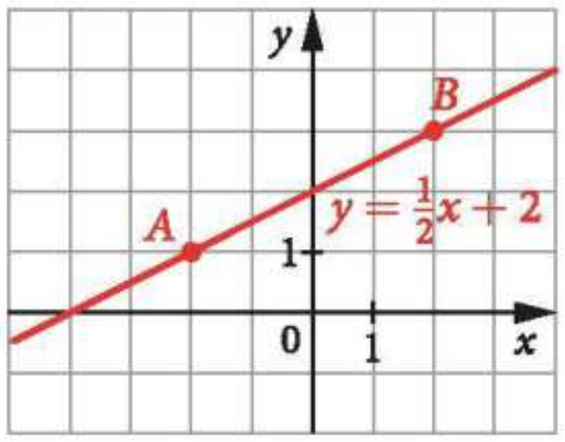


⟵ prosta jest równoległa do osi x

Odp.: Prosta AB ma równanie $y = 3$.

c) $A = (-2, 1)$ i $B = (2, 3)$

Prosta AB nie jest prostopadła do osi x, zatem jej równanie ma postać $y = ax + b$.

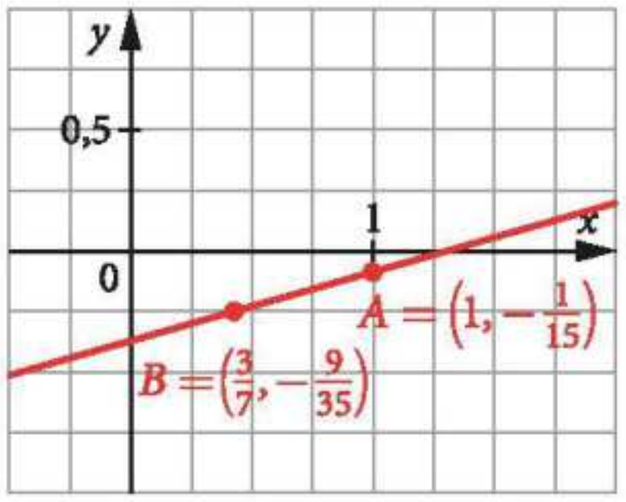


⟵ $a = \frac{1}{2}$, bo czterem jednostkom wzdłuż osi x odpowiadają dwie jednostki wzdłuż osi y

⟵ $b = 2$, bo prosta przecina oś y w punkcie $(0, 2)$

Odp.: Prosta AB ma równanie $y = \frac{1}{2}x + 2$.

d) $A = \left(1, -\frac{1}{15}\right)$ i $B = \left(\frac{3}{7}, -\frac{9}{35}\right)$



Prosta AB nie jest prostopadła do osi x, zatem jej równanie ma postać $y = ax + b$, ale w tym wypadku trudno jest odczytać wartości współczynników bezpośrednio z rysunku.

$$-\frac{1}{15} = a + b$$ ⟵ podstawiamy współrzędne punktu A w miejsce x i y

$$-\frac{9}{35} = \frac{3}{7}a + b$$ ⟵ podstawiamy współrzędne punktu B w miejsce x i y

Współczynniki a i b spełniają zatem układ równań:

$$\begin{cases} a + b = -\frac{1}{15} \\ \frac{3}{7}a + b = -\frac{9}{35} \end{cases}$$ ⟵ rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Odp.: Prosta AB ma równanie $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}$.

Wyznaczymy współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$, wiedząc, że $x_A \neq x_B$, czyli punkty A i B nie leżą na prostej równoległej do osi y.
Prosta AB ma równanie $y = ax + b$. Aby wyznaczyć współczynnik a, rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} y_A = x_A \cdot a + b \\ y_B = x_B \cdot a + b \end{cases}$$

metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} y_A = x_A \cdot a + b \\ y_B - y_A = x_B \cdot a - x_A \cdot a \end{cases}$$

W dalszych rozważaniach pominiemy pierwsze równanie – wyznaczamy tylko współczynnik kierunkowy. W drugim równaniu wyłączamy a przed nawias.

$$y_B - y_A = a(x_B - x_A) \qquad \longleftarrow \text{z założenia } x_A \neq x_B$$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Wniosek

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, gdzie $x_A \neq x_B$, jest równy $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Przykład 2 ◂ zad. 3.5

Wyznaczymy współczynnik kierunkowy a prostej AB, mając dane współrzędne punktów A i B.

Rozwiązanie

a) $A = \left(-2\sqrt{3}, 3\right)$ i $B = (2, 5)$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{2 + 2\sqrt{3}} = \frac{2}{2\left(1 + \sqrt{3}\right)} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Odp.: $a = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

b) $A = (-\pi, 7)$ i $B = \left(2\sqrt{13}, 7\right)$

$$a = \frac{7 - 7}{2\sqrt{13} + \pi} = 0 \qquad \longleftarrow \text{prosta } AB \text{ jest równoległa do osi } x$$

Odp.: $a = 0$

Przykład 3 ◀ zad. 3.6

Napiszemy równanie prostej AB, wiedząc, że $A = \left(-2\sqrt{3},\ 3\right)$ i $B = (2,\ 5)$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy obliczenia z przykładu 2a.

Prosta AB ma równanie $y = ax + b$, przy czym:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \text{ czyli:}$$

$$y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}x + b$$

$$5 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \cdot 2 + b \qquad \longleftarrow \text{podstawiamy współrzędne punktu } B \text{ w miejsce } x \text{ i } y$$

$$5 = \sqrt{3} - 1 + b, \text{ czyli } b = 6 - \sqrt{3}$$

Odp.: Prosta AB ma równanie $y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}x + 6 - \sqrt{3}$.

Wniosek

Aby wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, najpierw porównujemy pierwsze współrzędne tych punktów:

- jeśli są one równe, prosta ma równanie w postaci niekierunkowej $x = m$,
- jeśli są one różne, prosta ma równanie w postaci kierunkowej $y = ax + b$.

  Wówczas:
  - odczytujemy wartości a i b z wykresu lub
  - rozwiązujemy odpowiedni układ równań, lub
  - wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej, a drugi współczynnik obliczamy, rozwiązując odpowiednie równanie.

Przykład 4 ◀ zad. 3.9

Sprawdzimy, czy punkty $A = (-3,\ 1)$, $B = (-1,\ 2)$ i $C = (3,\ 5)$ leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Jedna z metod rozwiązywania tego zadania – sprawdzenie równoległości odpowiednich wektorów – była omówiona wcześniej. Inną metodą jest znalezienie równania prostej przechodzącej przez dwa z podanych punktów, a następnie sprawdzenie, czy współrzędne trzeciego punktu spełniają to równanie.

Wyznaczamy równanie prostej AB.

$$\begin{cases} 1 = -3a + b \\ 2 = -a + b \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 = -2a \\ 2 = -a + b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

Prosta AB ma równanie $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

$\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 \neq 5$ ⟵ podstawiamy współrzędne punktu C

Odp.: Punkty A, B i C nie leżą na jednej prostej.

Przykład 5 ◂ zad. 3.15

O godzinie 2^{00} stan wody w rzece był równy 2,4 m. O godzinie 4^{00} stan wody wynosił już 3,2 m. Zakładamy, że woda przybiera wciąż w tym samym tempie, co oznacza, że stan wody (w zależności od czasu) jest opisany za pomocą funkcji $w = a \cdot t + b$, gdzie w oznacza wysokość wody w metrach, natomiast t – kolejne godziny. Obliczymy, kiedy poziom wody osiągnie stan ostrzegawczy równy 4,4 m.

Rozwiązanie

Wykres tej funkcji przechodzi przez dwa podane punkty (2, 2,4) i (4, 3,2). Po podstawieniu ich współrzędnych do wzoru otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2{,}4 = a \cdot 2 + b \\ 3{,}2 = a \cdot 4 + b \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest para liczb $a = 0{,}4$ i $b = 1{,}6$. Zależność stanu wody od czasu (w godzinach) ma więc postać:

$$w = 0{,}4t + 1{,}6$$

Aby wyznaczyć godzinę, o której woda osiągnie stan ostrzegawczy, trzeba znaleźć taki argument t, dla którego wartość $w = 4{,}4$, czyli rozwiązać równanie:

$$0{,}4t + 1{,}6 = 4{,}4$$
$$t = 7$$

Odp.: Woda osiągnie stan ostrzegawczy o godzinie 7^{00}.

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wskaż równanie prostej przechodzącej przez punkty (−2, 2) i (4, −1).

A. $y = \frac{1}{2}x + 1$ **B.** $y = \frac{1}{2}x - 1$ **C.** $y = -\frac{1}{2}x + 1$ **D.** $y = -\frac{1}{2}x - 1$

3.2. Wskaż parę punktów, przez które nie przechodzi wykres żadnej funkcji liniowej.

A. (3, −2) i (−3, −2)
B. (3, −2) i (−3, 2)
C. (−3, 0) i (0, 0)
D. (3, −2) i (3, 2)

3.3. Wskaż punkt należący do prostej przechodzącej przez punkty (0, 3) i (6, 5).

A. (100, 37) **B.** (101, 37) **C.** (102, 37) **D.** (103, 37)

3.4. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez dane punkty A i B.

a) $A = (2, 4)$ $B = (-5, 4)$
b) $A = \left(1\frac{2}{3}, -2\right)$ $B = \left(1\frac{7}{8}, -2\right)$
c) $A = (-7, 5)$ $B = (-4, -1)$
d) $A = \left(5, \frac{1}{2}\right)$ $B = \left(5, 1\frac{1}{2}\right)$
e) $A = (-1, -12)$ $B = (3, 8)$
f) $A = \left(2\frac{1}{5}, 3\right)$ $B = \left(1, -1\frac{1}{2}\right)$

3.5. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej AB, mając dane współrzędne punktów A i B.

a) $A = (-2, -7),\ B = (-5, 9)$
b) $A = \left(3\frac{1}{2}, -5\right),\ B = \left(2\frac{1}{6}, -1\right)$
c) $A = \left(\frac{2}{3}\sqrt{7}, \sqrt{7}\right),\ B = \left(\sqrt{7} - 1, -1\right)$
d) $A = \left(1, \sqrt{3} + 2\right),\ B = \left(-\sqrt{3}, 3\right)$
e) $A = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -3\right),\ B = \left(-2\sqrt{3}, 2\frac{5}{6}\right)$
f) $A = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right),\ B = \left(-\sqrt{3}, 2\right)$

3.6. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej AB. Napisz równanie prostej.

a) $A = \left(-\sqrt{3}, -8\right),\ B = (1, 0)$
b) $A = \left(-\frac{11}{2}, 22\right),\ B = (7, -15{,}5)$
c) $A = \left(1 - \sqrt{2}, -4\right),\ B = \left(\sqrt{8}, \sqrt{8} + 1\right)$
d) $A = \left(1\frac{2}{3}, 2\sqrt{3} - 1\right),\ B = \left(\sqrt{3}, 1\frac{2}{5}\sqrt{3}\right)$
e) $A = \left(\sqrt{3}, -1\right),\ B = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{3}{2}\right)$
f) $A = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{5}\right),\ B = (0, -5)$

3.7. Wyznacz równanie prostej przecinającej osie układu współrzędnych w podanych punktach A i B.

a) $A = (0, -1)$ $B = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$
b) $A = (0, -1)$ $B = (-2, 0)$
c) $A = (0, 4)$ $B = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$
d) $A = (0, 3)$ $B = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$
e) $A = (0, 7)$ $B = \left(2\frac{1}{3}, 0\right)$
f) $A = \left(0, -\sqrt{3}\right)$ $B = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

D **3.8.** Wykaż, że prostą przecinającą osie układu współrzędnych w punktach $(a, 0)$ oraz $(0, b)$ dla $a \neq 0$ i $b \neq 0$ można opisać za pomocą równania $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

3.9. Sprawdź, czy punkty P, M, L leżą na jednej prostej.

a) $P = (2, 0)$ $M = (0, -1)$ $L = (4, 2)$
b) $P = (1, 0)$ $M = (0, -3)$ $L = (2, 2)$
c) $P = (0, 4)$ $M = (-2, 0)$ $L = (-3, -2)$
d) $P = (1, -1)$ $M = (-1, 7)$ $L = \left(\frac{3}{4}, -2\right)$
e) $P = \left(5, 2\sqrt{2}\right)$ $M = (3, 0)$ $L = \left(1, -2\sqrt{2}\right)$
f) $P = \left(\frac{1}{2}, -5\frac{1}{2}\right)$ $M = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ $L = (1, 1)$

3.10. Wyznacz brakującą współrzędną tak, aby punkty A, B, C były współliniowe.

a) $A = (1, 2)$ $B = (3, 6)$ $C = (-1, y)$
b) $A = (2, -1)$ $B = \left(x, -\frac{3}{2}\right)$ $C = (-4, 2)$
c) $A = (x, -3)$ $B = (5, 2)$ $C = (-4, -7)$
d) $A = (-3, -7)$ $B = (1, 1)$ $C = (0, y)$
e) $A = \left(1, 1\frac{1}{3}\right)$ $B = (x, -2)$ $C = (-3, 4)$
f) $A = \left(\sqrt{5}, y\right)$ $B = \left(-1, -\sqrt{5}\right)$ $C = \left(2, 3 - \sqrt{5}\right)$

3.11. Jaki warunek musi spełniać m, aby punkty R, S, T nie były współliniowe?

a) $R = (-1, 0)$ $S = (0, 2)$ $T = (m, 4)$
b) $R = (0, -1)$ $S = (1, 0)$ $T = (2, m)$
c) $R = (0, 0)$ $S = (-1, 3)$ $T = (m, -6)$
d) $R = (-1, -1)$ $S = (0, 1)$ $T = (2, m)$

3.12. Sprawdź, czy istnieje taka wartość k, dla której punkty
$A = (-12, -8)$, $B = (-4 - |2k|, -7)$, $C = (4, -4)$, $D = (|6k - 4|, -1)$
są współliniowe.

D **3.13.** Wykaż, że punkty $A = \left(3, -3\sqrt{2}\right)$, $B = \left(\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$, $C = \left(-\sqrt{5}, \sqrt{10}\right)$ nie są współliniowe.

3.14. Komputer pobiera z internetu ze stałą prędkością plik o dużym rozmiarze. Pobieranie rozpoczęło się o 17^{32} i do 17^{40} pobrane zostało 15% pliku.

a) O której godzinie plik zostanie pobrany w całości?
b) O której godzinie skończyłoby się pobieranie pliku o dwa razy większym rozmiarze, gdyby prędkość pobierania była dwa razy większa?

3.15. W wannie znajduje się 120 litrów wody. Po wyjęciu korka woda zaczyna wypływać w stałym tempie i po 30 sekundach pozostaje jej 95 litrów. Podaj wzór i dziedzinę funkcji, która opisuje, ile wody znajduje się w wannie po t minutach.

* **3.16.** Jeden z rodzajów cząstek elementarnych emitowanych przez Słońce to neutrino, poruszające się z prędkością zbliżoną do prędkości światła. Przyjmijmy, że jedno z neutrin powstało na Słońcu o godzinie 12^{00}, zmierza w kierunku Ziemi, przenika przez nią i dalej porusza się w przestrzeni kosmicznej.

a) Podaj wzór funkcji, która opisuje odległość tego neutrina od Ziemi (w kilometrach) w zależności od czasu mierzonego od godziny 12^{00} (w sekundach).
b) O której godzinie neutrino przeniknie przez Ziemię? Podaj wynik z dokładnością do 1 minuty.
c) O której godzinie neutrino minie orbitę Neptuna? Podaj wynik z dokładnością do 10 minut.

W obliczeniach przyjmij, że prędkość neutrina wynosi $3 \cdot 10^5$ km/s, odległość Ziemi od Słońca jest równa $1{,}5 \cdot 10^8$ km, a odległość od Ziemi do orbity Neptuna jest równa $4{,}35 \cdot 10^9$ km. Pomiń średnicę Ziemi.

Prosto do matury

1. Dane są punkty $A = (2, -1)$ i $B = (4, 0)$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Prosta przechodząca przez punkty A i B ma równanie $y = \frac{1}{2}x - 2$.

B. Punkty A, B oraz $C = (-4, -4)$ są współliniowe.

C. Punkty A, B oraz $C = (100, 48)$ są współliniowe.

2. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $(-2, 5)$ i $(6, 3)$.

3. Sprawdź, czy punkty $A = \left(-\frac{2}{3}, -2\right)$, $B = \left(\frac{5}{3}, 1\right)$, $C = \left(3, \frac{19}{7}\right)$ należą do jednej prostej.

4. Dla jakich wartości k punkty $A = (-8, -5)$, $B = (|3k + 1|, 0)$, $C = \left(5, \frac{3}{2}\right)$ są współliniowe?

5. W pewien letni poranek o godzinie 7^{25} temperatura wynosiła 22,3°C, a o godzinie 9^{45} było już 26,2°C. Zakładając, że temperatura w opisywanym czasie rosła w stałym tempie, oblicz, o której godzinie temperatura przekroczyła 25°C.

4. Rysowanie wykresów funkcji przedziałami liniowych

Umiejętności:
- rysowanie wykresu funkcji wyrażonej różnymi wzorami w przedziałach
- odczytywanie własności takich funkcji na podstawie wykresu

Przykład 1

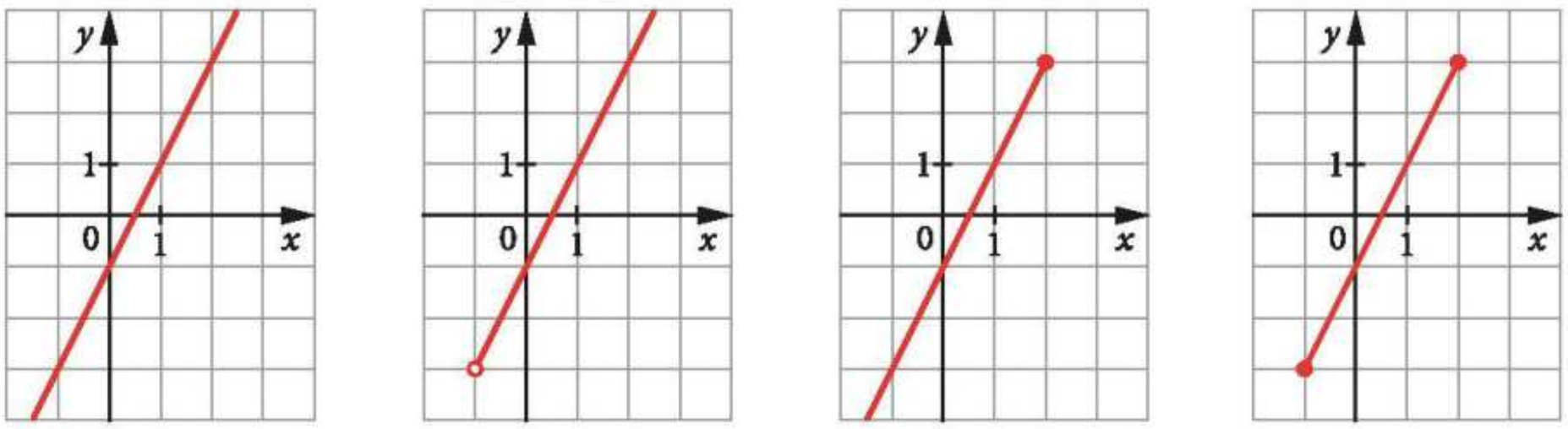
Naszkicujemy wykres funkcji $y = 2x - 1$ określonej dla czterech różnych dziedzin.

a) $x \in \mathbf{R}$ b) $x > -1$ c) $x \leqslant 2$ d) $x \in \langle -1; 2 \rangle$

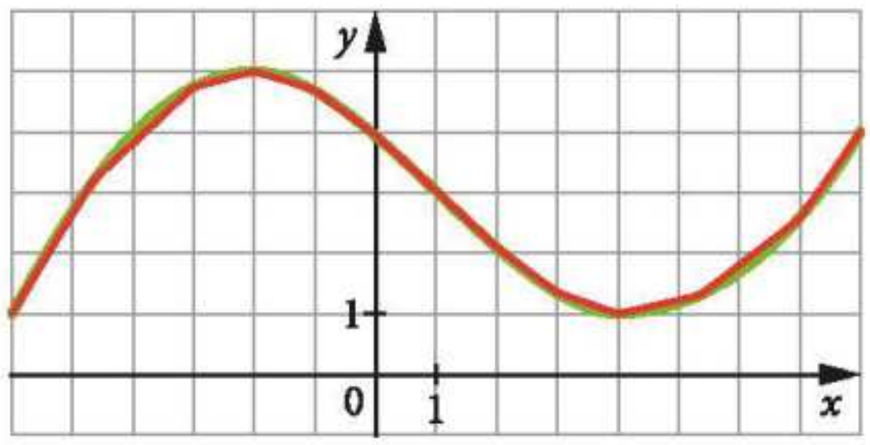
Rozwiązanie

Obliczmy wartości funkcji dla dwóch argumentów: $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$ oraz $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Wykresami funkcji są odpowiednio:

a) prosta b) półprosta bez początku c) półprosta d) odcinek



Często spotykamy się z wykresami utworzonymi z odcinków. Różne funkcje można badać, przybliżając je w przedziałach za pomocą funkcji liniowych (zobacz rysunek obok).



Nauczymy się teraz sporządzać zbudowane z odcinków wykresy funkcji opisanych za pomocą wzoru.

Przykład 2 ◂ zad. 4.6, 4.7

Dziedziną funkcji f jest suma przedziałów $(-\infty; 0\rangle \cup \langle 1; \infty)$. W każdym z przedziałów funkcja została określona inaczej: argumentom z przedziału $(-\infty; 0\rangle$ przyporządkowuje wartości zgodnie ze wzorem $f(x) = x + 1$, natomiast argumentom z przedziału $\langle 1; \infty)$ według wzoru $f(x) = x - 1$. Narysujemy wykres funkcji f.

Rozwiązanie

Podaną funkcję możemy wyrazić wzorem $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \in (-\infty;\ 0\rangle \\ x-1 & \text{dla } x \in \langle 1;\ \infty) \end{cases}$.

Obliczmy wartości funkcji f w kilku punktach.

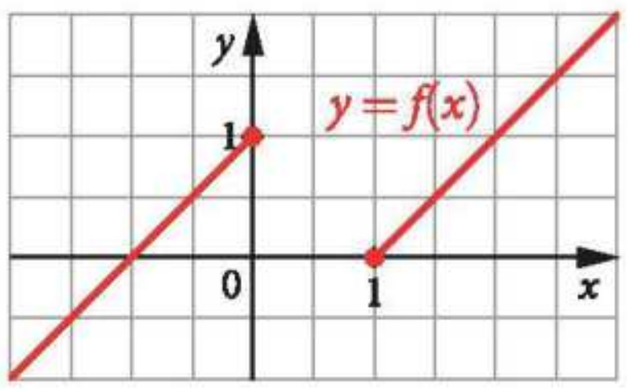
$f(2) = 2 - 1 = 1$ ⟵ $2 \in \langle 1;\ \infty)$, więc wartość funkcji dla $x = 2$ obliczamy ze wzoru $f(x) = x - 1$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ ⟵ $-\frac{1}{2} \in (-\infty;\ 0\rangle$, więc wartość funkcji dla $x = -\frac{1}{2}$ obliczamy ze wzoru $f(x) = x + 1$

$f(0) = 0 + 1 = 1$ ⟵ $0 \in (-\infty;\ 0\rangle$

$f(1) = 1 - 1 = 0$ ⟵ $1 \in \langle 1;\ \infty)$

Liczby z przedziału $(0;\ 1)$ nie należą do dziedziny tej funkcji. Fragment wykresu odpowiadający argumentom z przedziału $(-\infty;\ 0\rangle$ jest półprostą; fragment odpowiadający argumentom z przedziału $\langle 1;\ \infty)$ też jest półprostą. Wykresem funkcji $y = f(x)$ jest więc suma dwóch półprostych.



Przykład 3

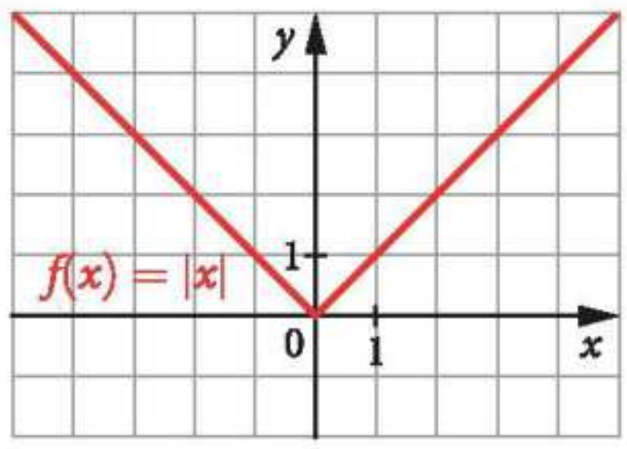
Podamy dziedzinę i narysujemy wykres funkcji $f(x) = |x|$.

Rozwiązanie

Jeśli przyjmiemy, że $g(x) = x$, to $f(x) = |g(x)|$ i wykres funkcji f otrzymamy, korzystając z wcześniej poznanych reguł. Możemy też postąpić inaczej.

Zapiszmy wzór funkcji f w następującej postaci: $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$. Fragment wykresu odpowiadający argumentom z przedziału $(-\infty;\ 0)$ jest półprostą bez początku $(0,\ 0)$; fragment odpowiadający argumentom z przedziału $\langle 0;\ \infty)$ jest półprostą o początku $(0,\ 0)$. Wykres tej funkcji jest więc sumą dwóch półprostych jak na rysunku.

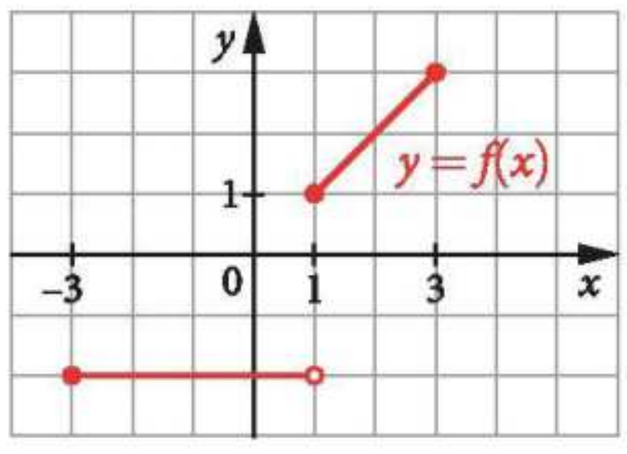


Przykład 4 ◀ zad. 4.6, 4.7

Wyznaczymy dziedzinę i narysujemy wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in \langle -3;\ 1) \\ x & \text{dla } x \in \langle 1;\ 3\rangle \end{cases}$.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji jest suma $\langle -3;\ 1) \cup \langle 1;\ 3\rangle = \langle -3;\ 3\rangle$. Skoro $1 \in \langle 1; 3\rangle$, to $f(1) = 1$. Ma to swoją ilustrację na wykresie w postaci zamalowanego kółeczka odpowiadającego punktowi o współrzędnych $(1,\ 1)$ i pustego kółeczka odpowiadającego punktowi o współrzędnych $(1,\ -2)$.



Przykład 5 ◀ zad. 4.6, 4.7

Wyznaczymy dziedzinę i narysujemy wykres podanej funkcji.

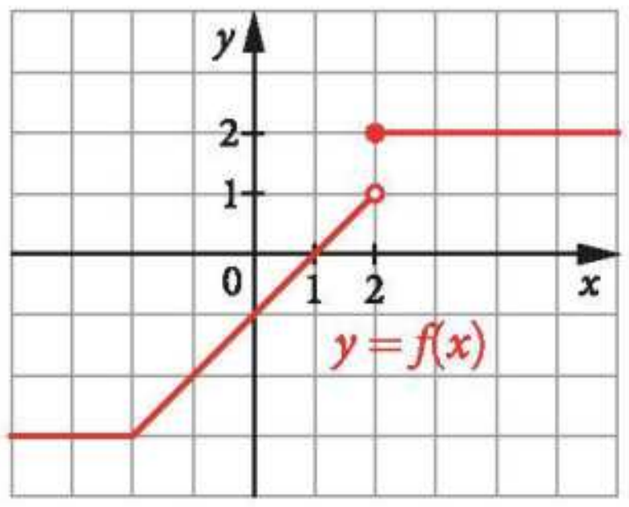
$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x - 1 & \text{dla } x \in \langle -2; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$$

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji f jest suma trzech przedziałów równa zbiorowi liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$. W pierwszym i ostatnim z podanych przedziałów funkcja f jest stała. Sprawdzamy, jaką wartość funkcja f przyjmuje dla $x = -2$.

$$f(-2) = -2 - 1 = -3$$

Zwróćmy uwagę, że w punkcie $x = -2$ puste kółeczko z lewej strony nakłada się na zamalowane kółeczko z prawej strony. Inaczej jest dla argumentu $x = 2$. Z lewej strony wykres „dochodzi" do pustego kółeczka w punkcie $(2, 1)$, a z prawej zaczyna się zamalowanym kółeczkiem w punkcie $(2, 2)$.



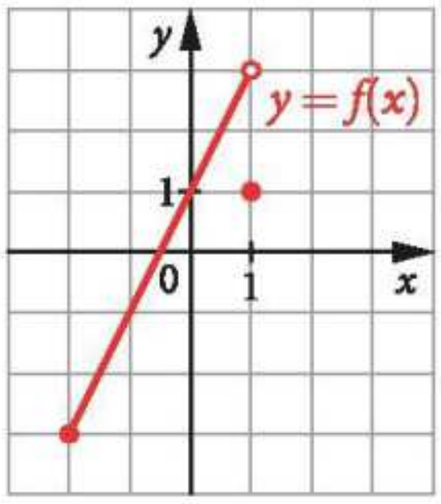
Przykład 6 ◀ zad. 4.11

Narysujemy wykres i opiszemy własności funkcji $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x = -2 \\ 2x + 1 & \text{dla } x \in (-2; 1) \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$.

Rozwiązanie

Pierwsza i ostatnia linia wzoru funkcji oznaczają, że do wykresu należą punkty $(-2, -3)$ i $(1, 1)$. Pozostałą część wykresu stanowi odcinek bez końców. Punkt $(-2, -3)$ jest akurat jednym z końców odcinka $(2 \cdot (-2) + 1 = -3)$, natomiast punkt $(1, 1)$ nie ma tej własności $(2 \cdot 1 + 1 = 3 \neq 1)$.

Wzór funkcji f można zatem zapisać krócej.



$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dla } x \in \langle -2; 1) \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Własności funkcji f:

- $D = \langle -2; 1\rangle$, $ZW = \langle -3; 3)$,
- $f(x) = 0$ dla $x = -\frac{1}{2}$, $f(x) > 0$ dla $x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right\rangle$, $f(x) < 0$ dla $x \in \left\langle -2; -\frac{1}{2}\right)$,
- f nie przyjmuje wartości największej,
  f przyjmuje wartość najmniejszą równą -3 dla $x = -2$,
- f nie jest monotoniczna, ale w przedziale $\langle -2; 1)$ jest rosnąca,
- równanie $f(x) = m$ ma 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -3) \cup \langle 3; \infty)$,
  1 rozwiązanie dla $m \in \langle -3; 3) - \{1\}$, 2 rozwiązania dla $m = 1$.

Przykład 7 ◂ zad. 4.13

W pewnym państwie przyjęto następujące zasady płacenia podatku dochodowego:
- obywatel, którego roczny dochód nie przekracza 1000 euro, nie płaci podatku,
- obywatel, którego roczny dochód przekracza 1000 euro, płaci podatek w wysokości 20% swojego dochodu pomniejszonego o 1000 euro.

Na przykład podatek należny od dochodu w wysokości 5000 euro wynosi:

$$20\% \cdot (5000 - 1000) = 800 \text{ (euro)}$$

Podamy wzór i naszkicujemy wykres funkcji opisującej podatek p, który należy zapłacić od dochodu w wysokości d euro.

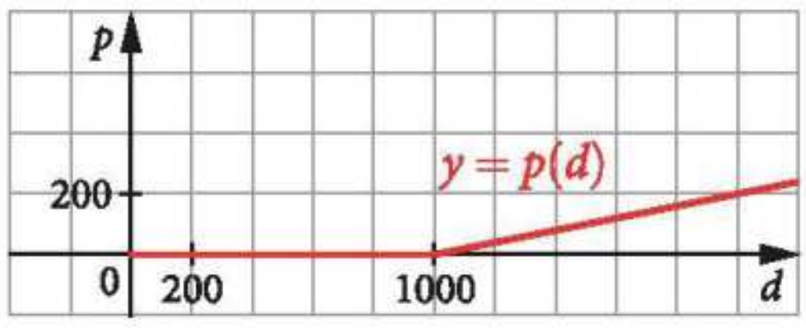
Rozwiązanie

Funkcję można określić za pomocą wzoru:

$$p(d) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leqslant d \leqslant 1000 \\ 0{,}2(d - 1000) & \text{dla } d > 1000 \end{cases}$$

czyli

$$p(d) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leqslant d \leqslant 1000 \\ 0{,}2d - 200 & \text{dla } d > 1000 \end{cases}$$



Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Wskaż zbiór wartości funkcji $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ x - 2 & \text{dla } x \in \langle 0; \infty) \end{cases}$.

A. $\langle -2; \infty)$ **B.** $(-\infty; 1\rangle$ **C.** $(-\infty; -2) \cup \langle 1; \infty)$ **D.** $\mathbb{R}$

4.2. Dana jest funkcja $f(x) = -\sqrt{17}x + \sqrt{33}$ dla $x \in \langle -119; -118)$. Wskaż zdanie prawdziwe dotyczące tej funkcji.

A. Funkcja f przyjmuje wartość największą i przyjmuje wartość najmniejszą.
B. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej i przyjmuje wartość najmniejszą.
C. Funkcja f nie przyjmuje wartości najmniejszej i przyjmuje wartość największą.
D. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej ani wartości najmniejszej.

4.3. Wskaż wzór funkcji, która ma miejsce zerowe.

A. $f(x) = x + 3$ dla $x \in \langle -1; 4)$
B. $f(x) = -2x - 11$ dla $x \in (-\infty; -6)$
C. $f(x) = 3x - 6$ dla $x \in (-2; 2\rangle$
D. $f(x) = \sqrt{3}x$ dla $x \in (0; \infty)$

4.4. Narysuj wykres funkcji g o podanej dziedzinie D.

a) $g(x) = x - 1$, $D = \langle -2; 2)$
b) $g(x) = 2x - 2$, $D = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 1; \infty)$
c) $g(x) = -2x + 5$, $D = \langle -1; 2) \cup \langle 3; 5\rangle$
d) $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$, $D = (-\infty; -9) \cup \langle 3; 6\rangle$

4.5. Określ dziedzinę i wzór funkcji, której wykresem jest podany zbiór.

a) odcinek o końcach (0, 1) i (1, 6)

b) odcinek o końcach (1, −1) i (2, 2)

c) półprosta równoległa do osi x o początku w punkcie (−3, 3) i przecinająca oś y

4.6. Sporządź wykres funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{dla } x \in \langle -2; -1\rangle \\ 3x-2 & \text{dla } x \in \langle 1; 2\rangle \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ x-3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty\rangle \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 2x-3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty\rangle \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \langle -3; 1\rangle \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty\rangle \end{cases}$

4.7. Sporządź wykres funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ \frac{1}{3}x+2 & \text{dla } x \in \langle -3; 6\rangle \\ -\frac{1}{2}x+7 & \text{dla } x \in \langle 6; \infty\rangle \end{cases}$

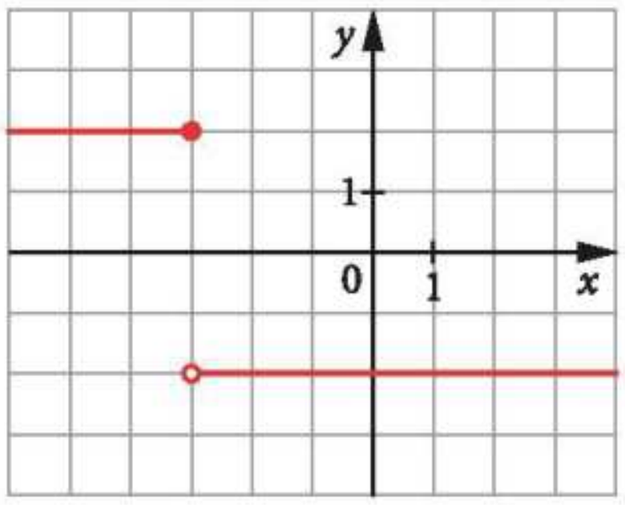
b) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 0 & \text{dla } x = -1 \\ x-2 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-4; -3\rangle \\ -2-4x & \text{dla } x \in (-3; 0) \\ 2x-2 & \text{dla } x \in \langle 0; 2) \end{cases}$

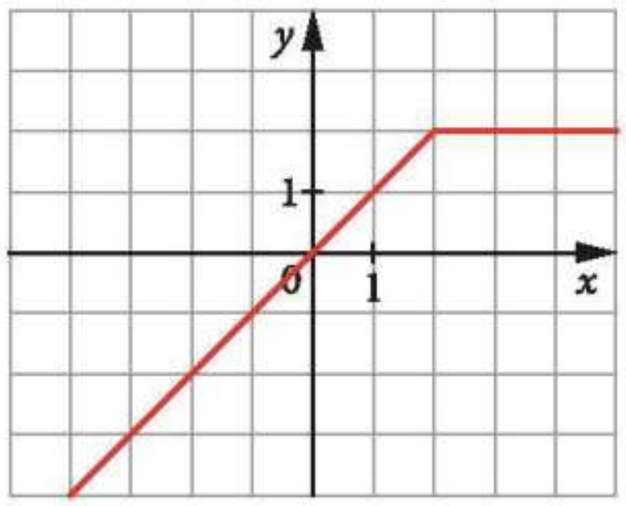
d) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x = -1 \\ -x & \text{dla } x \in (-1; 1) \\ -1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

4.8. Podaj wzór funkcji przedstawionej na wykresie.

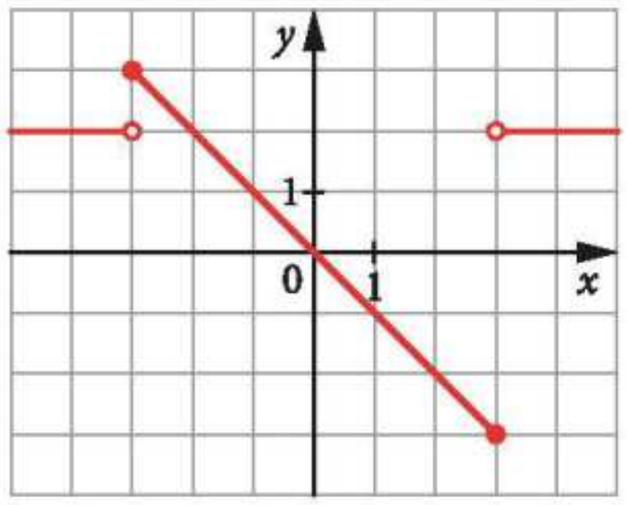
a)



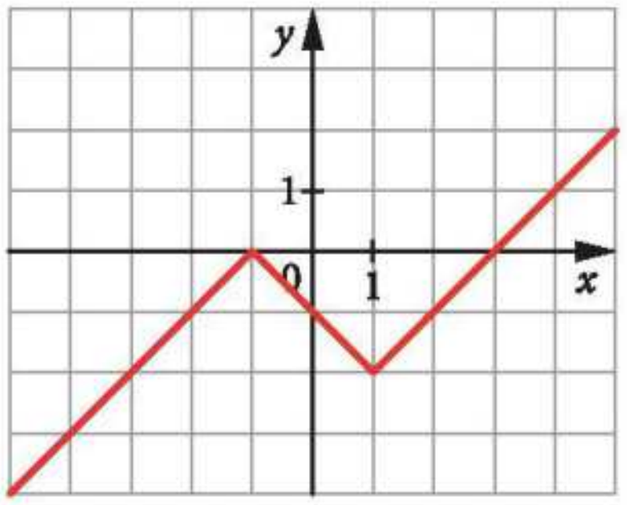
b)



c)



d)



4.9. Sporządź wykres funkcji i na jego podstawie określ monotoniczność funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x < 2 \\ 3x-1 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$

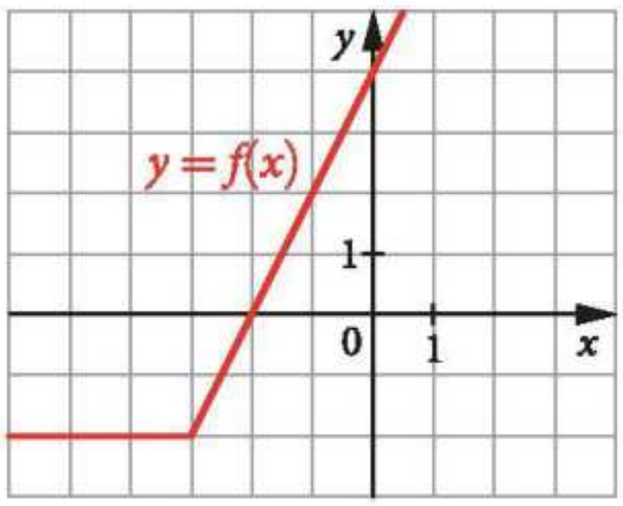
b) $h(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ -5x+2 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

c) $g(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{dla } x < 5 \\ -2x+3 & \text{dla } x \geqslant 5 \end{cases}$

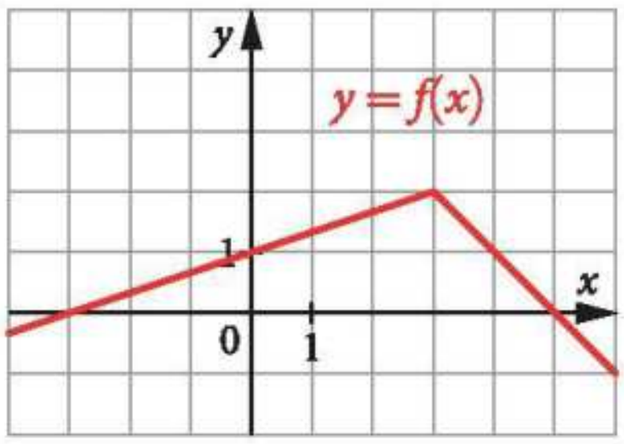
d) $z(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < 0{,}5 \\ 2 & \text{dla } x \geqslant 0{,}5 \end{cases}$

4.10. Wyznacz współczynniki a, b w taki sposób, aby podany wzór określał funkcję przedstawioną na rysunku.

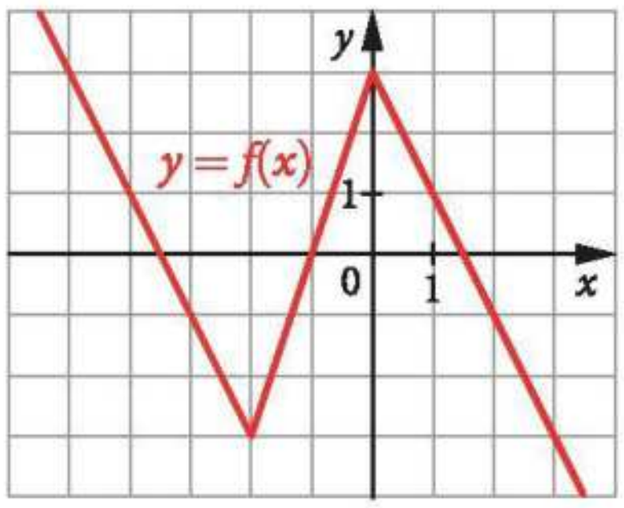
a) $f(x) = \begin{cases} a & \text{dla } x \leqslant -3 \\ 2x + b & \text{dla } x > -3 \end{cases}$



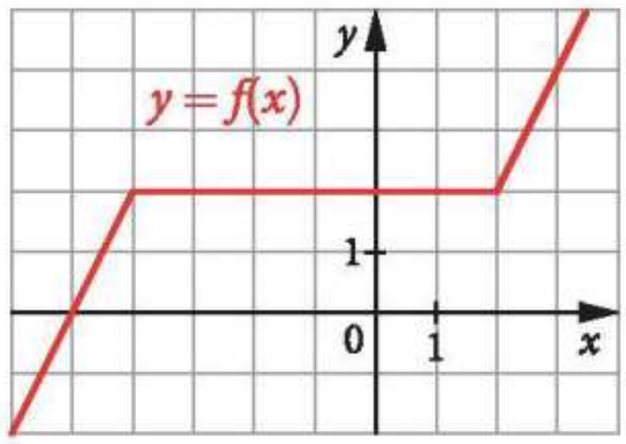
b) $f(x) = \begin{cases} -x + a & \text{dla } x \geqslant 3 \\ \frac{1}{3}x + b & \text{dla } x < 3 \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{dla } x \in (-\infty; -2\rangle \\ 3x + b & \text{dla } x \in (-2; 0\rangle \\ -2x + b & \text{dla } x \in (0; \infty) \end{cases}$



d) $f(x) = \begin{cases} ax + 10 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ b & \text{dla } x \in \langle -4; 2\rangle \\ 2x - b & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$



4.11. Narysuj wykres funkcji.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 6 & \text{dla } x \leqslant -2 \\ x & \text{dla } -2 < x \leqslant 1 \\ -3x + 4 & \text{dla } 1 < x \leqslant 2 \\ x - 4 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

Na podstawie wykresu oceń, które zdania są prawdziwe, a które fałszywe.

A. Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą równą -2 dla dwóch argumentów: $x = -2$, $x = 2$.

B. W przedziale $\langle -2; 1\rangle$ funkcja f jest rosnąca.

C. W przedziale $\langle 2; \infty)$ funkcja f jest rosnąca.

D. W zbiorze $\langle -2; 1\rangle \cup \langle 2; \infty)$ funkcja f jest rosnąca.

E. Funkcja f przyjmuje wartość największą równą 1 dla argumentu $x = 1$.

F. Dla $x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

G. Dla $x \in (-\infty; -3) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right) \cup (4; \infty)$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

4.12. Sporządź wykres funkcji i na jego podstawie określ monotoniczność funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{dla } x < 1 \\ 2x & \text{dla } 1 \leqslant x < 3 \\ x+3 & \text{dla } x \geqslant 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -5x-7 & \text{dla } x \leqslant -1 \\ -x-3 & \text{dla } -1 < x \leqslant 2 \\ -2x-1 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x < -2 \\ 2 & \text{dla } -2 \leqslant x < 0 \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x < -3 \\ 2x+5 & \text{dla } -3 \leqslant x < 1 \\ 3x+5 & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$

4.13. Przyjrzyj się propozycjom rozwiązań podatkowych przedstawionym przez trzy partie polityczne.

partia A	• Każdy obywatel płaci podatek w wysokości 20% swojego rocznego dochodu.
partia B	• Każdy obywatel, którego roczny dochód nie przekracza 5000 zł, nie płaci podatku. • Każdy obywatel, którego roczny dochód przekracza 5000 zł, płaci podatek w wysokości 25% swojego dochodu pomniejszonego o 5000 zł.
partia C	• Każdy obywatel, którego roczny dochód nie przekracza 10 000 zł, płaci podatek w wysokości 20% swojego dochodu. • Każdy obywatel, którego roczny dochód przekracza 10 000 zł, płaci podatek w wysokości 30% swojego dochodu.

a) Porównaj, jaki podatek należy zapłacić od rocznego dochodu w wysokości 20 000 zł według każdej z przedstawionych zasad.
b) Podaj wzory funkcji $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, które rocznemu dochodowi x podatnika wyrażonemu w zł przyporządkowują należny podatek.
c) Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$.
d) Dla jakiego rocznego dochodu propozycja partii B jest bardziej opłacalna dla podatnika niż propozycja partii A?

4.14. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x \in \langle -3;\ 2) \\ -x+7 & \text{dla } x \in \langle 2;\ 5\rangle \end{cases},$$

sporządź wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$. Odczytaj z wykresu wartość najmniejszą i wartość największą funkcji g oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

4.15. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x < -1 \\ x-2 & \text{dla } x \geqslant -1 \end{cases},$$

sporządź wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$. Odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności funkcji g.

4.16. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{dla } x < 1 \\ 2x-3 & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$, sporządź wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$. Odczytaj z wykresu, dla jakich wartości m równanie $g(x) = m$ ma dwa rozwiązania.

4.17. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{dla } |x-1| \leqslant 2 \\ 3 & \text{dla } |x-1| > 2 \end{cases}$. Na podstawie wykresu podaj dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe funkcji, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie i w których ujemne, przedziały monotoniczności, wartość największą i wartość najmniejszą oraz określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m.

Prosto do matury

1. Funkcja f wyrażona jest wzorem $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+2 & \text{dla } x < 2 \\ 2x-2 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Funkcja f jest rosnąca.

B. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe.

C. Najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle 1; 2\rangle$ jest $\frac{5}{2}$.

2. Sporządź wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$ dla $x \in \langle -6; 0\rangle \cup (3; \infty)$.

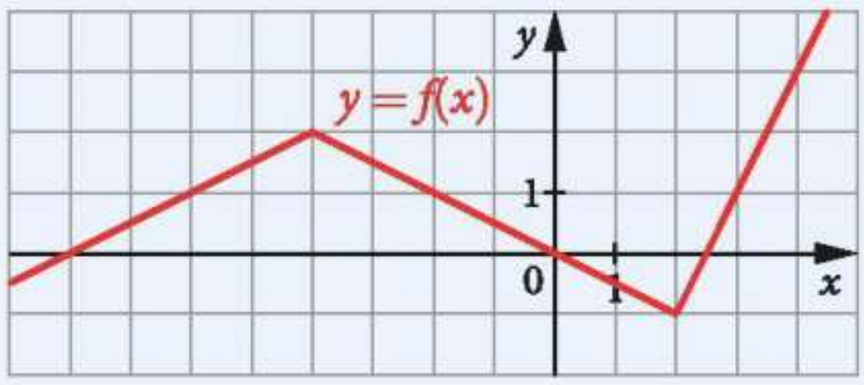
3. Sporządź wykres funkcji, która każdej liczbie rzeczywistej x mniejszej od 4 przyporządkowuje połowę liczby przeciwnej do x, a każdej liczbie rzeczywistej nie mniejszej od 4 przyporządkowuje liczbę o 2 mniejszą od połowy x.

4. Sporządź wykres funkcji f i na jego podstawie określ monotoniczność funkcji.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{dla } x < 1 \\ -1 & \text{dla } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 5x-7 & \text{dla } x > 4 \end{cases}$$

5. Wyznacz współczynniki a, b we wzorze funkcji f w taki sposób, aby wzór określał funkcję przedstawioną na rysunku.

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ -ax & \text{dla } x \in \langle -4; 2\rangle \\ 4ax-b-1 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$



5. Równanie prostej w postaci ogólnej

Umiejętności:
- opisywanie zbiorów punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej
- zapisywanie równania prostej w postaci ogólnej

Wprowadzenie układu kartezjańskiego na płaszczyźnie pozwala na opisywanie różnych zbiorów punktów tej płaszczyzny za pomocą równań bądź nierówności.

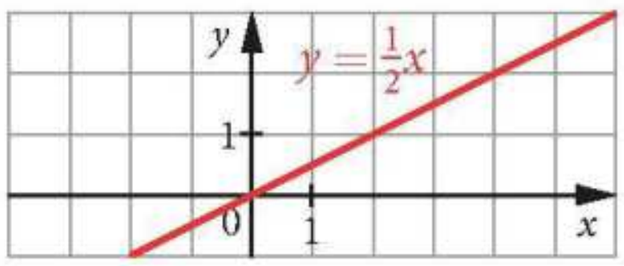
Przykład 1 ◂ zad. 5.5

Zaznaczymy w układzie współrzędnych dane zbiory.

Rozwiązanie

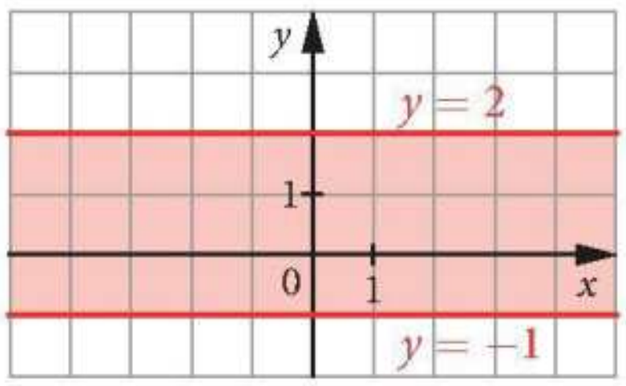
a) $A = \left\{(x, y):\ x, y \in \mathbf{R} \text{ i } y = \frac{1}{2}x\right\}$

Zapis $x, y \in \mathbf{R}$ jest skróconym zapisem warunku $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$.



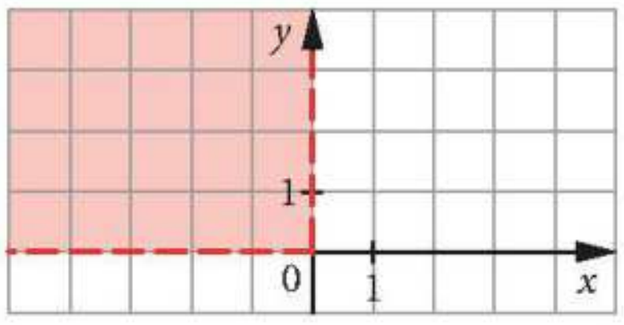
Równanie $y = \frac{1}{2}x$ opisuje prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych.

b) $B = \{(x, y):\ x, y \in \mathbf{R} \text{ i } -1 \leqslant y \leqslant 2\}$



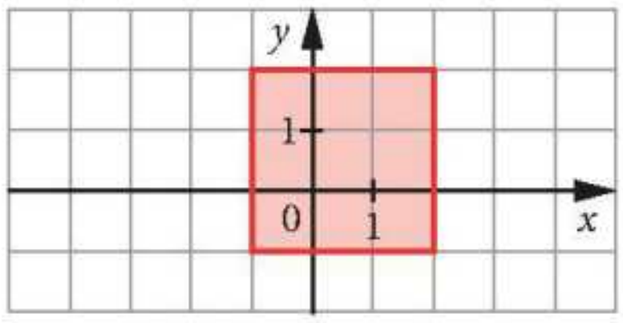
Zbiór B jest pasem równoległym do osi x.

c) $C = \{(x, y):\ x, y \in \mathbf{R} \text{ i } x < 0 \text{ i } y > 0\}$



Zbiór C tworzą punkty II ćwiartki układu współrzędnych.

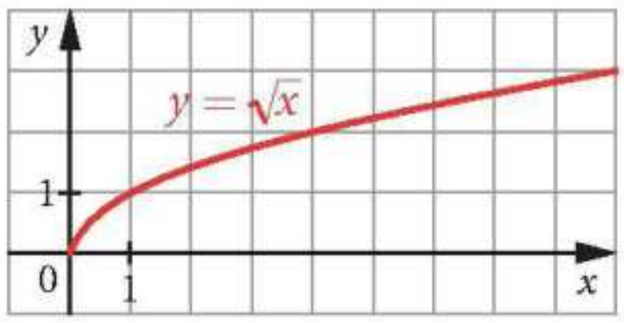
d) $D = \{(x, y):\ x, y \in \mathbf{R} \text{ i } -1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ i } -1 \leqslant y \leqslant 2\}$



Zbiór D jest kwadratem.

e) $E = \{(x, y):\ x, y \in \mathbf{R} \text{ i } y = \sqrt{x}\}$

Do narysowania tego zbioru potrzebne jest dodatkowe założenie, że $x \geqslant 0$.



Zbiór E jest wykresem funkcji $y = \sqrt{x}$.

Układ współrzędnych na płaszczyźnie pozwala na opisanie (w postaci równania lub nierówności) zależności między zmiennymi x i y. Jeżeli któraś ze zmiennych nie występuje w takim opisie (czyli współczynnik przy tej zmiennej jest równy 0), to przyjmujemy, że może mieć dowolną wartość rzeczywistą.

Zastanówmy się teraz, jaki zbiór punktów jest wyrażony równaniem $ax + by = c$ z niewiadomymi x, y w zależności od wartości współczynników a, b i c.

- Gdy $a = b = c = 0$, to równanie $0x + 0y = 0$ przedstawia całą płaszczyznę, bo jest spełnione przez każdą parę liczb (x, y) – czyli każdy punkt płaszczyzny jest opisany za pomocą tego równania.
- Gdy $a = 0$, $b = 0$ i $c \neq 0$, to równania $0x + 0y = c$ nie spełnia żadna para liczb (x, y), możemy powiedzieć, że takie równanie opisuje zbiór pusty.
- Jeżeli $b \neq 0$, to z równania $ax + by = c$ możemy wyznaczyć zmienną y.

  $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$

  Niezależnie od wartości współczynników a i c to równanie jest wzorem funkcji liniowej zmiennej x i opisuje prostą, która jest wykresem tej funkcji na płaszczyźnie.
- Jeżeli $b = 0$ i $a \neq 0$, to w równaniu $ax = c$ zmienna y może przyjmować dowolną wartość rzeczywistą. Równanie to możemy przekształcić do postaci:

  $x = \frac{c}{a}$

  Takie równanie opisuje zatem na płaszczyźnie prostą prostopadłą do osi x, która oczywiście nie jest wykresem żadnej funkcji zmiennej x.

Wniosek

Równanie $ax + by = c$ o zmiennych x i y opisuje:
- całą płaszczyznę, gdy $a = b = c = 0$,
- zbiór pusty, gdy $a = b = 0$ i $c \neq 0$,
- prostą, gdy a i b nie są jednocześnie równe 0.

Równanie $ax + by = c$, gdy a i b nie są równocześnie równe zero, czyli równanie liniowe z dwiema niewiadomymi, nazywamy **równaniem prostej w postaci ogólnej**, natomiast równanie $y = ax + b$ **równaniem kierunkowym prostej**.

Równanie prostej w postaci ogólnej często będziemy zapisywać w postaci $ax + by - c = 0$ (wszystkie wyrazy po jednej stronie równania przyrównane do zera), a założenie, że a i b nie są równocześnie równe zero – w równoważnej postaci $a^2 + b^2 \neq 0$.
Mówimy również, że wykresem równania liniowego z dwiema niewiadomymi lub jego interpretacją geometryczną na płaszczyźnie kartezjańskiej jest prosta.

Przykład 2 ◀ zad. 5.6

Przekształcimy dane równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej.

Rozwiązanie

a) $2x - y - 3 = 0$
$-y = -2x + 3$
$y = 2x - 3$

b) $x + 3y - 4 = 0$
$3y = -x + 4$
$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

Przykład 3 ◀ zad. 5.8

Przekształcimy dane równanie kierunkowe prostej do postaci ogólnej.

Rozwiązanie

a) $y = \sqrt{5}x - 3$
$-\sqrt{5}x + y + 3 = 0$
⟵ wystarczy przenieść wszystkie wyrazy na jedną stronę i uporządkować ich kolejność

b) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}x + y - \frac{1}{2} = 0$
$3x + 4y - 2 = 0$
⟵ jeżeli zależy nam na całkowitych współczynnikach, to obydwie strony równania mnożymy przez 4

Zauważmy, że równanie danej prostej w postaci ogólnej można zapisać na nieskończenie wiele sposobów (jedne równania powstają z innych przez pomnożenie przez liczbę różną od zera). Natomiast jeżeli prosta ma równanie w postaci kierunkowej, to jest ono tylko jedno.

Przykład 4 ◂ zad. 5.9

Sprawdzimy, czy równania $26x - 65y + 91 = 0$ i $-0{,}4x + y - 1{,}4 = 0$ opisują różne proste.

Rozwiązanie

Jeżeli każde z równań zapiszemy w postaci kierunkowej, to z pierwszego otrzymamy $-65y = -26x - 91$, czyli $y = \frac{26}{65}x + \frac{91}{65}$, $y = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$, a z drugiego $y = 0{,}4x + 1{,}4$.
Obydwa równania są więc równoważne i opisują tę samą prostą.
To samo zadanie można rozwiązać krócej: pomnożyć obydwie strony drugiego równania przez brakujący współczynnik przy y, czyli przez -65, i sprawdzić wartości pozostałych uzyskanych w ten sposób współczynników.

Do narysowania prostej wystarczy znać położenie dwóch punktów, które do niej należą. Łatwo jest wyznaczyć punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych, zwłaszcza gdy równanie prostej jest dane w postaci ogólnej.

Przykład 5 ◂ zad. 5.11

Wyznaczymy punkty przecięcia prostej o równaniu $2x - 3y + 6 = 0$ z osiami układu współrzędnych i narysujemy tę prostą.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć punkt przecięcia prostej z osią x, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{każdy punkt osi } x \text{ ma współrzędną } y = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

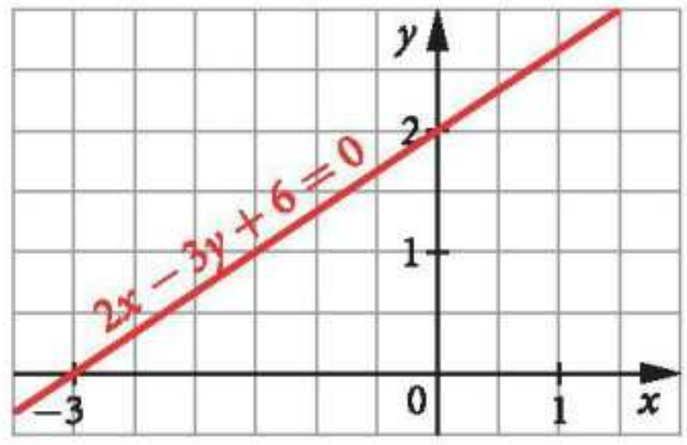
Punkt przecięcia z osią x ma współrzędne $(-3, 0)$.
Aby wyznaczyć punkt przecięcia prostej z osią y, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{każdy punkt osi } y \text{ ma współrzędną } x = 0$$

$$\begin{cases} -3y + 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Punkt przecięcia z osią y ma współrzędne $(0, 2)$.



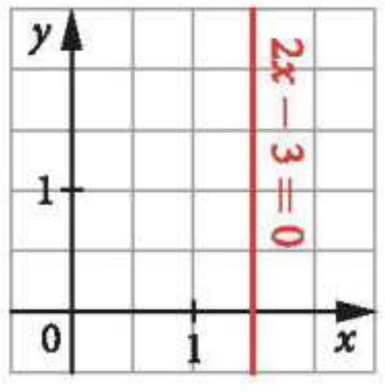
Odp.: Punkty przecięcia prostej z osiami to $(-3, 0)$ i $(0, 2)$.

Przykład 6 ◀ zad. 5.13

Narysujemy prostą o podanym równaniu.

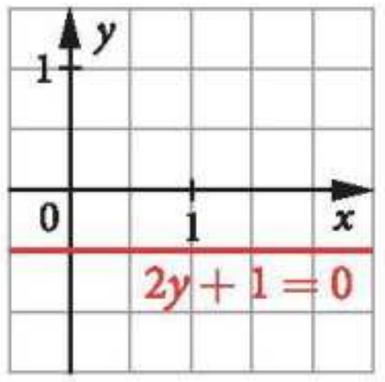
a) $2x - 3 = 0$

Jest to prosta $x = \frac{3}{2}$ prostopadła do osi x, przecinająca ją w punkcie $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.



b) $2y + 1 = 0$

Jest to prosta $y = -\frac{1}{2}$ równoległa do osi x, przecinająca oś y w punkcie $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.



Przykład 7 ◀ zad. 5.14

Narysujemy zbiór punktów opisany za pomocą podanego równania.

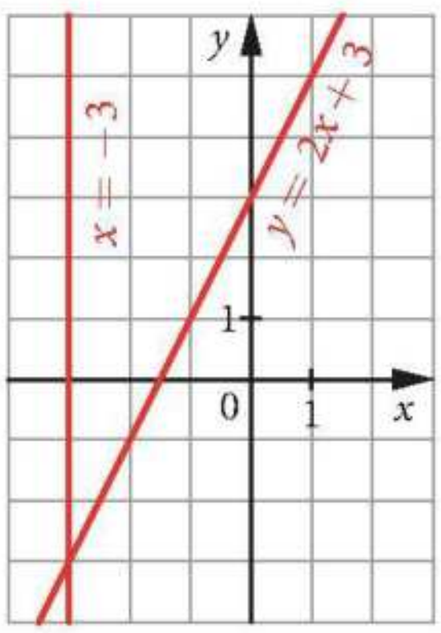
a) $(x + 3)(2x - y + 3) = 0$ b) $|x + 2| + |y - 5| = 0$

Rozwiązanie

a) $(x + 3)(2x - y + 3) = 0$, czyli:

$x + 3 = 0$ lub $2x - y + 3 = 0$

$x = -3$ lub $y = 2x + 3$

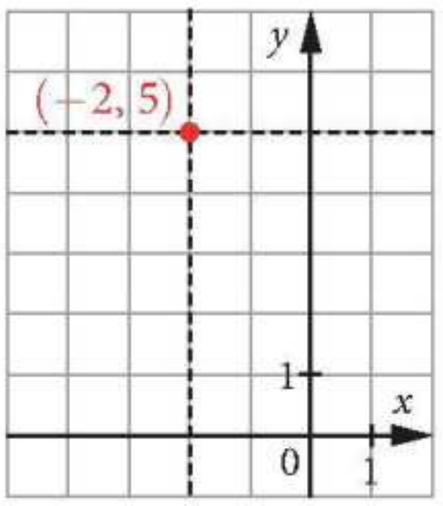


Odp.: Szukanym zbiorem jest suma dwóch prostych.

b) $|x + 2| + |y - 5| = 0$ ⟵ $|a| + |b| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b = 0$

$|x + 2| = 0$ i $|y - 5| = 0$

$x = -2$ i $y = 5$



Odp.: Szukanym zbiorem jest punkt $(-2, 5)$.

Przykład 8 ◀ zad. 5.15

Opiszemy za pomocą równań proste, w których zawarte są krawędzie narysowanej litery F.

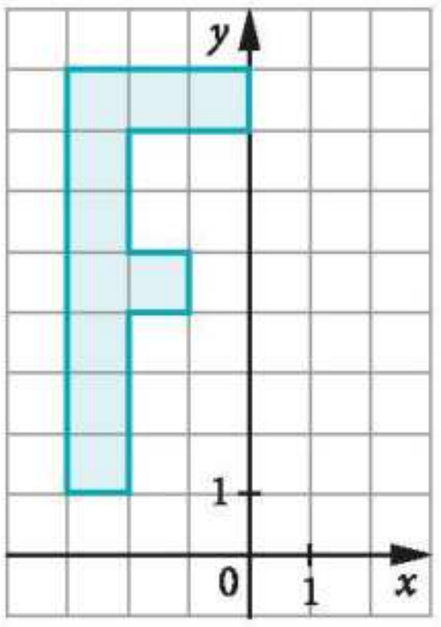
Rozwiązanie

Cztery proste pionowe mają równania:

$x = -3$, $x = -2$, $x = -1$ oraz $x = 0$.

Proste poziome wyrażone są równaniami:

$y = 1$, $y = 4$, $y = 5$, $y = 7$ oraz $y = 8$.



Przykład 9 ◂ zad. 5.16–5.22

Dla jakich wartości m prosta o równaniu $5x + (2m - 1)y + 3 = 0$ nie przecina drugiej i trzeciej ćwiartki układu współrzędnych?

Rozwiązanie

Jeżeli prosta nie przecina drugiej i trzeciej ćwiartki układu współrzędnych, to zawiera się w pierwszej i czwartej lub pokrywa się z osią y. Zatem jej równanie musi mieć postać:

$x = c$, gdzie $c \geqslant 0$

Warunek dla żadnego m nie będzie spełniony, bo nawet jeśli $2m - 1 = 0$, to dane równanie ma postać $5x + 3 = 0$, czyli $x = -\frac{3}{5}$. Jest to równanie opisujące prostą pionową zawartą w drugiej i trzeciej ćwiartce układu współrzędnych.

Odp.: Nie ma takiej wartości m.

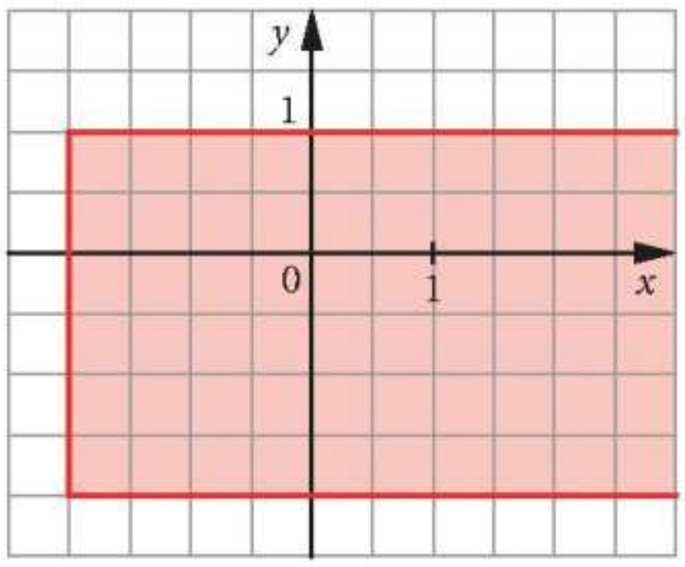
Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Wskaż równanie opisujące wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{7}{15}$.

A. $15x + 60y - 28 = 0$
B. $15x - 60y - 28 = 0$
C. $15x + 60y + 28 = 0$
D. $-15x - 60y + 28 = 0$

5.2. Wskaż zbiór opisujący figurę przedstawioną na rysunku.



A. $D = \{(x, y): x > -2 \text{ i } -2 \leqslant y \leqslant 1\}$
B. $D = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } -2 \leqslant x \leqslant 1\}$
C. $D = \{(x, y): x \geqslant -2 \text{ i } -2 < y < 1\}$
D. $D = \{(x, y): x \geqslant -2 \text{ i } -2 \leqslant y \leqslant 1\}$

5.3. Wskaż punkt przecięcia prostej $12x + 3y - 4 = 0$ z osią x.

A. $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ **B.** $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ **C.** $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

5.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Równanie $4x - 2y + 1 = 0$ opisuje prostą przechodzącą przez I, II i III ćwiartkę układu współrzędnych.
B. Prosta o równaniu $4y - \pi = 0$ jest równoległa do osi x.
C. Prosta o równaniu $\pi x - 2 = 0$ nie jest wykresem funkcji.

5.5. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej podany zbiór.

a) $A = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbf{R} \text{ i } -1 \leqslant x \leqslant 2\}$

b) $B = \{(x, y)\colon x \in \langle -2; 2\rangle \text{ i } y = -x\}$

c) $C = \{(x, y)\colon x > 0 \text{ i } -1 < y < 3\}$

d) $D = \{(x, y)\colon x \in \mathbf{Z} \text{ i } y \in \mathbf{Z}\}$

e) $E = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbf{R} \text{ i } x \leqslant 1 \text{ i } y = 1 - x\}$

f) $F = \{(x, y)\colon x \in \langle -3; 1\rangle \text{ i } y \in \langle -2; 4\rangle\}$

g) $G = \{(x, y)\colon |x| < 4 \text{ i } y = |x|\}$

h) $H = \left\{(x, y)\colon |x| < 9 \text{ i } y = \sqrt{|x|}\right\}$

5.6. Przekształć równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej, jeśli to możliwe.

a) $x - y = 0$

b) $x - 3y + 2 = 0$

c) $2y - 7 = 0$

d) $2x - 5 = 0$

e) $2x - 2y + 1 = 0$

f) $x + 2y - 4 = 0$

5.7. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej opisanej podanym równaniem.

a) $x + y - 3 = 0$

b) $4x - y + 7 = 0$

c) $2x + 3y - 1 = 0$

d) $\sqrt{2}x - 5y + \pi = 0$

5.8. Przekształć równanie prostej z postaci kierunkowej do postaci ogólnej.

a) $y = 2x - 5$

b) $y = \frac{2}{3}x + 5$

c) $y = -x$

d) $y = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{14}$

e) $y = -\frac{1}{3}x + 1$

f) $y = \frac{2}{5}x - 2$

5.9. Sprawdź, czy oba równania opisują tę samą prostą.

a) $2x - y + 3 = 0$ $\quad -2x + y - 3 = 0$

b) $x + 3y - 2 = 0$ $\quad x - 3y + 2 = 0$

c) $3x + 7y - 2 = 0$ $\quad -6x - 14y + 4 = 0$

d) $3x + 6 = 0$ $\quad 2y + 4 = 0$

e) $-2x + 4y - 10 = 0$ $\quad 3x - 6y + 15 = 0$

f) $2x - y + 3 = 0$ $\quad 4x - 2y + 6 = 0$

5.10. Podaj przykład trzech różnych równań liniowych opisujących tę samą prostą.

5.11. Wyznacz punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych i narysuj tę prostą.

a) $x + y - 3 = 0$

b) $2x - y - 2 = 0$

c) $3x + 7y - 21 = 0$

d) $-2x - 5y + 10 = 0$

e) $2x - y - \sqrt{2} = 0$

f) $2x + y + 2 = 0$

5.12. Wyznacz pięć par liczb spełniających podane równanie.

a) $x - y + 7 = 0$
b) $2x + y - 3 = 0$
c) $-x + 3y + 2 = 0$
d) $3x - 4y - 4 = 0$

5.13. W układzie współrzędnych poprowadź prostą o podanym równaniu.

a) $2x + 7 = 0$
b) $x - 2y + 6 = 0$
c) $2x + 5y - 10 = 0$
d) $2y - 5 = 0$
e) $2x - 3y + 6 = 0$
f) $2y = 3x + 12$

5.14. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów opisany równaniem.

a) $x(x - y) = 0$
b) $(x - 2)(y + 1) = 0$
c) $x^2 - 6x + 9 = 0$
d) $y^2 + 8y + 16 = 0$
e) $|x - 1| + |y + 2| = 0$
f) $(x - 2)(x + 5) = 0$
g) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 0$
h) $(x - 6)^2 = 0$

5.15. Zaznacz w jednym układzie współrzędnych proste o równaniach:

$y = x - 2$, $y = x + 2$, $y = -x + 2$ oraz $y = -x - 2$

Ile osi symetrii ma figura będąca sumą tych prostych? Czy ma środek symetrii?

5.16. Wyznacz ćwiartki układu współrzędnych, przez które przechodzi podana prosta.

a) $y = 2x - 1$
b) $x - 5y = 0$
c) $x + 2y + 10 = 0$
d) $x + 2y - 6 = 0$
e) $\frac{5}{2}x - 2y - 8 = 0$
f) $x + 1 = 0$

5.17. Dla jakich wartości m prosta o równaniu $2y + 3x = m$ przechodzi przez

a) pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych?
b) trzecią ćwiartkę układu współrzędnych?

5.18. Dobierz m tak, aby prosta o równaniu $(m - 1)x - y = m - 3$ nie miała punktów wspólnych z podaną ćwiartką układu współrzędnych.

a) I
b) II
c) III
d) IV

5.19. Dla jakich wartości m prosta o podanym równaniu nie przechodzi przez trzecią ćwiartkę układu współrzędnych?

a) $y = mx + 3$
b) $y = (m + 2)x + 1$
c) $(m + 1)x - 2y + 5 = 0$
d) $2(m - 3)x + 3y + 8 = 0$

5.20. Dla jakich wartości m prosta o podanym równaniu przechodzi przez pierwszą, trzecią i czwartą ćwiartkę układu współrzędnych?

a) $(m - 5)x - y - m - 1 = 0$
b) $(4 - m)x - y - m + 2 = 0$
c) $(m - 2)x - 3y - m + 2 = 0$
d) $(m + 4)x - 2y + m - 1 = 0$

5.21. Dobierz m tak, aby prosta o podanym równaniu przechodziła tylko przez pierwszą i drugą ćwiartkę układu współrzędnych.

a) $y = (m-7)x + 5$
b) $y = 2(m+3)x + 7$
c) $(m-5)x + 3y + 2 = 0$
d) $(3-m)x + 7y - 1 = 0$

5.22. Dobierz m tak, aby prosta o danym równaniu nie przecinała drugiej i trzeciej ćwiartki układu współrzędnych.

a) $2x + my - 5 = 0$
b) $3x + (m-1)y + 2 = 0$
c) $5x - (2m+6)y - 3 = 0$
d) $x + (m-5)y - m = 0$

5.23. Dla jakich wartości m wykres funkcji $f(x) = |x| + m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem o wierzchołkach $(0, 1), (-2, 1), (-2, -3), (0, -3)$?

5.24. Dla jakich wartości m wykres funkcji $f(x) = mx + 2 + m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z kwadratem o wierzchołkach $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$?

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Równanie $2x + 4y + 3 = 0$ opisuje prostą przechodzącą przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

B. Prosta o równaniu $-3x\pi = 0$ jest równoległa do osi x.

C. Prosta o równaniu $\sqrt{7}x + \pi y = 2$ jest wykresem funkcji.

2. Wyznacz punkty przecięcia prostej $2x + 7y - 14 = 0$ z osiami układu współrzędnych i narysuj tę prostą.

3. Dla jakich wartości m prosta o równaniu $3x + \sqrt{5}y = m$ przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych?

4. Narysuj na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór:

$A = \{(x, y): x \in \langle -4; 2\rangle \text{ i } y \in \langle -3; 4\rangle\}$

Jaką figurą geometryczną jest zbiór A? Ile jest równe jej pole?

5. Dla jakich wartości m prosta o równaniu $2x + y = m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem o wierzchołkach $(1, 3), (-3, 3), (-3, -2), (1, -2)$?

6. Położenie dwóch prostych na płaszczyźnie

Umiejętności:

- wyznaczanie równania prostej, która jest równoległa lub prostopadła do danej prostej i przechodzi przez dany punkt
- badanie równoległości i prostopadłości prostych na podstawie ich równań

Każda prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i niepokrywająca się z osią y jest wykresem pewnej funkcji o wzorze $y = ax$ $(D = \mathbf{R})$, gdzie a jest współczynnikiem kierunkowym tej prostej.

Twierdzenie

Wykresy funkcji $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe tych funkcji są równe, tzn. gdy $a_1 = a_2$.

Dowód tego twierdzenia poznacie podczas dalszej nauki.

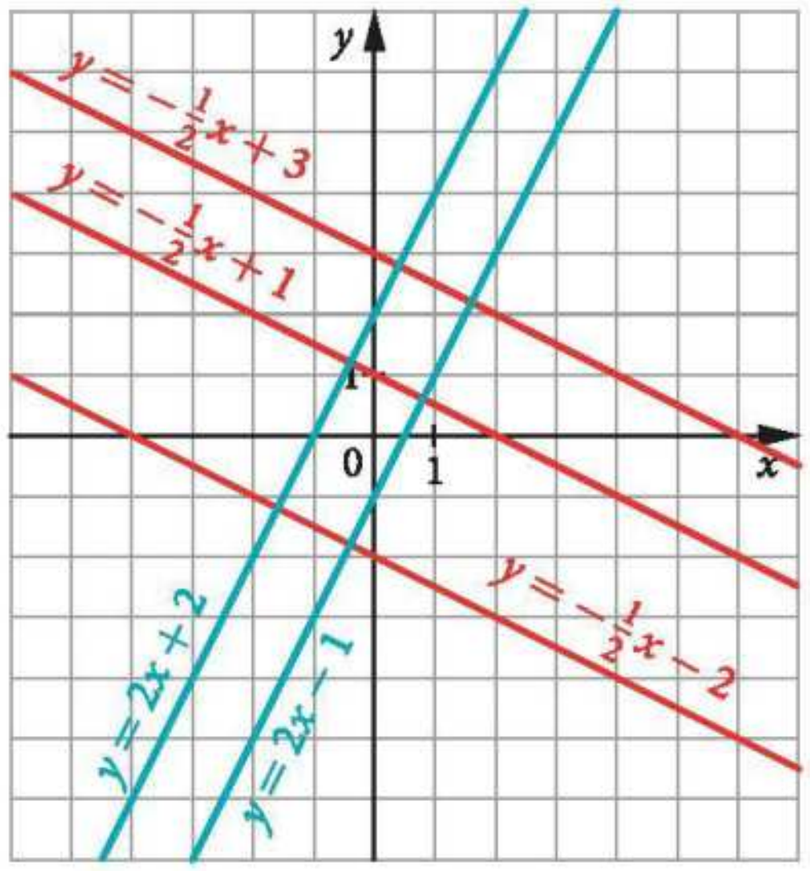
Przykład 1

Narysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$y = 2x - 1, \quad y = -\frac{1}{2}x + 3, \quad y = -\frac{1}{2}x + 1,$$

$$y = 2x + 2, \quad y = -\frac{1}{2}x - 2$$

i wskażemy wśród nich proste równoległe.



Rozwiązanie

Prostymi równoległymi są wykresy funkcji:

- $y = 2x - 1$ oraz $y = 2x + 2$,

a także:

- $y = -\frac{1}{2}x + 3, \quad y = -\frac{1}{2}x + 1, \quad y = -\frac{1}{2}x - 2.$

Przykład 2 ◂ zad. 6.6

Napiszemy równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P = (1, -5)$ i równoległej do prostej $y = -3x + 1$.

Rozwiązanie

$y = ax + b$

$y = -3x + b$ ⟵ prosta l jest równoległa do prostej $y = -3x + 1$

$-5 = -3 \cdot 1 + b$ ⟵ punkt $P = (1, -5)$ leży na prostej l

$b = -2$

Odp.: Prosta l ma równanie $y = -3x - 2$.

Przykład 3 ◀ zad. 6.7

Dla jakich wartości m prosta o równaniu $y = (2m+3)x - 3$ jest równoległa do prostej $y = -5x + 1$?

Rozwiązanie

$2m + 3 = -5$ ⟵ współczynniki kierunkowe obu prostych są równe

$m = -4$

Odp.: Dla $m = -4$.

Zajmiemy się teraz prostymi prostopadłymi na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zacznijmy od najprostszych sytuacji.

- Jeżeli prosta ma równanie $y = b$, to każda prosta do niej prostopadła ma równanie postaci $x = c$.
- Jeżeli prosta ma równanie $x = c$, to każda prosta do niej prostopadła ma równanie postaci $y = b$.

Jeżeli rozważamy proste prostopadłe, z których żadna nie jest równoległa do osi układu współrzędnych, to każda z nich ma równanie postaci $y = ax + b$.

Twierdzenie

Prosta prostopadła do prostej o równaniu $y = mx$ $(m \neq 0)$ i przechodząca przez początek układu współrzędnych ma równanie $y = -\frac{1}{m}x$.

Dowód

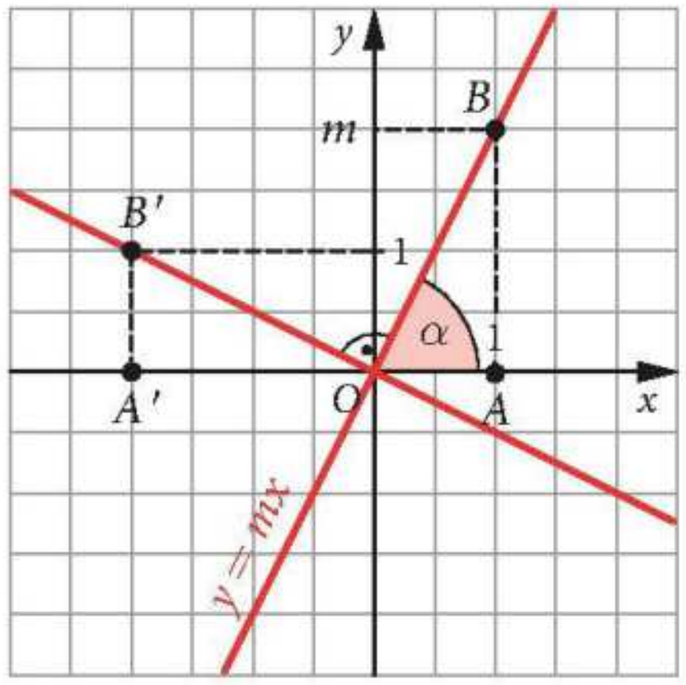
Przyjmijmy, że $m > 0$.

Prosta $y = mx$ przechodzi przez punkt $B = (1, m)$.

Niech $A = (1, 0)$ i $O = (0, 0)$.

Oznaczmy $\sphericalangle AOB = \alpha$.

Przez początek układu prowadzimy prostą $y = ax$ prostopadłą do danej i zaznaczamy na niej odcinek OB' równy odcinkowi OB, jak na rysunku.



$\sphericalangle A'OB' = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha = \sphericalangle ABO$

Zatem $\triangle AOB$ jest przystający do $\triangle A'B'O$ (cecha kbk). Stąd $B' = (-m, 1)$, więc

$1 = a \cdot (-m)$ ⟵ punkt B' leży na prostej $y = ax$

$a = -\frac{1}{m}$, czyli $y = -\frac{1}{m}x$ ⟵ równanie prostej OB'

Zauważmy, że nie ma żadnego znaczenia początkowe założenie dotyczące znaku liczby m, gdyż dla $m < 0$ prowadzone rozumowanie jest analogiczne.

Koniec dowodu

Wniosek

Iloczyn współczynników kierunkowych dwóch prostych prostopadłych nierównoległych do osi układu współrzędnych jest równy -1.

Przykład 4

Prosta o równaniu $y = -4x$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = \frac{1}{4}x$, a prosta o równaniu $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\sqrt{2}x$.

Wniosek

Prosta prostopadła do prostej o równaniu $y = ax + b$, gdzie $a \neq 0$, ma równanie postaci $y = -\frac{1}{a}x + c$.

Przykład 5

Prosta l ma równanie $y = 7x - 5$. Każda prosta prostopadła do l ma równanie postaci $y = -\frac{1}{7}x + b$. Takich prostych jest nieskończenie wiele.

Przykład 6 ◀ zad. 6.9

Napiszemy równanie prostej prostopadłej do danej prostej l i przechodzącej przez dany punkt P.

Rozwiązanie

a) l: $y = 3x - 2$, $P = (-1, 4)$

$y = -\frac{1}{3}x + b$ ⟵ równanie prostej prostopadłej do prostej l

$4 = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + b$ ⟵ wstawiamy współrzędne punktu P

$b = 3\frac{2}{3}$

Odp.: Szukana prosta ma równanie $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

b) $l\colon\ 2x + 5y = 1,\ P = (2, -1)$

$y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$ ⟵ zapisujemy równanie prostej l w postaci kierunkowej

$y = \frac{5}{2}x + b$ ⟵ równanie prostej prostopadłej do prostej l

$-1 = \frac{5}{2} \cdot 2 + b$ ⟵ wstawiamy współrzędne punktu P

$b = -6$

Odp.: Szukana prosta ma równanie $y = \frac{5}{2}x - 6$.

c) $l\colon\ y = -3,\ P = \left(\sqrt{3},\ 3\right)$

Prosta l jest równoległa do osi x, więc prosta prostopadła do niej jest prostopadła do osi x i nie ma równania kierunkowego, tylko równanie postaci $x = a$.

Odp.: Szukana prosta ma równanie $x = \sqrt{3}$.

Przykład 7

◀ zad. 6.10

Dla jakich wartości m prosta o równaniu $y = 2mx + 1$ jest prostopadła do prostej $y = -3x + 2$?

Rozwiązanie

$2m \cdot (-3) = -1$ ⟵ iloczyn współczynników kierunkowych jest równy -1

$m = \frac{1}{6}$

Odp.: Dla $m = \frac{1}{6}$.

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Wskaż prostą równoległą do prostej $y = \frac{2}{3}x - 1$.

A. $2x + 3y + 5 = 0$
B. $2x - 3y + 5 = 0$
C. $3x + 2y + 5 = 0$
D. $3x - 2y + 5 = 0$

6.2. Wskaż wartość m, dla której wykresy funkcji $f(x) = (m - 3)x - 1$ oraz $g(x) = 2x - m$ są równoległe.

A. $m = 0$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 5$

6.3. Wskaż prostą prostopadłą do prostej o równaniu $5x + 2y - 3 = 0$.

A. $y = \frac{2}{5}x - 6$ **B.** $y = -\frac{2}{5}x - 6$ **C.** $y = \frac{5}{2}x - 6$ **D.** $y = -\frac{5}{2}x - 6$

6.4. Podaj cztery przykłady funkcji liniowych, których wykresy są równoległe do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{2}x - 7$.

6.5. Podaj trzy przykłady równań prostych przecinających prostą k: $5x-2y = -\sqrt{2}$.

6.6. Wyznacz równanie prostej równoległej do danej prostej k i przechodzącej przez punkt P.

a) k: $y = -x - 1$ $P = (2, -1)$

b) k: $y = -2x + 3$ $P = (-1, 2)$

c) k: $\sqrt{2}x + 3y = 1$ $P = \left(-\sqrt{2}, 0\right)$

d) k: $5x + 3 = 0$ $P = \left(\frac{1}{5}, 5\right)$

e) k: $2y - 2 = 0$ $P = \left(1\frac{1}{2}, -7\right)$

f) k: $x - y + 1 = 0$ $P = (-2, 3)$

6.7. Dla jakiej wartości m wykresy funkcji $f(x) = -5x + 1$ i $g(x) = (3 - 2m)x - 1$ są równoległe?

6.8. Dla jakich wartości m proste k i l opisane podanymi równaniami nie mają punktów wspólnych?

a) k: $3x + 2y = 5$ l: $mx + 2y = 1$

b) k: $2x - y = -2$ l: $4x - my = -7$

c) k: $4x + 5 = 0$ l: $x + (m + 3)y = 1$

d) k: $2mx + 3y - 10 = 0$ l: $5y - 7 = 0$

e) k: $(3m - 5)x - y - 7 = 0$ l: $(5m + 3)x - y + 3 = 0$

f) k: $2y + (4m + 3)x = 0$ l: $-mx + y + 2 = 0$

6.9. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P.

a) l: $y = 3x - \sqrt{2}$ $P = (0, 2)$

b) l: $y = -\frac{1}{2}x - 1$ $P = (3, 1)$

c) l: $y = -5$ $P = (3, 7)$

d) l: $x = -7\sqrt{2}$ $P = (4, -2)$

e) l: $x - 5y + 2 = 0$ $P = (-1, 2)$

f) l: $y = \frac{3}{2}x + \sqrt{2}$ $P = (-1, 1)$

6.10. Dla jakich wartości m proste o równaniach $y = -3x + 11$ i $y = -mx - 3$ są prostopadłe?

6.11. Wyznacz taką wartość k, dla której wykresy funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$ oraz $g(x) = (k + 1)x + 3$ są prostopadłe. Dla wyznaczonej wartości k oblicz współrzędne punktu, w którym wykresy tych funkcji się przecinają.

6.12. Dla jakich wartości m proste o równaniach $y = \left|m + \frac{2}{3}\right| x + 7$ i $y = -3x - 3$ są prostopadłe?

6.13. Dla jakich wartości m proste o równaniach $y = |2m + 5|x - 3$ oraz $y = |3 - m|x + 8$ są równoległe?

6.14. Wykres funkcji liniowej f przechodzi przez punkty $(-3, -1)$ i $(5, 3)$. Wykres funkcji liniowej g jest równoległy do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt $(1, -3)$. Podaj wzory funkcji f i g.

6.15. Funkcja f wyrażona jest wzorem $f(x) = -2x + 8$. Podaj wzór funkcji g, wiedząc, że jej wykres jest prostą prostopadłą do wykresu funkcji f oraz że funkcje f i g mają to samo miejsce zerowe.

6.16. Dla jakich wartości k i m wykresy funkcji $f(x) = (2k + 3)x + 3m$ oraz $g(x) = (5 - m)x + k - 2$ są równoległe oraz jeden z nich przechodzi przez punkt $A = (2, -3)$?

Prosto do matury

1. Dane są dwie proste k i l. Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Jeżeli k: $2x + y = 0$ i l: $x - 2y = 3$, to proste k i l są prostopadłe.
B. Jeżeli k: $2x + y = 1$ i l: $2x - y = -1$, to proste k i l są prostopadłe.
C. Jeżeli k: $y = -3$ i l: $x = 3$, to proste k i l są prostopadłe.

2. Spośród prostych opisanych za pomocą podanych równań wypisz wszystkie pary prostych równoległych oraz wszystkie pary prostych prostopadłych.

k: $y = -2$ $\quad$ l: $y = -2x + 3$ $\quad$ m: $x = 13$

p: $y = \frac{1}{2}x + 6$ $\quad$ r: $y = -\frac{1}{2}x$ $\quad$ t: $y = -0{,}5x + 1{,}4$

3. Podaj wzór funkcji liniowej f, wiedząc, że jej miejscem zerowym jest liczba 2 oraz że wykres funkcji f jest równoległy do wykresu funkcji $g(x) = -3x + 4$.

4. Dla jakich wartości m wykresy funkcji $f(x) = |2m - 3|x - 5$ i $g(x) = -0{,}2x - m$ są prostopadłe?

5. Dla jakich wartości k i m wykresy funkcji $f(x) = 4x - 3$ i $g(x) = (2k - m)x + 4m$ są prostopadłe i przecinają oś odciętych w tym samym punkcie?

7. Geometryczna interpretacja układów równań

Umiejętności:

- interpretacja geometryczna układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- obliczanie współrzędnych punktu przecięcia dwóch prostych

Punkt $A = (x_A, y_A)$ jest punktem przecięcia prostej k o równaniu $a_1x + b_1y = c_1$ i prostej l o równaniu $a_2x + b_2y = c_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają obydwa równania, czyli gdy para liczb $x = x_A$ i $y = y_A$ jest jedynym rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Z geometrycznej interpretacji równania liniowego z dwiema niewiadomymi wynika **graficzna (geometryczna) metoda rozwiązywania układu równań liniowych**.

Przykład 1 ◂ zad. 7.5

Rozwiążemy graficznie układ równań.

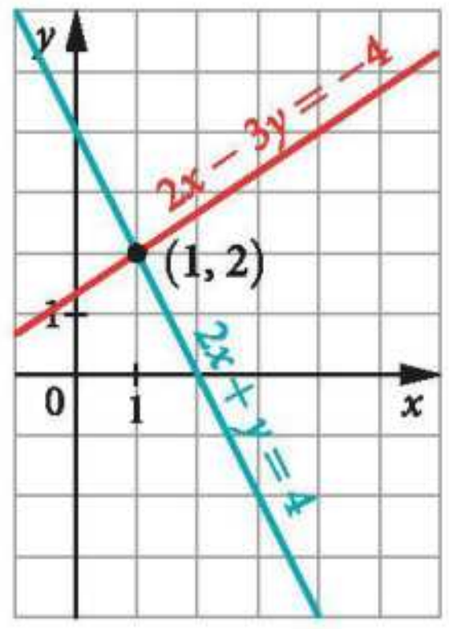
a) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x - 1 = \frac{1}{2}y \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x + y = -5 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$

Rozwiązanie

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Wykresy obu równań rysujemy w układzie współrzędnych. Wykresem tego układu równań są dwie przecinające się proste, a jego rozwiązaniem są współrzędne punktu przecięcia prostych, które odczytujemy z rysunku:

$x = 1$ i $y = 2$

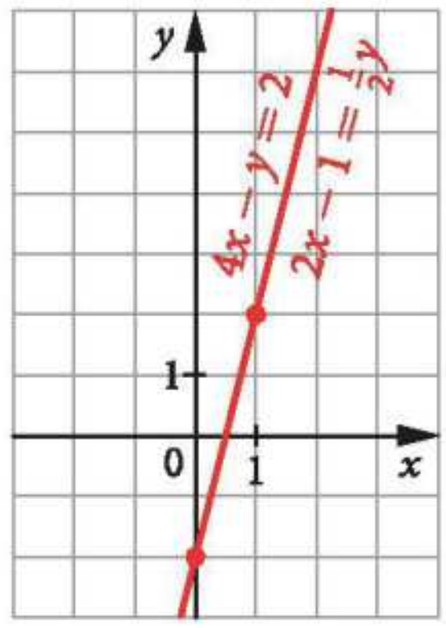


Odczytywanie danych z rysunku może być obarczone błędem wynikającym z niedokładności wykresu. Dlatego warto sprawdzić rozwiązanie, podstawiając odczytane wartości do pierwotnej postaci układu równań:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4 \\ 2 \cdot 1 + 2 = 4 \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x = 1$, $y = 2$.

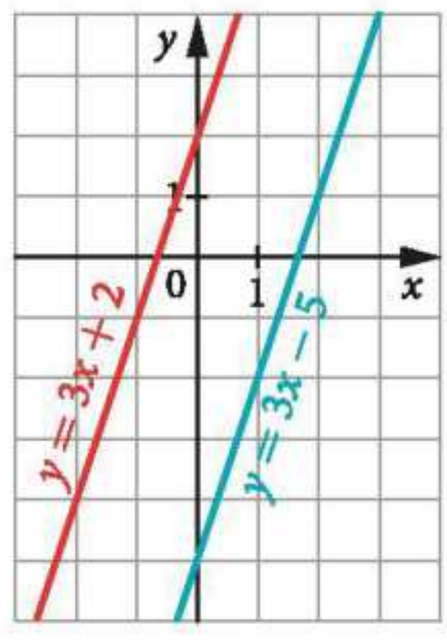
b) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x - 1 = \frac{1}{2}y \end{cases}$



Wykresem każdego z równań jest ta sama prosta. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, ponieważ rozwiązaniem są współrzędne każdego punktu leżącego na tej prostej.

Odp.: Rozwiązaniem układu równań jest każda para liczb spełniająca równanie $4x - y = 2$.

c) $\begin{cases} -3x + y = -5 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$



Wyznaczając y z każdego równania, otrzymujemy następującą postać układu równań:

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$

Jego wykresem są dwie proste równoległe.

Odp.: Układ równań nie ma rozwiązania.

W przykładzie 1 wyczerpaliśmy wszystkie możliwości wzajemnego położenia dwóch prostych będących wykresem układu równań liniowych. Uzupełnimy definicję rodzajów układów równań o ich interpretację graficzną.

Definicja

Układ dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi nazywamy:

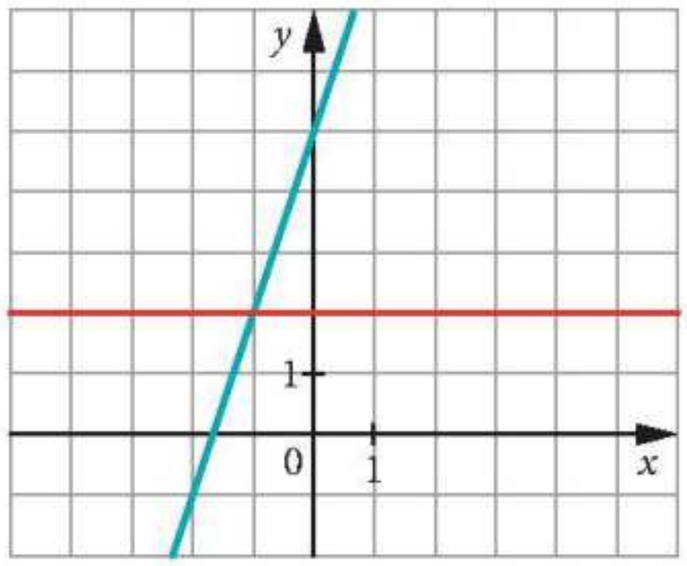
- **oznaczonym** – gdy układ ma jedno rozwiązanie, a jego wykresem są dwie proste przecinające się,
- **nieoznaczonym** – gdy układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, a jego wykresem jest jedna prosta,
- **sprzecznym** – gdy układ nie ma rozwiązania, a jego wykresem są proste równoległe niepokrywające się.

Zgodnie z tą definicją – w przykładzie 1 występują odpowiednio:

a) układ oznaczony,
b) układ nieoznaczony,
c) układ sprzeczny.

Przykład 2 ◂ zad. 7.8

Napiszemy układ równań, którego interpretację graficzną przedstawia zamieszczony obok rysunek.



Rozwiązanie

Rozwiązaniem układu jest para liczb $(-1, 2)$.
Czerwona prosta jest wykresem funkcji $y = 2$.
Niebieska jest wykresem funkcji liniowej $y = ax+b$, której współczynniki odczytujemy z rysunku.

$$a = \frac{3}{1} = 3 \text{ oraz } b = 5$$

Zatem $y = 3x + 5$ to równanie niebieskiej prostej. Szukanym układem równań jest:

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = 3x + 5 \end{cases} \text{ lub w wersji uporządkowanej } \begin{cases} y = 2 \\ -3x + y = 5 \end{cases}$$

Zauważmy, że para $(-1, 2)$ spełnia obydwa równania – jest rozwiązaniem układu.

Odp.: $\begin{cases} y = 2 \\ -3x + y = 5 \end{cases}$

Przykład 3 ◂ zad. 7.12

Sprawdzimy, jaką parę prostych opisuje dla $m = -2$ podany układ równań.

$$\begin{cases} 2x + (m+1)y = m + 3 \\ (2m+6)x - y + 1 + m = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie

$$\begin{cases} 2x + (-2+1)y = -2 + 3 \\ (-4+6)x - y + 1 - 2 = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{wstawiamy do równań } -2 \text{ w miejsce } m$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \longleftarrow \text{oba równania opisują tę samą prostą}$$

Odp.: Dla $m = -2$ ten układ jest nieoznaczony i opisuje prostą o równaniu $2x - y = 1$.

Przykład 4 ◂ zad. 7.14

Wyznaczymy wartość m, dla której układ równań $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ mx + 2y = 1 \end{cases}$ jest sprzeczny.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że równanie $3x + y = 5$ opisuje prostą k, a równanie $mx + 2y = 1$ prostą l. Szukamy wartości m, dla której proste k i l nie mają punktów wspólnych.

$y = -3x + 5$ ⟵ równanie prostej k w postaci kierunkowej

$y = -\frac{m}{2}x + \frac{1}{2}$ ⟵ równanie prostej l w postaci kierunkowej

Prosta k przecina oś y w punkcie $(0, 5)$, a prosta l – w punkcie $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Zatem jeżeli obie proste będą miały identyczne współczynniki kierunkowe, to nie będą miały punktów wspólnych.

$-3 = -\frac{m}{2}$ ⟵ porównujemy współczynniki kierunkowe obu prostych

$m = 6$

Odp.: Układ równań jest sprzeczny dla $m = 6$.

Przykład 5 ◀ zad. 7.9

Zbadamy, dla jakich wartości parametru m punkt przecięcia prostych o równaniach $3x + 4y = 5m - 7$ oraz $x - 4y = m + 3$ należy do I ćwiartki układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Warunki zadania będą spełnione, jeśli rozwiązaniem układu równań

$\begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ x - 4y = m + 3 \end{cases}$ będzie para liczb dodatnich.

Rozwiążemy ten układ metodą przeciwnych współczynników.

Najpierw obliczymy x.

$\begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ x - 4y = m + 3 \end{cases}$ ⟵ dodajemy równania stronami

$\begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ 4x = 6m - 4 \end{cases}$, stąd $\begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ x = \frac{3}{2}m - 1 \end{cases}$

Następnie obliczymy y.

$\begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ -3x + 12y = -3m - 9 \end{cases}$ ⟵ mnożymy drugie równanie przez -3 i dodajemy równania stronami

$\begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ 16y = 2m - 16 \end{cases}$, stąd $\begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ y = \frac{1}{8}m - 1 \end{cases}$

Zatem rozwiązaniem układu równań jest para liczb postaci $\begin{cases} x = \frac{3}{2}m - 1 \\ y = \frac{1}{8}m - 1 \end{cases}$.

Zauważmy, że dla dowolnej wartości $m \in \mathbf{R}$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie – czyli jest oznaczony. Punkt o współrzędnych $\left(\frac{3}{2}m - 1, \frac{1}{8}m - 1\right)$ należy do I ćwiartki układu współrzędnych, jeśli spełniony jest układ nierówności:

$\begin{cases} \frac{3}{2}m - 1 > 0 \\ \frac{1}{8}m - 1 > 0 \end{cases}$, czyli $\begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m > 8 \end{cases}$ i ostatecznie $m > 8$

Odp.: Punkt przecięcia prostych o podanych równaniach należy do I ćwiartki układu współrzędnych, gdy $m \in (8; \infty)$.

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Wskaż układ równań, którego wykresem jest para prostych równoległych.

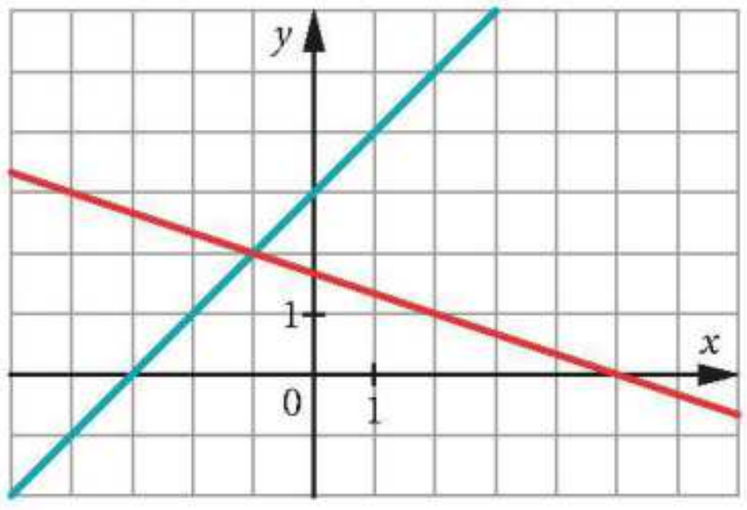
A. $\begin{cases} x - y + 11 = 0 \\ -x - y - 1 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{5} = 0 \\ \sqrt{3}y + \sqrt{5} = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x - 2y - 7 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 6x - 9y = 0 \\ 8x - 12y - 5 = 0 \end{cases}$

7.2. Wskaż układ równań, którego graficzną interpretację przedstawiono na rysunku.



A. $\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x - 3y - 5 = 0 \end{cases}$

7.3. Wskaż układ równań, którego wykresem jest para prostych przecinających się w punkcie leżącym na osi rzędnych.

A. $\begin{cases} x - 13y - 17 = 0 \\ x + 13y + 17 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 13x + y + 17 = 0 \\ -13x + y - 17 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - 13y + 17 = 0 \\ -x + 13y + 17 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 13x + y + 17 = 0 \\ -13x - y - 17 = 0 \end{cases}$

7.4. Dany jest układ równań $\begin{cases} 7x + 3y = 2 + m \\ 5x + 6y = k - 1 \end{cases}$ z niewiadomymi x i y.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Układ jest oznaczony dla dowolnych wartości $k, m \in \mathbf{R}$.

B. Dla $m = 2$ i $k = 0$ proste opisane przez ten układ przecinają się w punkcie $(1, -1)$.

C. Istnieją takie wartości m i k, dla których proste opisane układem są równoległe.

7.5. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań.

a) $\begin{cases} y - 2x = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -3x + y = -7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 = 2y \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

7.6. Przekształć układ równań do możliwie prostej postaci. Rozwiąż otrzymany układ równań algebraicznie i graficznie.

a) $\begin{cases} \frac{y+1}{3} = 2 - x \\ 3(x+2) - 2(y-2) = 3x + 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0{,}1 - \frac{1}{5}(y+1) = 0{,}3(x-2) \\ \frac{x-3}{2} + \frac{2y+9}{6} = 1{,}5 \end{cases}$

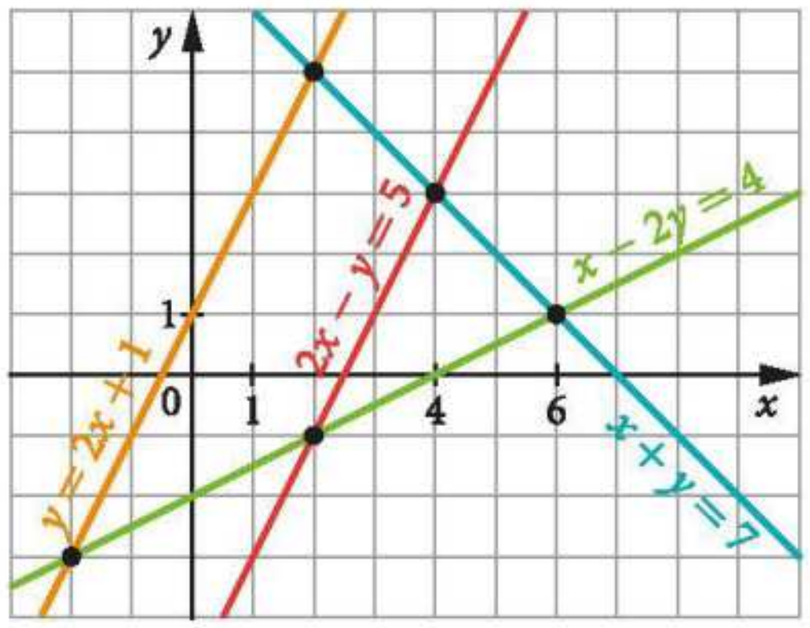
c) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 2(x - 2y) - (3 - x)(3 + x) \\ 2x = 4 - y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4(x-1)^2 - (3y-2)^2 = (2x-3)^2 - (3y+1)(3y-1) - 2 \\ \left(2x - \sqrt{3}\right)\left(2x + \sqrt{3}\right) - (2x+1)^2 = 12(y-1) \end{cases}$

7.7. Korzystając z rysunku, na którym przedstawione są wykresy równań pierwszego stopnia, ułóż

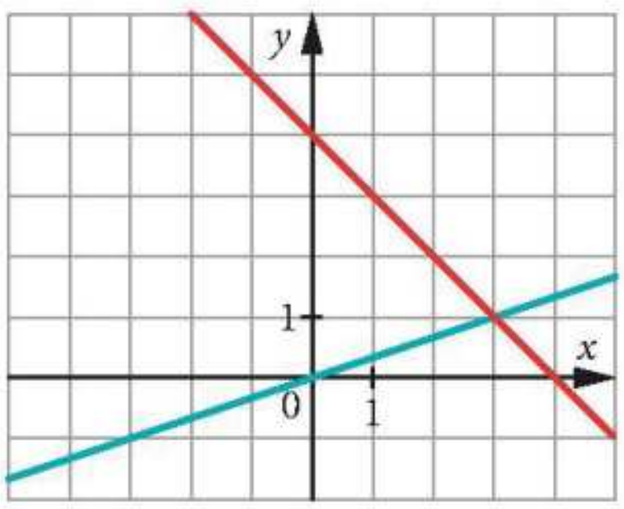
a) oznaczone układy równań i podaj ich rozwiązanie.

b) sprzeczne układy równań.

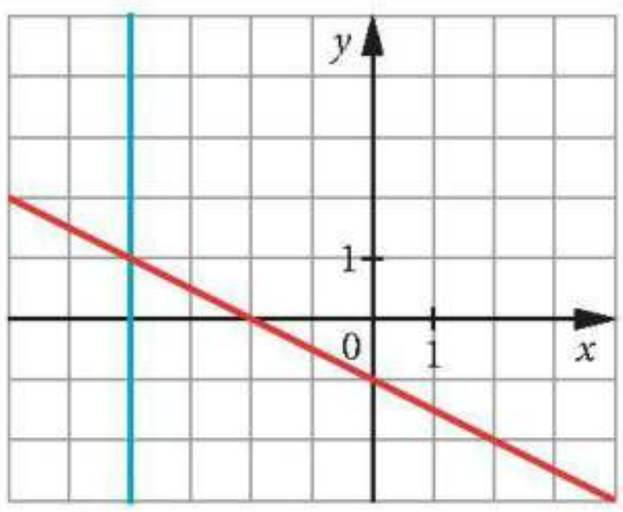


7.8. Podaj przykład układu równań, którego interpretację graficzną przedstawiono na rysunku. Odczytaj z wykresu rozwiązanie tego układu.

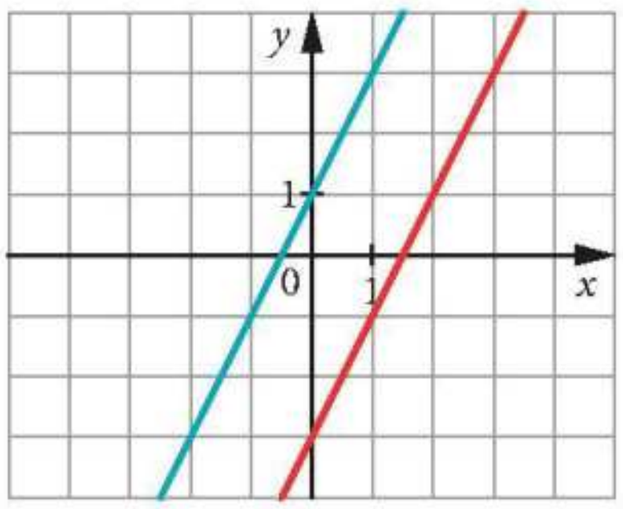
a)



b)



c)



7.9. Dla jakich wartości parametru k punkt przecięcia prostych o równaniach $x - y = k - 1$ oraz $2x - y = 3 - k$ należy do III ćwiartki układu współrzędnych?

7.10. Podaj przykład układu równań, którego wykresem jest jedna prosta przechodząca przez punkty $(-3, 4)$ i $(5, -12)$.

7.11. Wykresem pewnego układu równań jest para prostych równoległych, z których pierwsza przechodzi przez punkt $(-1, 0)$, a druga przechodzi przez punkt $(5, 0)$. Podaj przykład takiego układu równań.

7.12. Jaką parę prostych opisuje układ równań dla wskazanej wartości k?

a) $\begin{cases} (2k+1)x + (k-1)y = 3 \\ x + (1-k)y = k \end{cases}$ $k = 3$

b) $\begin{cases} kx + 2y = 1 \\ x + 2ky = k - 1 \end{cases}$ $k = \sqrt{2}$

c) $\begin{cases} 3kx + (2k-1)y = -4 \\ (2-2k)x + (k+1)y = k \end{cases}$ $k = \frac{1}{2}$

d) $\begin{cases} x + (2k+7)y = k + 7 \\ (k+3)x + (1-k)y = k + 1 \end{cases}$ $k = -5$

7.13. Wyznacz takie wartości m i k, aby wykresy funkcji $y = -x + m$ i $y = kx - 1$ przecinały się w punkcie $A = (1, 1)$.

* **7.14.** Wyznacz wartość m, dla której układ równań $\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 3x + my = 3 \end{cases}$ jest sprzeczny.

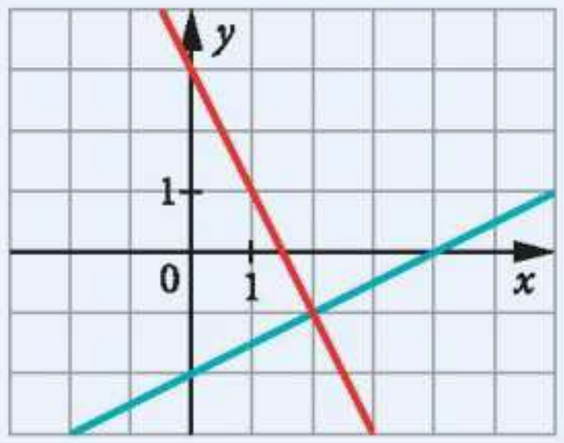
* **7.15.** Sprawdź, czy istnieje taka wartość m, dla której układ równań $\begin{cases} mx + 2y = 6 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ jest nieoznaczony.

Prosto do matury

1. Dane są proste o równaniach $2x - 3y = 5$ i $kx + 6y = 10$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Dla $k = 2$ proste przecinają się.
B. Dla $k = -4$ proste są równoległe.
C. Dla $k = 4$ proste są identyczne.

2. Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 5 = 1 \end{cases}$.

3. Napisz układ równań, którego interpretację graficzną przedstawiono na rysunku.



4. Dana jest prosta k o równaniu $2x + y = 4$. Podaj przykład równania takiej prostej m, aby proste k i m przecinały się w punkcie $(1, 2)$. Narysuj obie proste w układzie współrzędnych.

* **5.** Wyznacz wartości m oraz k, dla których układ równań $\begin{cases} 3x - 2y = m \\ -9x - ky = 12 \end{cases}$ jest oznaczony.

8. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–21 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż funkcję liniową, której wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych.

A. $f(x) = 3x - 1$ **B.** $f(x) = 3$ **C.** $f(x) = 3x$ **D.** $f(x) = 3 - x$

2. Wybierz punkty, w których prosta o równaniu $x - 2y + 4 = 0$ przecina osie układu współrzędnych.

A. (0, 3) i (1, 0) **B.** (0, 2) i (−4, 0) **C.** (0, 3) i (−5, 0) **D.** (0, −1) i (−1, 0)

3. Równania $y = -\frac{2}{3}x + 3$ oraz $4x + 6y - 9 = 0$ opisują

A. osie układu współrzędnych.
B. proste przecinające się.
C. proste równoległe.
D. tę samą prostą.

4. Spośród podanych prostych wybierz tę, której nie można opisać za pomocą równania w postaci kierunkowej.

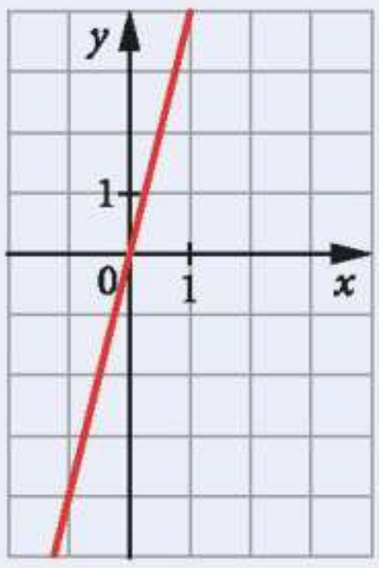
A. $3x - y + 2 = 0$ **B.** $2x - \sqrt{2}y = 0$ **C.** $-5x + 2 = 0$ **D.** $2y + 1 = 0$

5. Wskaż funkcję malejącą.

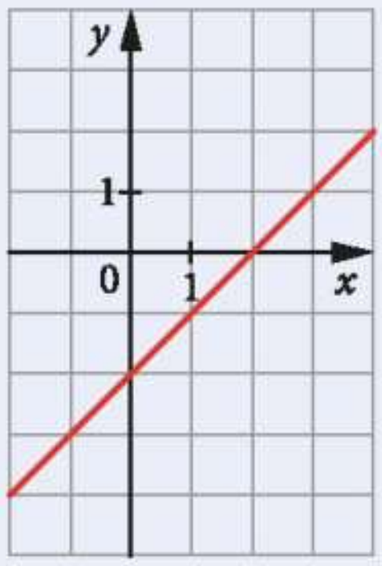
A. $f(x) = -3$ **B.** $f(x) = -5 + x$ **C.** $f(x) = 2x - 1$ **D.** $f(x) = 5 - x$

6. Która z narysowanych prostych jest równoległa do prostej o równaniu $y = x + 2$?

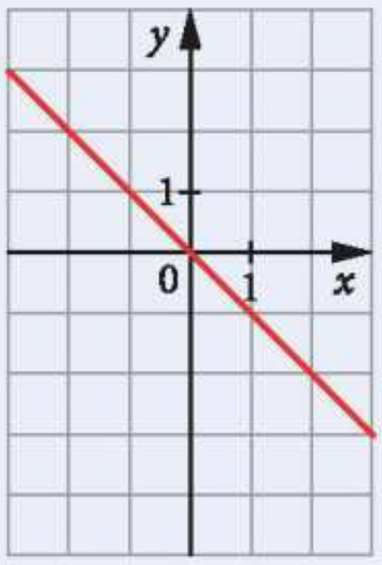
A.



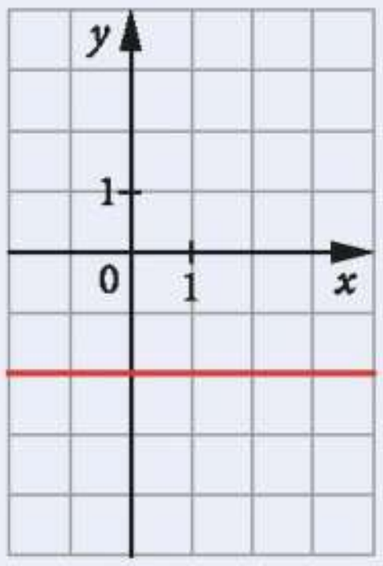
B.



C.



D.



7. Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi prosta będąca wykresem funkcji $f(x) = -2x + 1$?

A. I, II i IV **B.** II, III i IV **C.** tylko I i II **D.** tylko II i IV

8. Dla jakiej wartości m funkcje $f(x) = 2x - 1$ oraz $f(x) = m - x$ mają to samo miejsce zerowe?

A. $m = -1$ **B.** $m = 0$ **C.** $m = \frac{1}{2}$ **D.** $m = 2$

9. Które zdanie dotyczące prostej l o równaniu $y = 3x + 6$ jest fałszywe?

A. Prosta l przecina osie układu w punktach $(-2, 0), (0, 6)$.

B. Prosta l przechodzi przez I, II i III ćwiartkę układu współrzędnych.

C. Prosta l jest równoległa do prostej $-3x + y - 2 = 0$.

D. Prosta l przecina prostą $x - \frac{1}{3}y - \sqrt{3} = 0$.

10. Który z odcinków o podanych końcach przecina prosta $3x + y = 4$?

A. $(-1, 1), (2, 3)$ **C.** $(0, 0), (1, -1)$

B. $(3, -2), (3, 1)$ **D.** $(-2, -2), (-5, 1)$

11. Prosta l opisana jest równaniem $3x - 2y = -7$. Wskaż współczynnik kierunkowy funkcji liniowej f, której wykresem jest prosta l.

A. $\frac{7}{3}$ **B.** 1,5 **C.** 3 **D.** $\frac{2}{3}$

12. Wskaż prostą równoległą do prostej o równaniu $x - \sqrt{3}y + \sqrt{2} = 0$.

A. $x - y + \sqrt{2} = 0$ **C.** $\sqrt{3}x - 3y - 11 = 0$

B. $x + \sqrt{3}y + \sqrt{7} = 0$ **D.** $x - y - 1 = 0$

13. Wskaż sprzeczny układ równań.

A. $\begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ y - 6 = 0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x - 8y + 3 = 0 \\ \frac{1}{2}x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} 2x - 5y + 7 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$

14. Wskaż prostą prostopadłą do prostej o równaniu $2x - y = 0$.

A. $y = \frac{1}{2}x$ **B.** $y = 2x$ **C.** $y = -\frac{1}{2}x$ **D.** $y = -2x$

15. Wskaż punkt należący do prostej o równaniu $-12x + 2y + 1 = 0$.

A. $(0, -2{,}5)$ **B.** $(-3, 1)$ **C.** $(0, -0{,}5)$ **D.** $\left(\frac{1}{2}, -5\right)$

16. Równania $y = -\frac{5}{3}x + 3$ oraz $10x + 6y - 9 = 0$ przedstawiają

A. proste prostopadłe. **C.** proste równoległe.

B. proste przecinające się. **D.** tę samą prostą.

17. Wskaż prostą równoległą do osi y.

A. $x + y = 0$ **B.** $x - 7 = 0$ **C.** $2x + 2y = 9$ **D.** $y = 1$

18. Wskaż punkt przecięcia prostych o równaniach $-5x + 3y = 3$ i $2x + 3y = 24$.

A. $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ **B.** $(3, 6)$ **C.** $(12, 0)$ **D.** $(0, 1)$

19. Wskaż wartość m, dla której wykresy funkcji $f(x) = (5m + 7)x - 8$ i $g(x) = 5x - m$ są równoległe.

A. $m = -\frac{2}{5}$ **B.** $m = \frac{2}{5}$ **C.** $m = \frac{5}{2}$ **D.** $m = -\frac{5}{2}$

20. Wskaż wartość m, dla której wykresy funkcji $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$ oraz $g(x) = (m - 1)x + 11$ są prostopadłe.

A. $m = \frac{1}{3}$ **B.** $m = \frac{5}{3}$ **C.** $m = \frac{1}{2}$ **D.** $m = \frac{5}{2}$

21. Dana jest prosta l: $x + y - 3 = 0$. Wskaż zdanie fałszywe.

A. Prosta l przecina osie układu w punktach $(3, 0)$, $(0, 3)$.

B. Prosta l przecina I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

C. Prosta l jest prostopadła do prostej $x - y + 3 = 0$.

D. Prosta l ma dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem funkcji $y = -|x - 1| + 2$.

W zadaniach 22–30 oceń prawdziwość podanych zdań.

22. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{3}{2}x + 1 & \text{dla } x \in \langle -2; \infty) \end{cases}$.

A. Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą.

B. Funkcja f przyjmuje wartość największą.

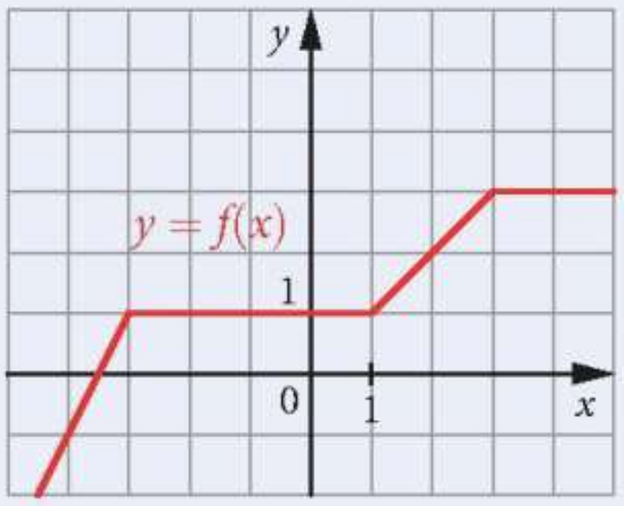
C. Równanie $f(x) = \sqrt{2}$ ma 2 rozwiązania.

23. Dana jest funkcja f przedstawiona na wykresie.

A. Funkcja f nie jest monotoniczna.

B. Funkcja f przyjmuje wartość największą równą 3.

C. Równanie $f(x) = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.



24. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{dla } x \in (-\infty;\ 1) \\ 2x+3 & \text{dla } x \in \langle 1;\ \infty) \end{cases}$.

A. Funkcja f jest rosnąca.

B. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe.

C. Wykresem funkcji f jest linia prosta.

25. Dany jest układ równań $\begin{cases} x-3y-1=0 \\ x+3y-1=0 \end{cases}$.

A. Rozwiązaniem układu jest jedna para liczb.

B. Układ jest sprzeczny.

C. Układ jest oznaczony.

26. Dany jest układ równań $\begin{cases} -3x+4y=7 \\ kx-12y=15 \end{cases}$.

A. Dla $k=-27$ rozwiązaniem układu jest para liczb $x=-1,\ y=1$.

B. Dla $k=9$ ten układ jest sprzeczny.

C. Istnieje taka wartość k, dla której ten układ jest nieoznaczony.

27. Dany jest układ równań $\begin{cases} 2x-y=5 \\ kx+2y=m \end{cases}$.

A. Istnieją takie wartości m oraz k, dla których ten układ jest oznaczony.

B. Istnieją takie wartości m oraz k, dla których ten układ jest nieoznaczony.

C. Istnieją takie wartości m oraz k, dla których ten układ jest sprzeczny.

28. Dana jest prosta k: $2x+y-m+3=0$.

A. Jeżeli $m=-3$, to prosta k przechodzi przez początek układu współrzędnych.

B. Dla dowolnej wartości $m \in \mathbf{R}$ prosta k ma punkty wspólne z IV ćwiartką układu współrzędnych.

C. Jeżeli $m<2$, to prosta k nie ma punktów wspólnych z I ćwiartką układu współrzędnych.

29. Dane są proste k: $2x+3y=5$ i l: $3x-2y=1$.

A. Proste k i l są prostopadłe.

B. Proste k i l przecinają się w punkcie $(1,\ 1)$.

C. Proste k i l oraz prosta $x-y=0$ mają dokładnie jeden punkt wspólny.

30. Dane są proste k: $4x-y=2$ i l: $x+2y=14$.

A. Proste k i l są prostopadłe.

B. Proste k i l są równoległe.

C. Proste k i l przecinają się w punkcie należącym do IV ćwiartki układu współrzędnych.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

31. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której miejscem zerowym jest liczba 3 i której wykres przechodzi przez punkt $(0, -5)$.

32. Podaj wzór funkcji liniowej, której wykres powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = 2x + 3$ przez symetrię względem
a) osi x.
b) osi y.

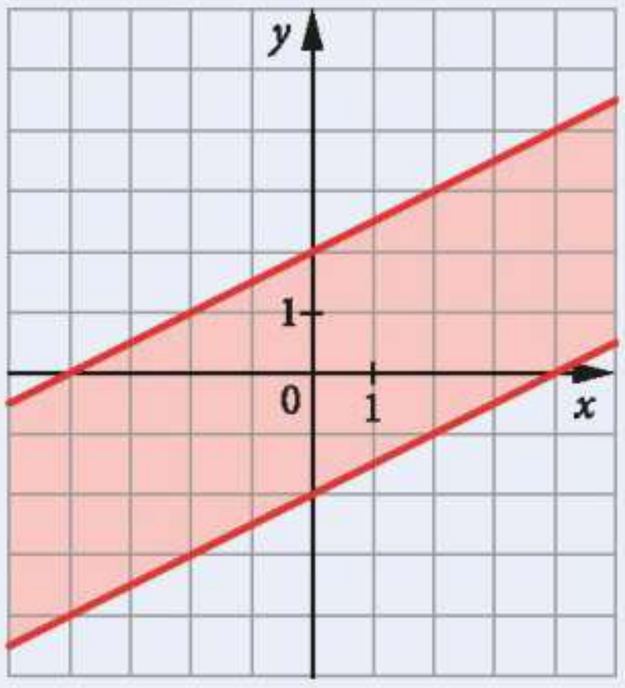
33. Wyznacz takie wartości m, aby funkcja $f(x) = (2m-3)x+6-m$ była malejąca.

34. Wyznacz wartość m, dla której wykresem układu równań $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ -2x + my = -2 \end{cases}$ są dwie różne proste równoległe.

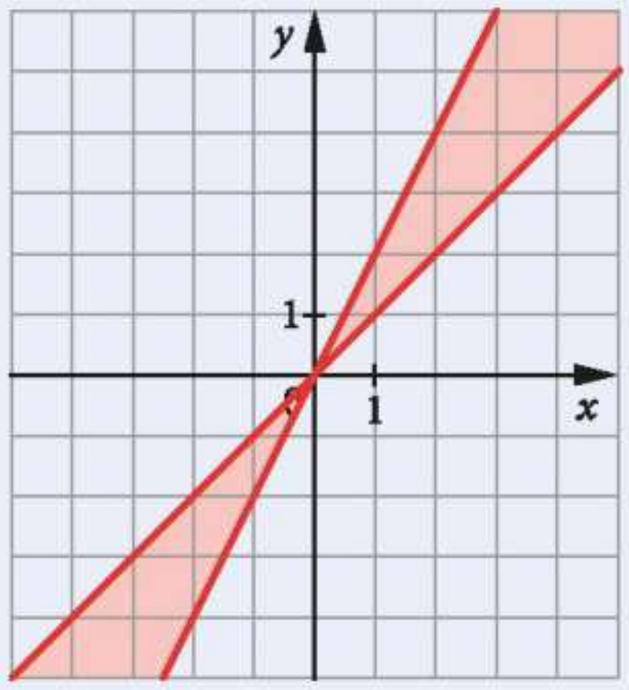
D **35.** Wykaż, że nie istnieje taka wartość m, dla której wykresy funkcji $f(x) = |5m - 11|x - 5$ i $g(x) = 3x - 5m + 2$ są prostopadłe.

36. Jakie warunki spełniają współczynniki funkcji liniowych $f(x) = ax+b$, których wykresy zawierają się w obszarze zaznaczonym kolorem na rysunku?

a)



b)



37. Zbadaj wzajemne położenie prostych k i l.
a) k: $-7x + 14y - 2 = 0$ $\quad$ l: $x - 2y + 1 = 0$
b) k: $x + 3y - 7 = 0$ $\quad$ l: $\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}y - 3\frac{1}{2} = 0$

38. Wyznacz punkt przecięcia prostych o podanych równaniach (o ile taki punkt istnieje).
a) $2x - 3y + 18 = 0$ i $6x - 9y + 15 = 0$
b) $5x - 10y - 2 = 0$ i $x - 2y - 0{,}4 = 0$
c) $7x - 14y - 1 = 0$ i $x - 2y - 1 = 0$
d) $2x - 6 = 0$ i $y - 3 = 0$

39. Podaj równanie prostej równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt P.

a) k: $x + y + 1 = 0$ $\quad P = (2, -1)$

b) k: $\sqrt{2}x + 3y - 1 = 0$ $\quad P = \left(-\sqrt{2}, 0\right)$

40. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P.

a) k: $2x + y - 3 = 0$ $\quad P = (-1, 2)$

b) k: $2\sqrt{3}x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ $\quad P = (1, 1)$

41. Dla jakich wartości m proste k i l nie mają punktów wspólnych?

a) k: $2x - y + 2 = 0$ $\quad l$: $4x - my + 7 = 0$

b) k: $\frac{1}{2}x + 2y + 1 = 0$ $\quad l$: $2x + (m + 3)y - 12 = 0$

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

42. Wyznacz miejsce zerowe funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty $(-2, 5)$ i $(1, 2)$.

D **43.** Wykaż, że punkty $(-1, 4)$, $(3, 2)$ i $(2019, -1006)$ leżą na jednej prostej.

44. Wyznacz takie wartości m, aby funkcja $f(x) = \left(|3m - 5| - 4\right)x + |m - 2| - 6$ była rosnąca i miała dodatnie miejsce zerowe.

45. Wyznacz parametr m tak, aby do wykresu funkcji $f(x) = (3 - 2m)x - |3m - 6|$ należał punkt $A = (-2, 3)$.

D **46.** Wykaż, że nie istnieją takie wartości m i k, aby wykresy funkcji $y = (k + m)x + k$ oraz $y = (k - m)x - m - 2$ przecinały się w punkcie $A = (-2, 2)$.

47. Na podstawie wykresu określ monotoniczność podanej funkcji.

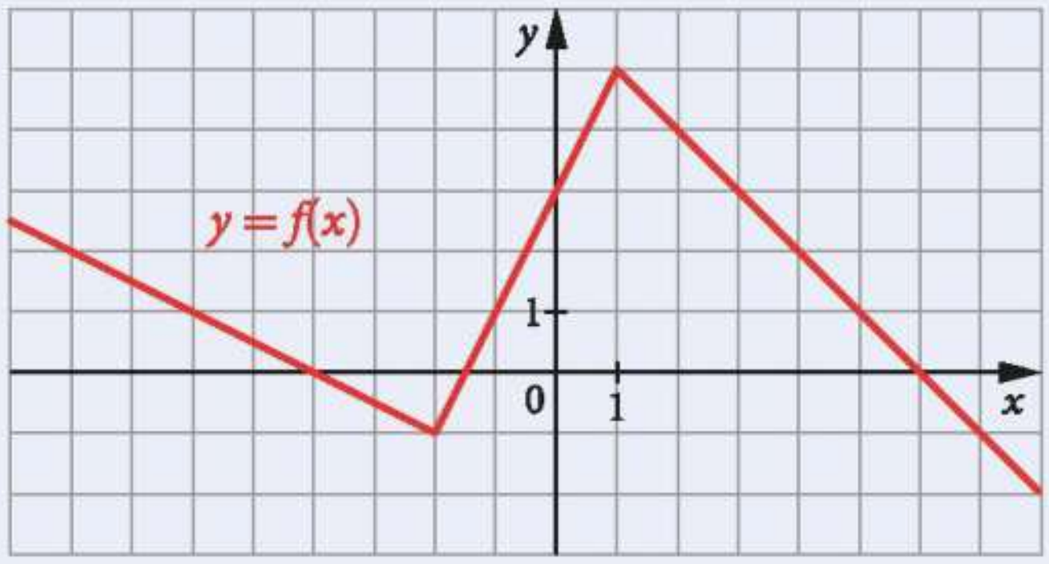
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 0 & \text{dla } x = -1 \\ x - 2 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$$

48. Wykres przedstawia funkcję f.

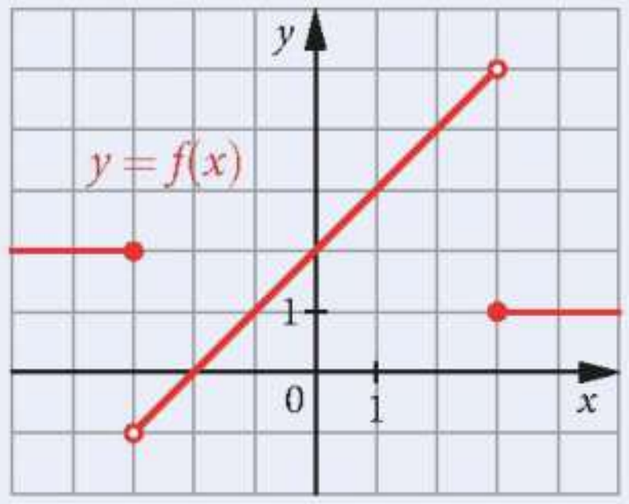
a) Podaj wzór tej funkcji.

b) Sporządź wykres funkcji $g(x) = f(-x)$.

c) Sporządź wykres funkcji $h(x) = |f(x)|$.



49. Wykres przedstawia funkcję f.



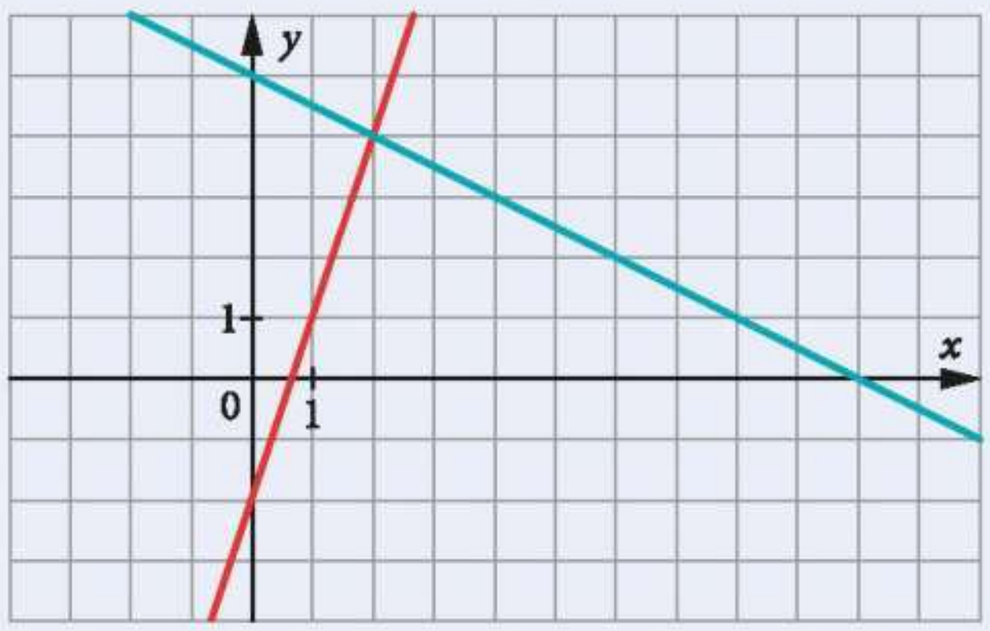
a) Podaj wzór tej funkcji.
b) Narysuj wykres funkcji $h(x) = |f(x)|$.
c) Podaj przedziały monotoniczności funkcji h.

50. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 1{,}5x + 4{,}5 & \text{dla } x \in \langle -5; -1) \\ -x + 2 & \text{dla } x \in \langle -1; 4\rangle \end{cases}$, narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x)| - 3$. Odczytaj z wykresu wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji g oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.

51. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{dla } |x - 2| \leqslant 3 \\ -2 & \text{dla } |x - 2| > 3 \end{cases}$.
Na podstawie wykresu podaj: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe funkcji; przedziały, w których wartości funkcji mają ten sam znak; wartość największą i wartość najmniejszą oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości. Następnie oceń prawdziwość zdań.
A. Równanie $f(x) = -1$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
B. W przedziale $\langle -1; \infty)$ f jest funkcją monotoniczną.
C. W przedziale $(-\infty; -1\rangle$ f jest funkcją niemalejącą.

52. Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$.

53. Podaj przykład układu równań liniowych, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku poniżej.



54. Dane są dwie funkcje liniowe: $f(x) = -3x + 6$, $g(x) = \frac{3}{4}x - 3$. Dla jakich argumentów obie te funkcje przyjmują wartości mniejsze od 3?

55. Wyznacz takie wartości b, aby liczba będąca miejscem zerowym funkcji $f(x) = -2x + b$ należała do przedziału $(2; 5\rangle$.

56. Dana jest funkcja $f(x) = -2x + 6$.
a) Naszkicuj wykres tej funkcji.
b) Sprawdź, czy punkt $A = (-1, 8)$ należy do wykresu danej funkcji.
c) Napisz równanie prostej, która jest symetryczna do wykresu danej funkcji względem osi x.

57. Wykres funkcji liniowej g przechodzi przez punkt $A = (-1, 2)$ i jest równoległy do wykresu funkcji $y = 2x - 2$.
a) Napisz wzór funkcji g i oblicz jej miejsce zerowe.
b) Sporządź wykresy obu funkcji.
c) Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości ujemne?

58. Dane są funkcje $f(x) = 0{,}5x - 2$ i $g(x) = -4x + 7$. Sporządź w jednym układzie współrzędnych wykresy tych funkcji.
a) Oblicz miejsca zerowe tych funkcji.
b) Dla jakiego argumentu wartości obu funkcji są równe?
c) Dla jakich argumentów funkcje te przyjmują jednocześnie wartości ujemne?
d) Dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g?

59. Dla jakich wartości m punkt przecięcia prostych o równaniach $x - y = m - 1$ i $2x - y = 3 - m$ należy do trzeciej ćwiartki układu współrzędnych?

60. Funkcja liniowa f przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów większych od 8. Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie $(0, 4)$. Napisz wzór funkcji g, której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji f, wiedząc, że funkcje f i g mają to samo miejsce zerowe.

61. Wyznacz wszystkie całkowite wartości parametrów p i q, dla których wykresy funkcji liniowych $f(x) = (4p + 3q)x + 2p - 5$ oraz $g(x) = (2p + q)x - 4q + 7$ są prostopadłe.

Funkcja kwadratowa

5



1. Funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2$

Umiejętności:
- interpretowanie współczynnika a występującego we wzorze funkcji
- szkicowanie wykresów i określanie własności funkcji $f(x) = ax^2$

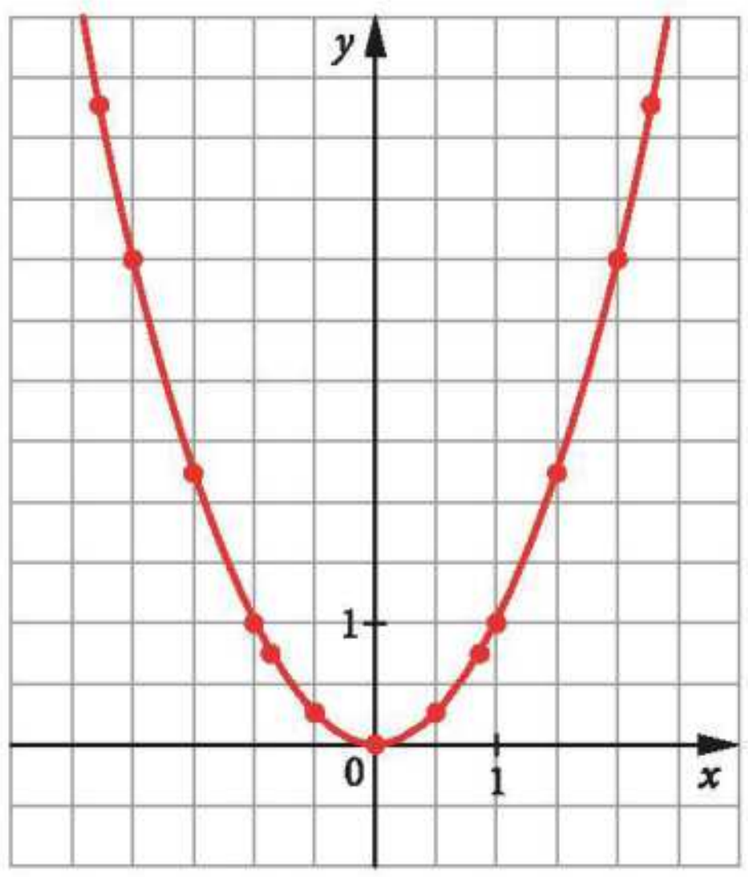
W poprzednim rozdziale omawialiśmy własności funkcji $f(x) = ax + b,\ x \in \mathbf{R}$. Jej wykresem jest prosta. Teraz zajmiemy się badaniem funkcji o wzorze $f(x) = ax^2$, gdzie $x \in \mathbf{R}$. Współczynnik a jest ustaloną, różną od zera liczbą rzeczywistą.

Zaczniemy od rozważenia sytuacji, gdy $a > 0$. Ułożymy częściową tabelę i naszkicujemy wykres takiej funkcji dla $a = 1$. Wówczas $f(x) = x^2$.

x	$-2\frac{1}{3}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{3}$
$f(x) = x^2$	$5\frac{4}{9}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$5\frac{4}{9}$

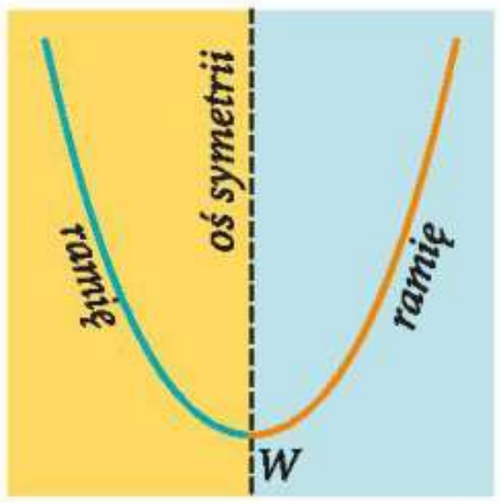
Punkty o współrzędnych zapisanych w tabeli należą do krzywej przedstawionej na poniższym rysunku. Można wykazać, że ta krzywa – nazywana **parabolą** – jest wykresem funkcji $f(x) = x^2$.

Z wykresu odczytujemy własności funkcji f:
- zbiorem wartości jest przedział $\langle 0;\ \infty)$,
- funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą 0 dla $x = 0$ i nie przyjmuje wartości największej,
- miejscem zerowym jest $x = 0$,
- $f(x) > 0$ dla $x \neq 0$, więc wykres znajduje się w I oraz II ćwiartce układu współrzędnych,
- w przedziale $(-\infty;\ 0\rangle$ funkcja jest malejąca, w przedziale $\langle 0;\ \infty)$ funkcja jest rosnąca, zatem funkcja nie jest monotoniczna,
- osią symetrii wykresu jest oś y,
- równanie $f(x) = m$:
  dla $m < 0$ nie ma rozwiązań,
  dla $m = 0$ ma jedno rozwiązanie,
  dla $m > 0$ ma dwa rozwiązania.



Parabola o równaniu $y = x^2$ jest wykresem funkcji $f(x) = x^2$. W dalszych rozważaniach nie będziemy na ogół tych zapisów rozróżniać.

W paraboli wyróżniamy dwa **ramiona** oraz **wierzchołek**, czyli punkt przecięcia paraboli z jej osią symetrii (na rysunku oznaczony literą W).

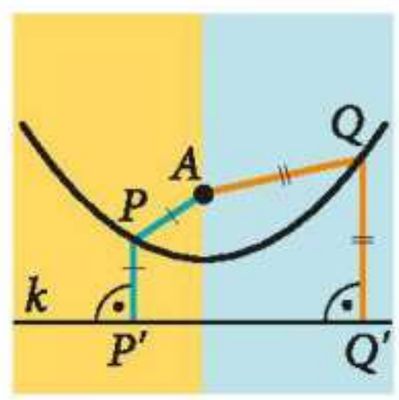


Parabola jest w geometrii definiowana jako zbiór punktów równo oddalonych od pewnego punktu A – nazywanego **ogniskiem**, i od pewnej prostej k – nazywanej **kierownicą** paraboli (zakładamy, że punkt A nie należy do prostej k).

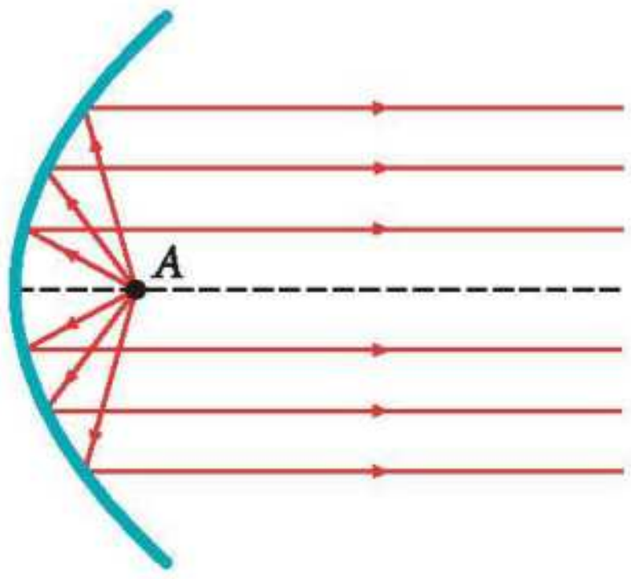
$|PA| = |PP'|$ dla każdego punktu P leżącego na paraboli.

Dla wykresu funkcji $f(x) = x^2$ ogniskiem jest punkt $\left(0, \frac{1}{4}\right)$,

a kierownicą – prosta $y = -\frac{1}{4}$.



Każdy promień świetlny wychodzący z ogniska paraboli po odbiciu się od niej jest równoległy do osi symetrii paraboli.





Zjawisko odbicia wykorzystywane jest np. w parabolicznym reflektorze lustrzanym – żarówka umieszczona jest w jego ognisku.

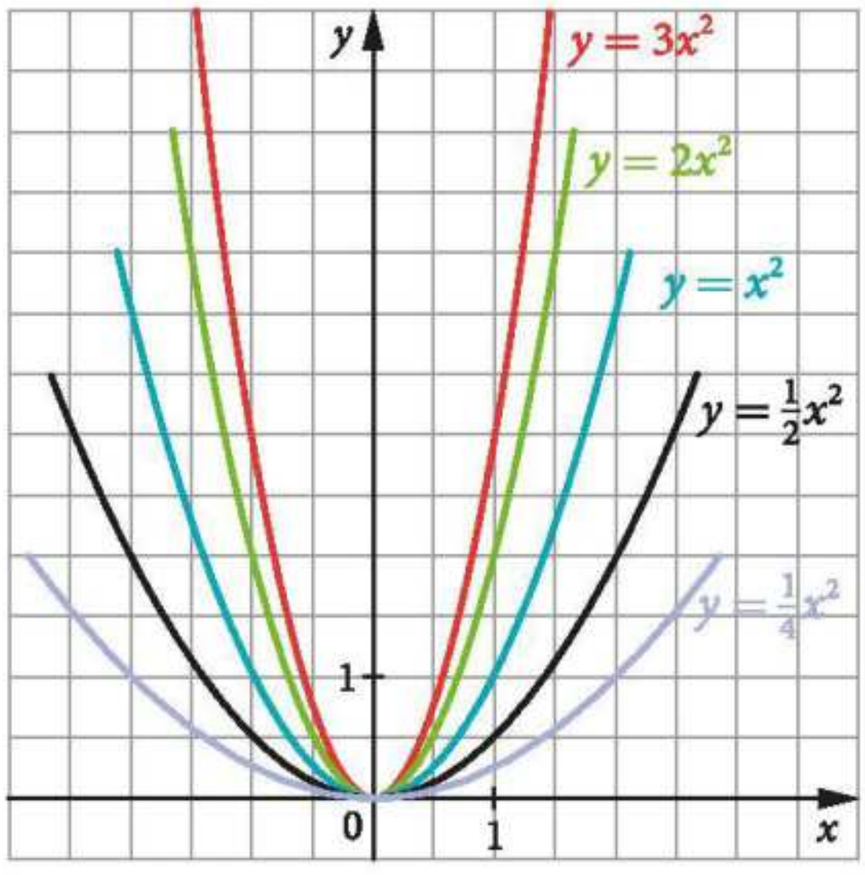


Anteny satelitarne wykorzystują natomiast zjawisko odwrotne – w jednym punkcie skupiają biegnące równolegle fale radiowe.

Narysujmy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$y = x^2,\ y = 2x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2,\ y = 3x^2,\ y = \frac{1}{4}x^2$$

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
$y = 3x^2$	12	3	0	3	12
$y = \frac{1}{4}x^2$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1



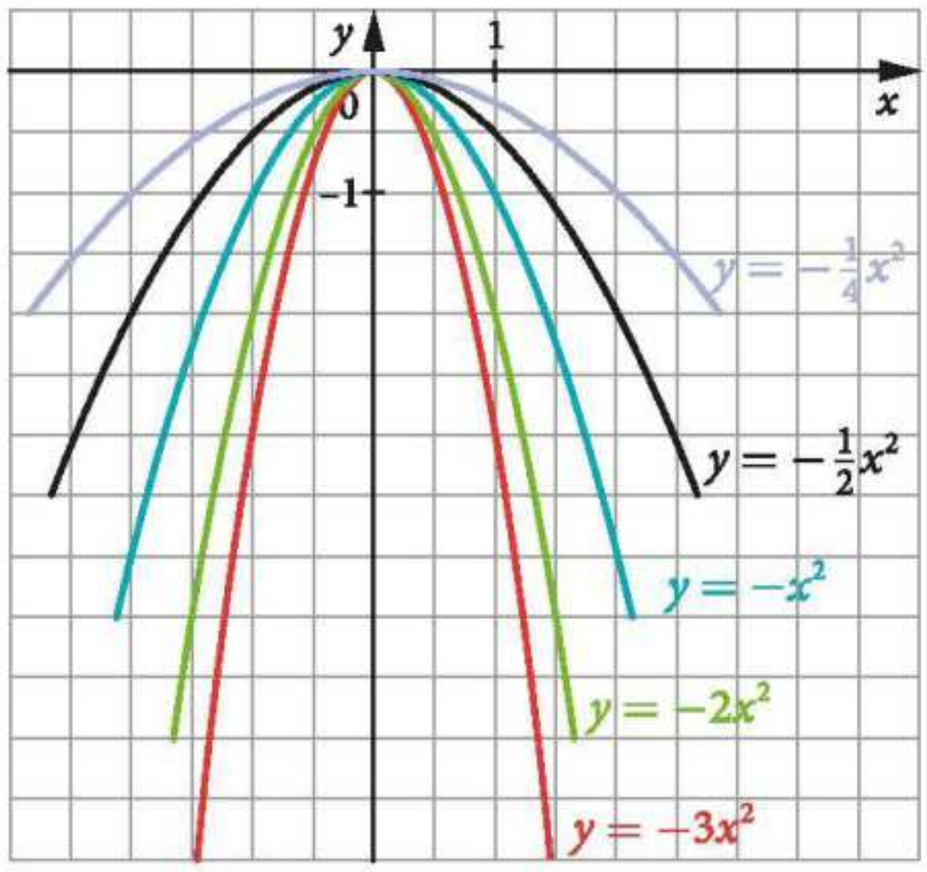
Każda z tych funkcji ma takie same własności (opisane wcześniej) jak funkcja $y = x^2$.

Wniosek ten możemy uogólnić (dowód tego twierdzenia pominiemy) na każdą funkcję postaci $f(x) = ax^2$, o ile $a > 0$.

Wykres funkcji $y = -ax^2$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = ax^2$ względem osi x.

Możemy zatem łatwo narysować wykresy funkcji:

$$y = -x^2,\ y = -2x^2,\ y = -\frac{1}{2}x^2,$$
$$y = -3x^2,\ y = -\frac{1}{4}x^2$$



Opis własności funkcji $f(x) = ax^2$ dla $a < 0$ pozostawiamy do samodzielnego wykonania.

Wierzchołkiem każdej paraboli o równaniu $y = ax^2$, $a \neq 0$ jest początek układu współrzędnych.

Zamiast precyzyjnego określenia: „parabola o równaniu $y = ax^2$, w którym współczynnik przy x^2 jest dodatni", powszechnie używany jest zwrot **parabola o ramionach skierowanych do góry** (dla ujemnego współczynnika przy x^2 – w dół).

Przykład 1 ◀ zad. 1.11

Wyznaczymy taką wartość współczynnika a, aby parabola o równaniu $y = ax^2$ przechodziła przez punkt $P = (-4, 100)$.

Rozwiązanie

Punkt P leży na paraboli, więc jego współrzędne spełniają jej równanie:

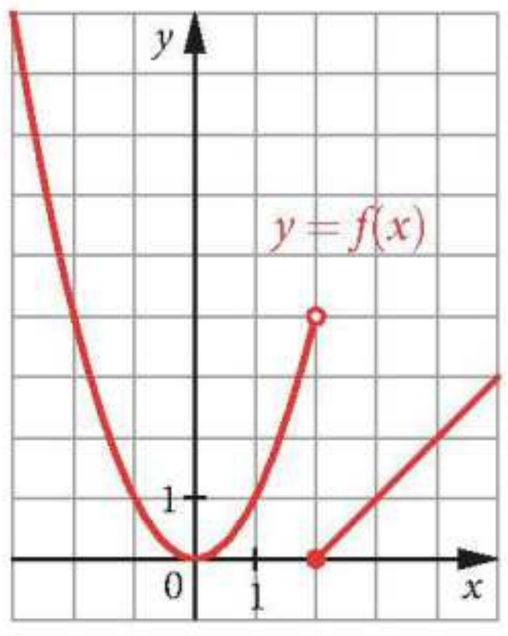
$$100 = a(-4)^2$$

Zatem $a = \frac{100}{16}$.

Odp.: $a = \frac{25}{4}$

Przykład 2 ◀ zad. 1.12

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 2 \\ x - 2 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$ i na jego podstawie określimy monotoniczność funkcji f.

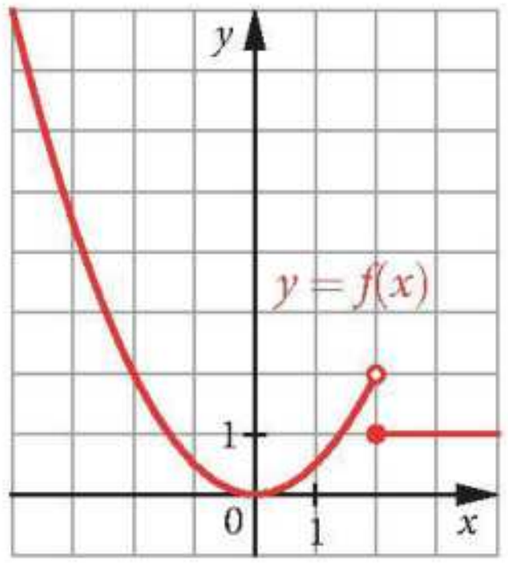


Rozwiązanie

Funkcja nie jest monotoniczna. W przedziale $(-\infty; 0\rangle$ jest malejąca, w przedziale $\langle 0; 2)$ jest rosnąca oraz w przedziale $\langle 2; \infty)$ jest rosnąca. Zwróćmy uwagę, że funkcja nie jest rosnąca w przedziale $\langle 0; \infty)$.

Przykład 3 ◀ zad. 1.16

Wykres jest sumą fragmentów paraboli i prostej.
Podamy wzór funkcji f przedstawionej na tym wykresie.



Rozwiązanie

Parabola o równaniu $y = ax^2$, $a \neq 0$ przechodzi przez punkty $(-2, 2)$, $(0, 0)$ i dochodzi do punktu $(2, 2)$. Zatem współczynnik a spełnia równanie:

$$2 = a \cdot 4, \text{ czyli } a = \frac{1}{2}$$

Dla $x \geqslant 2$ wykresem jest część prostej $y = 1$. Wzór funkcji ma zatem postać:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{dla } x < 2 \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Odp.: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{dla } x < 2 \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$

D **Przykład 4** ◀ zad. 1.18

Korzystając z definicji, udowodnimy, że funkcja $f(x) = -2x^2$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

Rozwiązanie

Zgodnie z definicją funkcji rosnącej (zob. s. 249) mamy wykazać, że jeśli weźmiemy dwa dowolne argumenty z przedziału $(-\infty; 0)$, to większemu z nich odpowiada większa wartość funkcji.

Założenie

$f(x) = -2x^2$

$x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ ⟵ tak oznaczamy dwa dowolne argumenty z przedziału $(-\infty; 0)$

$x_1 < x_2$ ⟵ zakładamy, że większy z nich nazywa się x_2

Teza

$f(x_1) < f(x_2)$

Dowód

Aby wykazać, że $f(x_1) < f(x_2)$, wystarczy udowodnić, że $f(x_1) - f(x_2) < 0$.

$f(x_1) = -2x_1^2,\ f(x_2) = -2x_2^2$

$f(x_1) - f(x_2) = -2x_1^2 - \left(-2x_2^2\right) =$ ⟵ wyłączamy -2 przed nawias

$= -2\left(x_1^2 - x_2^2\right) = -2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ ⟵ rozkładamy na czynniki, stosując wzór na różnicę kwadratów

Zapisaliśmy różnicę $f(x_1) - f(x_2)$ w postaci iloczynu trzech czynników, z których:

$-2 < 0$

$x_1 - x_2 < 0$, bo założyliśmy, że $x_1 < x_2$

$x_1 + x_2 < 0$, bo obydwie liczby są ujemne $(x_1, x_2 \in (-\infty; 0))$

Iloczyn trzech ujemnych czynników jest ujemny, zatem $f(x_1) - f(x_2) < 0$, czyli funkcja f jest rosnąca w danym przedziale.

Koniec dowodu

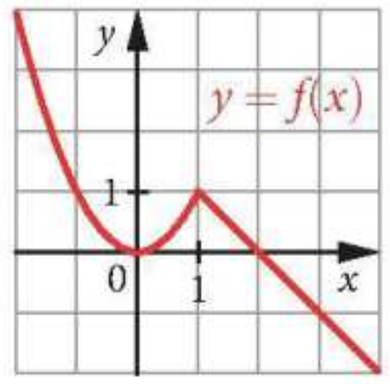
Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Wskaż wartość a, dla której punkt $P = (-1, 4 - a)$ należy do wykresu funkcji $y = -2x^2$.

A. $a = -3$ **B.** $a = -1$ **C.** $a = 3$ **D.** $a = 6$

1.2. Wskaż wzór, który ma funkcja przedstawiona na wykresie.



A. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 1 \\ x & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$

B. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ -x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

C. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ -x+1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

D. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

1.3. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ x-2 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$. Wskaż liczbę rozwiązań równania $f(x) = -1$.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

1.4. Podaj wzór funkcji $y = f(x)$, jeżeli

a) x jest długością boku kwadratu, a y polem tego kwadratu.
b) x jest długością boku kwadratu, a y połową pola tego kwadratu.
c) x jest długością krawędzi sześcianu, a y polem powierzchni tego sześcianu.
d) x jest długością krawędzi sześcianu, a y potrojonym polem powierzchni tego sześcianu.
e) x jest promieniem koła, a y polem tego koła.
f) x jest promieniem koła, a y polem koła o promieniu dwa razy większym.

1.5. Narysuj wykres funkcji o podanym wzorze.

a) $f(x) = -3x^2$
b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$
c) $f(x) = \frac{3}{2}x^2$
d) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$
e) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2$
f) $f(x) = 5x^2$

1.6. Narysuj wykres funkcji f i odczytaj z wykresu, dla jakich wartości m równanie $f(x) = m$:

I. ma dwa rozwiązania, II. nie ma rozwiązań, III. ma jedno rozwiązanie.

a) $f(x) = 2x^2$ b) $f(x) = \frac{2}{3}x^2$ c) $f(x) = -4x^2$ d) $f(x) = -\frac{4}{3}x^2$

1.7. Wykresy funkcji $y = ax^2$ dla $a \neq 0$ tworzą pewną rodzinę parabol. Wyznacz a tak, aby

a) wykres przechodził przez punkt $(2, 2)$.
b) wykres przechodził przez punkt $(3, -9)$.
c) wykres przechodził przez punkt $\left(\frac{2}{5}, 0{,}16\right)$.
d) ramiona parabol były skierowane w dół.

1.8. Sporządź wykres funkcji f, której dziedziną jest zbiór D.

a) $f(x) = x^2$ $D = (-\infty; 1)$

b) $f(x) = 3x^2$ $D = \langle -1; 1\rangle$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $D = \langle -4; 2)$

d) $f(x) = -2x^2$ $D = (1; \infty)$

e) $f(x) = -\frac{4}{3}x^2$ $D = (0; \infty)$

f) $f(x) = -5x^2$ $D = \langle -1; 0\rangle$

1.9. Sprawdź, które z punktów $A = (-1, 3)$, $B = \left(\sqrt{2}, -4\right)$, $C = \left(-\sqrt{3}, -6\right)$, $D = (2, -8)$ należą do paraboli o równaniu $y = -2x^2$.

1.10. Dla jakich wartości m do wykresu funkcji $y = f(x)$ należy punkt P?

a) $f(x) = 3x^2$ $P = (1, m - 2)$

b) $f(x) = x^2$ $P = \left(m - 2, m^2\right)$

c) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$ $P = \left(3m - 1, 3\frac{1}{3} - 6m^2\right)$

d) $y = -\frac{1}{2}x^2$ $P = (-2, 3m + 1)$

1.11. Dla jakich wartości współczynnika a do wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ należy punkt P?

a) $P = (1, 2)$ b) $P = (2, -4)$ c) $P = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ d) $P = \left(\frac{2}{3}, 0{,}36\right)$

1.12. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0 \\ x^2 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$.

Podaj zbiór wartości funkcji i określ jej monotoniczność.

1.13. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{dla } x < 1 \\ 2 & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Podaj jej wartość najmniejszą oraz jej wartość największą w przedziale $\langle -2; 1\rangle$.

1.14. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -2x - 2 & \text{dla } x \in \langle -2; 1\rangle \\ -4x^2 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$.

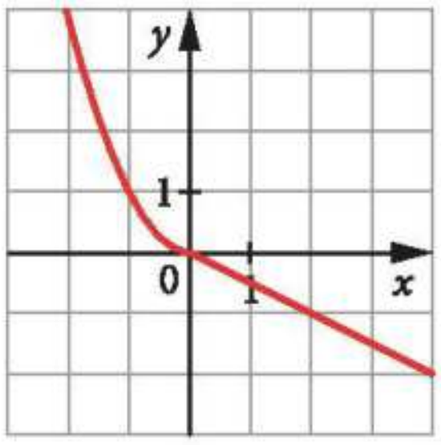
Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne?

1.15. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ \frac{1}{3}x^2 & \text{dla } x \in \langle -3; 0\rangle \\ x & \text{dla } x \in (0; \infty) \end{cases}$.

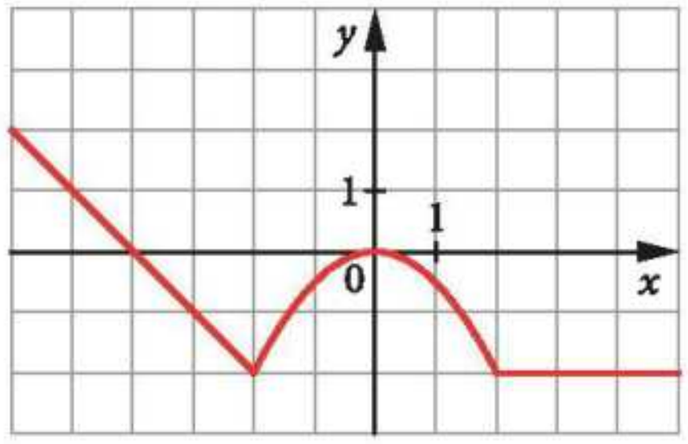
Dla jakich wartości m równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania?

1.16. Wykres jest sumą fragmentów paraboli i prostych. Podaj wzór funkcji przedstawionej na wykresie.

a)



b)



1.17. Przez które punkty płaszczyzny kartezjańskiej nie przechodzi żadna z parabol $y = ax^2$ $(a \neq 0)$?

D **1.18.** Korzystając z definicji, udowodnij, że funkcja $f(x) = -x^2$ jest malejąca w przedziale $(0; \infty)$.

D **1.19.** Korzystając z definicji, udowodnij, że funkcja $f(x) = 3x^2$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

Prosto do matury

1. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 0 \\ -x^2 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Funkcja f ma jedno miejsce zerowe.
B. Funkcja f jest malejąca.
C. Funkcja f jest monotoniczna.

2. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{5}x^2$, której dziedziną jest przedział $(-5; 3\rangle$. Podaj wartość największą i wartość najmniejszą (o ile funkcja je przyjmuje) oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

3. Dla jakich wartości parametru m do wykresu funkcji $f(x) = \frac{5}{2}x^2$ należy punkt $P = \left(m, 2\frac{1}{2}m^2 + m - 2\right)$?

4. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -2x - 8 & \text{dla } x \leqslant -2 \\ -x^2 & \text{dla } -2 < x < 1 \\ x - 2 & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$
i na jego podstawie odpowiedz, dla jakich wartości m równanie $f(x) = m$ ma trzy rozwiązania.

D **5.** Korzystając z definicji, udowodnij, że funkcja $f(x) = -x^2$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

2. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

Umiejętności:

- interpretowanie współczynników występujących we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej
- szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej na podstawie jej postaci kanonicznej

Będziemy teraz badać, w jaki sposób zmieniają się:

- położenie wierzchołka paraboli,
- zbiór wartości, liczba miejsc zerowych oraz przedziały monotoniczności funkcji kwadratowej w zależności od przesunięcia jej wykresu.

Przykład 1

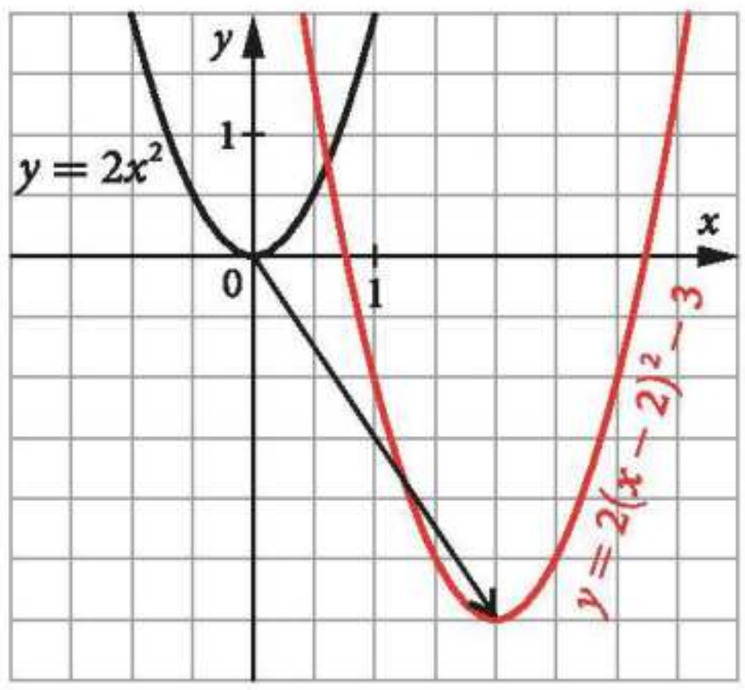
Dana jest funkcja $f(x) = 2x^2$. Narysujemy wykres funkcji $g(x) = f(x-2) - 3$ i opiszemy jej własności.

Rozwiązanie

Wykres funkcji g powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $[2, -3]$. Funkcja g jest wyrażona wzorem $g(x) = 2(x-2)^2 - 3$.

Własności funkcji g:

- $ZW = \langle -3; \infty)$,
- wierzchołkiem paraboli jest punkt $W = (2, -3)$,
- funkcja osiąga wartość najmniejszą równą -3 dla $x = 2$,
- funkcja ma dwa miejsca zerowe,
- osią symetrii wykresu jest prosta $x = 2$,
- w przedziale $(-\infty; 2\rangle$ funkcja jest malejąca, w przedziale $\langle 2; \infty)$ jest rosnąca,
- równanie $g(x) = m$:
  dla $m < -3$ nie ma rozwiązań,
  dla $m = -3$ ma jedno rozwiązanie,
  dla $m > -3$ ma dwa rozwiązania.



Jeżeli przesuniemy parabolę o równaniu $y = ax^2$, $a \neq 0$ o wektor $[p, q]$, otrzymamy parabolę o równaniu $y = a(x-p)^2 + q$.

Wniosek

Wierzchołkiem paraboli o równaniu $y = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$ jest punkt $W = (p, q)$.

Przykład 2 ◀ zad. 2.12

Jaką wartość największą (lub najmniejszą) i dla jakiego argumentu przyjmuje funkcja f?

a) $f(x) = -3(x + 1)^2 + 5$ b) $f(x) = \sqrt{2}(x - 6)^2 - 3$

Rozwiązanie

a) Parabola $y = -3x^2$ ma ramiona skierowane do dołu. Wykres funkcji f otrzymamy po przesunięciu tej paraboli o wektor $[-1, 5]$. Zatem wierzchołek otrzymanej paraboli ma współrzędne $(-1, 5)$. Funkcja $f(x) = -3(x + 1)^2 + 5$ przyjmuje więc wartość największą równą 5 dla $x = -1$.

b) Parabola $y = \sqrt{2}x^2$ ma ramiona skierowane do góry. Wykres funkcji f otrzymamy po przesunięciu tej paraboli o wektor $[6, -3]$. Zatem wierzchołek otrzymanej paraboli ma współrzędne $(6, -3)$. Funkcja $f(x) = \sqrt{2}(x-6)^2 - 3$ przyjmuje więc wartość najmniejszą równą -3 dla $x = 6$.

Definicja

Funkcję $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$ i $x \in \mathbf{R}$, nazywamy funkcją kwadratową zmiennej x **w postaci kanonicznej**.

Znając postać kanoniczną funkcji kwadratowej, można określić jej podstawowe własności, gdyż dane są wówczas trzy liczby:

- a – współczynnik, który określa, czy ramiona paraboli skierowane są do góry czy w dół,
- p, q – współrzędne wierzchołka paraboli.

Przykład 3 ◀ zad. 2.13

Wyznaczymy liczbę rozwiązań równania $-\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 4 = m$ w zależności od m.

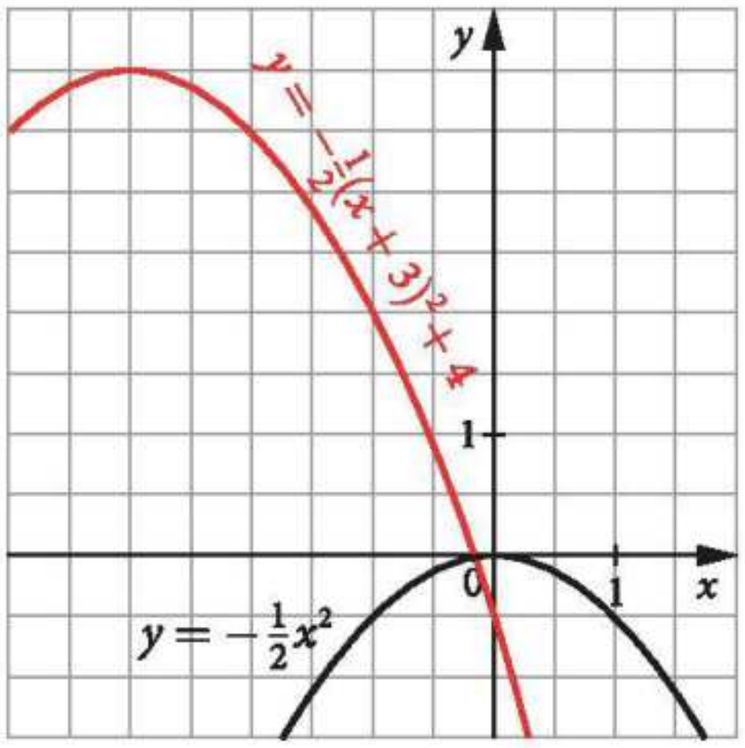
Rozwiązanie

Rozważmy funkcję $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 4$. Jest to funkcja kwadratowa w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$, przy czym $a = -\frac{1}{2}$, $p = -3$ oraz $q = 4$.

Zatem jej wykresem jest parabola o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku w punkcie $W = (-3, 4)$.

Równanie $-\frac{1}{2}(x+3)^2 + 4 = m$:

- dla $m \in (-\infty; 4)$ ma dwa rozwiązania,
- dla $m = 4$ ma jedno rozwiązanie,
- dla $m \in (4; \infty)$ nie ma rozwiązań.



Przykład 4 ◂ zad. 2.14

Parabola $y = a(x-p)^2 + q$ ma wierzchołek w punkcie $W = (1, -2)$ i przechodzi przez punkt $A = (2, -5)$. Napiszemy równanie tej paraboli.

Rozwiązanie

$y = a(x-1)^2 - 2$ ⟵ $p = 1$, $q = -2$

$-5 = a(2-1)^2 - 2$ ⟵ podstawiamy współrzędne punktu A

$a = -3$, a więc $y = -3(x-1)^2 - 2$

Odp.: Równanie paraboli to $y = -3(x-1)^2 - 2$.

Przykład 5 ◂ zad. 2.18

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = \left|(x-4)^2 - 2\right| + 1$.

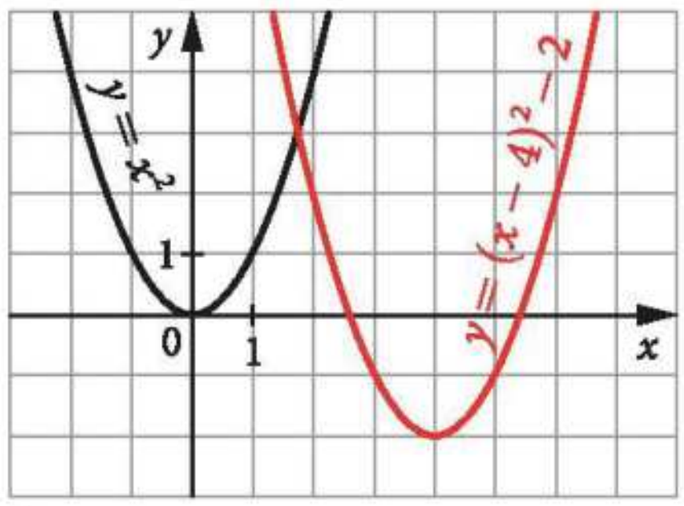
Rozwiązanie

Na kolejnych rysunkach pokazujemy, jak otrzymać szukany wykres.

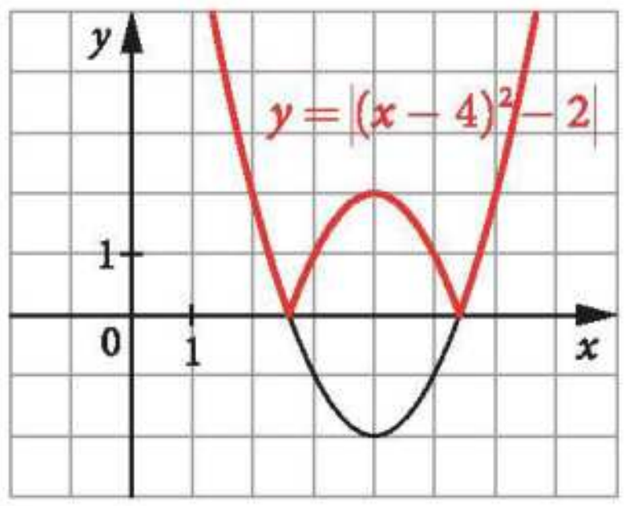
Krok 1: Przesuwamy parabolę $y = x^2$ o wektor $[4, -2]$ i dostajemy parabolę $y = (x-4)^2 - 2$ (zob. rys. 1).

Krok 2: Odbijamy symetrycznie względem osi x punkty poprzedniego wykresu leżące poniżej tej osi oraz bierzemy wszystkie punkty poprzedniego wykresu leżące powyżej osi x – dostajemy krzywą $y = \left|(x-4)^2 - 2\right|$ (zob. rys. 2).

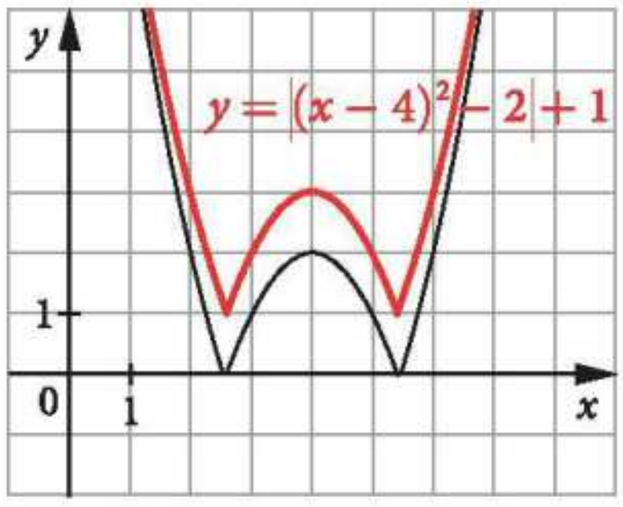
Krok 3: Przesuwamy ostatnio narysowany wykres o wektor $[0, 1]$ i otrzymujemy szukany wykres funkcji $f(x) = \left|(x-4)^2 - 2\right| + 1$ (zob. rys. 3).



Rys. 1.



Rys. 2.



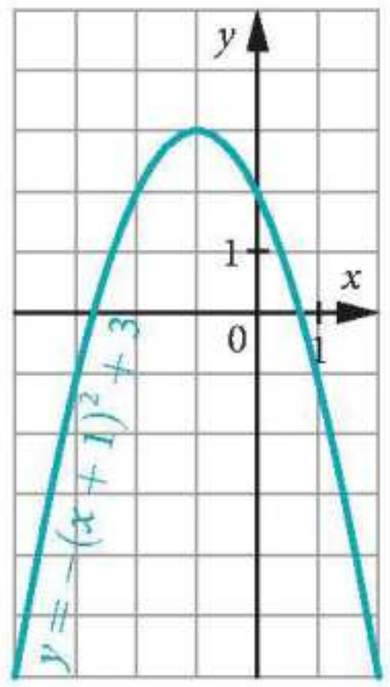
Rys. 3.

Przykład 6 ◀ zad. 2.19, 2.20

Przekształcimy parabolę o równaniu $y = -(x + 1)^2 + 3$ przez symetrię względem prostej l, a następnie napiszemy równanie otrzymanej paraboli.

a) $l\colon\ y = 1$ b) $l\colon\ x = 2$

Rozwiązanie

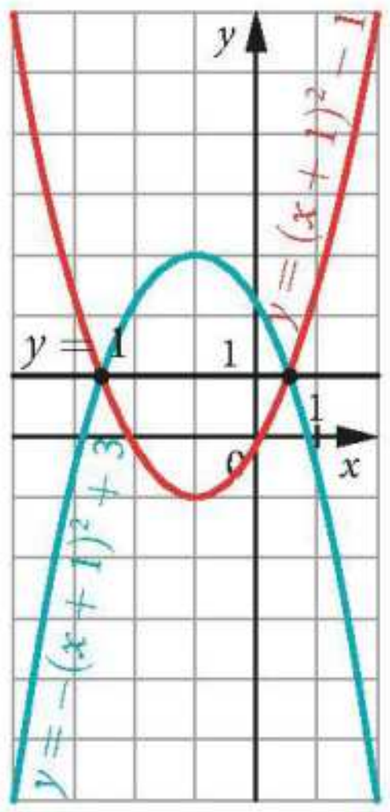


Z porównania zapisu danej paraboli $y = -(x + 1)^2 + 3$ z ogólnym zapisem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$ odczytujemy:

- współrzędne wierzchołka paraboli $W = (-1, 3)$,
- współczynnik $a = -1$.

Zatem parabola ma ramiona skierowane w dół i powstała w wyniku przesunięcia paraboli $y = -x^2$ o wektor $[-1, 3]$.
Jej osią symetrii jest prosta $x = -1$.

a) Aby przekształcić parabolę $y = -(x + 1)^2 + 3$ przez symetrię względem prostej $l\colon\ y = 1$, wykonujemy kolejne kroki.

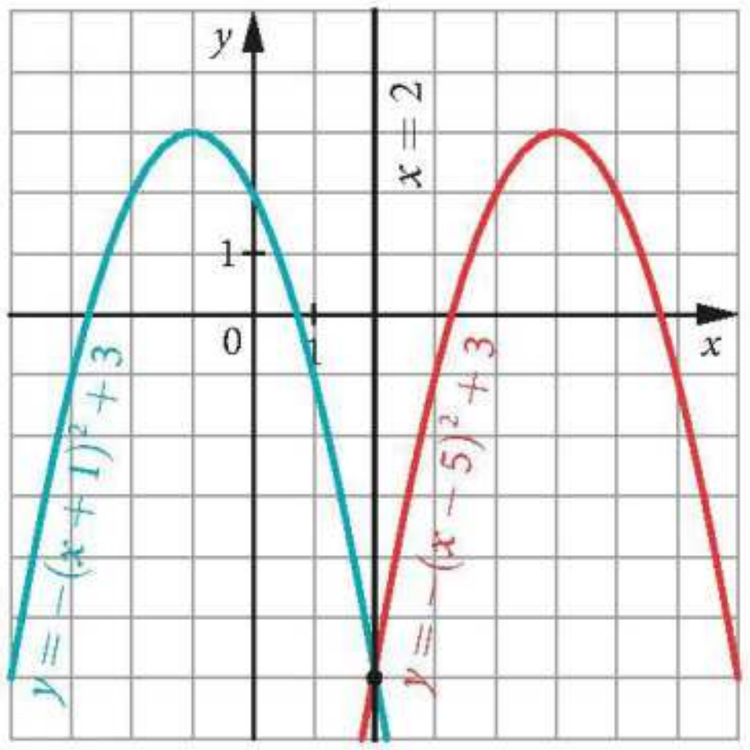


Krok 1: Odbijamy symetrycznie wierzchołek $W = (-1, 3)$ i otrzymujemy wierzchołek nowej paraboli $W' = (-1, -1)$.

Krok 2: Rysujemy nową parabolę w kształcie danej, o wierzchołku W', przechodzącą przez punkty stałe symetrii, czyli punkty przecięcia danej paraboli z prostą l.

Krok 3: Odczytujemy z wykresu równanie otrzymanej paraboli: $y = (x + 1)^2 - 1$.

b) Aby przekształcić parabolę $y = -(x + 1)^2 + 3$ przez symetrię względem prostej $l\colon\ x = 2$, wykonujemy kolejne kroki.



Krok 1: Odbijamy symetrycznie wierzchołek $W = (-1, 3)$ i otrzymujemy wierzchołek nowej paraboli $W' = (5, 3)$.

Krok 2: Rysujemy nową parabolę w kształcie danej, o wierzchołku W', przechodzącą przez punkt $(2, -6)$ przecięcia danej paraboli z prostą l.

Krok 3: Odczytujemy z wykresu równanie otrzymanej paraboli: $y = -(x - 5)^2 + 3$.

Odp.: a) $y = (x + 1)^2 - 1$ b) $y = -(x - 5)^2 + 3$

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Wskaż równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = -\sqrt{3}(x+8)^2 - 3$.

A. $x = -\sqrt{3}$ **B.** $x = -8$ **C.** $y = 3$ **D.** $y = -3$

2.2. Wskaż współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = -(x+2)^2 - 3$.

A. $(2, 3)$ **B.** $(-2, 3)$ **C.** $(2, -3)$ **D.** $(-2, -3)$

2.3. Która funkcja jest malejąca w przedziale $\langle -1; \infty)$?

A. $f(x) = (x+1)^2$
B. $f(x) = (x-1)^2$
C. $f(x) = -(x+1)^2$
D. $f(x) = -(x-1)^2$

2.4. Parabola o równaniu $y = f(x)$ powstała przez przesunięcie paraboli o równaniu $y = g(x)$ o wektor $\vec{u} = [p, q]$. Podaj wzór funkcji f i współrzędne wierzchołka jej wykresu.

a) $g(x) = 2(x-7)^2 + 4$ $\vec{u} = [7, 4]$
b) $g(x) = 2(x+3)^2$ $\vec{u} = [-2, 0]$
c) $g(x) = 2\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + 9$ $\vec{u} = [0, -3]$
d) $g(x) = 2(x-1)^2 + 13$ $\vec{u} = [-6, 11]$

2.5. Parabola o równaniu $y = f(x)$ powstała przez przesunięcie paraboli o równaniu $y = g(x)$ o wektor $\vec{u} = [p, q]$. Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$.

a) $f(x) = (\pi - 3)x^2$ $g(x) = (\pi - 3)x^2 - 14$
b) $f(x) = (x-3)^2$ $g(x) = (x+11)^2 + 3$
c) $f(x) = (x+2)^2 + 12$ $g(x) = (x-2)^2 - 10$
d) $f(x) = 2\left(x + 7 + \sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{3}$ $g(x) = 2(x+7)^2 - 13$

2.6. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$, a następnie, wykonując odpowiednie przesunięcie, wykres funkcji $y = g(x)$.

a) $f(x) = x^2$ $g(x) = (x-1)^2$
b) $f(x) = -3x^2$ $g(x) = -3(x+2)^2$
c) $f(x) = 2x^2$ $g(x) = 2x^2 - 6$
d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ $g(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2 - 2$

2.7. Wykresy funkcji $y = (x + c)^2$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Naszkicuj kilka z nich. Wyznacz taki współczynnik c, aby
a) wierzchołek paraboli leżał na prostej $x = 3$.
b) wykres funkcji przechodził przez punkt $(0, 4)$.

2.8. Wykresy funkcji $y = x^2 + c$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Naszkicuj kilka z nich. Wyznacz taki współczynnik c, aby
a) wierzchołek paraboli leżał na prostej $y = 4$.
b) wykres funkcji przechodził przez punkt $(2, 2)$.
c) miejscami zerowymi funkcji były liczby -2 i 2.

2.9. Sporządź wykres funkcji f i odczytaj z wykresu jej miejsca zerowe.
a) $f(x) = (x - 1)^2 - 1$
b) $f(x) = 2(x + 3)^2 - 8$
c) $f(x) = -\frac{1}{3}(x - 5)^2 + 3$
d) $f(x) = 4(x - 1)^2 - 4$

2.10. Wyznacz równanie osi symetrii paraboli.
a) $y = 3(x + 4)^2 - 1$
b) $y = -2(x + 1)^2 + 5$
c) $y = \left(x - \sqrt{2} + 1\right)^2 - 3$
d) $y = -\left(x + 3 - \sqrt{5}\right)^2 - \sqrt{7}$

2.11. Określ przedziały monotoniczności funkcji f.
a) $f(x) = 3(x - 2)^2 + 1$
b) $f(x) = -5(x + 7)^2 - 2$
c) $f(x) = \sqrt{2}(x - 1)^2 + \sqrt{3}$
d) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{3}\right)^2 - 3$
e) $f(x) = -(x - 3)^2 + 2\sqrt{7}$
f) $f(x) = 10^3\left(x + \sqrt{10}\right)^2$

2.12. Podaj zbiór wartości funkcji f. Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość największą lub wartość najmniejszą?
a) $f(x) = -2(x + 1)^2 + 5$
b) $f(x) = 3(x - 1)^2 - 7$
c) $f(x) = \frac{1}{2}(x - \pi)^2 + 2$
d) $f(x) = -2\sqrt{7}(x + 3)^2 - 1$
e) $f(x) = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 3$
f) $f(x) = 0{,}2(x - 2)^2$

2.13. Wykonaj odpowiedni wykres i na jego podstawie podaj liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru m.
a) $-(x + 2)^2 + 5 = m$
b) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 = m - 2$
c) $\left|x^2 - 2\right| = m$
d) $\left|(x + 3)^2 - 1\right| = m$
e) $\left|x^2 - 5\right| - 1 = m$
f) $\left|(x - 3)^2 - 4\right| - 2 = m$

2.14. Przedstaw wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, wiedząc, że jej wykresem jest parabola o wierzchołku W przechodząca przez punkt P.

a) $W = (-1, 0)$ $P = (3, 8)$
b) $W = (0, 5)$ $P = (-3, 2)$
c) $W = (-1, -2)$ $P = (1, 10)$
d) $W = (3, -1)$ $P = (5, 7)$
e) $W = (2, 6)$ $P = (1, 1)$
f) $W = (-3, -2)$ $P = (-1, 2)$

2.15. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 1 & \text{dla } x < 0 \\ -(x-1)^2 + 4 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$.
Podaj przedziały monotoniczności funkcji.

2.16. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 2(x+1)^2 - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -2x + 8 & \text{dla } x \in \langle 1; 5\rangle \\ \frac{1}{2}(x-5)^2 - 2 & \text{dla } x \in (5; \infty) \end{cases}$.
Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nieujemne?

2.17. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-2)^2 - 4 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty) \\ -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 1 & \text{dla } x \in \langle 0; 6\rangle \end{cases}$.
Dla jakich wartości m równanie $f(x) = m$ ma cztery rozwiązania?

2.18. Sporządź wykres funkcji.

a) $f(x) = \left|(x-4)^2 - 2\right| + 1$
b) $f(x) = -\left|2x^2 - 2\right| + 5$
c) $f(x) = \left|\left|x^2 - 1\right| - 3\right|$
d) $f(x) = \left|\left|\frac{1}{2}(x+2)^2 - 2\right| - 6\right|$

2.19. Przekształć parabolę o równaniu $y = 2(x-2)^2 - 4$ przez symetrię względem prostej l, a następnie wyznacz równanie otrzymanej paraboli.

a) l: $y = -2$ b) l: $y = -1$ c) l: $y = 2$ d) l: $y = -4$

2.20. Przekształć parabolę o równaniu $y = -2(x+1)^2 + 3$ przez symetrię względem prostej k, a następnie wyznacz równanie otrzymanej paraboli.

a) k: $x = 0$ b) k: $x = 2$ c) k: $x = -2$ d) k: $x = -3$

2.21. Sporządź wykres funkcji $y = f(x)$.

a) $f(x) = (|x| - 2)^2$
b) $f(x) = (|x| + 1)^2$
c) $f(x) = \frac{1}{4}(|x| - 4)^2 - 1$
d) $f(x) = -\frac{1}{3}(|x| + 3)^2 + 3$

2.22. Podaj przykład funkcji kwadratowej f, która spełnia podany warunek.

a) Zbiorem wartości f jest przedział $(-\infty; 3\rangle$.

b) Zbiorem wartości f jest przedział $\langle -1; \infty)$.

c) Wykres f ma wierzchołek w punkcie $W = \left(-\sqrt{2}, 7\right)$.

d) Prosta $x = -\sqrt{3}$ jest osią symetrii wykresu funkcji f, a zbiorem wartości f jest przedział $\langle -2; \infty)$.

e) W przedziale $(-\infty; -\sqrt{2}\rangle$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziale $\langle -\sqrt{2}; \infty)$ jest malejąca.

f) Zbiorem wartości f jest przedział $\langle 1; \infty)$, a osią symetrii jej wykresu – prosta o równaniu $x = -3$.

* **2.23.** Naszkicuj kilka parabol należących do podanej rodziny. Określ, jaką figurę tworzą wierzchołki parabol z tej rodziny dla $m \in \mathbf{R}$.

a) $y = x^2 + m$

b) $y = (x - m)^2$

c) $y = (x - 4)^2 + m$

d) $y = (x - m)^2 + m$

Prosto do matury

1. Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = -3(x + 5)^2 + 4$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. W przedziale $(-\infty; 4)$ funkcja jest rosnąca.

B. Osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta $x = 5$.

C. Równanie $f(x) = -4$ ma jedno rozwiązanie.

2. Podaj zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{2}{3}(x-7)^2 - 11$.

3. Sporządź wykres funkcji $f(x) = -2(x + 1)^2$. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne?

4. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \left|-(x + 2)^2 + 3\right|$. Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m.

5. Podaj równanie paraboli otrzymanej w wyniku przekształcenia paraboli o równaniu $y = -3(x + 4)^2 + 2$ przez symetrię względem prostej l: $y = -1$.

3. Postać ogólna funkcji kwadratowej

Umiejętności:

- interpretowanie współczynników występujących we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej
- przekształcanie wzoru funkcji kwadratowej z postaci kanonicznej do postaci ogólnej i na odwrót

Sumę algebraiczną $ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$ nazywamy **trójmianem kwadratowym**.

Przekształcimy funkcję f daną w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$ w taki sposób, aby po prawej stronie otrzymać trójmian kwadratowy. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 1 ◀ zad. 3.8

Wzór funkcji $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$ zapiszemy w postaci trójmianu kwadratowego.

Rozwiązanie

$f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$ ⟵ stosujemy wzór na kwadrat różnicy

$f(x) = 2(x^2 - 2x + 1) - 3$ ⟵ porządkujemy wyrazy

Odp.: $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$

Definicja

Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ i $x \in \mathbf{R}$, nazywamy funkcją kwadratową zmiennej x **w postaci ogólnej**.

Przykład 2 ◀ zad. 3.9

Zapiszemy funkcję $y = 7x^2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}x - 4x - \sqrt{3}x^2 - 9$ w postaci $y = ax^2 + bx + c$ oraz wypiszemy współczynniki a, b i c.

Rozwiązanie

$y = 7x^2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}x - 4x - \sqrt{3}x^2 - 9$ ⟵ grupujemy wyrazy

$y = 7x^2 - \sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 4x - 9 - \sqrt{6}$ ⟵ wyłączamy wspólne czynniki poza nawias

$y = \left(7 - \sqrt{3}\right)x^2 + \left(\sqrt{2} - 4\right)x - 9 - \sqrt{6}$

Z otrzymanej postaci ogólnej funkcji odczytujemy współczynniki.

Odp.: $y = \left(7 - \sqrt{3}\right)x^2 + \left(\sqrt{2} - 4\right)x - 9 - \sqrt{6}$, $a = 7 - \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2} - 4$, $c = -9 - \sqrt{6}$

Przekształcenie wzoru funkcji kwadratowej z postaci kanonicznej do postaci ogólnej polega na wykonaniu prostych przekształceń algebraicznych. Teraz zajmiemy się zadaniem odwrotnym.

Przykład 3 ◀ zad. 3.11

Zapiszemy daną funkcję f w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

Rozwiązanie

a) $f(x) = x^2 - 14x + 1$

W postaci kanonicznej występuje kwadrat różnicy $(x - p)^2$, dlatego zaczniemy od dopasowania do tego wzoru przynajmniej części wzoru podanej funkcji.

Składniki $x^2 - 14x$ traktujemy jako pierwsze dwa wyrazy rozwinięcia $x^2 - 2px + p^2$ kwadratu różnicy. Mamy więc: $2p = 14$, czyli $p = 7$.

Do pełnego kwadratu różnicy brakuje wyrazu $p^2 = 49$.

$$f(x) = x^2 - 14x + 49 - 49 + 1 \qquad \longleftarrow \text{dodajemy i odejmujemy } 49$$

$$f(x) = \left(x^2 - 14x + 49\right) - 48$$

Odp.: $f(x) = (x - 7)^2 - 48$

b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 9$

$$f(x) = 2(x^2 - 2x) + 9$$

$$f(x) = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9$$

$$f(x) = 2(x^2 - 2x + 1) - 2 + 9$$

Odp.: $f(x) = 2(x - 1)^2 + 7$

Metoda zastosowana w przykładzie nosi nazwę **dopełniania do kwadratu**.

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie

- **Postacią kanoniczną funkcji** $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, jest:

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

  Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy **wyróżnikiem funkcji kwadratowej**.

- **Wierzchołek paraboli** o równaniu $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, ma współrzędne:

$$x_w = \frac{-b}{2a}, \quad y_w = \frac{-\Delta}{4a}$$

Δ – wielka litera alfabetu greckiego, którą czytamy: *delta*.

Udowodnimy twierdzenie, stosując metodę dopełniania do kwadratu. Dla ułatwienia zrobimy to w tabeli, w dwóch kolumnach. W pierwszej z nich będziemy przekształcać konkretny przykład, w drugiej równolegle te same przekształcenia wykonamy na symbolach.

Przekształcamy wzór $f(x)=3x^2+7x+5$ do postaci $f(x)=a(x-p)^2+q$	Przekształcamy wzór $f(x)=ax^2+bx+c$ do postaci $f(x)=a(x-p)^2+q$
Łączymy nawiasem pierwsze dwa składniki i wyłączamy przed niego współczynnik przy x^2.	
$f(x)=3\left(x^2+\frac{7}{3}x\right)+5$	$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$
Wyrażenie $\frac{b}{a}x$ traktujemy jako podwojony iloczyn i dopełniamy do kwadratu.	
$f(x)=3\left(x^2+\frac{7}{3}x+\left(\frac{7}{2\cdot 3}\right)^2-\left(\frac{7}{2\cdot 3}\right)^2\right)+5$	$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c$
Zostawiamy w nawiasie te wyrazy, które są rozwinięciem wzoru na kwadrat sumy.	
$f(x)=3\left(x^2+\frac{7}{3}x+\left(\frac{7}{2\cdot 3}\right)^2\right)-3\cdot\left(\frac{7}{2\cdot 3}\right)^2+5$	$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c$
$f(x)=3\left(x+\frac{7}{2\cdot 3}\right)^2-\frac{49}{4\cdot 3}+5$	$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$
$f(x)=3\left(x-\frac{-7}{2\cdot 3}\right)^2+\frac{-49+4\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 3}$	$f(x)=a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}$
Wprowadzamy oznaczenie: $\Delta=b^2-4ac$.	
$\Delta=49-4\cdot 3\cdot 5=-11$	$\Delta=b^2-4ac$
Zapisujemy funkcję w postaci $f(x)=a(x-p)^2+q$.	
$f(x)=3\left(x-\frac{-7}{2\cdot 3}\right)^2+\frac{11}{12},\ p=\frac{-7}{6},\ q=\frac{11}{12}$	$f(x)=a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a},\ p=\frac{-b}{2a},\ q=\frac{-\Delta}{4a}$

- Druga współrzędna y_w wierzchołka paraboli jest wartością funkcji f dla jego pierwszej współrzędnej: $y_w = f(x_w)$, więc ze wzoru na y_w podanego w twierdzeniu korzysta się rzadko.
- Osią symetrii paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ jest prosta $x = \frac{-b}{2a}$.

Przykład 4 ◀ zad. 3.12

Zastosujemy udowodnione twierdzenie do zapisania w postaci kanonicznej funkcji $f(x) = 3x^2 - 11x + 7$.

Rozwiązanie

Współczynniki trójmianu $ax^2 + bx + c$ są równe: $a = 3,\ b = -11,\ c = 7$. Zatem:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 121 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 37, \quad p = -\frac{b}{2a} = \frac{11}{6}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{37}{12}$$

Odp.: Szukana postać kanoniczna to $f(x) = 3\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{37}{12}$.

Przykład 5 ◀ zad. 3.13

Wyznaczymy przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$.

Rozwiązanie

Współczynniki trójmianu $ax^2 + bx + c$ są równe: $a = -\frac{1}{2},\ b = 4,\ c = -5$.

Do rozwiązania zadania potrzebna jest tylko pierwsza współrzędna p wierzchołka paraboli:

$$p = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{1} = 4$$

$a = -\frac{1}{2} < 0$, zatem ramiona paraboli są skierowane w dół, czyli funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty;\ 4\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 4;\ \infty)$.

Odp.: Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty;\ 4\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 4;\ \infty)$.

Przykład 6 ◀ zad. 3.15

Określimy zbiór wartości funkcji $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$.

Rozwiązanie

Współczynniki trójmianu $ax^2 + bx + c$ są równe: $a = 2,\ b = -12,\ c = 18$.

Do rozwiązania zadania potrzebna jest druga współrzędna q wierzchołka paraboli:

$$q = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{144 - 4 \cdot 2 \cdot 18}{4 \cdot 2} = 0$$

$a > 0$, a więc ramiona paraboli są skierowane do góry, zatem zbiorem wartości jest przedział $\langle 0;\ \infty)$.

Jeśli $a > 0$, to $ZW = \langle q;\ \infty)$.
Jeśli $a < 0$, to $ZW = (-\infty;\ q\rangle$.

Odp.: $\langle 0;\ \infty)$

Przykład 7 ◀ zad. 3.18

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ przechodzi przez punkt $A = (-2,\ 12)$, a liczba 2 jest jednym z jej miejsc zerowych. Wyznaczymy wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

Rozwiązanie

$12 = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$ ⟵ współrzędne punktu A spełniają równanie paraboli

$0 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$ ⟵ liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji

Rozwiązujemy zatem układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

$$\begin{cases} -2b + c = 10 \\ 2b + c = -2 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} b = -3 \\ c = 4 \end{cases}$$

Odp.: Wzór tej funkcji to $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$.

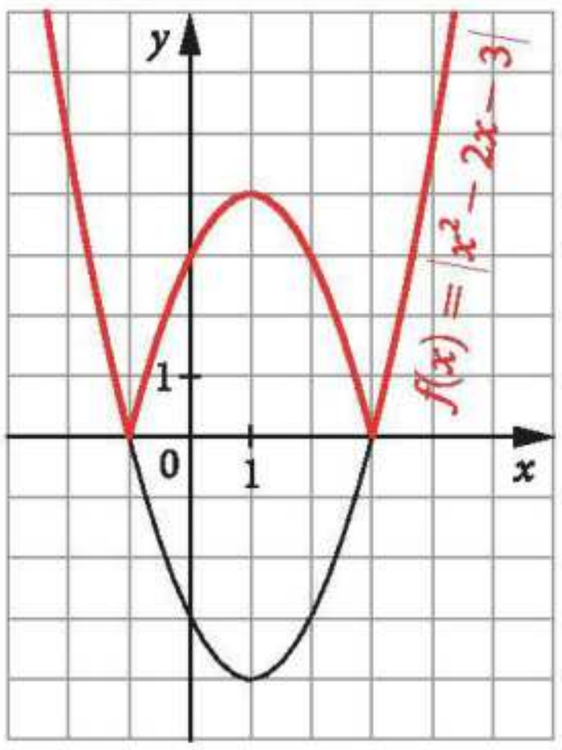
Przykład 8 ◀ zad. 3.24

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \left|x^2 - 2x - 3\right|$ i na jego podstawie odczytamy liczbę rozwiązań równania $\left|x^2 - 2x - 3\right| = m$ w zależności od wartości parametru m.

Rozwiązanie

Wierzchołek paraboli o równaniu $y = x^2 - 2x - 3$ ma współrzędne $(1, -4)$.

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = \left|x^2 - 2x - 3\right|$.



Odp.: Równanie $\left|x^2 - 2x - 3\right| = m$ nie ma rozwiązań dla $m < 0$, ma dwa rozwiązania dla $m = 0$ lub $m > 4$, trzy rozwiązania dla $m = 4$ oraz cztery rozwiązania dla $m \in (0; 4)$.

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wskaż funkcję, której zbiorem wartości jest przedział $\langle 3; \infty)$.

A. $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 5$

B. $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 6$

C. $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 7$

D. $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x + 7$

3.2. Wskaż współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = 2x^2 - x - 3$.

A. $\left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{8}\right)$ **B.** $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{8}\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{4}, -\frac{25}{8}\right)$ **D.** $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

3.3. Wskaż funkcję, której wykres ma tę samą oś symetrii co wykres funkcji $f(x) = -2x^2 + 6x - 5$.

A. $y = -2x^2 - 5$ **B.** $y = x^2 + 3x - 1$ **C.** $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$ **D.** $y = -6x^2 + 2x - 5$

3.4. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x$. Oceń prawdziwość zdań.

A. Wyróżnik tej funkcji jest równy 14.

B. Wyróżnik tej funkcji jest równy 16.

C. Najmniejszą wartością tej funkcji jest -4.

3.5. Oceń prawdziwość zdań. Do zbioru wartości funkcji $f(x) = 2x^2 - x + 1$

A. należy liczba $\frac{3}{8}$.

B. należy liczba $\frac{7}{8}$.

C. należą wszystkie dodatnie liczby naturalne.

3.6. Dana jest parabola o równaniu $y = -x^2 - 4x - 2$. Oceń prawdziwość zdań.

A. Prosta $y = 2$ przechodzi przez wierzchołek tej paraboli.

B Prosta $x = -2$ jest osią symetrii tej paraboli.

C. Prosta $x = 2$ nie ma z tą parabolą punktów wspólnych.

3.7. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + x - 3$. Oceń prawdziwość zdań.

A. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -3{,}25; \infty)$.

B. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe.

C. Wierzchołek paraboli o równaniu $y = f(x)$ leży w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych.

3.8. Przedstaw wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej.

a) $f(x) = -2(x-3)^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$

c) $f(x) = -3(x+5)^2 + 25$

d) $f(x) = \frac{3}{4}(x-4)^2 - 2$

3.9. Podaj wzór funkcji w postaci $y = ax^2 + bx + c$. Wypisz współczynniki a, b i c.

a) $y = 2x - 5 + \sqrt{2} - 3x^2$

b) $y = 3x^2 - 2x + \sqrt{3}x - \sqrt{5}x^2 + 4$

3.10. Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku W przechodząca przez punkt P. Przedstaw wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

a) $W = (-1, -2)$ $P = (1, 10)$

b) $W = (3, -1)$ $P = (5, 7)$

c) $W = (2, 6)$ $P = (1, 1)$

d) $W = (-3, -2)$ $P = (-1, 2)$

3.11. Podaj wzór funkcji w postaci kanonicznej i sporządź wykres tej funkcji.

a) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

b) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$

c) $f(x) = -x^2 - 4x + 1$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x$

e) $f(x) = -2x^2 - 4x - 9$

f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 2\frac{1}{2}$

3.12. Podaj wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej.

a) $y = x^2 - 2x + 3$

b) $y = -2x^2 - 12x - 20$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 + x$

d) $y = 3x^2 - 18x + 15$

e) $y = -\frac{2}{3}x^2 - 2x - \frac{3}{2}$

f) $y = -0{,}5x^2 - 0{,}2x - 0{,}02$

3.13. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

b) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

c) $f(x) = -2x^2 - 12x - 20$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$

e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 2$

f) $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} - 4$

3.14. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli o podanym równaniu.

a) $y = 2x^2 - 3$

b) $y = x^2 + 4x + 4$

c) $y = -x^2 - 2x - 3$

d) $y = 2x^2 + 20x + 49$

e) $y = 3x^2 - 12x$

f) $y = -4x^2 + 4x + 1$

3.15. Podaj zbiór wartości funkcji.

a) $f(x) = -x^2 + 5$

b) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$

d) $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$

3.16. Wyznacz współczynniki funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$, wiedząc, że

a) wierzchołek paraboli $y = x^2 + bx + c$ ma współrzędne $(-2, -2)$.

b) parabola $y = x^2 + bx + c$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z osią x i przecina oś y w punkcie $(0, 4)$.

c) zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -3; \infty)$, a osią symetrii paraboli $y = x^2 + bx + c$ jest prosta $x = 3$.

3.17. Wyznacz brakujące współczynniki funkcji kwadratowej $y = 4x^2 + bx + c$, wiedząc, że jej wykresem jest parabola przechodząca przez punkty $A = (0, 2)$, $B = (-1, 14)$.

3.18. Osią symetrii paraboli $y = ax^2 + bx - 4$, przechodzącej przez punkt $A = (-2, 4)$, jest prosta $x = -3$. Znajdź współczynniki a i b.

3.19. Do wykresu funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ należą punkty $A = (-1, 0)$, $B = (1, 2)$ i $C = (-2, 5)$. Wyznacz współczynniki a, b i c.

3.20. Dla jakich wartości m prosta o równaniu $y = m$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą o podanym równaniu?

a) $y = -x^2 + 14x - 37$

b) $y = x^2 + 10x + 21$

c) $y = -3x^2 - 4\sqrt{2} + 1$

3.21. Wykresy funkcji $y = x^2 - 2x + c$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Narysuj kilka z nich. Napisz równanie osi symetrii tych parabol.

3.22. Wykresy funkcji $y = x^2 + bx$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Narysuj kilka z nich. Ustal współczynnik b tak, aby prosta $y = -9$ miała dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą.

3.23. Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest parabola symetryczna do paraboli $y = x^2 - 4x + 2$ względem podanej prostej.

a) $x = 4$ b) $y = -2$ c) $x = -1$ d) $y = 1$

3.24. Wykonaj odpowiedni wykres i na jego podstawie podaj liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru m.

a) $\left|x^2 - 10x + 6\right| = m$

b) $\left|x^2 - 8x - 1\right| = m + 1$

c) $\left|3x^2 - 12x - 7\right| - 1 = m$

d) $\left|-5x^2 + 30x - 43\right| - 2 = m$

D ✱ **3.25.** Korzystając z definicji, udowodnij, że funkcja $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$ jest rosnąca w przedziale $(2; \infty)$.

Prosto do matury

1. Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 5; \infty)$.

B. Osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta $x = 4$.

C. Równanie $f(x) = -2$ ma dwa rozwiązania.

2. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

$f(x) = \left(2 - \sqrt{5}\right)x^2 + \left(2 + \sqrt{5}\right)x - \sqrt{5}$

3. Sporządź wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$, napisz równanie jego osi symetrii i podaj wartość m, dla której równanie $-\frac{1}{4}x^2 + x - 1 = m$ ma jedno rozwiązanie.

4. Wyróżnik funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + 4x + k$ jest równy 0. Wyznacz k i narysuj wykres funkcji f w przedziale $\langle -2; 2\rangle$.

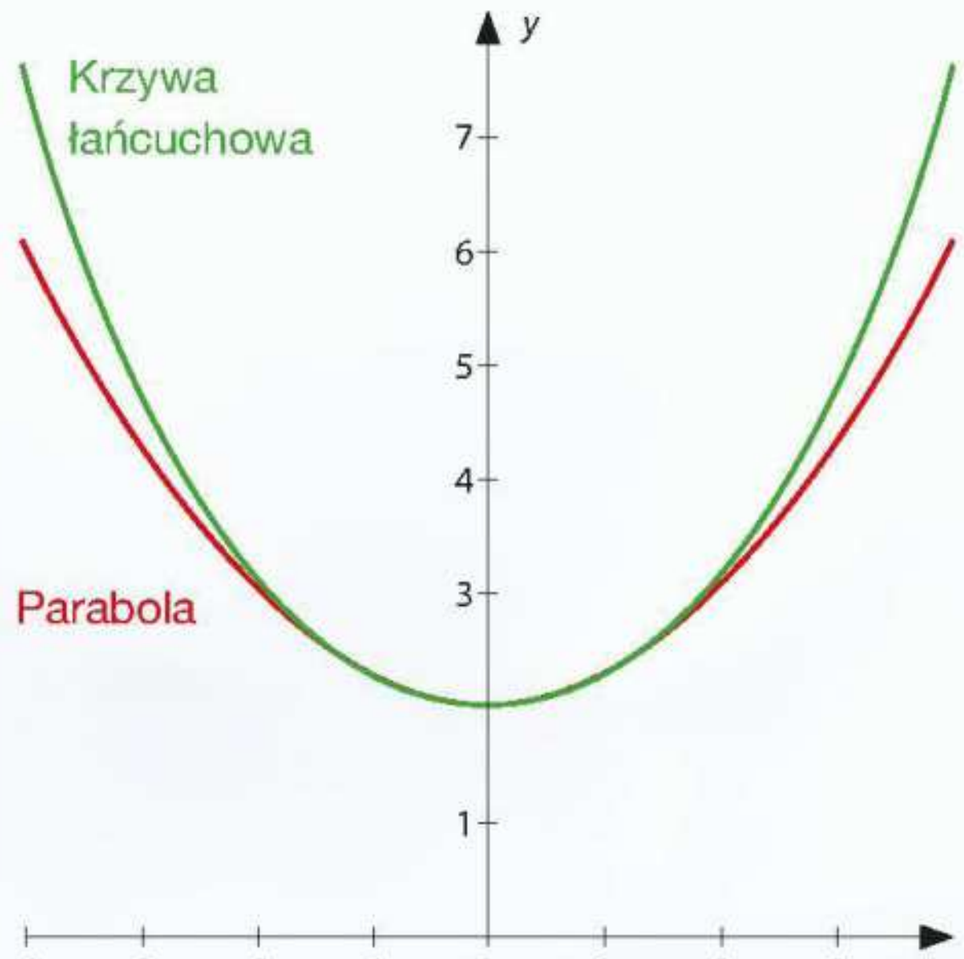
5. Dla jakiej wartości parametru m zbiorem wartości funkcji $f(x) = 3x^2 + 15x + m$ jest przedział $\langle -10; \infty)$?

Parabola a krzywa łańcuchowa

Prawie do końca XVII wieku uważano, że łańcuch zawieszony za końce przyjmuje kształt paraboli. Jest to jednak inna krzywa, tzw. krzywa łańcuchowa.

Zawieszony łańcuch

Krzywą łańcuchową łatwo dostrzec na co dzień, jej kształt przyjmują bowiem wszystkie giętkie sznury, łańcuchy, kable itp., zawieszone za końce i poddane wyłącznie sile grawitacji.
Równanie tej krzywej wykorzystuje się m.in. przy projektowaniu napowietrznych linii elektroenergetycznych. Uwzględnia się wówczas obciążenie przewodów, np. przez szadź lub siadające na nich ptaki.



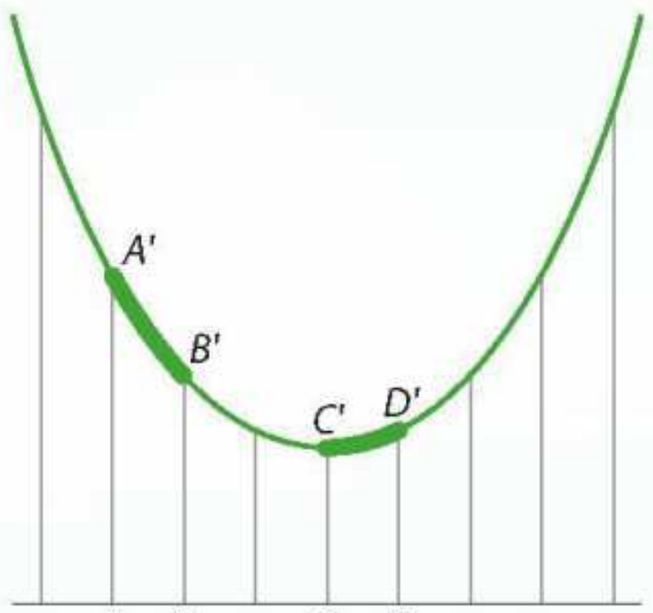
Złudne podobieństwo

Rysunek przedstawia obie krzywe. Podobieństwo jest pozorne – nie można tak dobrać współczynników funkcji kwadratowej, aby jej wykres miał kształt krzywej łańcuchowej. Tak naprawdę krzywa łańcuchowa nie jest wykresem żadnego wielomianu.

Na zdjęciu pokazano most wiszący na rzece Avon w Bristolu. Projektant i główny inżynier tego mostu I. K. Brunel zajął drugie miejsce w plebiscycie telewizji BBC na 100 najwybitniejszych Brytyjczyków w historii.

Most wiszący

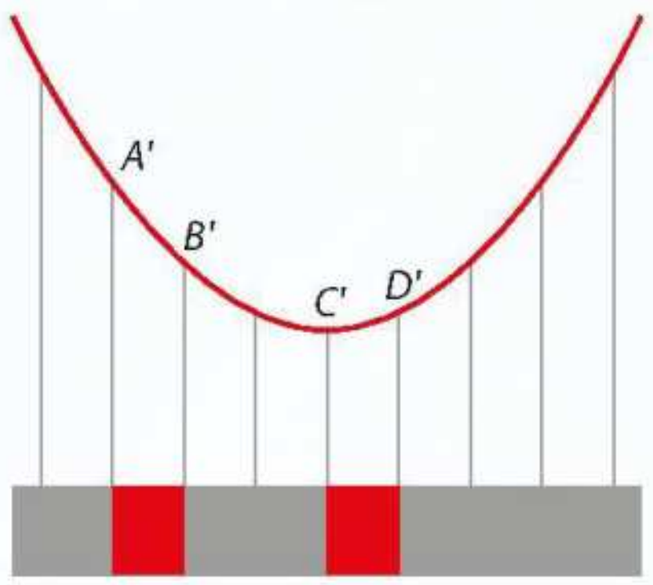
Bywają jednak sytuacje, w których podwieszona lina przyjmuje kształt paraboli.
Przyjrzyjmy się mostom wiszącym. Ich przęsła są utrzymywane we właściwym położeniu przez liny (w mostach starszego typu – łańcuchy) podwieszone do pylonów. Główna lina mostu przyjmuje kształt paraboli.



Podwieszona lina dźwigająca tylko własny ciężar. Siły ciężkości działające na odcinki $A'B'$ i $C'D'$ są różne. Lina przybiera kształt krzywej łańcuchowej.

Co różni te krzywe

Dlaczego lina wisząca swobodnie i lina dźwigająca przęsło mostu przybierają odmienne kształty?
Lina zawieszona za końce dźwiga tylko własny ciężar, rozłożony wzdłuż niej równomiernie. Jeśli podzielimy linę na odcinki w taki sposób, aby odpowiadające im odcinki poziome były równej długości (zob. rysunek), siła ciężkości działająca na odcinek liny będzie zależała od jego położenia. Otrzymamy kształt krzywej łańcuchowej.
W moście wiszącym najcięższym elementem konstrukcji są poziome przęsła. Ciężar podtrzymujących je lin jest nieporównywalnie mniejszy. Na każdy z odcinków głównej liny działa taka sama siła ciężkości. Otrzymujemy kształt paraboli.



Schemat mostu wiszącego – lina dźwiga ciężkie poziome przęsło. Odcinki $A'B'$ i $C'D'$ podtrzymują jednakowe fragmenty przęsła.

4. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–15 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż punkt, który należy do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

A. $(-2, 5)$ **B.** $(-2, -3)$ **C.** $(-2, 3)$ **D.** $(-2, 1)$

2. Wskaż współrzędne wierzchołka paraboli o równaniu $y = 2x^2 - 12x + 19$.

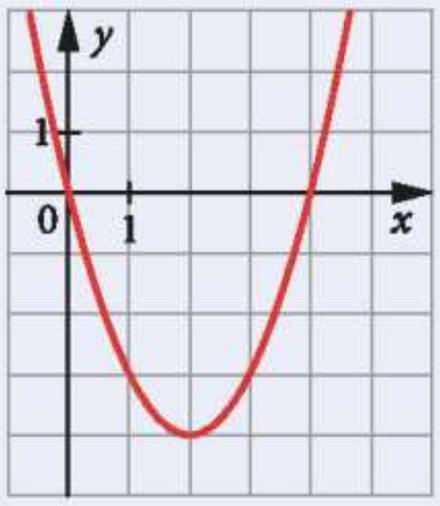
A. $(6, -1)$ **B.** $(-6, 1)$ **C.** $(3, -1)$ **D.** $(3, 1)$

3. Wskaż wartość m, dla której punkt $P = (-1, 4 - m)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = -2x^2$.

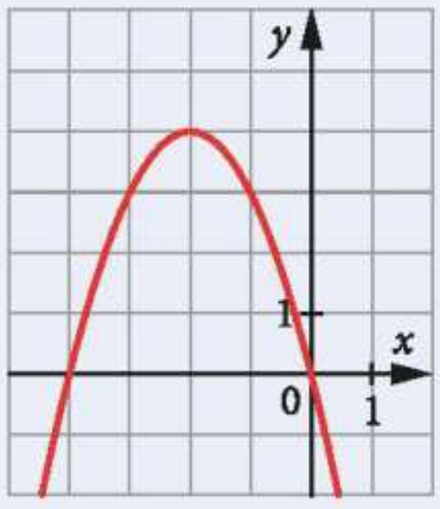
A. $m = 6$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = -3$

4. Na którym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = (x + 2)^2 - 4$?

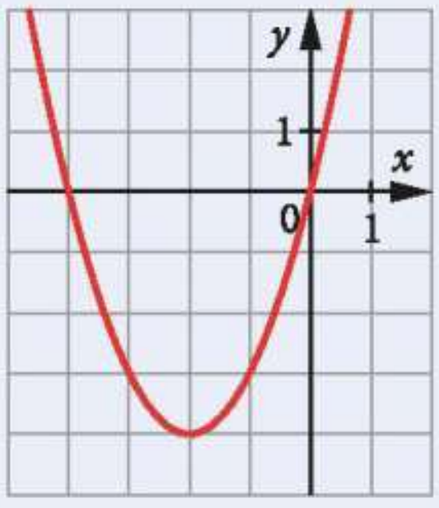
A.



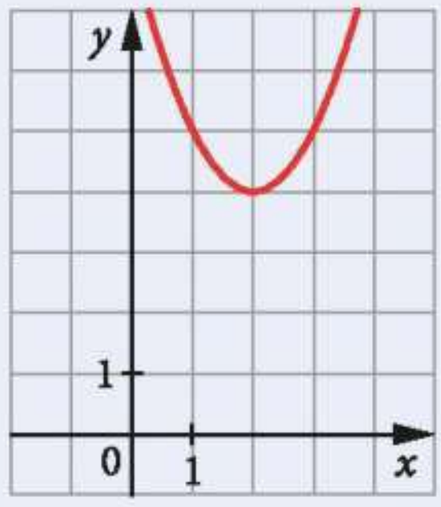
B.



C.



D.



5. Wskaż zbiór wartości funkcji $f(x) = -2x^2 + 12x + 1$.

A. $(-\infty; 19\rangle$ **B.** $(-\infty; 1\rangle$ **C.** **R** **D.** $\langle 1; \infty)$

6. Parabola o równaniu $y = x^2 + bx$ ma tylko jeden punkt wspólny z osią x. Wskaż wartość współczynnika b w tym równaniu.

A. -1

B. 0

C. 1

D. Nie istnieje takie b.

7. Do wykresu funkcji $f(x) = -2x^2 + mx + n$ należą punkty $A = (0, -2)$ i $B = (-3, 4)$. Ile są równe współczynniki m i n?

A. $m = -8,\ n = -2$

B. $m = 8,\ n = -2$

C. $m = 8,\ n = 2$

D. $m = -8,\ n = 2$

8. Wykresy funkcji $f(x) = x^2 + 4x + k$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Wskaż prostą, która jest osią symetrii każdej z tych parabol.

A. Nie ma takiej prostej.

B. $y = 4$

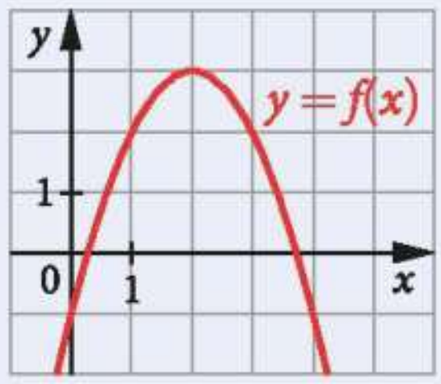
C. $x = -2$

D. $x = -4$

9. Wskaż wzór, którym można określić funkcję o zbiorze wartości $(-\infty; -6\rangle$.

A. $y = (x+3)^2 - 6$
B. $y = -(x-3)^2$
C. $y = -(x-2)^2 - 6$
D. $y = -x^2 + 2$

10. Wskaż wzór funkcji, której wykres jest przedstawiony na rysunku.



A. $f(x) = x^2 - 2x + 3$
B. $f(x) = -x^2 + 4x - 1$
C. $f(x) = -2x^2 + x - 1$
D. $f(x) = -x^2 - 4x - 1$

11. Wskaż równanie paraboli symetrycznej do paraboli $y = 3x^2 - x - 1$ względem osi y.

A. $y = 3x^2 + x - 1$
B. $y = -3x^2 + x + 1$
C. $y = 3x^2 - x + 1$
D. $y = -3x^2 - x - 1$

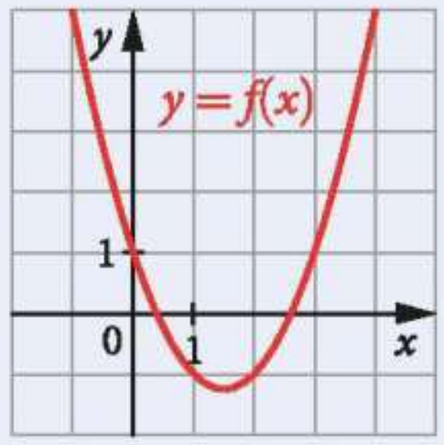
12. Funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x) = 2x^2 - 3x + c$ oraz $f(2) = 3$. Wskaż prawdziwą zależność.

A. $f(1) = -6$ **B.** $f(1) = 0$ **C.** $f(1) = 15$ **D.** $f(1) = -5$

13. Wskaż równanie osi symetrii paraboli $y = 2(x+5)^2 - 4$.

A. $x = -5$ **B.** $x = 5$ **C.** $y = -4$ **D.** $y = x$

14. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$. Co można stwierdzić o znakach współczynników tej funkcji?



A. $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$
B. $a > 0$, $b < 0$ i $c > 0$
C. $a > 0$, $b > 0$ i $c < 0$
D. $a > 0$, $b < 0$ i $c < 0$

15. Wskaż wartość współczynnika a w równaniu paraboli $y = ax^2 - 1$, wiedząc, że przechodzi ona przez punkt $P = (-3, 5)$.

A. $\frac{2}{3}$
B. 0
C. $-\frac{1}{3}$
D. Nie istnieje takie a.

W zadaniach 16–21 oceń prawdziwość podanych zdań.

16. Na płaszczyźnie dane są punkty $A = (-2, 2)$, $B = (3, 4)$, $C = (2, 6)$ i parabola $y = x^2$.

A. Odcinek AB ma z parabolą dwa punkty wspólne.
B. Odcinek AC przecina parabolę.
C. Odcinek BC przecina parabolę.

17. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 2x - \sqrt{2}$.
A. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie niewymiernej liczbę niewymierną.
B. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie wymiernej liczbę niewymierną.
C. Liczba -1 należy do zbioru wartości funkcji f.

18. Funkcja, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(-2, 3)$, może być opisana za pomocą wzoru
A. $y = 3(x-2)^2 + 3$. **B.** $y = 3\left[(x+2)^2 + 3\right]$. **C.** $y = 3\left[(x+2)^2 + 1\right]$.

19. Funkcja $f(x) = (x-12)^2 + 6$
A. w przedziale $(-\infty; -12)$ jest malejąca.
B. w przedziale $(-\infty; 12)$ jest malejąca.
C. w przedziale $(-\infty; 12\rangle$ jest malejąca.

20. Wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola o wierzchołku $W = (3, -5)$. Wówczas
A. $f(-1) = f(4)$. **B.** $f(-1) = f(5)$. **C.** $f(-1) = f(7)$.

21. Wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = -x^2 + 1$ dzielą płaszczyznę na pięć części. Pole części zawierającej początek układu współrzędnych jest
A. mniejsze od 1. **B.** większe od 2. **C.** mniejsze od 4.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

22. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli o podanym równaniu.
a) $y = -2x^2 + 4x - 2$
b) $y = -x^2 - 6x - 4$
c) $y = 4x^2 - 12x + 8$
d) $y = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 3$

23. Podaj zbiór wartości funkcji.
a) $f(x) = -\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}$
b) $f(x) = 3x^2 - 18x + 32$
c) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{11}{3}$
d) $f(x) = 0{,}2x^2 + 2x + 5$

24. Podaj równanie przykładowej paraboli, która z parabolą o równaniu $y = x^2 - 3x$
a) ma dokładnie jeden punkt wspólny.
b) ma dokładnie dwa punkty wspólne.
c) nie ma punktów wspólnych.

25. Napisz równanie paraboli, której wierzchołkiem jest punkt $W = (-3, -7)$ i która przechodzi przez punkt $P = (1, -5)$.

26. Wyróżnik funkcji kwadratowej $f(x) = kx^2 + 6x + 10$ jest równy 16. Wyznacz k.

27. Wyznacz równanie osi symetrii paraboli o równaniu $y = f(x)$ i określ przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = 3(x+4)^2 - 1$

b) $f(x) = -2(x+1)^2 + 5$

c) $f(x) = \left(x - \sqrt{2} + 1\right)^2 - 3$

d) $f(x) = \left(x + 2\sqrt{2} + 1\right)^2 + 2$

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

28. Dziedziną funkcji kwadratowej $y = f(x)$ jest przedział $\langle -3; 0\rangle$. Wykresem tej funkcji jest część paraboli o wierzchołku $(-2, -6)$ przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(-1, -4)$. Wyznacz wzór funkcji w postaci kanonicznej, naszkicuj jej wykres i podaj zbiór wartości.

29. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = (1-x)(x+1) + 2x$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

30. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej x z przedziału $\langle -6; -3\rangle$ trzecią część kwadratu tej liczby pomniejszoną o 6.

a) Podaj wzór tej funkcji.

b) Wyznacz największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

31. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$. Dla jakich wartości m równanie $\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3 = m$ ma dwa rozwiązania?

32. Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.

a) Wyznacz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

b) Naszkicuj wykres funkcji f.

c) Podaj przedziały monotoniczności funkcji $f(x-3) + 7$.

33. Przez punkty $A = (-6, 4)$ i $B = (2, -4)$ przechodzi parabola, której wierzchołek leży na osi y. Wyznacz równanie tej paraboli.

34. Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + bx + c$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $W = (1, 5)$. Oblicz wartości współczynników b i c.

35. Funkcja kwadratowa $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ przyjmuje jednakowe wartości dla argumentów 1 i 5. Do wykresu tej funkcji należy początek układu współrzędnych.

a) Wyznacz wartości współczynników b i c.

b) Dla wyznaczonych wartości współczynników b i c naszkicuj wykres funkcji f.

36. Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Najmniejsza wartość funkcji f jest równa -2 oraz $f(0) = f(4) = 6$. Oblicz wartość współczynnika a.

37. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, wiedząc, że $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ i $f(-2019) = f(2021)$.

38. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ i podaj przedziały jej monotoniczności, wiedząc, że $f(0) = -6$, $f(1) = 0$ oraz $f(2) = 2$.

39. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 + 3 & \text{dla } x \in \langle -4; -1\rangle \\ x + 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \cup (-1; \infty) \end{cases}$.

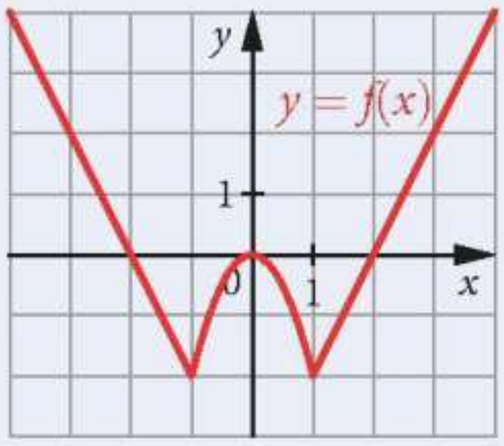
Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m.

40. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + x & \text{dla } x < 2 \\ -2x^2 + 12x - 13 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$.

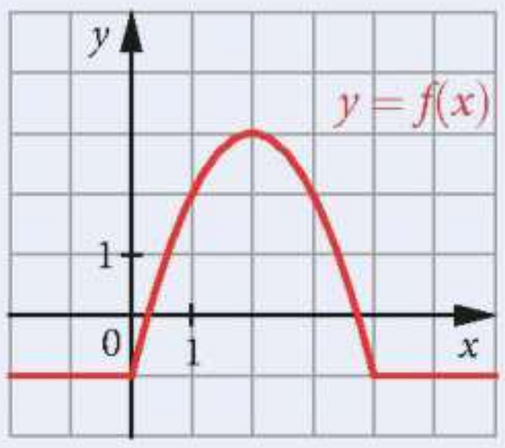
Podaj maksymalny przedział, w którym funkcja jest rosnąca.

41. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji złożony z fragmentu paraboli i półprostych. Podaj wzór, którym można opisać tę funkcję.

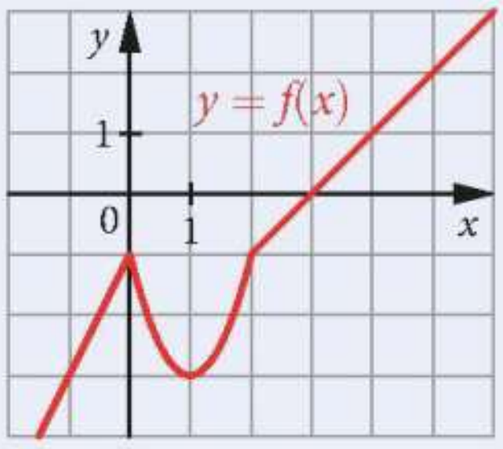
a)



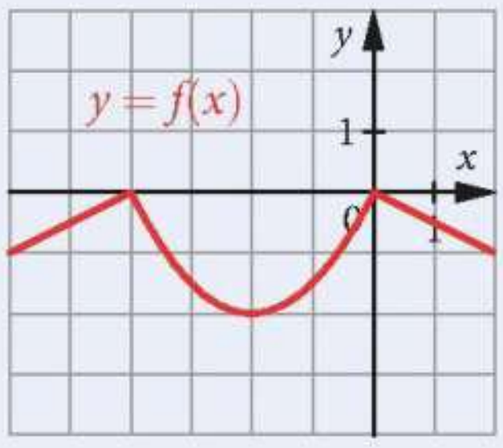
b)



c)



d)



42. Sporządź wykres funkcji.

a) $y = \left|x^2 + 2x - 3\right|$

b) $y = \left|2x^2 - 7x + 3\right|$

c) $y = \left|x^2 - 4x\right| - 3$

d) $y = \left|-\frac{1}{4}x^2 + x\right| + 1$

43. Sporządź wykres funkcji $f(x) = 2 - \left|\left|x^2 - 4\right| - 5\right|$. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma 4 rozwiązania?

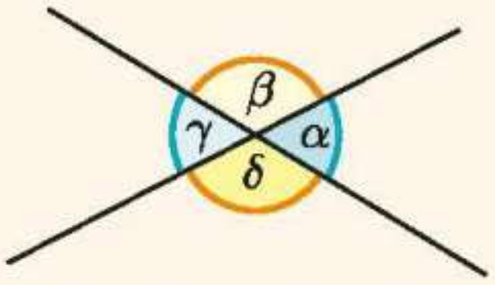
Figury na płaszczyźnie

6

1. Warto powtórzyć – kąty i ich własności

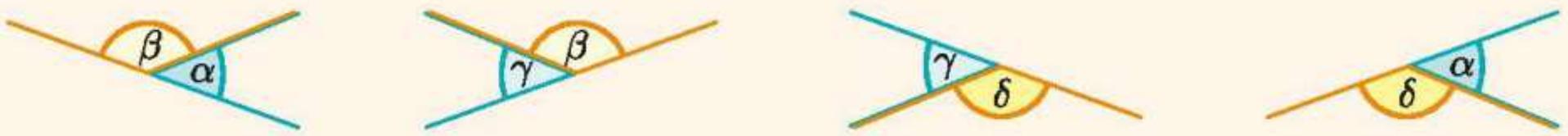
Kąty, które mają równe miary, nazywamy **kątami równymi**. Najczęściej zamiast pisać „kąt o mierze α”, będziemy używać krótszej formy „kąt równy α”.

Para przecinających się prostych wyznacza cztery kąty wypukłe, na rysunku oznaczone: α, β, γ, δ.



Wśród tych czterech kątów wyróżniamy pary kątów o szczególnych własnościach.

- Pary **kątów przyległych**, czyli takich, które mają jedno ramię wspólne.



Kąty przyległe tworzą razem kąt półpełny.

- Pary **kątów wierzchołkowych**, czyli takich, które mają wspólny tylko wierzchołek.

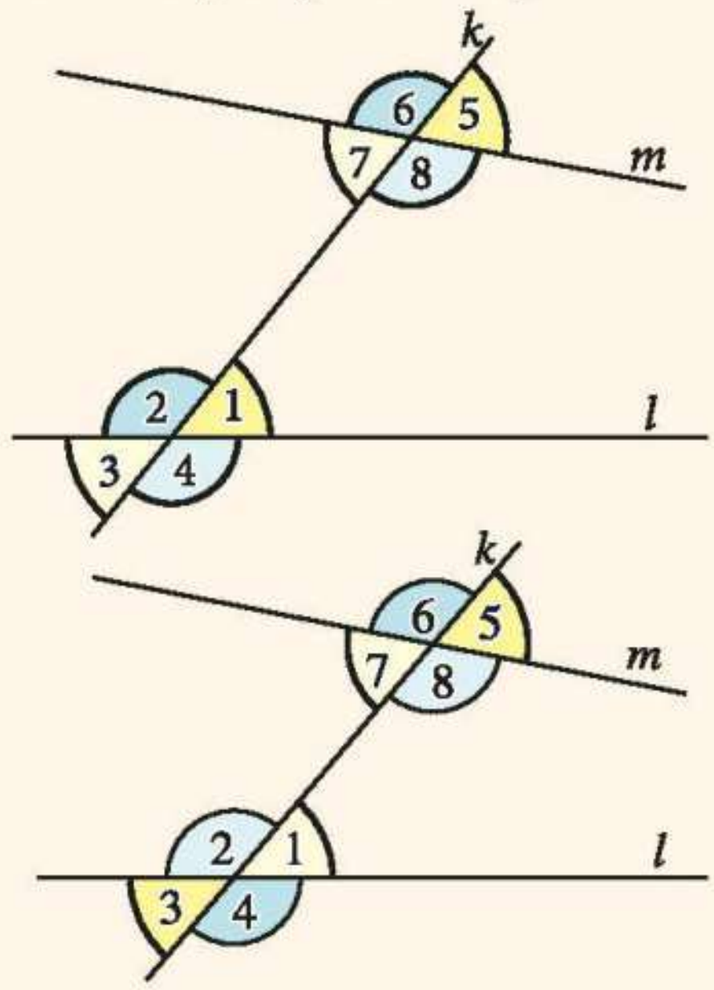


Kąty wierzchołkowe są równe.

Jeżeli prosta k przecina proste l i m, to można mówić też o innych parach kątów.

- Kąty 1 i 5, 2 i 6, 3 i 7, 4 i 8 nazywane są kątami **odpowiadającymi** (zaznaczono je na rysunku tymi samymi kolorami).

  Kąty odpowiadające leżą po tej samej stronie prostej k.



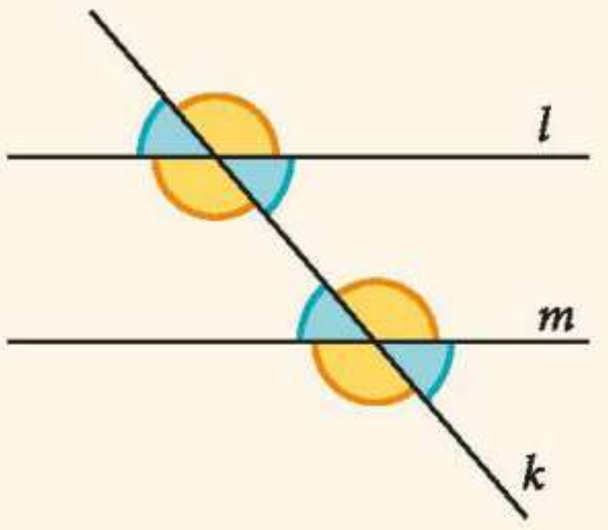
- Kąty 1 i 7, 2 i 8, 3 i 5, 4 i 6 nazywane są kątami **naprzemianległymi** (zaznaczono je na rysunku tymi samymi kolorami).

  Kąty naprzemianległe leżą po przeciwnych stronach prostej k.

Twierdzenie

Jeżeli prosta k przecina parę równoległych prostych l i m, to utworzone w ten sposób kąty odpowiadające są równe i kąty naprzemianległe są równe.

Jeżeli prosta k wyznacza z prostymi l i m jednakowe kąty odpowiadające lub naprzemianległe, to proste l i m są równoległe.

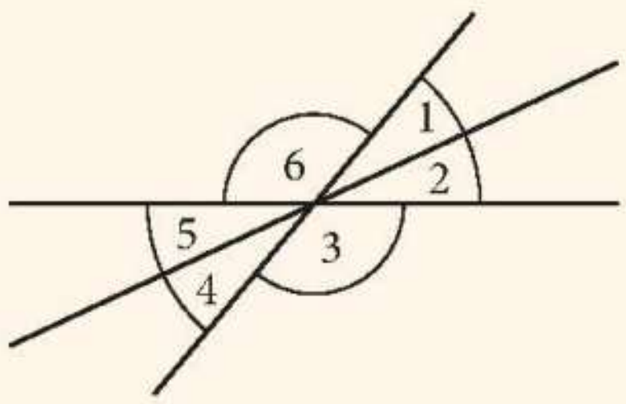


Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.4 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Trzy proste przecinają się w jednym punkcie w taki sposób, że $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$, tak jak na rysunku. Ile wynosi suma miar kątów $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4$?

A. Nie można tego stwierdzić. **C.** 120°
B. 180° **D.** 90°



1.2. Kąt α jest cztery razy mniejszy od kąta do niego przyległego. Wskaż miarę kąta α.

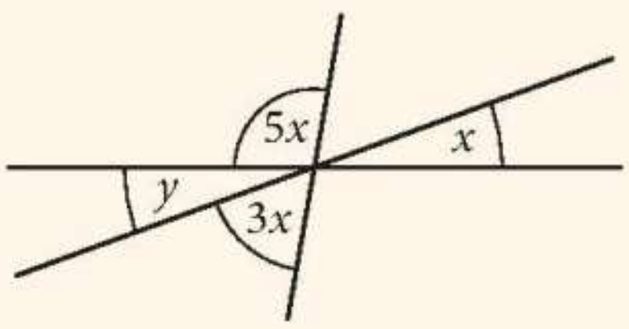
A. 76° **B.** 45° **C.** 36° **D.** 30°

1.3. Połowa kąta α jest równa 15°. Wskaż miarę kąta przyległego do kąta α.

A. 7,5° **B.** 30° **C.** 75° **D.** 150°

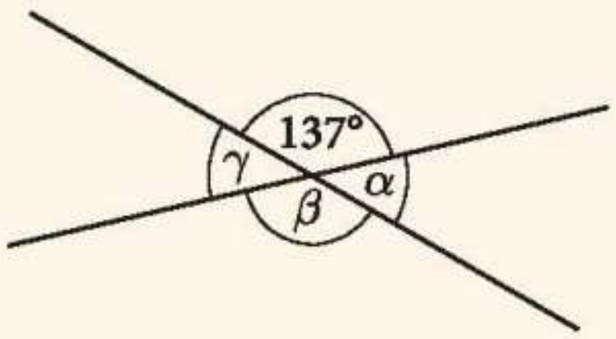
1.4. Wskaż miarę kąta y na podstawie informacji podanych na rysunku obok.

A. 30° **B.** 15° **C.** 20° **D.** 10°

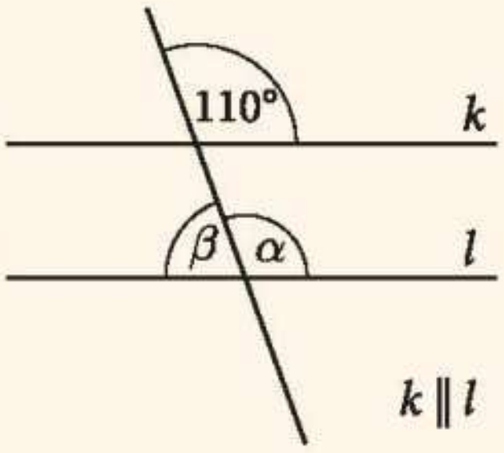


1.5. Wyznacz kąty α, β i γ.

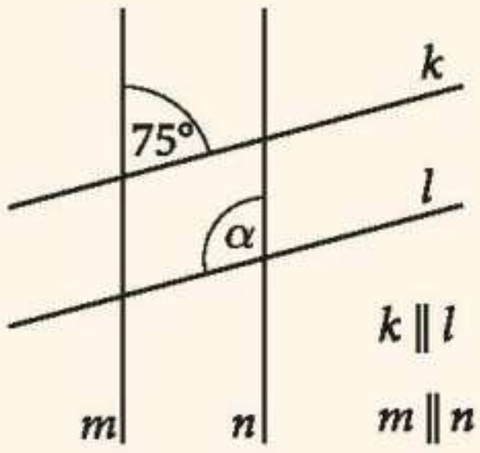
a)



b)

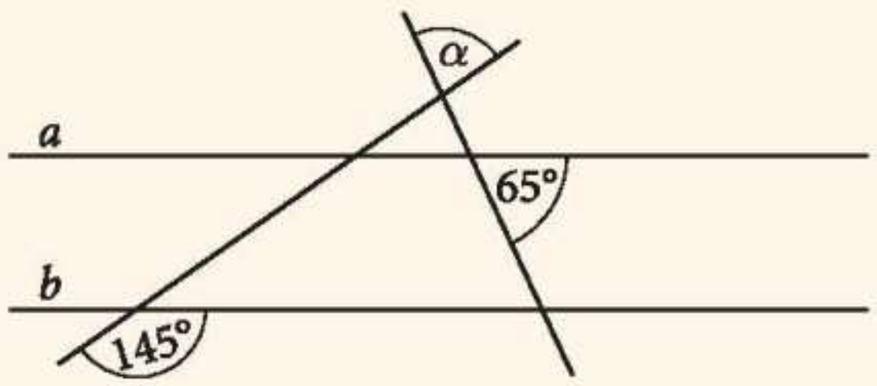


c)

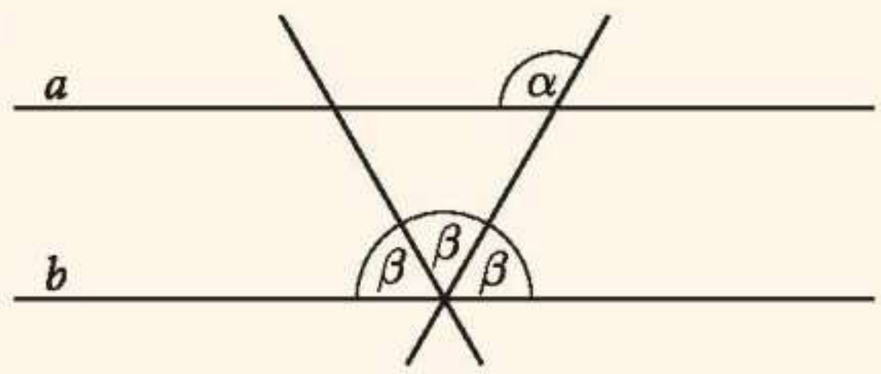


1.6. Wyznacz kąt α, wiedząc, że $a \parallel b$.

a)

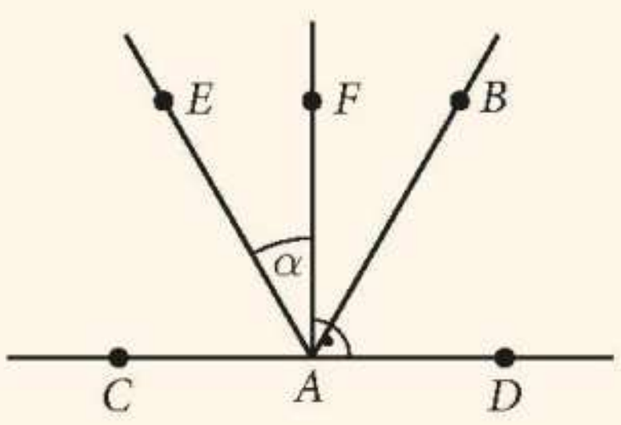


b)

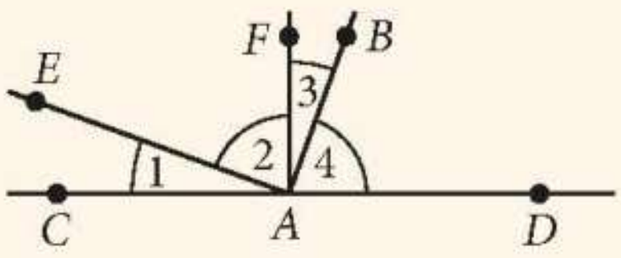


D **1.7.** Wykaż, że kąty wierzchołkowe są równe.

* **1.8.** Wyznacz kąt α położony jak na rysunku. Zakładamy, że półprosta AE jest dwusieczną kąta CAB oraz
a) kąt CAB jest o $60°$ większy od kąta BAD.
b) kąt CAB jest 5 razy większy od kąta BAD.



* **1.9.** Na rysunku obok kąt CAB jest o $40°$ większy od kąta BAD, $AF \perp AD$ oraz $AE \perp AB$. Wyznacz wszystkie kąty zaznaczone na rysunku.



* **1.10.** Jaki kąt wypukły tworzą wskazówki zegara o podanej godzinie?
a) 13^{30} b) 14^{20} c) 5^{50} d) 7^{10}

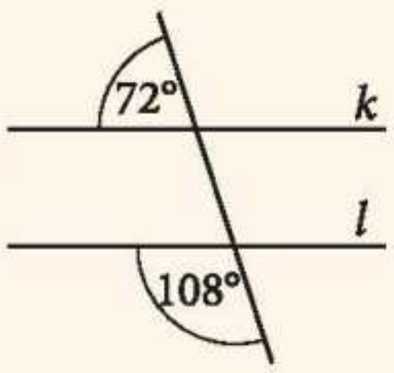
D **1.11.** Wykaż, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

1.12. Dwa kąty przyległe różnią się o $120°$. Ile razy miara jednego jest większa od miary drugiego z tych kątów?

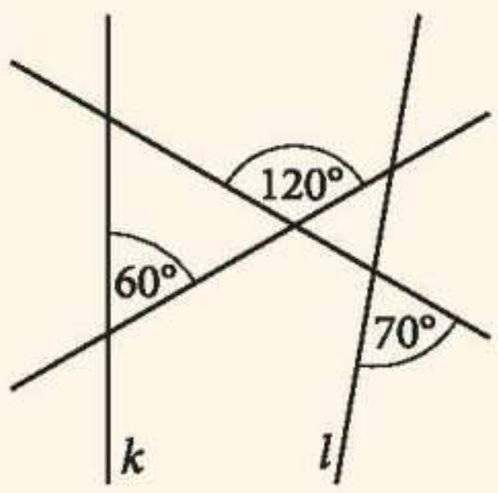
1.13. Jeden z kątów wierzchołkowych jest o $12°$ większy od sumy dwóch kątów przyległych do drugiego z nich. Wyznacz ten kąt.

D **1.14.** Czy proste k i l są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.

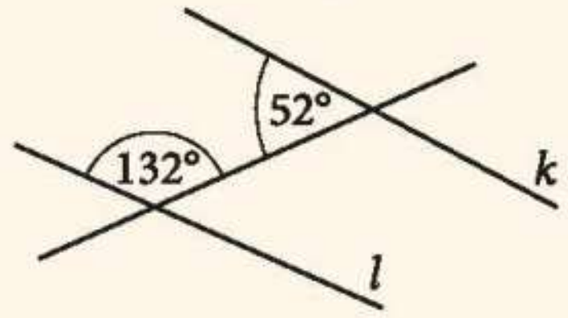
a)



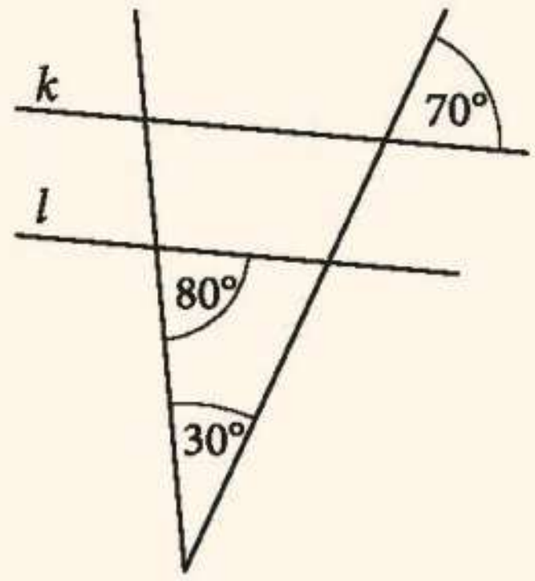
b)



c)



d)



2. Wielokąty i ich własności

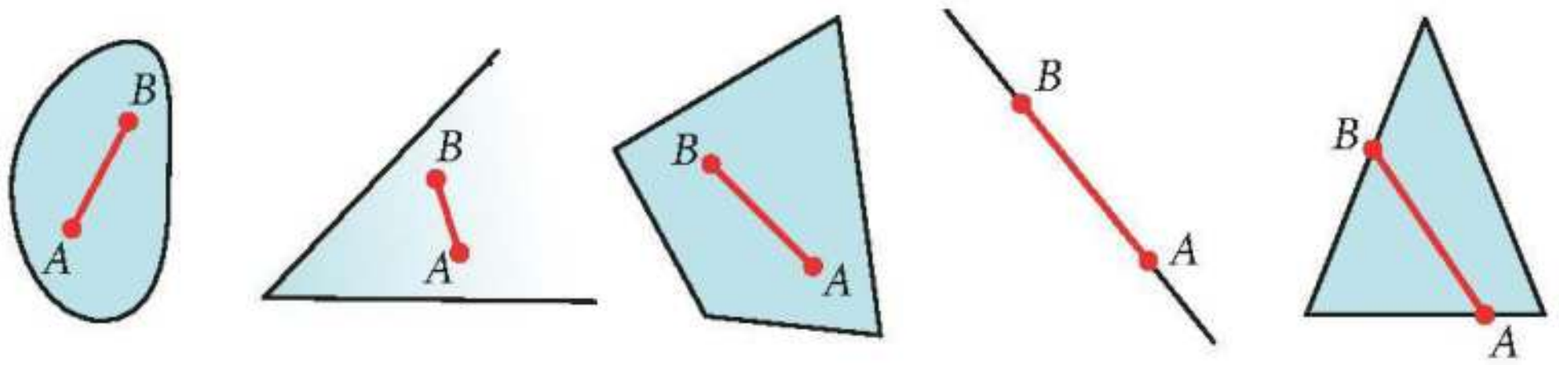
Umiejętności:

- odróżnianie figur wypukłych od niewypukłych
- stosowanie twierdzenia o liczbie przekątnych w wielokącie
- stosowanie twierdzenia o kątach w trójkącie i wielokącie

Definicja

Figurę nazywamy **wypukłą** wtedy, gdy każde dwa punkty należące do niej łączy odcinek zawierający się całkowicie w tej figurze.

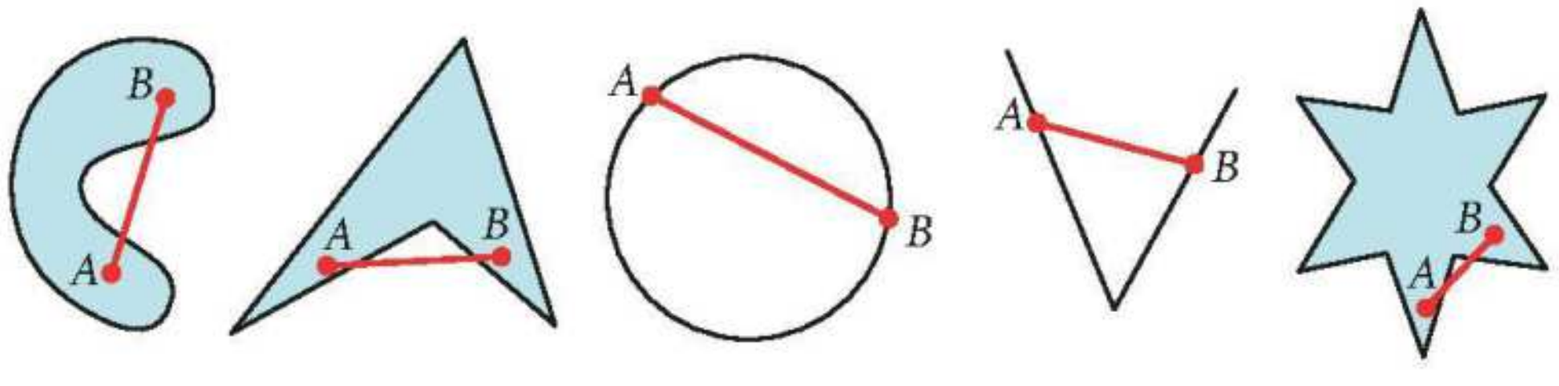
Przykłady figur wypukłych.



Figurami wypukłymi są kąty o takiej mierze α, że $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ lub $\alpha = 360°$.

Figura jest **niewypukła**, gdy istnieją takie punkty A i B należące do niej, że odcinek AB nie zawiera się w tej figurze.

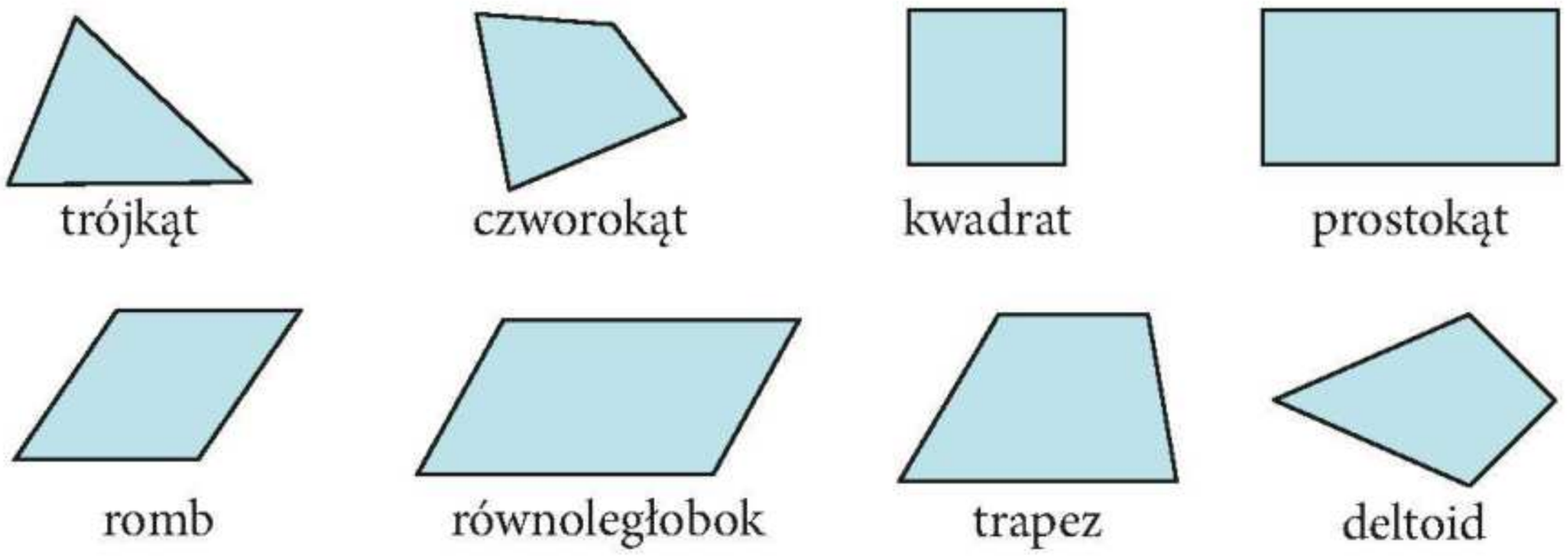
Przykłady figur niewypukłych.

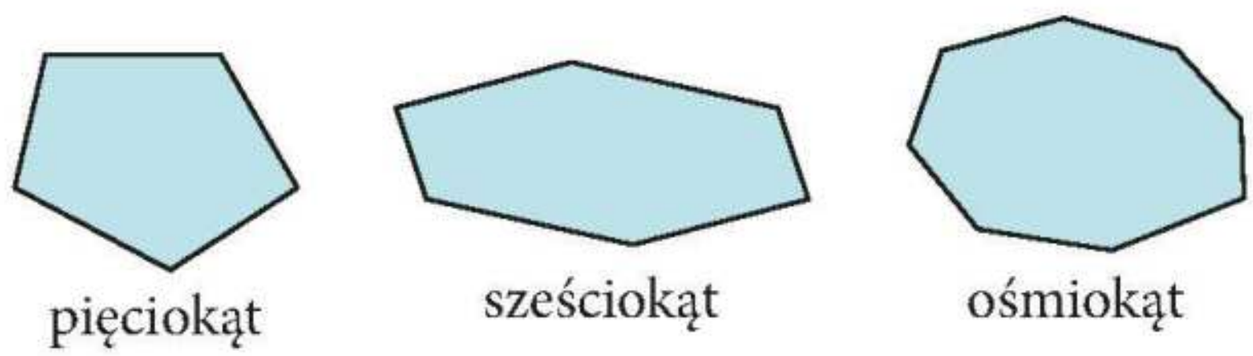


Miara α kąta niewypukłego (inaczej: wklęsłego) spełnia nierówność $180° < \alpha < 360°$.

Brzeg wielokąta wypukłego jest sumą skończonej liczby odcinków, tzw. **boków** wielokąta, z których żadne dwa nie są zawarte w jednej prostej. Końce boków nazywamy **wierzchołkami** wielokąta.
Każdy wielokąt ma tyle samo boków co wierzchołków. Jeżeli wielokąt ma n wierzchołków, to nazywamy go n-kątem.

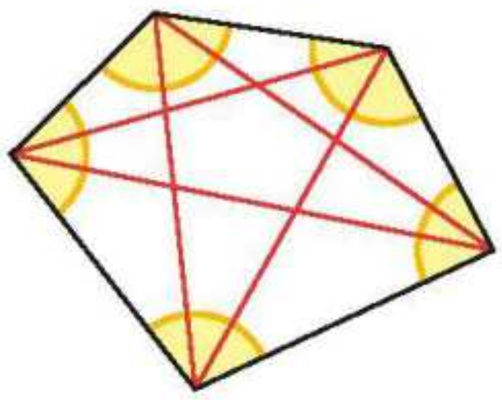
Przypomnijmy niektóre ze znanych wielokątów wypukłych.



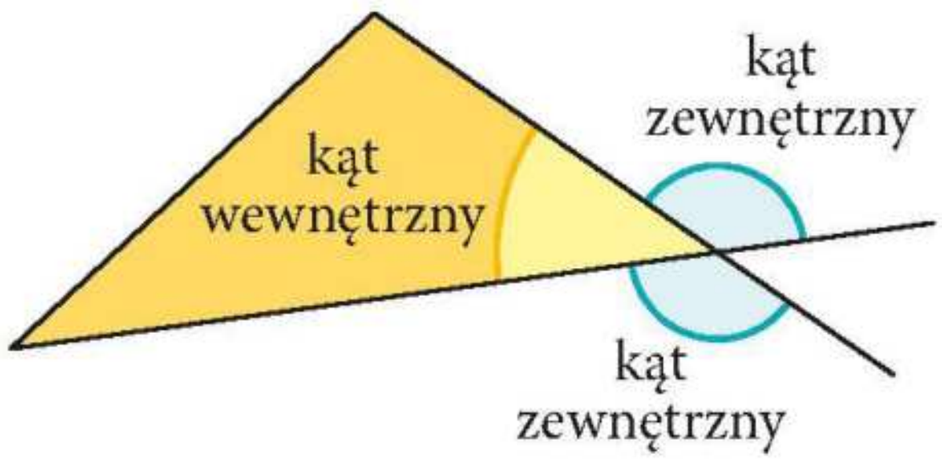


Przekątną wielokąta nazywamy odcinek łączący dwa wierzchołki niebędące końcami jednego boku.

Na rysunku zaznaczono wszystkie przekątne oraz **kąty wewnętrzne** pięciokąta wypukłego.



Kątem zewnętrznym wielokąta wypukłego nazywamy kąt przyległy do kąta wewnętrznego.



Zamiast „kąt wewnętrzny" wielokąta wypukłego mówimy krótko: „kąt" wielokąta wypukłego.

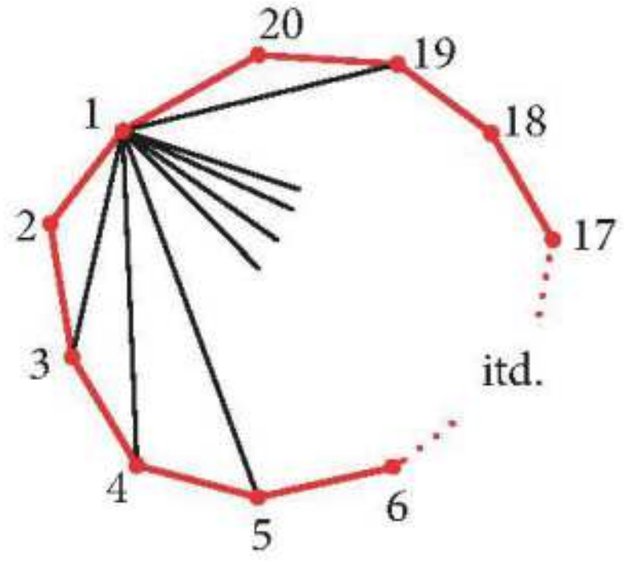
Przykład 1 ◂ zad. 2.10

Obliczymy, ile przekątnych ma:

a) pięciokąt wypukły. b) dwudziestokąt wypukły. c) n-kąt wypukły.

Rozwiązanie

a) Wszystkie przekątne pięciokąta zostały zaznaczone na jednym z poprzednich rysunków i można je policzyć. Pięciokąt wypukły ma 5 przekątnych.



b) Liczenie przekątnych na rysunku w przypadku dwudziestokąta byłoby bardzo żmudnym i czasochłonnym zajęciem. Zastanówmy się nad inną metodą rozwiązania zadania. Jeżeli ponumerujemy wierzchołki dwudziestokąta, to:
   - z wierzchołka o numerze 1 poprowadzimy $20-3=17$ przekątnych, ponieważ nie połączymy go przekątną z wierzchołkami o numerach 1, 2 oraz 20,
   - z wierzchołka o numerze 2 poprowadzimy $20-3=17$ przekątnych, ponieważ nie połączymy go przekątną z wierzchołkami o numerach 2, 3 oraz 1,
   - podobnie – z każdego następnego wierzchołka poprowadzimy $20-3=17$ przekątnych.

   Wierzchołków jest 20, zatem $17 \cdot 20$ jest liczbą poprowadzonych przekątnych, a ponieważ w ten sposób każdą z nich liczymy dwukrotnie (raz z jednego i raz z drugiego jej końca), więc liczba wszystkich przekątnych dwudziestokąta wypukłego jest równa $\frac{17 \cdot 20}{2} = 170$.

c) Powyższe rozumowanie uogólniamy dla dowolnego n-kąta wypukłego: liczba przekątnych jest równa $\frac{(n-3) \cdot n}{2}$.

Przykład 2 ◀ zad. 2.12

W pewnym wielokącie wypukłym liczba przekątnych jest 4 razy większa od liczby boków. Jaki to wielokąt?

Rozwiązanie

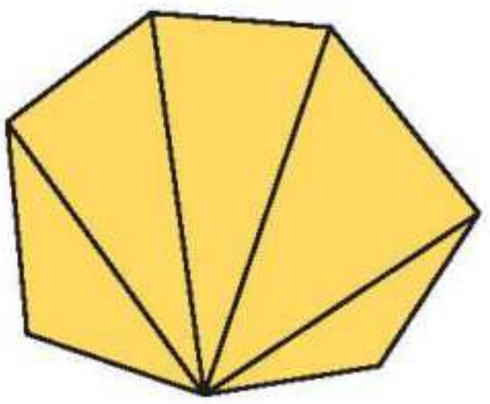
Jeżeli przyjmiemy, że szukany wielokąt ma n wierzchołków, to po wykorzystaniu wzoru z poprzedniego przykładu otrzymamy równanie:

$$\frac{(n-3) \cdot n}{2} = 4n$$
$$(n-3) \cdot n = 8n \quad | : n \qquad \longleftarrow n \text{ jest liczbą naturalną większą od 2}$$
$$n-3=8, \text{ czyli } n=11$$

Odp.: Jedenastokąt wypukły.

Trójkąty

Wielokątem wypukłym o najmniejszej liczbie wierzchołków jest trójkąt. Zauważmy, że każdy wielokąt możemy rozciąć na trójkąty, np. prowadząc z jednego wierzchołka wszystkie możliwe przekątne.



Przykład 3 ◂ zad. 2.14

Zbadamy, czy można zbudować trójkąt z odcinków o długości 1,4 cm, 2,7 cm i 4,4 cm.

Rozwiązanie

Długości odcinków, z których mamy zbudować trójkąt, muszą spełnić nierówność trójkąta. Znamy długości wszystkich trzech odcinków, zatem wystarczy sprawdzić, czy suma dwóch krótszych jest większa od najdłuższego.

$$1{,}4 + 2{,}7 = 4{,}1 < 4{,}4$$

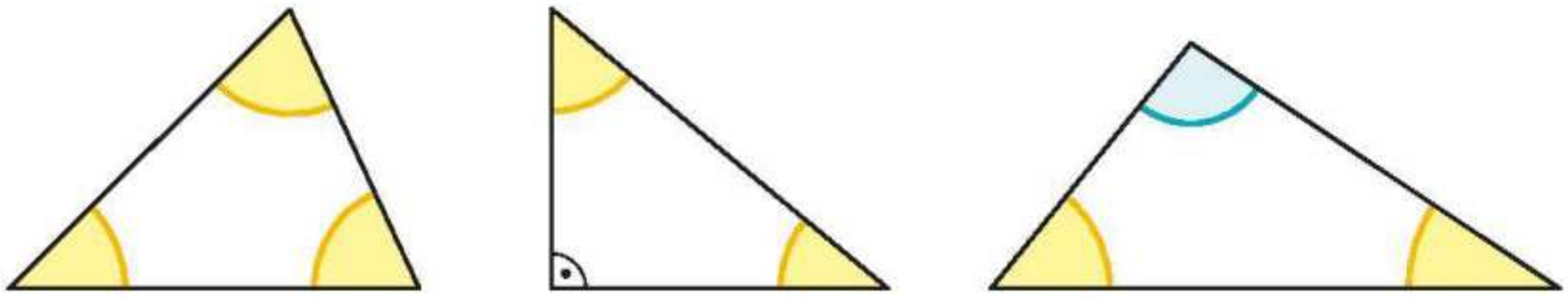
Warunek trójkąta nie jest spełniony.

Odp.: Z odcinków o podanych długościach nie można zbudować trójkąta.

Nierówność trójkąta

W trójkącie suma długości każdych dwóch boków jest większa od długości trzeciego boku.

Przypomnijmy najważniejsze pojęcia związane z trójkątami, wprowadzone w szkole podstawowej.



trójkąt ostrokątny
wszystkie kąty ostre

trójkąt prostokątny
jeden kąt prosty

trójkąt rozwartokątny
jeden kąt rozwarty

Symetralna boku trójkąta jest prostą prostopadłą do tego boku, przechodzącą przez jego środek.

Dwusieczna kąta w trójkącie jest półprostą o początku w wierzchołku tego kąta, dzielącą ten kąt na równe kąty.

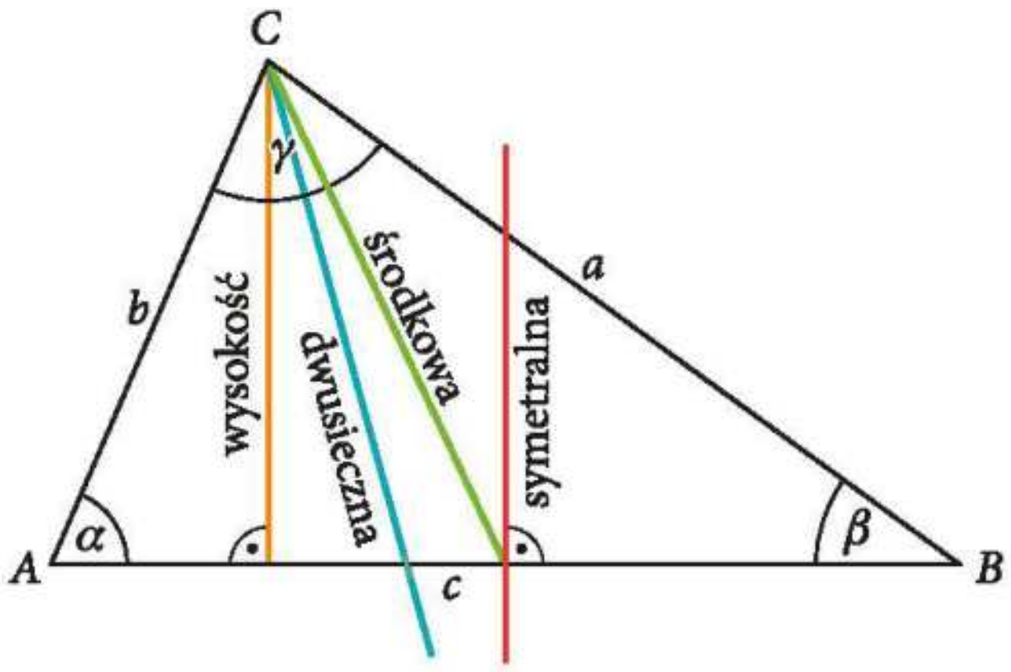
Wysokość trójkąta to odcinek prostopadły do boku trójkąta, łączący ten bok lub jego przedłużenie z przeciwległym wierzchołkiem.

Wprowadzimy jeszcze jedną definicję.

Definicja

Środkową boku trójkąta nazywamy odcinek łączący środek boku z przeciwległym wierzchołkiem.

Na rysunku prezentujemy wymienione pojęcia oraz pokazujemy sposób oznaczania wierzchołków, boków i kątów trójkąta, z którego najczęściej będziemy korzystać w tym podręczniku.



Używamy w tym podręczniku zwrotów: „dwusieczna jest równa 5” zamiast „długość odcinka wyciętego z dwusiecznej przez brzeg trójkąta jest równa 5”, podobnie „wysokość równa 3”, a nie „długość wysokości równa 3”, trójkąty mają „równe środkowe” zamiast trójkąty mają „środkowe równej długości” itd.

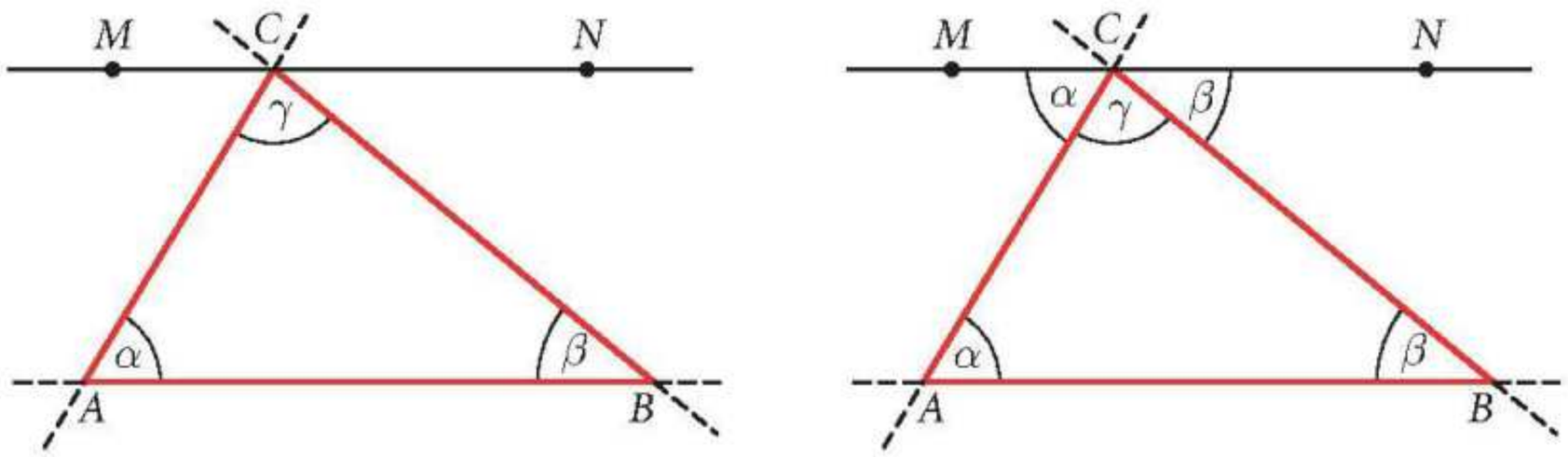
Jedno z podstawowych twierdzeń o trójkątach wraz z dowodem poznaliście podczas nauki w szkole podstawowej. Przypomnijmy je.

Twierdzenie

Suma miar kątów trójkąta wynosi 180°.

Dowód

Poprowadźmy przez wierzchołek C prostą równoległą do boku AB.
Suma kątów $\sphericalangle ACM$, $\sphericalangle BCN$ i γ jest równa 180°.



Ponieważ

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle ACM &= \sphericalangle CAB = \alpha \\ \sphericalangle BCN &= \sphericalangle CBA = \beta \end{aligned}\right\} \longleftarrow \text{są to pary kątów naprzemianległych}$$

więc $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

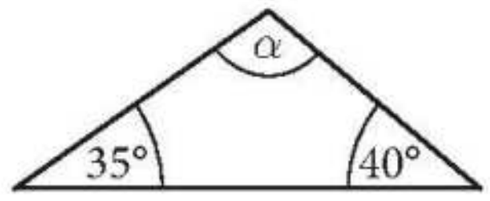
Koniec dowodu

Przykład 4 ◀ zad. 2.17

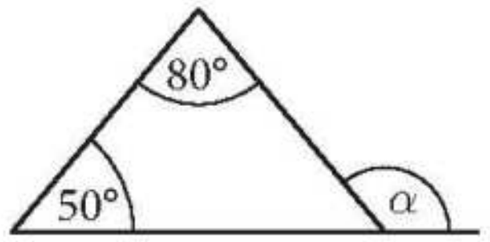
Wyznaczymy kąt α.

Rozwiązanie

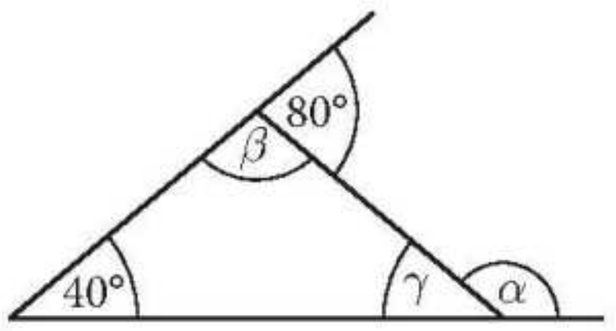
a) Kąt α jest trzecim kątem trójkąta o pozostałych kątach 35° i 40°. Zatem jest równy $180° - 35° - 40° = 105°$.



b) Kąt przyległy od kąta α ma $180° - 50° - 80° = 50°$.
Zatem kąt α ma $180° - 50° = 130°$.



c) Wyznaczmy najpierw kąty β i γ. Kąt β jest przyległy do kąta 80°, ma więc 100°. Kąt γ jest trzecim kątem trójkąta o kątach 40° i 100°, zatem jest równy $180° - 40° - 100° = 40°$.
Kąt α jest przyległy do kąta 40°, więc ma 140°.



Obliczenia z punktu b w powyższym przykładzie można łatwo uogólnić.

Wniosek

Kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie nieprzyległych do niego kątów trójkąta.

Zadania

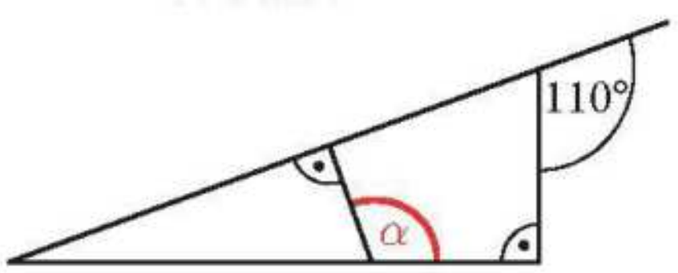
W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Wskaż liczbę przekątnych dziewiętnastokąta wypukłego.

A. 74 **B.** 190 **C.** 304 **D.** 152

2.2. Wskaż miarę kąta α.

A. 100° **C.** 120°
B. 110° **D.** 130°



2.3. Wskaż liczbę boków wielokąta, który ma 27 przekątnych.

A. 7 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10

2.4. Z koła usunięto punkt należący do jego brzegu (okręgu).

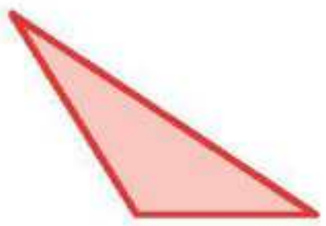
Oceń prawdziwość podanych zdań.

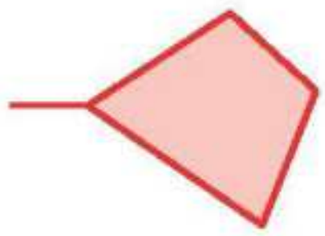
A. Otrzymana figura jest wypukła.

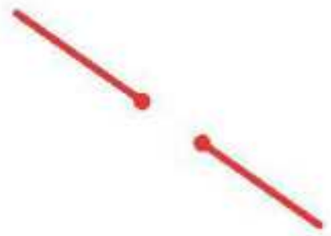
B. Otrzymana figura jest niewypukła.

C. Nie można stwierdzić, czy otrzymana figura jest wypukła czy niewypukła.

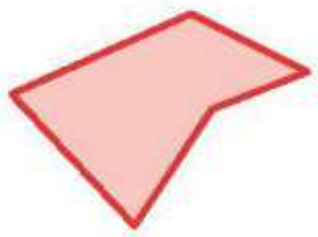
2.5. Wskaż figury wypukłe.

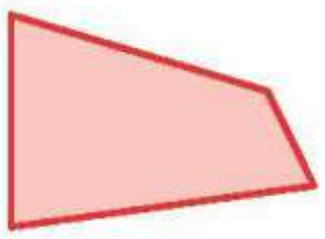
A. 

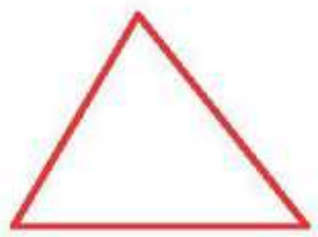
C. 

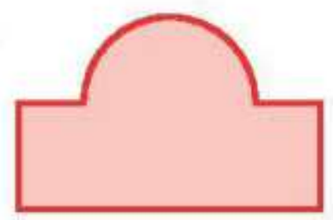
E. 

G. 

B. 

D. 

F. 

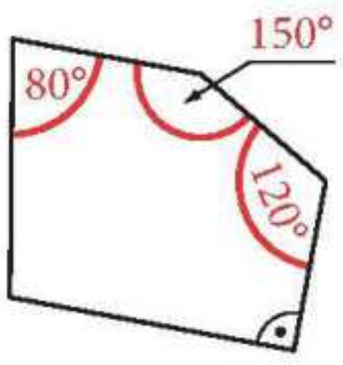
H. 

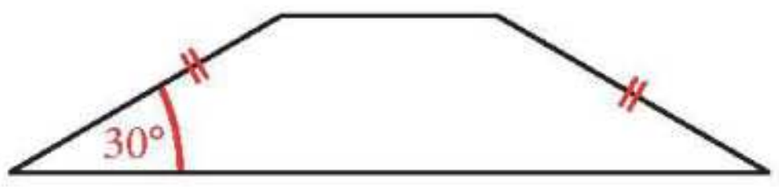
2.6. Z koła usunięto środek. Czy otrzymana figura jest wypukła?

2.7. Z czworokąta wypukłego usuń jeden punkt, tak aby otrzymana figura była nadal wypukła. Ile jest możliwości rozwiązania zadania?

2.8. Oceń prawdziwość podanych zdań.
Prosta może mieć z pięciokątem wypukłym
A. dokładnie jeden punkt wspólny.
B. dokładnie dwa punkty wspólne.
C. nieskończenie wiele punktów wspólnych.

2.9. Zaznacz kąty zewnętrzne wielokąta i oblicz ich miary.

a) 

b) trapez 

Odcinki równe często oznaczamy na rysunku małymi kreseczkami.

2.10. Oblicz liczbę przekątnych wypukłego wielokąta o n wierzchołkach.
a) $n = 7$ b) $n = 10$ c) $n = 15$ d) $n = 100$

2.11. Które wielokąty mają tyle samo przekątnych co boków?

2.12. W którym wielokącie przekątnych jest
a) dwa razy więcej niż boków?
b) trzy razy więcej niż boków?
c) pięć razy więcej niż boków?

2.13. Na płaszczyźnie dane są cztery różne punkty. Ile można zbudować trójkątów o wierzchołkach w tych punktach? Rozważ różne przypadki.

2.14. Zbadaj, czy można zbudować trójkąt z odcinków o podanych długościach.

a) 37 cm, 19 cm i 22 cm

b) $\sqrt{8}$ cm, $\sqrt{18}$ cm i $\sqrt{32}$ cm

c) $\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm, 4 cm i $\left(3-\sqrt{3}\right)$ cm

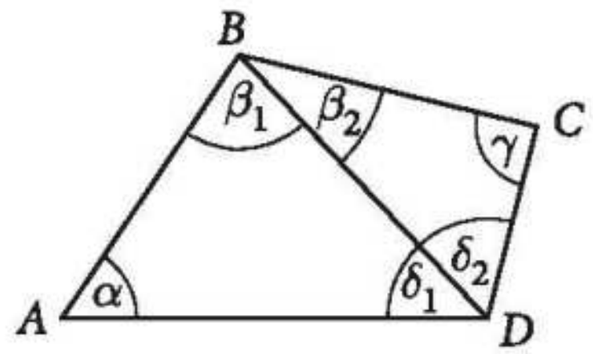
d) $\frac{2}{7}$ cm, $\frac{1}{6}$ cm i $\frac{2}{3}$ cm

2.15. W trójkącie równoramiennym dane są długości boków AB i AC. Wyznacz długość trzeciego boku. Rozpatrz różne przypadki.

a) $|AB| = 2$, $|AC| = 3$

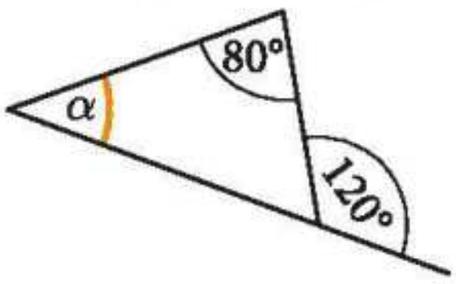
b) $|AB| = 2$, $|AC| = 5$

D **2.16.** Korzystając z rysunku, wykaż, że suma kątów czworokąta wypukłego jest równa 360°.

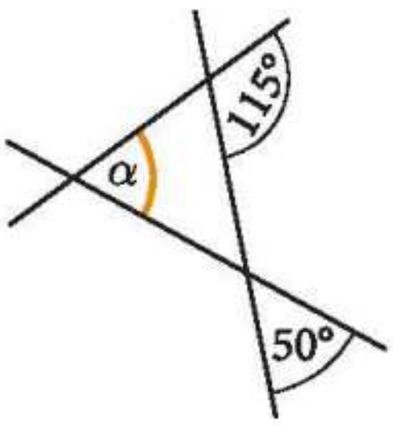


2.17. Wyznacz kąt α.

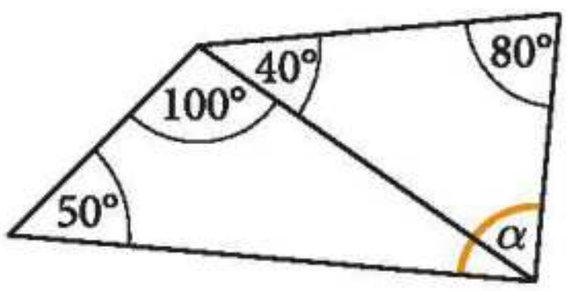
a)



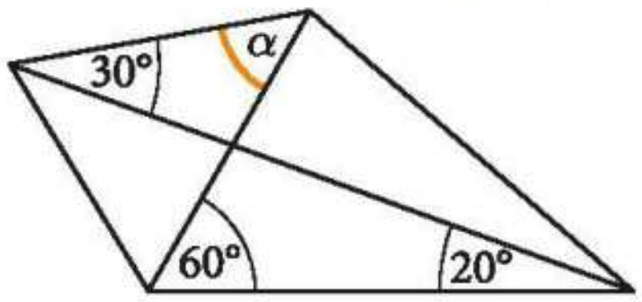
b)



c)

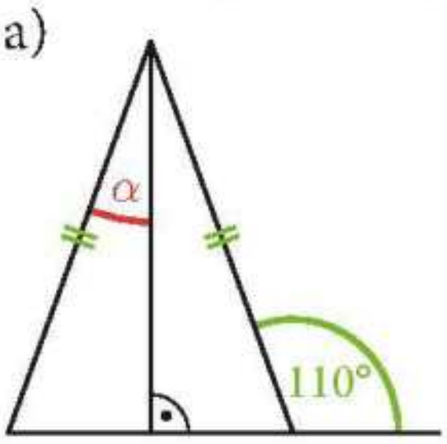


d)

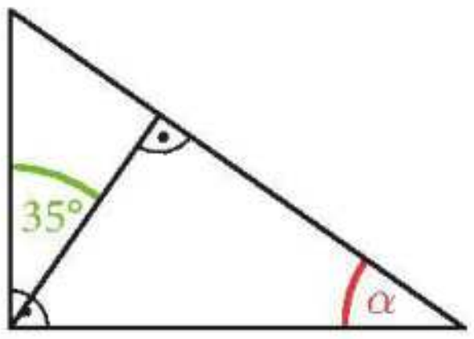


2.18. Wyznacz kąt α.

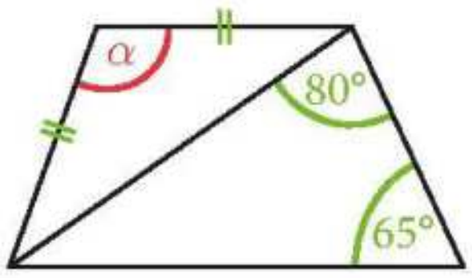
a)



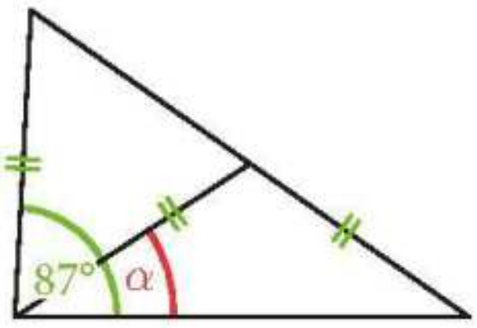
b)



c) trapez



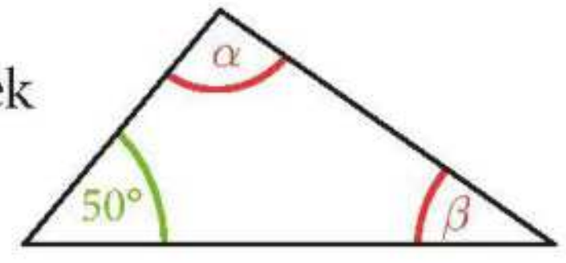
d)



2.19. Jeden z kątów trójkąta ma 40°, a miary dwóch pozostałych są w stosunku 3 : 4. Wyznacz te kąty.

2.20. Jeden z kątów zewnętrznych trójkąta ma 140°, a dwa kąty wewnętrzne nieprzyległe do niego są równe. Wyznacz kąty trójkąta.

2.21. Kąty α i β w trójkącie (zob. rysunek) spełniają warunek $\alpha - \beta = 40°$. Wyznacz miarę kąta przyległego do β.



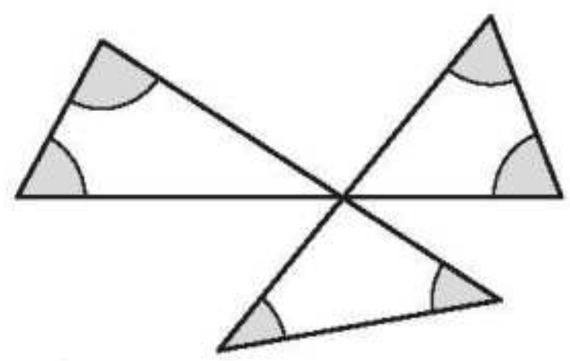
2.22. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąt A ma miarę 60°, a $\sphericalangle B : \sphericalangle C : \sphericalangle D = 1 : 2 : 3$. Wyznacz kąty tego czworokąta.

2.23. Wyznacz liczbę boków wielokąta wypukłego, jeżeli suma miar jego kątów jest równa

a) 540°. b) 720°. c) 1080°. d) 2160°.

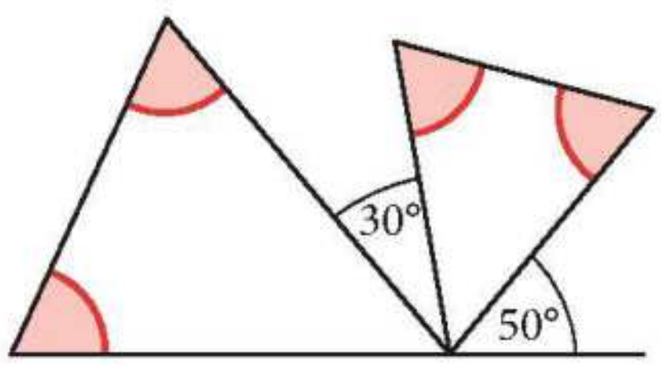
2.24. W wypukłym pięciokącie miary trzech kątów pozostają w stosunku 5 : 6 : 7, a suma dwóch pozostałych kątów jest równa 90°. Oblicz miarę największego kąta tego pięciokąta.

* **2.25.** Ile jest równa suma miar kątów zaznaczonych na rysunku?

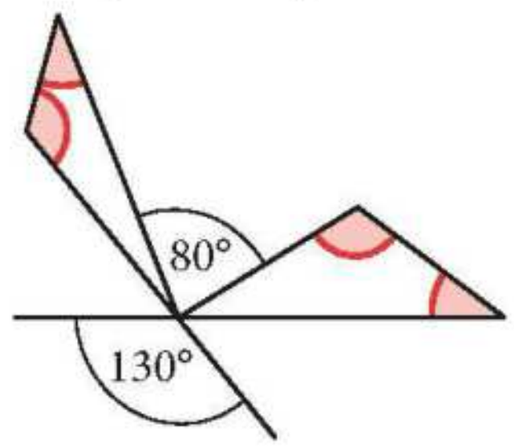


* **2.26.** Ile jest równa suma miar kątów zaznaczonych na rysunku?

a)



b)



Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Istnieje trójkąt, którego największy kąt ma miarę 70°.

B. Istnieje trójkąt, którego najmniejszy kąt ma miarę 65°.

C. Istnieje trójkąt, w którym suma miar największego i najmniejszego kąta wynosi 80°.

2. Jeden z kątów trójkąta ma miarę o 25° mniejszą od miary drugiego kąta i dwukrotnie większą od miary trzeciego kąta. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

3. Suma miar dwóch kątów czworokąta wypukłego jest równa 100°, a różnica dwóch pozostałych 20°. Jaką miarę ma największy kąt tego czworokąta?

4. Ile przekątnych ma wielokąt wypukły, jeżeli suma jego kątów jest równa 900°?

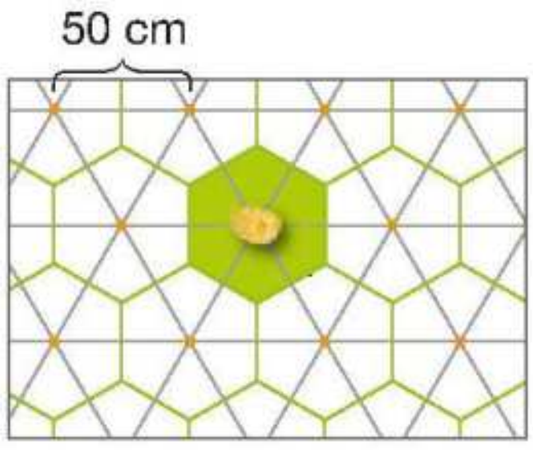
5. Dla jakich wartości m z odcinków o długościach $m - 2$, $2m - 1$, $10 - m$ można zbudować trójkąt?

Wielokąty foremne

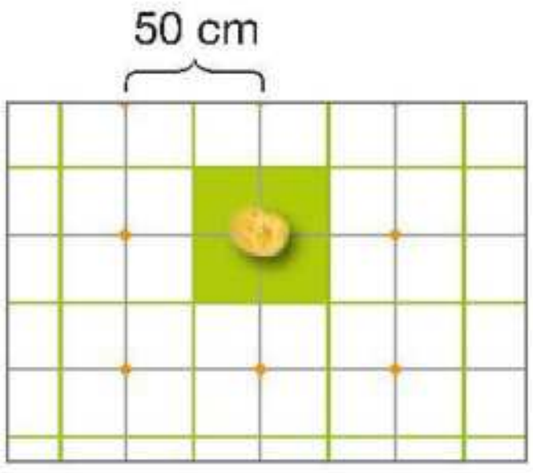
Wielokątów foremnych nie odkrył matematyk, zrobiła to natura – przyjrzyj się chociażby plastrowi miodu czy płatkom śniegu. Matematyk może jednak poszukać praktycznego zastosowania własności tych figur w rozmaitych dziedzinach życia codziennego, rzemiosła, sztuki, techniki.

Matematyka i sadzenie ziemniaków

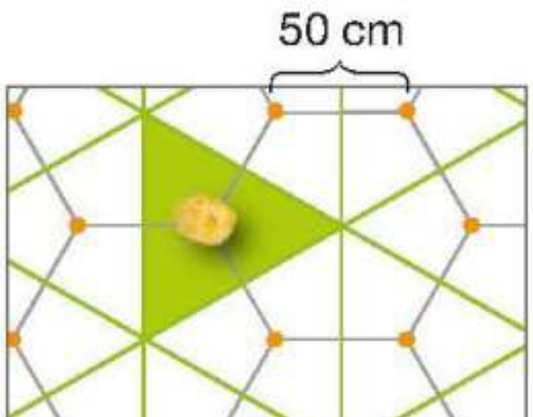
Wykorzystajmy wiedzę matematyczną do sadzenia roślin, np. ziemniaków. Załóżmy, że głównym warunkiem jest posadzenie ich w równej odległości od siebie, np. co 50 cm. Na danej powierzchni chcemy posadzić jak najwięcej ziemniaków. Jak to zrobić?
Jedynymi wielokątami foremnymi, na które można podzielić płaszczyznę bez strat, są trójkąt foremny, kwadrat i sześciokąt foremny. Wszystkie rośliny mają mieć tyle samo miejsca wokoło, więc posadźmy je w wierzchołkach tych figur.
Oto co otrzymamy.



Na zielono zaznaczono pole przypadające na jedną roślinkę. Jeśli posadzimy ziemniaki w wierzchołkach trójkąta, pole to będzie równe $1250\sqrt{3}$ cm^2.



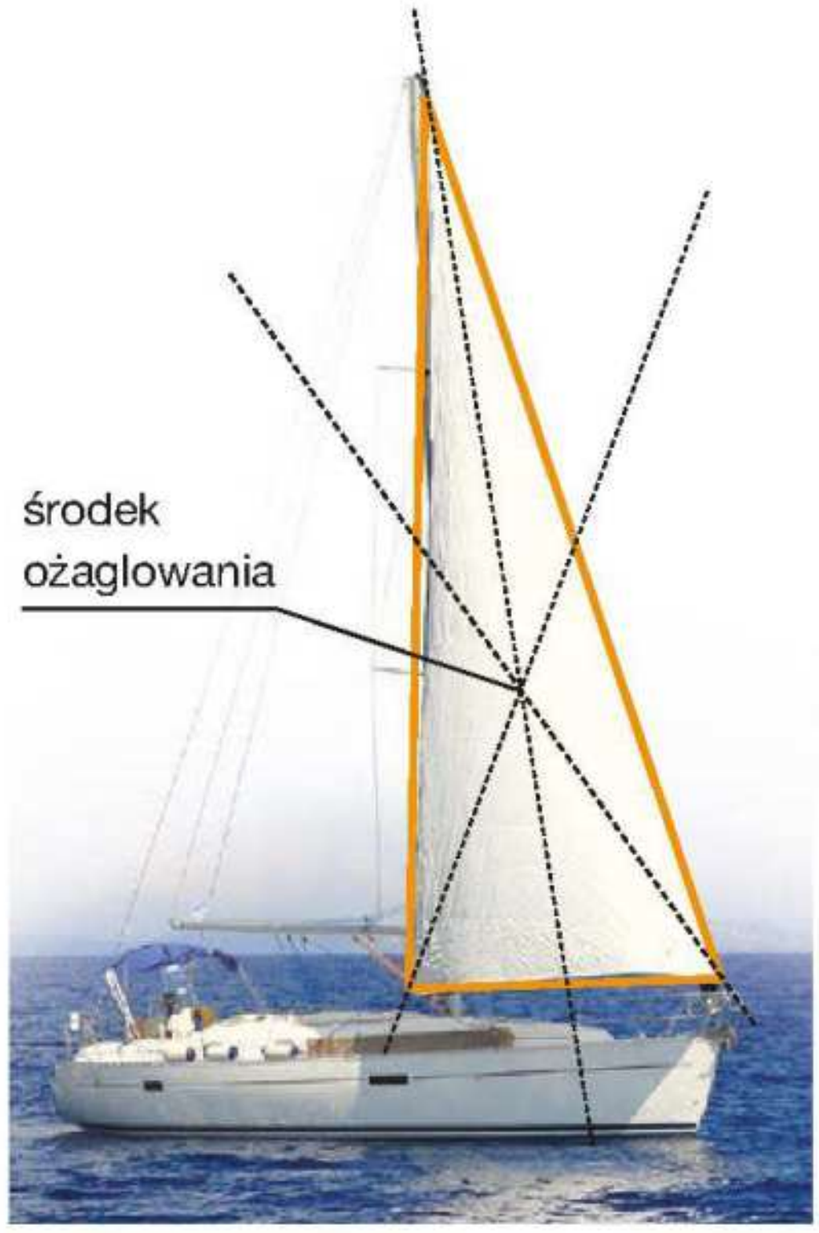
Jeśli zastosujemy kwadrat, do dyspozycji pojedynczej roślinki będzie kwadrat o polu 2500 cm^2.



W przypadku sześciokąta jest to trójkąt równoboczny o polu $1875\sqrt{3}$ cm^2.

W którym układzie najlepiej sadzić ziemniaki?





Środek ożaglowania

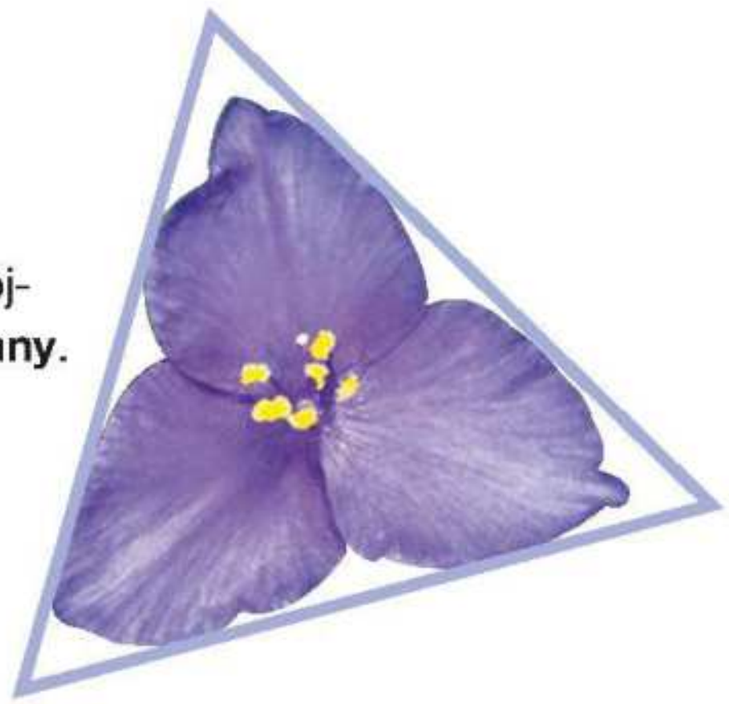
Czy wiesz, że żaglówka może się poruszać w dowolnym kierunku z wyjątkiem kierunku pod wiatr lub prawie pod wiatr? W teorii żeglowania jednym z elementów związanych z tym zjawiskiem jest środek ożaglowania. Jeżeli żagiel ma kształt trójkąta, to środek ożaglowania jest **punktem przecięcia środkowych** tego trójkąta.

Wielokąty foremne w przyrodzie

Kształty wielokąta foremnego łatwo odnaleźć w tworach i zjawiskach przyrodniczych.



Płatki śniegu – najrozmaitsze **sześciokąty foremne**.



Trzykrotka Andersona (trójpłatkowa) – **trójkąt foremny**.



Rozgwiazda – **pięciokąt foremny**.

Pszczoły gromadzą miód w plastrach zbudowanych z sześciokątnych komórek woskowych. Taki ich kształt pozwala na optymalne wykorzystanie przestrzeni ula. Sześciokąt foremny ma mniejszy obwód niż obwód kwadratu i trójkąta równobocznego o tym samym polu, dzięki czemu pszczoły zużywają mniej wosku na budowę plastra.



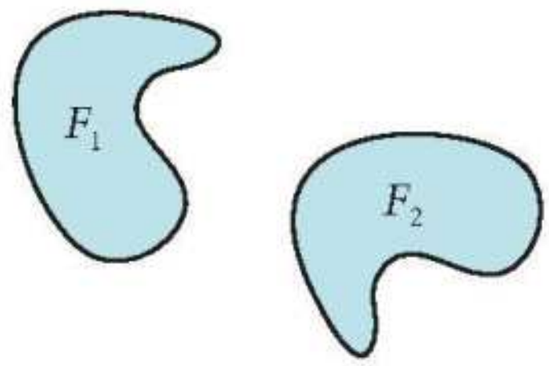
3. Figury przystające

Umiejętności:

- odróżnianie figur przystających
- stosowanie cech przystawania figur
- dowodzenie przystawania trójkątów

O przystawaniu figur uczyliście się w szkole podstawowej. Przypomnijmy, że jeżeli na płaszczyźnie mamy dwie figury, to mówimy, że są one **przystające**, gdy jedną z nich możemy nałożyć na drugą.

Czynność nakładania można wykonać za pomocą kalki.



Nakładamy kalkę na figurę F_1, dokładnie ją przerysowujemy, a następnie przekalkowany obraz przykładamy do figury F_2. Jeżeli wszystkie punkty figury F_2 i kalki figury F_1 się pokrywają, to F_1 i F_2 są przystające.
Zauważmy jeszcze, że obrazek na kalce możemy przesuwać na płaszczyźnie oraz odwracać na drugą stronę.

Przykład 1

a) Dwie litery „a" w wyrazie „przystawanie" są przystające.
b) Napisy **bo** i **od** są przystające.
c) Jeżeli spojrzymy w lustrze na zegarek elektroniczny wskazujący godzinę 20:28, to odczytamy dość nietypową godzinę:



Te cyfry i ich lustrzane odbicie to figury przystające.

Jeżeli figura F_1 jest przystająca do figury F_2, to fakt ten zapisujemy: $F_1 \equiv F_2$.

Zauważmy, że figury przystające mają następujące własności:

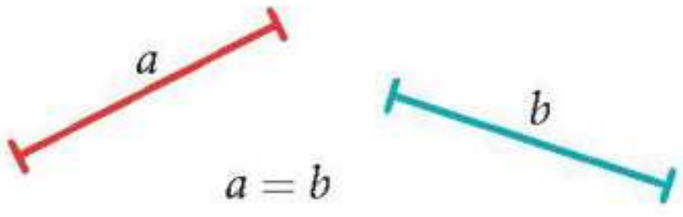
- $F_1 \equiv F_1$ ⟵ każda figura przystaje do siebie samej
- Jeżeli $F_1 \equiv F_2$, to $F_2 \equiv F_1$. ⟵ jeżeli F_1 przystaje do F_2, to F_2 przystaje do F_1
- Jeżeli $F_1 \equiv F_2$ i $F_2 \equiv F_3$, to $F_1 \equiv F_3$. ⟵ jeżeli F_1 przystaje do F_2 i F_2 przystaje do F_3, to F_1 przystaje do F_3

Ostatnia własność, ważna ze względu na zastosowania praktyczne, nazywana jest **przechodniością**.

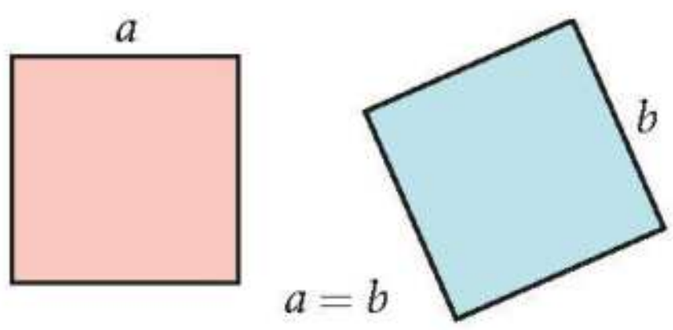
Nakładanie jednej figury na drugą jest zadaniem dosyć skomplikowanym. W praktyce aby stwierdzić, czy figury są przystające, posługujemy się pewnymi twierdzeniami, zwanymi **cechami przystawania figur**. Oto kilka z nich:

O figurach przystających często mówimy, że są równe.

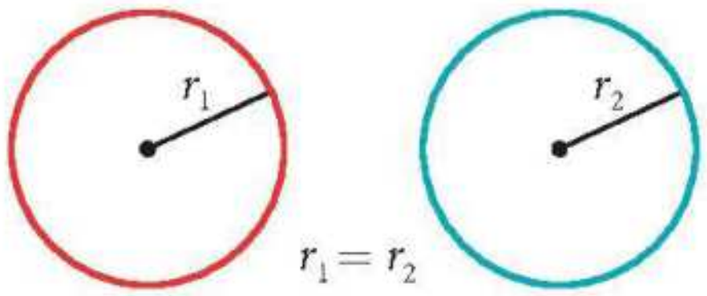
- Dwa odcinki są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą długość.



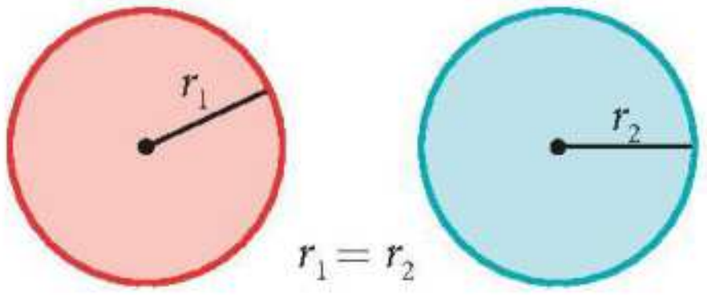
- Dwa kwadraty są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy bok jednego jest równy bokowi drugiego.



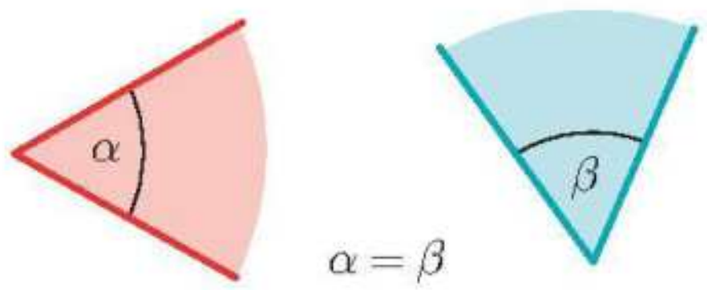
- Dwa okręgi są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe promienie.



- Dwa koła są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe promienie.



- Dwa kąty są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe miary (rozwartość).



Cechy przystawania trójkątów

Cechy przystawania trójkątów wyróżnimy w postaci oddzielnego twierdzenia, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Cechy przystawania trójkątów

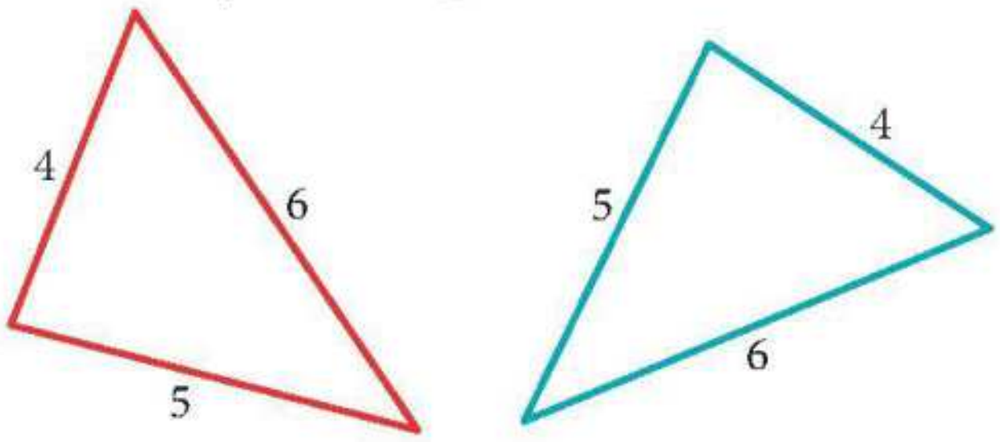
I. Jeżeli dwa trójkąty mają boki odpowiednio równe, to są przystające.

II. Jeżeli dwa trójkąty mają dwa boki i kąt między nimi zawarty odpowiednio równe, to są przystające.

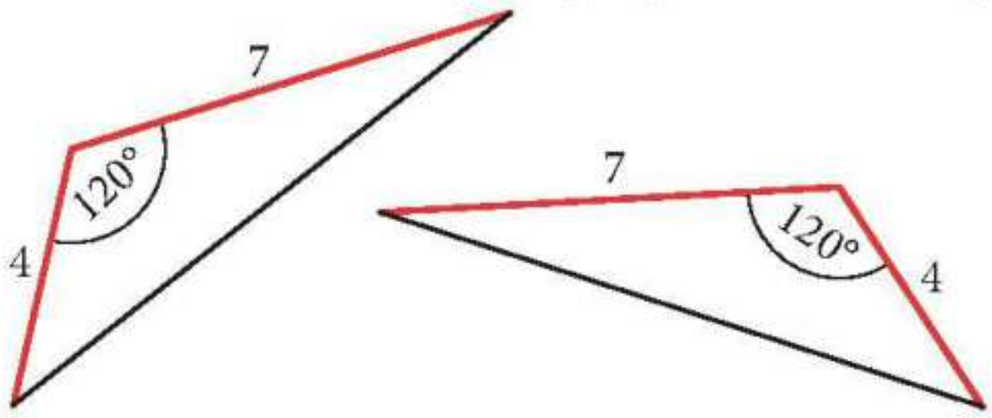
III. Jeżeli dwa trójkąty mają bok i dwa kąty do niego przylegające odpowiednio równe, to są przystające.

Tradycyjnie oznaczać będziemy kolejne cechy przystawania trójkątów:

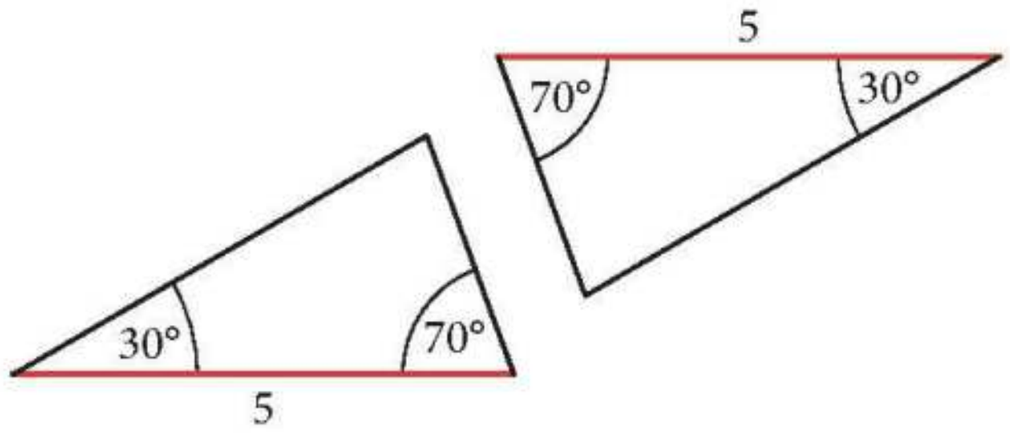
- **bbb** – trzy boki odpowiednio równe,



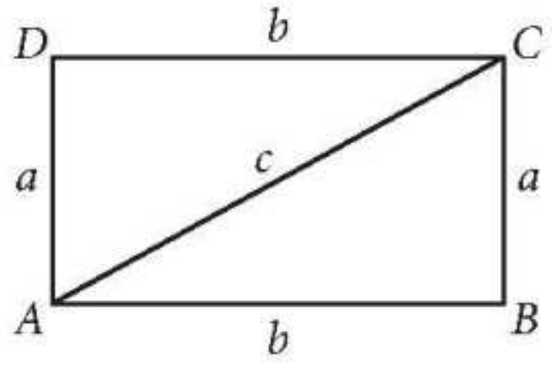
- **bkb** – dwa boki i kąt między nimi zawarty odpowiednio równe,



- **kbk** – bok i dwa kąty do niego przylegające odpowiednio równe.



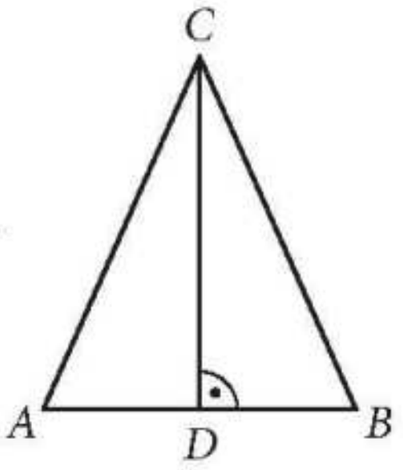
Przykład 2 ◂ zad. 3.8



Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty przystające:
$\triangle ADC \equiv \triangle CBA$.
Można to stwierdzić, zauważając na przykład, że trójkąty te mają trzy pary równych boków.

Przykład 3 ◂ zad. 3.15

Wykażemy, że wysokość opuszczona na podstawę trójkąta równoramiennego dzieli go na dwa trójkąty przystające.



Dowód

$|AC| = |BC|$ ⟵ trójkąt jest równoramienny
$\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$ ⟵ kąty przy podstawie w trójkącie równoramiennym
$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$ ⟵ jako dopełnienie do 180°

Zatem na mocy cechy kbk $\triangle ADC \equiv \triangle BDC$.

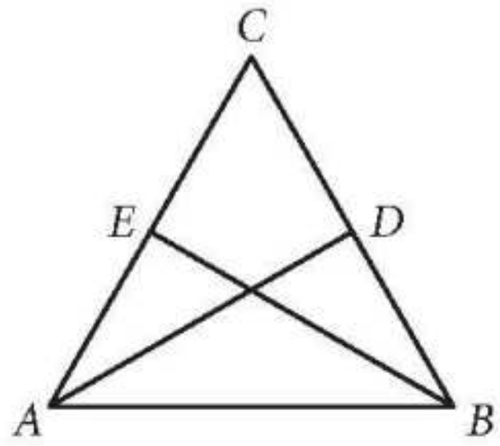
Koniec dowodu

Wniosek

W trójkącie równoramiennym, w którym $|AC| = |BC|$, dwusieczna kąta C oraz środkowa i wysokość poprowadzone z wierzchołka C zawierają się w jednej prostej, będącej osią symetrii podstawy, inaczej – w symetralnej boku AB.

Przykład 4 ◀ zad. 3.17

W trójkącie równoramiennym, w którym $|AC| = |BC|$, poprowadzono (tak jak na rysunku) środkowe AD i BE. Udowodnimy, że $\triangle ABE \equiv \triangle BAD$.



Dowód

E jest środkiem boku AC, D jest środkiem boku BC.

$|AE| = |BD|$ ⟵ połowy równych boków trójkąta równoramiennego
$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$ ⟵ równe kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego
AB ⟵ wspólny bok tych trójkątów

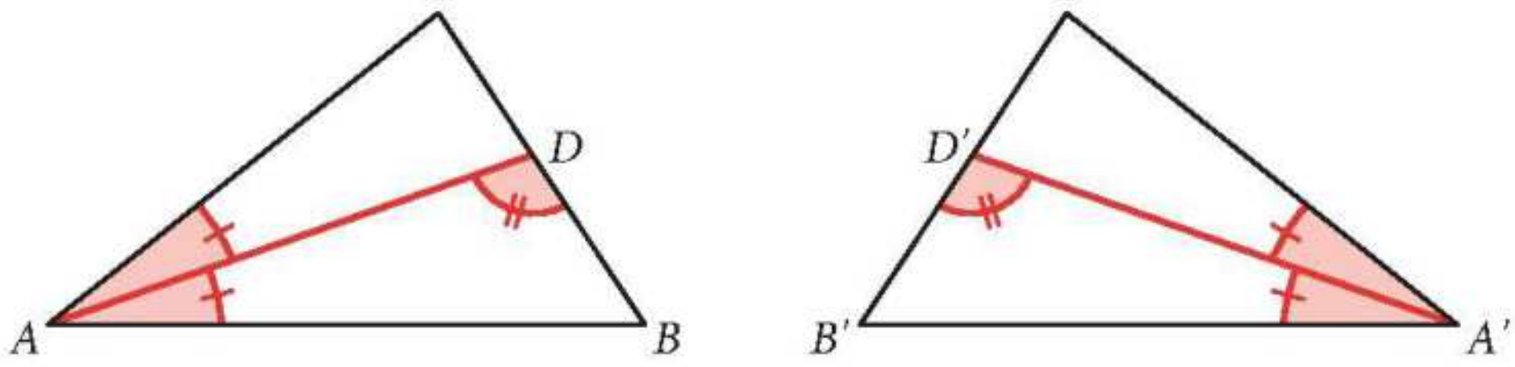
Trójkąty ABE i BAD mają równe dwie pary boków i równe kąty między nimi zawarte. Są więc przystające na mocy cechy bkb.

Koniec dowodu

Przykład 5 ◀ zad. 3.19

W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono dwusieczne AD i $A'D'$. Wiemy, że $|AD| = |A'D'|$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$. Udowodnimy, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

Dowód



Wykażemy najpierw, że przystające są trójkąty ABD i $A'B'D'$. Wykorzystamy następnie równości między bokami i kątami tych trójkątów do osiągnięcia celu, czyli udowodnienia przystawania dużych trójkątów.

Z założeń w treści zadania wiemy, że: $|AD| = |A'D'|$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$. Ponieważ AD i $A'D'$ są dwusiecznymi kątów oraz $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, więc $\sphericalangle DAB = \sphericalangle D'A'B'$ jako połówki kątów równych. Trójkąty ABD i $A'B'D'$ mają odpowiednio równe – bok i dwa kąty do niego przylegające, są więc przystające na mocy cechy kbk.

Przyjrzyjmy się teraz trójkątom ABC oraz $A'B'C'$.

$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ ⟵ założenia zadania
$\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ ⟵ jako odpowiednie kąty w przystających trójkątach ABD i $A'B'D'$
$|AB| = |A'B'|$ ⟵ jako odpowiednie boki w przystających trójkątach ABD i $A'B'D'$

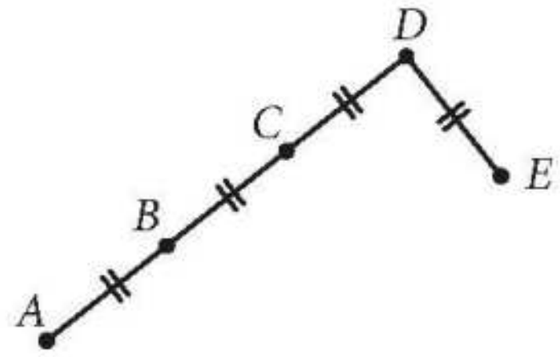
Trójkąty ABC i $A'B'C'$ mają więc odpowiednio równe – bok i dwa kąty do niego przylegające, a zatem na mocy cechy kbk są przystające.

Koniec dowodu

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Na rysunku zaznaczono odcinki tej samej długości. Wskaż liczbę par odcinków równych, których końcami są zaznaczone punkty.

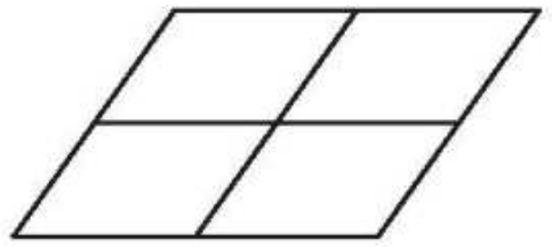


A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8

3.2. W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ poprowadzono wszystkie przekątne z wierzchołka A oraz przekątną BF. Ile par trójkątów przystających otrzymano? Rozważamy wszystkie trójkąty, w których przynajmniej jednym bokiem jest przekątna.

A. 4 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8

3.3. W równoległoboku poprowadzono odcinki łączące środki jego przeciwległych boków. Wskaż liczbę par równoległoboków przystających.



A. 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 10

3.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dwa czworokąty wypukłe są przystające, kiedy mają boki odpowiednio równe.

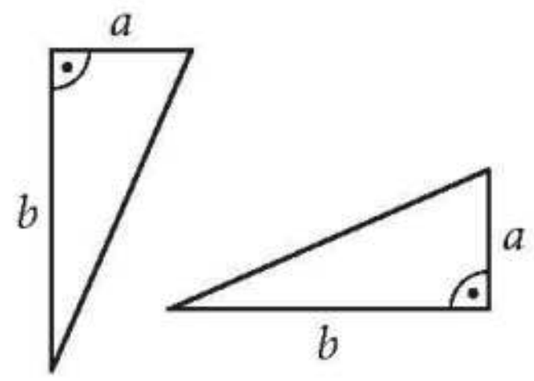
B. Dwa trójkąty są przystające, kiedy mają dwa boki i jeden kąt odpowiednio równe.

C. Dwa trójkąty prostokątne są przystające, kiedy mają odpowiednie przyprostokątne równe.

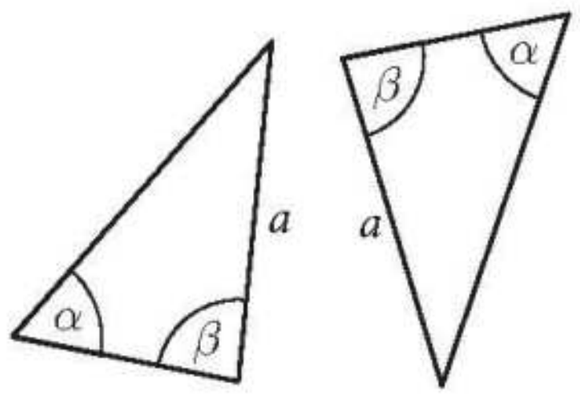
3.5. W trapezie równoramiennym poprowadzono przekątne. Wśród powstałych trójkątów wskaż trójkąty przystające.

3.6. Na których rysunkach są przedstawione trójkąty przystające?

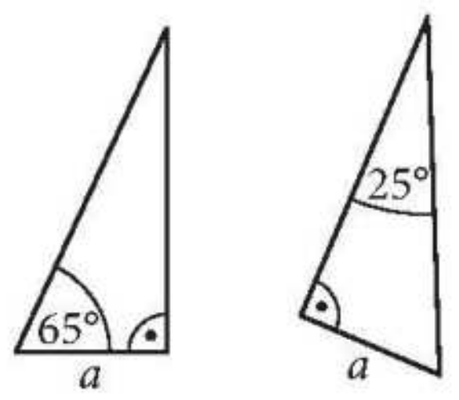
A.



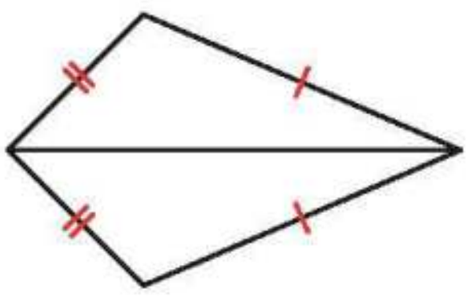
C.



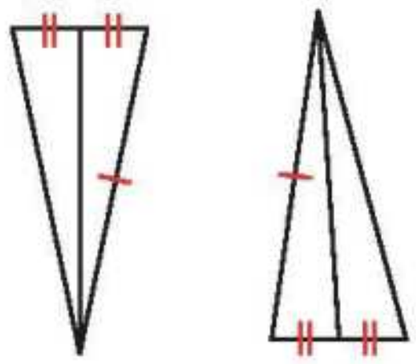
E.



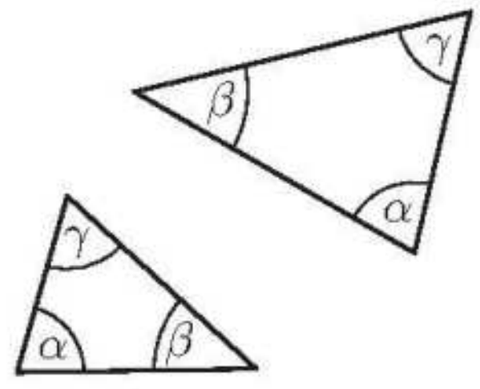
B.



D.

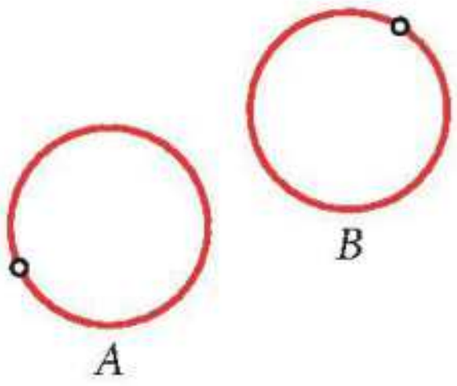


F.

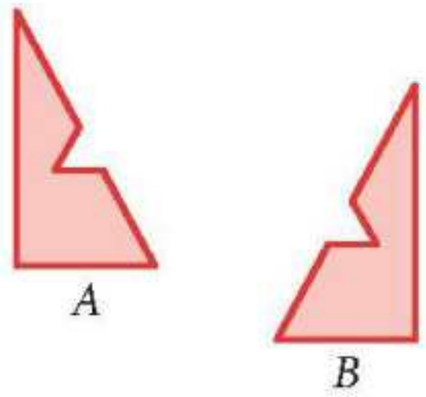


3.7. Czy figury *A* i *B* są przystające?

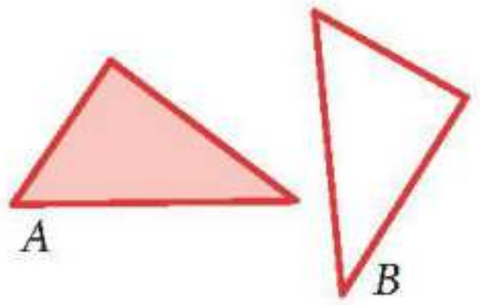
a)



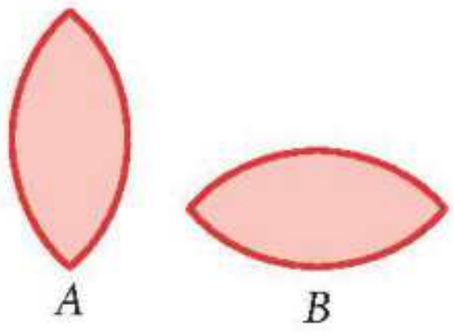
c)



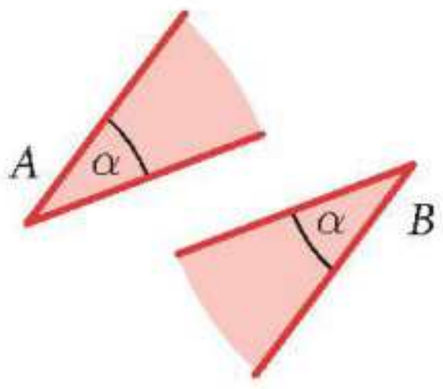
e)



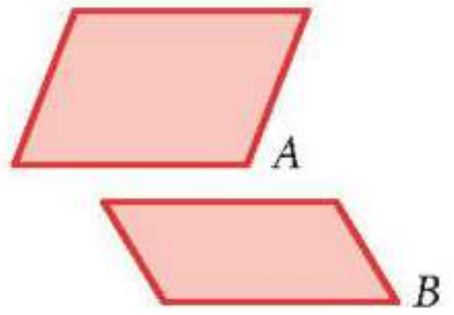
b)



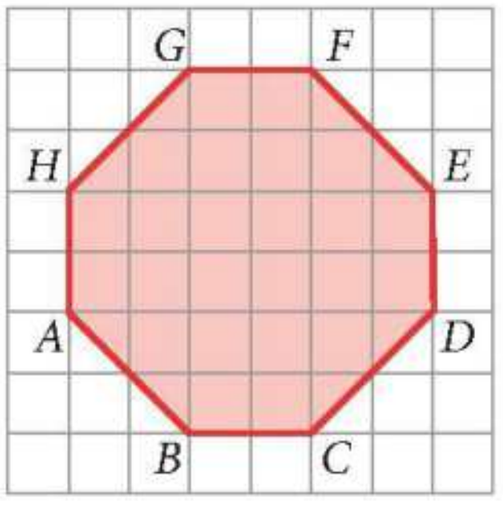
d)



f)



3.8. Które boki narysowanego obok wielokąta są równe?



3.9. Kiedy dwa prostokąty są przystające?

3.10. Czy podane figury są przystające?

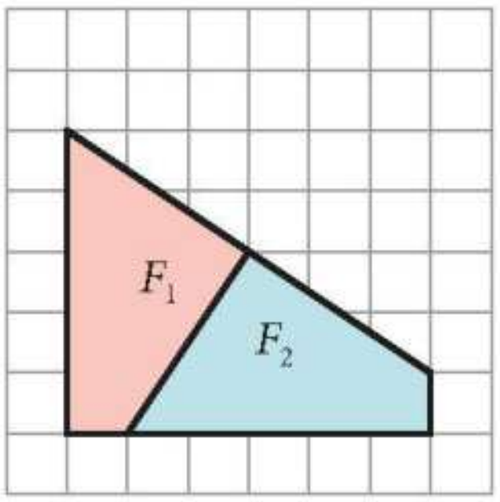
a) dwie półproste

b) dwie proste

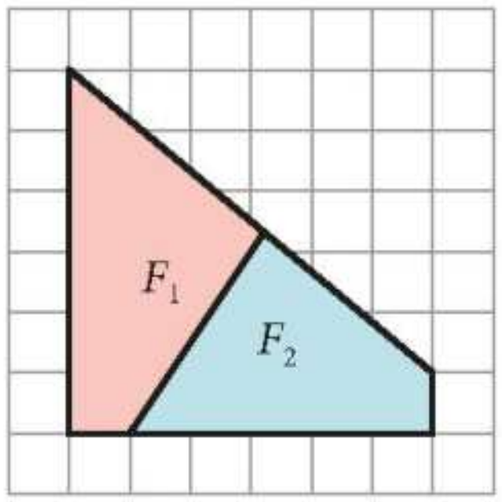
c) dwie półpłaszczyzny

3.11. Czy figury F_1 i F_2 są przystające?

a)

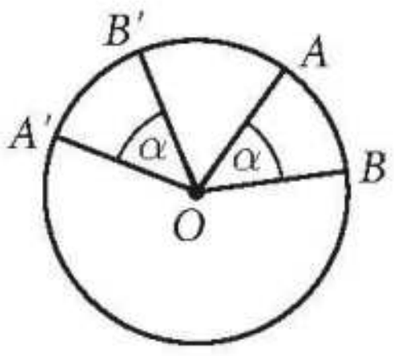


b)

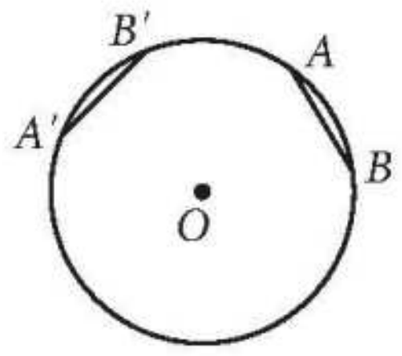


D **3.12.** Punkt O jest środkiem okręgu na rysunku 1. Wykaż, że trójkąty AOB oraz $A'OB'$ są przystające.

D **3.13.** Punkt O jest środkiem okręgu na rysunku 2. Wiemy, że $|AB| = |A'B'|$. Wykaż, że trójkąty AOB oraz $A'OB'$ są przystające.



Rys. 1.



Rys. 2.

D **3.14.** W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$, poprowadzono wysokości AD i BE. Wykaż, że trójkąty ADB i BEA są przystające.

D **3.15.** Z wierzchołka kąta rozwartego rombu poprowadzono dwie wysokości. Wykaż, że otrzymane trójkąty są przystające.

D **3.16.** W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono dwusieczne AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|AB| = |A'B'|$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ i $|AD| = |A'D'|$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

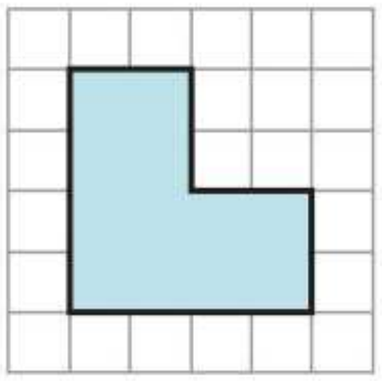
D **3.17.** W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono środkowe AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|BC| = |B'C'|$, $|AD| = |A'D'|$ i $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

D **3.18.** W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono środkowe AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|AB| = |A'B'|$, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle D'A'B'$ i $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

D **3.19.** W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$, w których $|AC| = |A'C'|$ oraz $|BC| = |B'C'|$ poprowadzono do boków BC i $B'C'$ odcinki AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|AD| = |A'D'|$ oraz $|BD| = |B'D'|$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

D **3.20.** W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono dwusieczne AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|AD| = |A'D'|$, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle A'D'C'$ i $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

* **3.21.** Podziel figurę pokazaną na rysunku obok na cztery figury przystające.



D * **3.22.** W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono środkowe AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ i $|AD| = |A'D'|$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

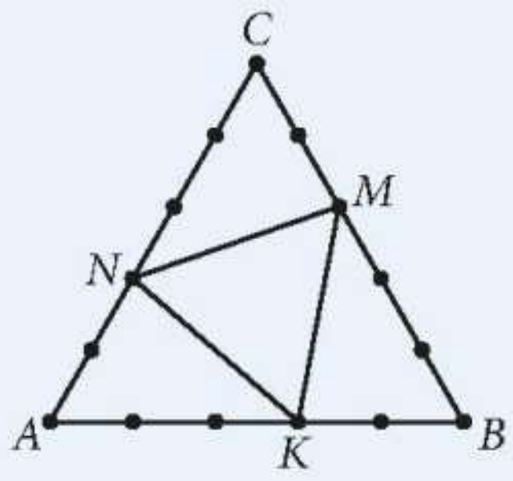
A. Dwa trapezy są przystające, kiedy mają boki odpowiednio równe.

B. Dwa sześciokąty foremne są przystające, kiedy mają równe boki.

C. Dwa pięciokąty wypukłe są przystające, kiedy mają boki odpowiednio równe.

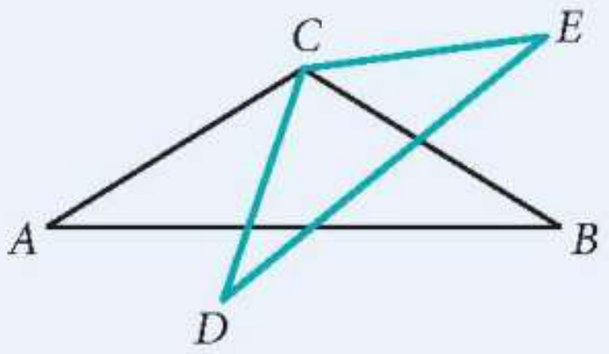
D **2.** W rombie $ABCD$ połączono wierzchołek B ze środkiem P boku AD oraz ze środkiem Q boku DC. Wykaż, że trójkąty ABP oraz BCQ są przystające.

D **3.** Każdy z boków trójkąta równobocznego ABC podzielono na 5 równych części, jak na rysunku. Wykaż, że trójkąt KMN jest równoboczny.



D **4.** W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono środkowe AD i $A'D'$. Wiadomo, że $|CD| = |C'D'|$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ oraz $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

D **5.** Trójkąty ABC i DEC są równoramienne oraz $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCE$. Wykaż, że $|AD| = |EB|$.



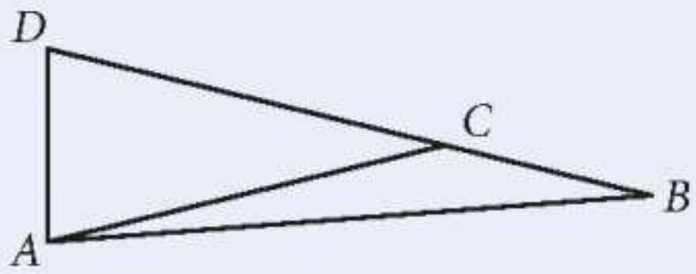
4. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–24 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

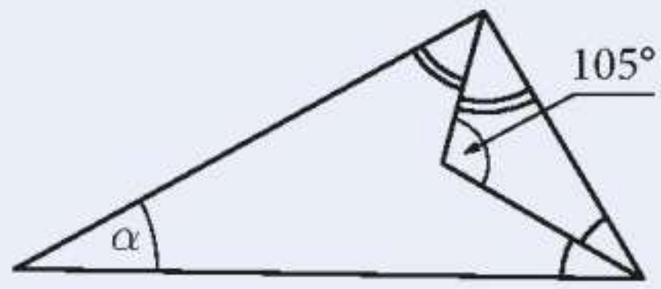
1. W trójkącie ABC kąt zewnętrzny przy wierzchołku B jest równy 150°, a stosunek miar kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych wynosi 1 : 2. Trójkąt ABC jest
A. równoramienny. **B.** równoboczny. **C.** prostokątny. **D.** rozwartokątny.

2. Porównaj kąty BDA i BAD, wiedząc, że $|AC| = |DC|$.
A. $\sphericalangle BDA > \sphericalangle BAD$
B. $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BAD$
C. $\sphericalangle BDA < \sphericalangle BAD$
D. Nie można porównać kątów BDA i BAD.



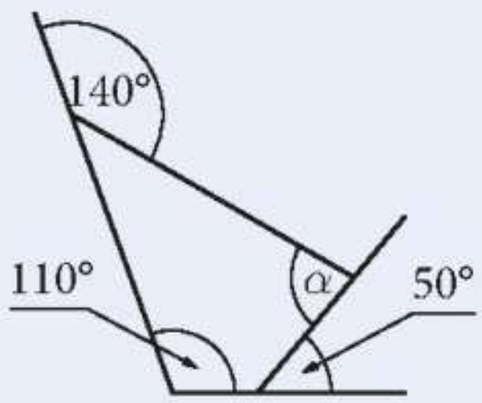
3. Wskaż miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego, który ma 9 przekątnych.
A. 60° **B.** 108° **C.** 120° **D.** 140°

4. Wskaż miarę kąta α. Skorzystaj z rysunku.
A. Jest za mało danych, żeby podać miarę kąta α.
B. 30° **C.** 45° **D.** 75°



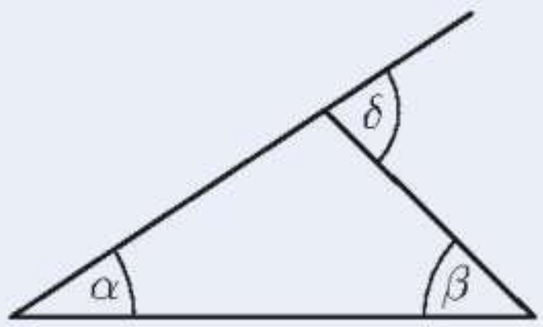
5. Kajtki leżą 70 km od Maniek. Grajki są oddalone od Maniek o 40 km. Wskaż najkrótszą z możliwych odległości między Kajtkami a Grajkami.
A. 110 km **B.** 30 km **C.** $\sqrt{70^2 + 40^2}$ km **D.** 10 km

6. Wskaż miarę kąta α. Skorzystaj z rysunku obok.
A. 70° **B.** 80° **C.** 90° **D.** 100°



7. Ile jest równy kąt wypukły utworzony przez wskazówki zegara o godzinie 10^{20}?
A. 170° **B.** 165° **C.** 150° **D.** 180°

8. Jaka zależność zachodzi między kątami δ i $\alpha + \beta$?
A. $\delta > \alpha + \beta$
B. $\delta = \alpha + \beta$
C. $\delta < \alpha + \beta$
D. Jest za mało danych, żeby porównać kąty δ i $\alpha + \beta$.

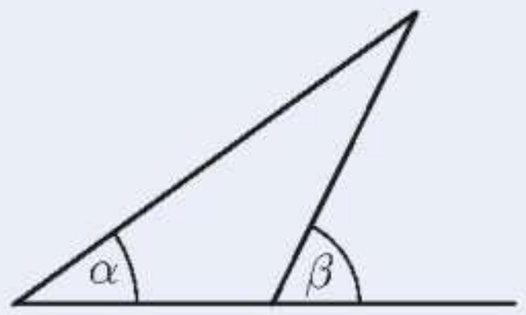


9. Kąt α jest trzy razy większy od kąta do niego przyległego. Wskaż miarę kąta α.
A. 76° **B.** 45° **C.** 135° **D.** 120°

10. W sześciokącie wypukłym jeden z kątów wewnętrznych ma 120°. Ile jest równa suma miar pozostałych pięciu kątów wewnętrznych tego sześciokąta?

A. 820°
B. 580°
C. 600°
D. Nie można tego obliczyć.

11. Porównaj miary kątów α i β zaznaczonych na rysunku.



A. $\alpha > \beta$
B. $\alpha = \beta$
C. $\alpha < \beta$
D. Jest za mało danych, żeby porównać miary tych kątów.

12. W trójkącie ABC mamy $\sphericalangle C = 70°$, a dwusieczne kątów A i B przecinają się w punkcie P. Jaką miarę ma kąt APB?

A. 130° **B.** 120° **C.** 110° **D.** 125°

13. Trzy punkty leżące na jednej prostej wyznaczają na niej

A. 2 odcinki i 6 półprostych.
B. 3 odcinki i 6 półprostych.
C. 3 odcinki i 2 półproste.
D. 3 odcinki i 9 półprostych.

14. Połowa miary kąta przyległego do kąta α jest równa 15°. Wskaż miarę kąta α.

A. 7,5° **B.** 30° **C.** 75° **D.** 150°

15. Wspólna część dwóch trójkątów nie może być

A. siedmiokątem. **B.** sześciokątem. **C.** pięciokątem. **D.** trójkątem.

16. W trójkącie ABC kąt A jest równy 32°, kąt C – 80°. Dwusieczna kąta B przecina bok CA w punkcie D. Wskaż miarę kąta BDA.

A. 110° **B.** 112° **C.** 114° **D.** 116°

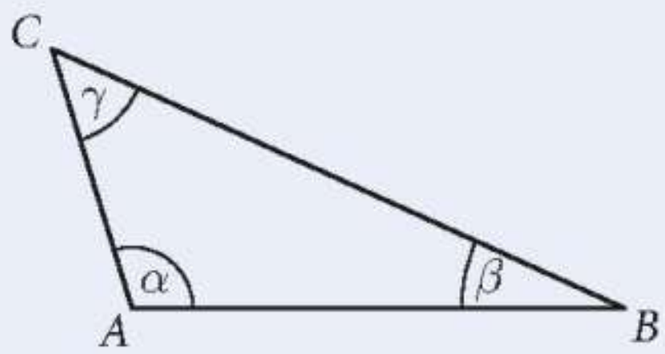
17. W trapezie $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ kąt DAB jest równy 72°. Wskaż miarę kąta DCA.

A. 72°
B. 108°
C. 126°
D. Jest za mało danych, żeby to obliczyć.

18. W trójkącie ABC punkt D leży na boku AC, punkt E – na boku BC tak, że $|DC| = |BE|$ oraz $|AD| > |CE|$. Która z wymienionych poniżej nierówności jest zawsze prawdziwa?

A. $|DC| < |DB|$ **B.** $|BC| > |AC|$ **C.** $|BC| < |CA|$ **D.** $|AB| < |AC|$

19. W trójkącie ABC prawdziwe są nierówności: $\alpha > \gamma$ i $\beta < \gamma$. Wynika stąd, że



A. $\beta > \alpha$.
B. $\beta = \alpha + \gamma$.
C. $\gamma = \alpha - \beta$.
D. $\beta < \alpha$.

20. W trójkącie ABC, w którym $|CA| = |CB|$, wybrano punkt D na ramieniu AC i punkt E na ramieniu BC tak, że $|CE| > |DC|$. Wynika stąd, że

A. $|AE| = |DE|$. **B.** $|AD| > |AB|$. **C.** $|EB| < |DA|$. **D.** $|BE| < |DC|$.

21. W czworokącie $ABCD$ dane są miary kątów: $\sphericalangle B = 90°$ i $\sphericalangle D = 100°$. Zatem

A. $\sphericalangle A < \sphericalangle C$.

B. $\sphericalangle A > \sphericalangle C$.

C. $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.

D. jest za mało danych, żeby porównać miary kątów A i C.

22. W trójkącie ABC, w którym $|CA| = |CB|$, punkt D leży na przedłużeniu podstawy AB tak, że $|AD| = |AB| + |BD|$. Wynika stąd, że

A. $|CD| > |AC|$. **B.** $|BD| > |CD|$. **C.** $|AB| > |BD|$. **D.** $|BC| > |DC|$.

23. Siedem identycznych kwadratów ustawionych jeden obok drugiego tworzy prostokąt o obwodzie 96 cm. Wskaż obwód jednego kwadratu.

A. $13\frac{5}{7}$ cm **B.** $27\frac{3}{7}$ cm **C.** 31 cm **D.** 24 cm

24. Punkt C leży na odcinku AB. Który z wymienionych warunków nigdy nie jest spełniony?

A. $|AC| > |BC|$

B. $|BC| > |AC|$

C. $|AC| + |CB| > |AB|$

D. $|BC| - |AC| > 0$

W zadaniach 25–30 oceń prawdziwość podanych zdań.

25. Trójkąt można zbudować z odcinków o długościach

A. 8, 6, 4. **B.** 11, 7, 6. **C.** 12, 17, 5.

26. W trójkącie ABC kąt A jest równy kątowi B. Punkt P jest różnym od końców punktem odcinka AB. Wynika stąd, że

A. $|AC| \geqslant |AB|$. **B.** $|AC| > |CP|$. **C.** $|AP| + |PC| \geqslant |AC|$.

27. n-kąt wypukły ma 12 przekątnych. Wynika stąd, że

A. $n = 6$. **B.** taki wielokąt nie istnieje. **C.** $n = 8$.

28. Suma miar trzech spośród czterech kątów utworzonych przez dwie przecinające się proste jest równa 310°.

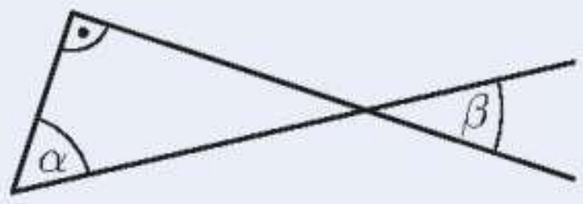
A. Kąty utworzone przez te proste mają miary 50°, 130°, 50°, 130°.

B. Kąty utworzone przez te proste mają miary 70°, 170°, 70°, 170°.

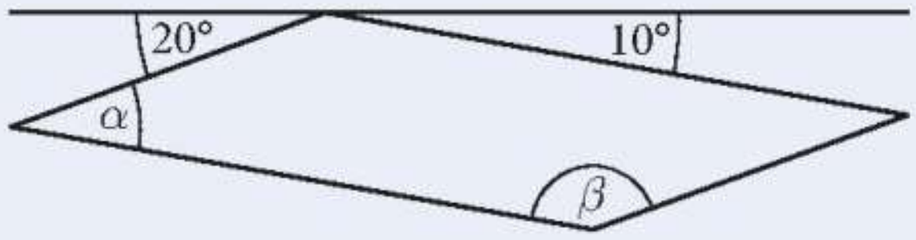
C. Nie można wyznaczyć kątów utworzonych przez te proste.

29. Na rysunku zaznaczone są kąty α i β oraz kąt prosty.

A. $\alpha + \beta < 90°$ **B.** $\alpha + \beta = 90°$ **C.** $\alpha + \beta > 90°$



30. Narysowanym czworokątem jest równoległobok.



A. $\alpha = 30°,\ \beta = 120°$

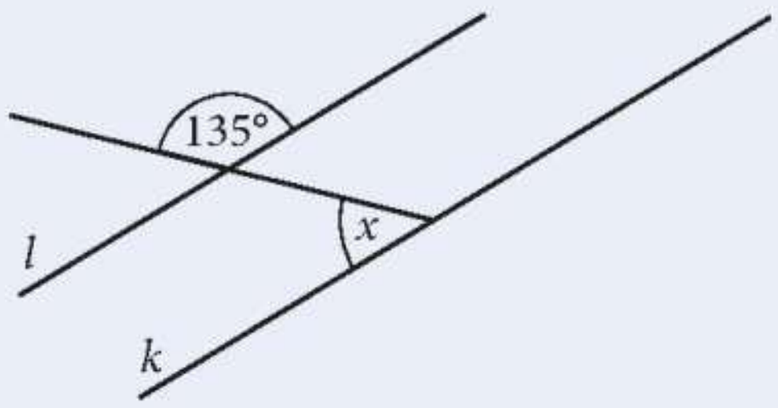
B. Nie można obliczyć miar kątów α i β.

C. $\alpha = 30°,\ \beta = 150°$

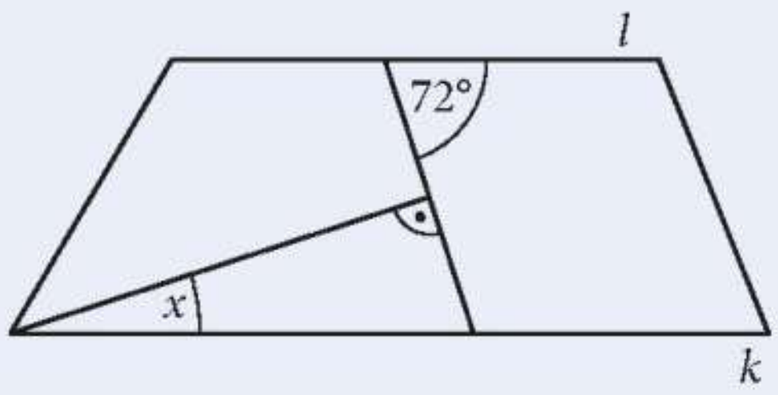
Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

31. Wyznacz miarę kąta x, wiedząc, że proste k i l są równoległe.

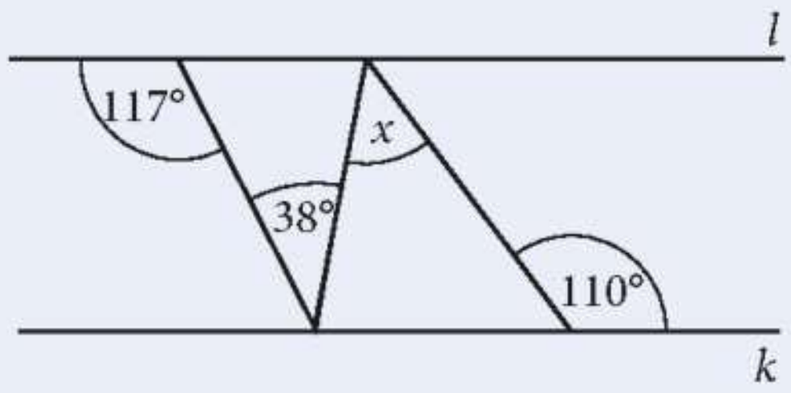
a)



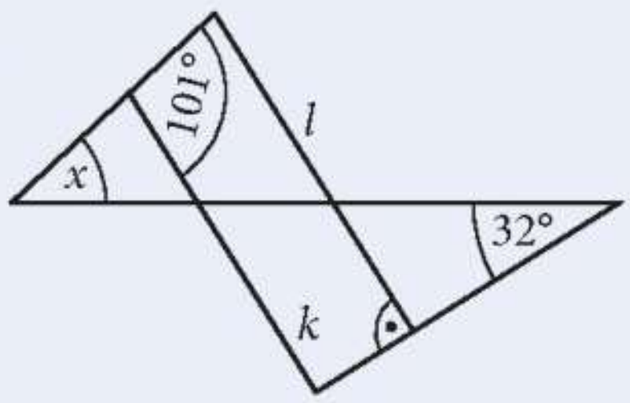
b)



c)



d)



32. Stosunek miar kątów przyległych wynosi 2 : 3. Oblicz te kąty.

33. Kąt α jest siedem razy większy od kąta do niego przyległego. Oblicz kąt α.

34. Oblicz liczbę boków wielokąta foremnego o podanym kącie wewnętrznym α.

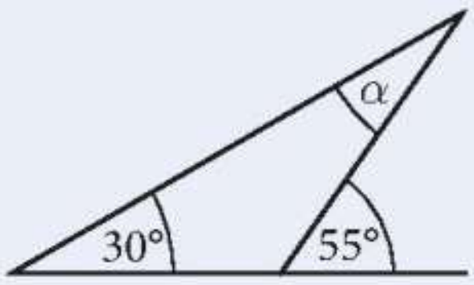
a) $\alpha = 156°$ b) $\alpha = 168°$

35. Dwa boki trójkąta są równe 2 cm i 5 cm. Ile jest takich trójkątów, w których długość trzeciego boku wyraża się również całkowitą liczbą centymetrów?

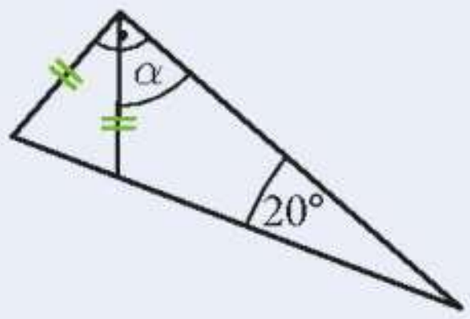
36. Sprawdź, czy z odcinków o długościach 2^{15}, 2^{16}, 2^{17} można zbudować trójkąt.

37. Wyznacz miarę kąta α.

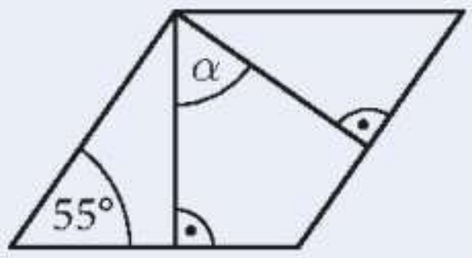
a)



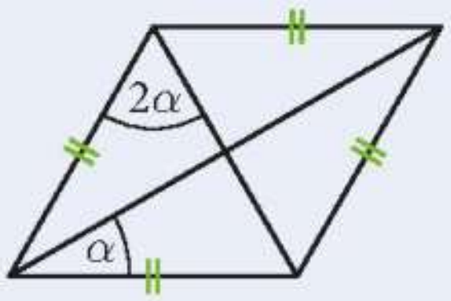
b)



c) romb



d)



Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

38. Miara jednego z kątów trójkąta jest trzy razy większa od miary drugiego, a ich suma jest o 20° mniejsza od miary trzeciego. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

39. W trójkącie równoramiennym ABC $(|AC| = |BC|)$ dwusieczna kąta B tworzy z bokiem AC kąt 75°. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

40. Jeden z kątów trójkąta ma 35°, a miary dwóch pozostałych są w stosunku 2 : 3. Wyznacz miary tych kątów.

41. Dwusieczne kątów A i B trójkąta ABC przecinają się w punkcie P. Kąt APB ma miarę 130°. Oblicz miarę kąta C trójkąta ABC.

42. Jeden z kątów zewnętrznych trójkąta ma 140°, a dwa kąty wewnętrzne nieprzyległe do niego są równe. Wyznacz miary kątów trójkąta.

43. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych jest cztery razy większy od drugiego. Wyznacz miary kątów ostrych tego trójkąta.

44. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $\sphericalangle C = 90°$, poprowadzono dwusieczną CD. Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC, jeżeli wiadomo, że $|CD| = |AC|$.

45. Oblicz miary kątów utworzonych przez dwie środkowe trójkąta równobocznego.

46. W trapezie $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ kąt przy wierzchołku D ma miarę o 50° większą od miary kąta przy wierzchołku A, a stosunek miar kątów przy wierzchołkach B i C wynosi 1 : 5. Oblicz miary kątów trapezu.

47. W wielokącie wypukłym $ABCDEF$ miary kątów są kolejno równe: 125°, 139°, 120°, 101°, 112°, 123°. Sprawdź, czy istnieje para boków równoległych tego wielokąta.

* **48.** W czworokącie wypukłym trzy boki są równe, a czwarty bok jest równy każdej z przekątnych figury. Oblicz miary kątów tego czworokąta.

D **49.** Wykaż, że kąt zewnętrzny trójkąta jest większy od każdego z kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.

D **50.** W równoległoboku $ABCD$ poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Wykaż, że dwusieczne te są prostopadłe.

D **51.** Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 7. Na bokach AB, BC, CD i DA wybrano takie punkty P, Q, R, S, że $|AP| = |BQ| = |CR| = |DS| = \sqrt{13}$. Wykaż, że czworokąt $PQRS$ jest kwadratem.

Odpowiedzi

1. Liczby

s. 13

1.1. A **1.2.** A **1.3.** C **1.4.** F, F, P, F **1.5.** a) n należy do zbioru B b) x nie należy do zbioru F c) x należy do zbioru A i nie należy do zbioru B d) y należy do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ i nie należy do zbioru $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ e) 5 należy do zbioru $\{1, 5, 10, 15\}$ f) x należy do zbioru $\{3, 6, 9, 12\}$ i y nie należy do zbioru $\{3, 9, 18\}$

1.6. a) np.: Jowisz, Wenus, Ziemia, Mars, Saturn b) np.: $\frac{3}{7}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{12}{17}$, $\frac{43}{90}$, $\frac{28}{113}$ c) np.: -5, 0, 3, 7, 8 d) np.: skrzypce, gitara, fortepian, puzon, kontrabas **1.7.** a) np.: -13, -5, 0 b) np.: $\frac{5}{4}$, $1\frac{3}{7}$, $\frac{21}{20}$ c) np.: $3\frac{1}{2}$, $-\frac{12}{5}$, $\sqrt{15}$ d) np.: 4, $6\frac{2}{3}$, 13 **1.8.** a) 6 b) 5 c) 1 d) 4 e) 126 f) 8 g) 8 h) 0 **1.9.** C i D **1.10.** B i D **1.11.** a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ b) $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ c) $C = \{-1, 1, 3\}$ d) $D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\right\}$ e) $E = \{1, 0\}$ f) $F = \{-1, 0, 1, 2\}$ g) $G = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3\}$ h) $H = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}\right\}$ **1.12.** A i D

1.16. $C \subset A$, $E \subset A$, $E \subset C$, $D \subset B$, $F \subset A$, $F \subset B$, $F \subset C$, $F \subset E$ **1.17.** a) tak b) tak c) nie

1.20. $E \subset A \subset D \subset B \subset C$ (przy założeniu, że trapez to czworokąt o przynajmniej jednej parze boków równoległych) **1.21.** cztery: $\{1, 5, 7\}$, $\{1, 5, 35\}$, $\{35, 5, 7\}$, $\{1, 35, 7\}$

1.22. a), b), c), f) – zdania prawdziwe

s. 18

2.1. a) $(x + y) \cdot (z - w)$ b) $z \cdot w - (x + y + z)$ c) $x \cdot (y + z + w)$ d) $\frac{x \cdot w}{x + y + z + w}$ **2.2.** a) $10a$ b) a^2 c) $-2x^2y^2$ d) $3a^3b^2$ **2.3.** a) $\frac{3}{4}$ b) 4, 5 c) 25 d) 0 **2.4.** a) $2x + 3$ b) $b^2 + 3a - 4b - 1$ c) $x - y + 1$ d) $x + 5y - 3xy$ e) xy f) $4xyz + 5xyz^2$ g) x^2yz^2 **2.5.** a) $10x^2 + 6x - 6$ b) $5ab + a - 2b + 3$ c) $m^2 + n^2 + 1$ d) $5x^2 - 2px - p^2$ **2.6.** a) $6x - 15y$ b) $-2x^2 - 6xy$ c) $2x^2 - 5x - 25$ d) $6x^2 - 5xy - 21y^2$ e) $-3x^2 + 9x - 2$ f) $4x^2 + 3x - 4$ g) $-6x + 1$ h) $9x^2 - 14x + 11$ **2.7.** a) $7x^3 - 7x^2 + 8x - 6$ b) $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 3x + 4$ c) $-6x^3 + 7x^2 + 3x - 1$ d) $21x^4 + 20x^3 - 5x^2 + 4$ e) $-2x^4 - x^3 + 12x^2 + x - 10$ f) $-6x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 6x^2 + x - 3$ **2.8.** a) $x^2 - 2xy$ b) $3x^2 + 4xy^2$ c) $x^2 - xy$ d) $3x^2 + y^2$ **2.9.** a) $x^5 - x^4y + x^2y - xy^2 + xy^4 - y^5$ b) $15x^4y - 3x^2y^2 + 30x^2y^3 - 6y^4$ c) $x^4 + 12x^2y^2 - 3x^3y - 15xy^3 + 35y^4$ d) $3x^3 + 7x^2y - xy^2 - y^3$ e) $x^4 + 3x^3y - x^2y^2 - 2xy^3 + y^4$ f) $6x^4 - 11x^3y + 3x^2y^2$ **2.10.** a) 43 b) 3 c) 29 d) -33

2.11. $(2{,}5b + 3p)$ zł **2.12.** $\frac{3kx}{2}$ **2.13.** $17m$ **2.14.** $10 - (xn + ym)$ **2.15.** $(m + 2)k + p$

2.16. $12km - 200k$ **2.17.** $\frac{a + 2b + 5c}{100}$ **2.18.** $\frac{bnk}{100}$ zł **2.19.** $\frac{5}{12}p^2$ **2.20.** $\frac{7mp}{15\,000} + \frac{7kt}{5000}$

s. 26

3.1. C **3.2.** D **3.3.** D **3.4.** a) $4(4p-3)$ b) $2p(2p-5r)$ c) $15\left(m^2-5n\right)$
d) $8(4m+3n-20)$ **3.5.** a) $2a\left(5ab-7b^2\right)$ b) $6ab\left(12a^2b+3ab\right)$ c) $abc(90ab+30b)$
d) $45\left(4p^2q^2-2pqr+3\right)$ **3.6.** a) $2ab(c-3d+7cd)$ b) $-5x^2y(1-4xy)$ c) $mkp(6k-6p+mkp)$
d) $\frac{1}{4}u(2t+w-4tw)$ e) $x^2\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{7}{8}x+\frac{1}{5}\right)$ f) $\frac{1}{2}x^3\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}\right)$
3.7. a) $-2\left(5a^3b-7a^2b^2+6ab^3\right)$ b) $-2\left(-am+2bm+1\frac{1}{2}cm\right)$ c) $-2\left(-0{,}1pq-0{,}5p^2q^2+0{,}25\right)$
d) $-2\left(\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{14}n^2+\frac{4}{5}\right)$ **3.8.** a) $\frac{1}{2}\left(20x^2-16x+6\right)$ b) $\frac{1}{2}\left(-8x^3+6x^2-4\right)$
c) $\frac{1}{2}\left(18x^4-2x^2-10\right)$ d) $\frac{1}{2}\left(-3x^5-22x^3+14\right)$ **3.9.** a) $\frac{1}{5}\left(x^5-3xy^2+11y^3-26\right)$
b) $\frac{1}{4}\left(5x^4+11x^3-30x-8\right)$ c) $\frac{1}{9}\left(-20xy+15xyz+30x^2y^2z^2+22\right)$
d) $\frac{1}{4}\left(10x^7-13x^5+7x^3+8x-4\right)$ **3.10.** a) $9c^2+12c+4$ b) $100-80b+16b^2$ c) $4f^2+4fg+g^2$
d) $49-28z+4z^2$ e) $\frac{1}{4}z^2+z\sqrt{3}+3$ f) $25k^2-40km+16m^2$ g) $25+60w+36w^2$
h) $2a^2-2\sqrt{10}ab+5b^2$ **3.11.** np. $49^2=(50-1)^2=2500-100+1=2401$ **3.12.** a) x^2-15
b) $7x^2-44\frac{1}{2}$ c) $-4x+10$ d) -2 **3.13.** a) $2x^2+16y^2$ b) $ab-5b^2$ c) 3 d) $8x-8$ **3.14.** 54
3.15. a) $4xy$, 16 b) $20xy+41$, -99 **3.16.** a) $(7+3k)(7-3k)$ b) $\left(1\frac{1}{2}x+1\frac{1}{3}y\right)\left(1\frac{1}{2}x-1\frac{1}{3}y\right)$
c) $(5w+z)(5w-z)$ d) $\left(5-x\sqrt{2}\right)\left(5+x\sqrt{2}\right)$ e) $\left(\sqrt{5}p+2q\right)\left(\sqrt{5}p-2q\right)$ f) $\left(\sqrt{13}-y\right)\left(\sqrt{13}+y\right)$
g) $x^2\left(\frac{1}{3}y-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}y+\frac{2}{5}\right)$ h) $\left(x^2+\frac{5}{7}\right)\left(x-\frac{\sqrt{35}}{7}\right)\left(x+\frac{\sqrt{35}}{7}\right)$ **3.17.** a) $(2a+3)^2$ b) $(4-y)^2$
c) $\left(\sqrt{5}m-2\right)^2$ d) $\left(z^2+3\right)^2$ e) $\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)^2$ f) $\left(\frac{\sqrt{3}}{7}x+\frac{1}{2}\right)^2$ **3.18.** a) 1 b) $12yz$ c) $4y^2$
d) $6p\sqrt{2}$ e) $9x^4$ f) $2\sqrt{15}x^2y$ **3.19.** a) $3(x-2)^2$ b) $2(x+y)^2$ c) $\frac{1}{2}(3x+2)^2$ d) $3(2x-3y)^2$
e) $2p(3p+4q)^2$ f) $3\left(2k^2-5m\right)^2$ **3.20.** a) $(a+b+1)(a-b-3)$ b) $(1+a-2b)(1-a+2b)$
c) $(a-2b+3)(a-2b-3)$ d) $(9+c+3d)(9-c-3d)$ e) $(9-x-y)(9+x+y)$
f) $(8-4x+y)(8+4x-y)$
3.21. a) $(x-7)(2y+3)^2$ b) $(x+1)(2z+1)^2$ c) $(x-2)(1-5x)^2$ d) $(x+1)\left(x^2+4\right)(x+2)(x-2)$
3.22. a) $(2x-3y+1)(2x+3y+5)$ b) $(5x-7y-3)(5x+7y+1)$ c) $4(2x-y-1)(2x+y-2)$
d) $(2x-y-5)(2x+y-5)$ **3.23.** a) $(x+1)(x-3)$ b) $(y+1)(y-5)$ c) $\left(z+\sqrt{2}x\right)\left(z-\sqrt{2}x\right)$
d) $(3+w)(1-w)$ **3.24.** *Wskazówka*: Zauważ, że suma pól figur narysowanych w kwadracie jest równa polu kwadratu. **3.25.** Wartość wyrażenia jest równa $1\frac{1}{2}$. **3.26.** a) $(x+2y+3z)^2$
b) $(k-m-p)^2$ c) $\left(2t-u+\frac{1}{2}z\right)^2$ d) $\left(\sqrt{2}a+\sqrt{3}b-2c\right)^2$ **3.27.** 7. *Wskazówka*: Zauważ, że jeśli $x+y=27$, to $(x+y)^2=27^2$. **3.28.** 240
3.29. $1800\cdot 2202=(2001-201)(2001+201)=2001^2-201^2$ **3.30.** *Wskazówka*:
$1\,012\,202=1\,000\,000+2000+1+10\,000+200+1$ **3.31.** *Wskazówka*:

$$1\underbrace{000\ldots0}_{100\text{ cyfr}}4\underbrace{000\ldots0}_{100\text{ cyfr}}4=1\underbrace{000\ldots0}_{202\text{ cyfry}}+4\underbrace{000\ldots0}_{101\text{ cyfr}}+4=\left(1\underbrace{000\ldots0}_{101\text{ cyfr}}\right)^2+2\cdot1\underbrace{000\ldots0}_{101\text{ cyfr}}\cdot2+2^2$$

s. 30

1. P, F, F **2.** $10 - 4x$, $-3\sqrt{2}$ **3.** $-64x + 30$, -14 **4.** $4y(1 - x)$, 0

s. 36

4.1. B **4.2.** A **4.3.** C **4.4.** F, P, F **4.5.** $39 = 3 \cdot 13$, $94 = 2 \cdot 47$, $108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, $510 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$, $1156 = 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 17$, $3420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$, $4830 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23$, $8550 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 19$ **4.6.** *Wskazówka*: Zauważ, że każda z podanych liczb jest nieparzysta, a zatem jednym ze składników takiej sumy musi być liczba 2. **4.7.** a) 1, 2, 7, 14 b) 1, 2, 11, 22 c) 1, 3, 7, 21 d) 1, 5 **4.8.** a) 18 b) 99 c) 6 d) 38 **4.9.** a) 84 b) 78 c) 65 d) 90 **4.10.** a) 2 lub 5, lub 8 b) 5 c) 5 d) 1 lub 7 **4.11.** a) 8 b) 5 c) 5 d) 2 lub 8 e) 8 f) 5 **4.12.** 1, 2, 3, 6 **4.13.** -9, -3, -1, 3, 9 **4.14.** -10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10 **4.15.** -5, -4, -1. *Wskazówka*: Zapisz szukaną liczbę kolejno w postaci: $\frac{a+1}{a+3} = \frac{a+3-3+1}{a+3} = \frac{(a+3)-2}{a+3} = 1 - \frac{2}{a+3}$. **4.16.** -1, 1, 3, 5. *Wskazówka*: Zobacz wskazówkę do zadania 4.15. **4.17.** 12, 14, 16, 18 **4.20.** 90 **4.22.** po 60 dniach **4.23.** a) {1, 3, 7, 11, 15, 17} b) Taki zbiór nie istnieje. c) {0, 4, 6, 8, 10, 12} d) {1, 3, 5, 11, 13, 15} **4.24.** 12 **4.25.** $a = 5$, $b = 2$ **4.26.** 2, 6, 10, 30 **4.27.** Można, np. 8 i 9. **4.28.** 9 i 28, 9 i 56, 15 i 28, 15 i 56, 27 i 28, 27 i 56, 28 i 33, 28 i 39, 28 i 51, 33 i 56, 39 i 56, 51 i 56 **4.29.** *Wskazówka*: Przyjmij, że $a = 2n + 1$, $b = 2n - 1$, d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b (d musi być liczbą nieparzystą) i skorzystaj z zadania 4.21 b.

s. 39

1. P, F, P **2.** 10 i 13, 10 i 21, 10 i 33, 10 i 39, 13 i 21, 13 i 25, 13 i 33, 21 i 25, 21 i 26, 25 i 26, 25 i 33, 25 i 39, 26 i 33 **3.** 2 lub 8 **4.** 13 i 65. *Wskazówka*: Zapisz szukane liczby w postaci $13p$ i $13m$, wiedząc, że p i m są względnie pierwsze, a następnie rozważ ich sumę.

s. 47

5.1. C **5.2.** B **5.3.** B **5.4.** F, F, P **5.5.** a) $\frac{1}{3}, \frac{13}{15}, \frac{11}{13}, \frac{8}{7}, \frac{7}{9}, \frac{7}{15}$ b) $-\frac{25}{9}, -\frac{71}{9}, \frac{19}{15}, \frac{104}{33}$ c) $\frac{168}{55}, -\frac{86}{37}, \frac{593}{74}, \frac{551}{550}$ **5.6.** $\frac{13}{15}, \frac{17}{20}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{11}{30}$ **5.7.** a) $\frac{2}{9}$; $\frac{4}{11}$; $\frac{21}{33}$; 1,0(15); 1,(75) b) $\frac{7}{33}$; $\frac{34}{33}$; 1,(33); $\frac{13}{9}$; 1,(90) **5.8.** a) $\frac{10}{21}$ b) 1 c) $\frac{1}{3}$ d) 2 **5.9.** a) 1,(5) b) 1,(83) c) 3,36(3) d) 2,(03) e) 0,2(8) f) 42 **5.10.** a) $x > y$ b) $x = y$ c) $x < y$ d) $x > y$ e) $x < y$ f) $x > y$ **5.11.** a) $-\frac{17}{42}$ b) $7\frac{1}{3}$ c) $\frac{7}{89}$ d) 2,16 e) 0 f) $\frac{1}{6}$ **5.12.** nie **5.15.** a) < b) < c) = d) > **5.16.** a) 2, 6 b) 4, 5 c) 9, 0 **5.17.** a) $\frac{5}{14}$ b) $\frac{51}{22}$ c) $-1\frac{7}{34}$ d) 0,235 **5.18.** a) 2,67; 2,7 b) $\frac{15}{34}, \frac{14+\sqrt{2}}{34}$ c) $\frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ d) $\frac{5}{33}, \frac{1}{6}$ **5.19.** 617 **5.21.** Wszystkie liczby są niewymierne.

5.22. 0,151515..., $\sqrt{4}$, $-\sqrt[3]{64}$, 0,0(3), $1\frac{5}{12}$, –0,0023131313... **5.23.** $\sqrt{3}$, $\sqrt{39}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{7}$, $5\sqrt{18}$, $\left(7\sqrt{7}-7\right)$ **5.24.** $-\sqrt{10}, -\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{15}$ **5.25.** $\left(\sqrt{8}+2\right)$, $\sqrt{17}$, $\frac{\sqrt{20}}{3}$, $\left(1-\sqrt{5}\right)$, $-\sqrt{121}$ **5.26.** a) < b) = c) > **5.27.** a) np. $\sqrt{2}$ b) np. 0,401001000100001... c) np. $-2+\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) np. $\sqrt{5}$ **5.28.** a) np. 0,2 b) np. –1,5 c) np. 2,5 d) np. 3 **5.29.** a) $\frac{\sqrt{26}}{2}, \frac{\sqrt{27}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{45}}{2}, \frac{\sqrt{46}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{55}}{2}, -\frac{\sqrt{53}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{33}}{2}, \frac{\sqrt{35}}{2}$ **5.30.** 709,22 CAD, 315,79 PLN, 22,61 PLN **5.31.** C **5.32.** np. dla $\frac{7}{16}$: 0,4; 0,44; 0,438; dla $\sqrt{17}$: 4,1; 4,12; 4,123 **5.33.** 47 cm **5.34.** 133 m^2

s. 51

1. F, P, P **2.** a) $\frac{25}{63}$ b) 0 **3.** 0,30 euro **4.** 124,95 zł **5.** a) np. 0,051 b) np. 0,05(1) c) np. 0,05101101110...

s. 56

6.1. a) 62,07 b) 4501,33 c) 3223,42 d) 14 **6.2.** a) 3,76 b) –130,67 c) 69,21 d) 37 **6.3.** a) 1 b) 3 c) 2 d) 4 **6.4.** a) –7 b) 5 c) 7 d) 5 **6.5.** a) 10 b) 20 c) 2 d) 30 **6.6.** a) 1, 1, 1, –1 b) 1, 4, –8, 32, 8, 64, 16 c) $\frac{4}{25}, -\frac{2}{3}, \frac{27}{8}$ d) 0,01; 0,008; 0,16; 0,05 **6.7.** a) 2^5 b) 2^6 c) 3^5 d) $\left(\frac{1}{3}\right)^9$ e) $(-2)^9$ f) 10^6 g) $(-10)^9$ h) $0{,}2^{10}$ **6.8.** a) $6^3, 2^6\cdot 3^2, 3^5, 2^3\cdot 7^2, 5^3$ b) $\left(\frac{5}{3}\right)^2, \left(-\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{5}{2}\right)^2, \left(-\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{3}{2}\right)^4$ **6.9.** a) $\frac{5}{4}$ b) 40 c) $\frac{9}{13}$ d) $\frac{1}{2}$ **6.10.** a) $2^{\left(3^4\right)}$ b) Są równe. c) 10^{100} d) 3^{20} **6.11.** a) $1{,}4435\cdot 10^8$ b) $5{,}4\cdot 10^{-3}$ c) $2{,}031\cdot 10^4$ d) $3{,}214\cdot 10^6$ **6.12.** a) $1{,}4\cdot 10^{25}$ b) $1{,}2\cdot 10^7$ c) $3{,}35\cdot 10^{10}$ d) $1{,}56\cdot 10^2$ e) $-7{,}378\cdot 10^{-3}$ f) $3{,}2\cdot 10^{-11}$ **6.13.** a) $3\cdot 10^8$ m/s b) $1{,}66\cdot 10^{-27}$ kg c) $6{,}25\cdot 10^{-4}$ cm d) $8\cdot 10^{-2}$ cm e) $1{,}35\cdot 10^{18}$ t f) $7{,}349\cdot 10^{22}$ kg **6.14.** a) $1{,}3\cdot 10^{10}$ b) $1{,}05\cdot 10^8$ c) $7\cdot 10^{-7}$ d) $1{,}9\cdot 10^{-4}$ e) $2{,}8\cdot 10^{-4}$ f) $3{,}2\cdot 10^{-5}$ **6.15.** $3\cdot 10^{12}$ min, $6\cdot 10^6$ lat

s. 62

7.1. C **7.2.** C **7.3.** a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{8}$, 7, 5, –3, $-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}$ b) $2\frac{1}{4}, 2\frac{10}{27}, 2\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{3}{7}, \frac{81}{256}$, 1, $\frac{25}{36}$ c) 0,01; 6,25; 20; –125; 16; –8; 0,16; 1 d) $\frac{5}{6}, \frac{49}{9}, -\frac{8}{27}$, 1, $\frac{7}{5}, -\frac{1}{27}$, 16, $-\frac{2}{7}$ **7.4.** a) 10,240; 4,096; 0,026; 7,840; 0,343; 92,352 b) 2,310; 0,001; 9,860; 27,040; 49,140; 0,013 **7.5.** 15 **7.6.** a) 3^2 b) 53^{-1} c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ d) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ **7.7.** a) $(-2)^5, 3^{-3}, 15^0, 2^3, 3^2$ b) $(-5)^3, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}, \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{15}\right)^{-1}$ **7.8.** a) 3, $\frac{1}{5}$, 2, 2 b) $\frac{1}{6}, \frac{2}{75}$, 10 **7.9.** a) 8 b) 9 c) 16 d) 8 e) 1 f) 1 **7.10.** a) 25 b) 8 c) $\frac{1}{16}$ d) $-\frac{3}{4}$ e) 1 f) $\frac{1}{27}$ g) $1\frac{24}{25}$ h) $5\frac{4}{9}$ **7.11.** a) 64 b) 1 c) 9 d) $\frac{1}{16}$ e) –10 f) 25 g) $-\frac{1}{16}$ h) $1\frac{2}{5}$ **7.12.** a) 1 b) 0 c) 3 d) 9 **7.13.** a) 27 b) $\frac{1}{3}$ **7.14.** a) 4 b) 16 c) –8 d) –2

7.16. $15^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-11} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-12} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-13} \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^{-14} + 7 \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^{-11} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-10} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{5} =$
$= \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-11} \cdot 4^{-12} \cdot 3^{-13} \cdot 5^{-14}}{3^{-11} \cdot 5^{-12} \cdot 4^{-13} \cdot 2^{-14}} + \frac{7 \cdot 7^{-11}}{3^{-11} \cdot 7^{-10} \cdot 3^{10}} = 2^3 \cdot 4 + 3 = 35$ **7.17.** $\frac{13}{18}$. *Wskazówka:*
$\frac{5 \cdot 4^{-15} \cdot 9^{-9} - 4 \cdot 3^{-20} \cdot 8^{-9}}{3 \cdot 2^{-9} \cdot 6^{-19} - 2^{-29} \cdot 27^{-6}} = \frac{5 \cdot 2^{-30} \cdot 3^{-18} - 4 \cdot 3^{-20} \cdot 2^{-27}}{3 \cdot 2^{-9} \cdot 2^{-19} \cdot 3^{-19} - 2^{-29} \cdot 3^{-18}} = \frac{2^{-30} \cdot 3^{-20}\left(5 \cdot 3^2 - 4 \cdot 2^3\right)}{2^{-30} \cdot 3^{-20}\left(2^2 \cdot 3^2 - 2^1 \cdot 3^2\right)}$ **7.18.** $\frac{101}{200}$

s. 64

1. P, F, P **2.** $1\frac{1}{2}$ **3.** $0{,}4^{-1}, 0{,}5^{-3}, 0{,}25^{-2}, (-0{,}1)^{-4}$ **4.** $-a^2$, -4, $a \neq 0$

s. 67

8.1. 11; 18; 0,04; 1,9; $2\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{5}$; $1\frac{4}{5}$ **8.2.** $\frac{3}{4}$, 5, 0,2, −3, 12, −9, 15 **8.3.** a) $1 - \sqrt{125}, 3 - \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{100}, 2\sqrt{35}$ b) $1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, \sqrt{2} + \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \sqrt{27}$ c) $3\sqrt{2} - 4, 2\sqrt{3} - 2, \sqrt{13}, 2\sqrt{7}, 5 + \sqrt{3}$
8.4. a) 8 b) 21 c) 18 d) 8 e) 12 f) 18 g) 6 h) 10 i) 6 **8.5.** a) 12, 18, 21 b) 6, 18, 16 c) 30, 20, 18 d) 24, 12, 30 **8.6.** a) 5 b) 4 c) 11 d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{5}{6}$ f) $1\frac{1}{11}$ g) $\frac{2}{3}$ h) 3 i) $\frac{2}{7}$
8.7. a) −2 b) 12 c) 12 d) −8 **8.8.** a) $4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 4\sqrt{2}, 3\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}$ b) $8\sqrt{2}, 7\sqrt{6}, 9\sqrt{6}, 9\sqrt{5}, 8\sqrt{5}$ c) $2\sqrt[3]{5}, 2\sqrt[3]{7}, 3\sqrt[3]{3}, 3\sqrt[3]{5}, 3\sqrt[3]{10}, 4\sqrt[3]{7}$ d) $2\sqrt[3]{3}, -2\sqrt[3]{2}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{5}, -\frac{5}{6}\sqrt[3]{2}$
8.9. a) 1 b) 1 c) $2 + \sqrt{2}$ d) 5 **8.10.** a) 6 b) 0 c) 6 d) 4 e) 2 f) 1 **8.11.** a) 2 b) 16 c) −5 d) 1 e) −22 f) 0

s. 73

9.1. C **9.2.** C **9.3.** A **9.4.** a) $-2, \frac{1}{3}, 2$ b) $\frac{1}{2}, 5, -\frac{3}{4}$ c) $2, \frac{2}{3}, 0{,}2$ d) $\frac{1}{2}, 0{,}3, \frac{2}{5}$
9.5. a) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}, \sqrt[8]{256}, \sqrt[6]{729}, \sqrt[4]{625}, \sqrt[3]{216}$ b) $\sqrt[3]{-216}, \sqrt[4]{0{,}0081}, \sqrt[3]{1\frac{91}{125}}, \sqrt[4]{5\frac{1}{16}}, \sqrt[5]{243}$ **9.6.** a) $3\sqrt[4]{2}$, $-2\sqrt[5]{5}$, $0{,}2\sqrt[4]{3}$ b) $-\frac{3}{2\sqrt[5]{8}}, 3\sqrt[4]{5}, 2\sqrt[5]{6}$ c) $-6\sqrt[3]{3}, 3\sqrt[5]{2}, 2\sqrt[7]{4}$ **9.7.** a) 5 b) 2 c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{5}{3}$
9.8. a) −2 b) 1 c) 9 d) 2 e) −1 f) 3 g) 72 h) $\frac{1}{2}$ **9.9.** a) $5\sqrt[3]{5}$ b) 7 c) 36 d) 99
9.10. a) $2\sqrt[8]{8}$ b) 5 c) 9 d) 21 **9.11.** a) 3 b) 5 c) 4 d) 3 **9.12.** a) ab^2 b) 1
9.13. a) $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ b) $5\sqrt[3]{9}$ c) $7\sqrt{2}$ d) $\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$ e) $5\sqrt{5} - 1$ f) $5 + \sqrt{6}$ **9.14.** a) $\sqrt{7} + 2$ b) $3\sqrt{3} + 4$ c) $\sqrt{35} + 7$ d) $2\sqrt{3} - 1$ e) $3 + 2\sqrt{2}$ f) $4 + \sqrt{5}$ **9.15.** a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) 0 c) −3 d) 2
9.16. a) $a = 81$ b) $b = \sqrt[6]{5}$ lub $b = -\sqrt[6]{5}$ c) $a = 4096$ d) $c = \sqrt[8]{7}$ lub $c = -\sqrt[8]{7}$ **9.18.** $\frac{40}{a}$
9.19. a) $\frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$. *Wskazówka:* $\frac{1}{(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}} \cdot \frac{(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2})^2 - 3}$ b) $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$

s. 75

1. P, P, F **2.** tak **3.** $a = 1024$ **4.** 1

s. 81

10.1. A **10.2.** B **10.3.** C **10.4.** a) 2, 8, 32 b) 2, 4, 16 c) 3, 9, 81 d) 3, 27, $\frac{1}{9}$

e) 2, $\frac{9}{5}$, $\frac{81}{16}$ f) $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{64}{27}$ **10.5.** a) 5, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{5}$ b) 2, $\frac{7}{5}$, 2, $\frac{6}{5}$ c) $\frac{8}{27}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{11}{4}$ d) $\frac{16}{25}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{9}{25}$, $\frac{8}{125}$

e) $\frac{10}{7}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{100}{9}$ f) 0,008, 100 000, 2 **10.6.** a) $7^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{3}}$, $3^{\frac{3}{5}}$, $5^{\frac{1}{4}}$, $7^{-\frac{5}{3}}$ b) $5^{1\frac{1}{2}}$, $3^{2\frac{1}{2}}$, $2^{1\frac{1}{3}}$, $7^{1\frac{3}{4}}$, $9^{1\frac{2}{3}}$

c) $3^{1\frac{1}{4}}$, $3^{\frac{3}{4}}$, $2^{\frac{4}{9}}$, $2^{\frac{7}{8}}$ d) $2^{4\frac{1}{2}}$, $3^{4\frac{2}{3}}$, $3^{2\frac{1}{2}}$, $2^{3\frac{1}{3}}$, $2^{2\frac{1}{3}}$ **10.7.** a) 2^1 b) 2^0 c) 2^{-2} d) 2^0 e) 2^0 f) 2^2

10.8. a) $3^{0,3}$ b) $3^{-3\frac{1}{3}}$ c) 3 d) 5. *Wskazówka*: Przekształć mianownik do postaci

$2^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{4}}\right)\left(2^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}}\right)$, a w liczniku wykonaj następujące przekształcenia

$$2^{\frac{5}{4}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} - 2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{5}{4}} = \left(2^{\frac{5}{4}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{4}}\right) - \left(2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{5}{4}}\right) = 2^{\frac{1}{4}}\left(2^{\frac{4}{4}} + 3\right) - 3^{\frac{1}{4}}\left(2 + 3^{\frac{4}{4}}\right).$$

10.9. a) 1 b) $\frac{1}{5}$ c) 25 d) 8 **10.10.** $3^{\frac{2}{5}}$ **10.11.** a) $a^{\frac{1}{6}}$ b) a^3 c) $(ab)^{\frac{1}{2}}$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^5$

10.12. a) ab^2 b) $a^{1\frac{1}{2}}$ c) $a - b$ d) $2a^2$ **10.16.** a) Nie. *Wskazówka*: Rozważ iloraz potęg a^3 i a^2.

b) Tak, np. $\left(\sqrt{2}\right)^{2n} = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^n = 2^n \in \mathbf{Q}$ dla $n \in \mathbf{N}$.

s. 83

1. F, F, P **2.** a) 90 b) 3 **3.** 4 **4.** $a^{\frac{1}{30}}$

s. 91

11.1. D **11.2.** D **11.3.** B **11.4.** P, F, P **11.5.** a) 2, 3, 4, 6, 10, 3 b) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$, -1, -3

c) $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$, -2, $-1\frac{1}{2}$ d) 10, -4, 9, $2\frac{2}{3}$, $\frac{8}{13}$, $-\frac{2}{3}$ e) 2, $\frac{1}{2}$, 3, 3, $-\frac{1}{4}$, 2 **11.6.** a) 9 b) 5

c) 1 d) $\sqrt[3]{10}$ e) 1000 f) 27 g) $\frac{1}{4}$ h) $\frac{1}{16}$ i) 5 **11.7.** a) 2 b) -1 c) 2 d) $-\frac{1}{2}$ e) 2 f) 2

g) 1 h) $-\frac{1}{2}$ i) -2 **11.8.** a) 5 b) 4 c) 225 d) 64 e) 15 f) 9 **11.9.** a) 6 b) 12 c) 54

d) $\frac{8}{27}$ e) $\frac{25}{4}$ f) 3 **11.12.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\sqrt{11}$ **11.13.** a) 5 b) $10^{2,6} \approx 4$ [m] **11.14.** 100 dB

s. 92

1. F, F, F **2.** $2\frac{1}{4}$ **3.** $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$, $\log_{0,5} 4$, $\log \sqrt{100\,000}$, $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$ **4.** $\frac{1}{2}$ **5.** 1

s. 93

1. C **2.** B **3.** D **4.** C **5.** B **6.** C **7.** A **8.** D **9.** C **10.** B **11.** D **12.** C
13. B **14.** A **15.** A **16.** C **17.** B **18.** A **19.** C **20.** B **21.** B **22.** D **23.** C
24. B **25.** C **26.** B **27.** C **28.** B **29.** C **30.** C **31.** F, P, F

32. P, F, F. *Wskazówka*: Liczba 10 000 062 nie jest podzielna przez 4, zatem nie może być kwadratem żadnej liczby parzystej. **33.** P, F, P **34.** P, P, F **35.** F, F, F. *Wskazówka*: Jako kontrprzykład można wskazać np. liczby 6, 18, 30 (lub ogólniej liczby postaci $12k + 6$). **36.** P, P, P **37.** P, P, P **38.** F, P, P. *Wskazówka*: Jeżeli przyjmiemy, że $m = \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$, to $m^2 = 2$. **39.** P, F, F **40.** F, P, F **41.** P, P, F **42.** P, F, P **43.** F, P, F **44.** P, P, F **45.** P, P, P **46.** P, F, P **47.** F, P, P **48.** P, F, P **49.** a) $5x(x-6y)$ b) $3xy(3y+x)$ c) $12pr\left(4p^2-3r+2\right)$ d) $7mn(2m-3n+10)$ **50.** a) y^2 b) $4x^2$ c) $2\sqrt{6}xy$ d) $5x^2$ **51.** a) $(x+6)^2$ b) $(10k-2)^2$ c) $(ab+5)^2$ d) $\left(t\sqrt{3}+u\sqrt{2}\right)^2$ e) $(5p-6q)^2$ f) $\left(x-\frac{1}{3}y\right)^2$ g) $\left(\frac{3}{4}a+2x\right)^2$ h) $\left(\frac{1}{2}a^2-2b^2\right)^2$

52. a) $(x-20)(x+20)$ b) $(4a-5b)(4a+5b)$ c) $(1-10cd)(1+10cd)$ d) $\left(\frac{1}{5}z+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{5}z-\frac{2}{3}\right)$

53. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ b) $B = \{-1, 1\}$ c) $C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ d) $D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\right\}$ **54.** $2 \cdot 10^{-8}$ t **55.** $3 \cdot 10^{10}$ km **56.** a) $\frac{\sqrt{5}-2}{3}$ b) $1\frac{1}{2}$ c) $\frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$ d) $\frac{\sqrt{7}+2}{12}$ **57.** 5 **58.** a) 1 b) 1 c) -2 **59.** a) $\sqrt{3}$, $x > 0$ b) 0, $x > -2$ **60.** a) 11 b) -3 **61.** $-24x + 36$

62. a, $\sqrt{7}$, $a^2 - 4 \geqslant 0$, $a + 2 - \sqrt{a^2-4} \neq 0$, $a + 2 + \sqrt{a^2-4} \neq 0$ **63.** $-x^2 - 4y^2$, -17 **64.** 12 **66.** 7 i 84 lub 21 i 28 **67.** 2 **68.** $\frac{150}{701}$ **69.** $a = f = c < d < e = h < b < g$

70. $(-5)^3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{15}\right)^{-1}$ **71.** 8 **72.** $3\frac{1}{4}$ **74.** $-\sqrt{9}$, $\sqrt{3\frac{6}{25}}$, $1 + \sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$ **75.** $3^{\frac{57}{10}}$ **76.** $\frac{1-2\sqrt{11}}{\sqrt{7}-3} > \frac{1+2\sqrt{11}}{\sqrt{3}-7}$ **77.** $-2\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{7}$, π, $2\sqrt{3}$ **78.** -5 **81.** 14

2. Równania i nierówności

s. 104

1.1. F, P, P **1.2.** P, F, P **1.3.** F, P, F **1.4.** a) 1 b) -3 c) 3 d) 5 e) -2 f) 7 **1.5.** a) 1 b) 9 c) 2 d) 0,8 e) 1 f) -3 **1.6.** a) brak rozwiązań b) 0 c) $x \in \mathbf{R}$ d) brak rozwiązań e) $x \in \mathbf{R}$ f) 3,5 **1.7.** a) 3 b) $x \in \mathbf{R}$ c) $-3\frac{1}{7}$ d) 1 e) brak rozwiązań f) 17

1.8. a) np. $x + 9$ b) np. $\frac{1}{2}(2x-6)$ c) np. $3x + 5$ **1.9.** a) 6 b) 0 c) 4 d) 8 e) 1 f) 4

s. 111

2.1. C **2.2.** B **2.3.** D **2.4.** F, F, F, P **2.5.** a) nie b) tak c) tak **2.6.** a) nie b) tak c) tak **2.7.** A **2.9.** a) $x > 1$ b) $x \geqslant -2$ c) $x \leqslant 4$ d) $x > 3$ e) $x < 8$ f) $x > -2$ g) $x < -2$ h) $x > 2$ **2.10.** a) $x > -3$ b) $x \geqslant 4$ c) $x > 4$ d) $x < 2$ e) $x > 0$ f) $x < -\frac{4}{5}$ g) $x > -25$ h) $x \geqslant 2\frac{2}{3}$ i) $x \geqslant 6$ j) $x \geqslant -3\frac{13}{20}$ **2.11.** a) $x \geqslant 4$ b) $x > 1$ c) $x \geqslant -1$ d) $x > 2$ e) $x < 0$ f) $x \leqslant 8$ g) $x > -1\frac{1}{4}$ h) $x \geqslant 3$ **2.12.** a) $x < 2\frac{3}{4}$ b) $x < 2$ c) $x \geqslant 0$ d) $x \geqslant -2$

2.13. $x < \frac{1}{3}; -8$ **2.14.** $x > -\frac{1}{5}; -1$ **2.15.** $x \leqslant -1\frac{2}{5}; -2$ **2.17.** 0 i 1 **2.18.** 22 **2.19.** 51
2.20. 7 i 9, 5 i 7, 3 i 5, 1 i 3 **2.21.** 0 i 2, 2 i 4, 4 i 6, 6 i 8

s. 113

1. P, F, P **2.** $x \geqslant -1$ **3.** brak rozwiązań **4.** $x \leqslant 2; 3$ **5.** $x > -2; -1$

s. 118

3.1. D **3.2.** B **3.3.** B **3.5.** a) $x \in (-2; 1)$ b) $\langle 0; 4\rangle$ **3.7.** a) $(-\infty; -1)$ b) $\langle 3; 10)$
c) brak rozwiązań d) $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$ **3.8.** a) 0, 1, 2, 3, 4 b) 0, 1 **3.9.** a) −3, −2, −1, 0, 1, 2
b) 0, 1, 2 **3.10.** a) $(1; \infty)$ b) brak rozwiązań c) $\left(\frac{1}{2}; 5\right\rangle$ d) $(2; \infty)$ **3.11.** a) −1 b) 4
3.12. a) 9 b) 0 **3.13.** a) $(-1; 3)$ b) $\langle -2; 0)$ c) $\langle 2; 6\rangle$ d) $\langle 2; 8)$ e) $(-3; 5)$ f) $\langle -3; 4)$
3.14. a) żaden b) $B \subset A$ c) $A \subset B$ d) $B \subset A$ e) $A \subset B$ f) $A = B$

s. 120

1. F, P, P **2.** $\left(-1\frac{1}{2}; 2\right)$ **3.** 0, 1, 2 **4.** $\left(-\infty; 1\frac{6}{13}\right)$

s. 125

4.1. B **4.2.** C **4.3.** D **4.4.** P, F, P **4.5.** a) $(-1; 2)$ b) $\langle 0; 3\rangle$ c) $\emptyset$ d) $(2; 5\rangle$ e) $\emptyset$ f) $\{8\}$
4.6. a) −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 b) 1, 2, 3, 4 c) 0, 1, 2 **4.7.** a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 5, 10, 15\}$,
$A \cap B = \{0\}$ b) $A = \{13, 26, 39, 52, 65, 78, 91\}$, $B = \{1, 2, 4, 13, 26, 52\}$, $A \cap B = \{13, 26, 52\}$
c) $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, \ldots, 11, 12\}$, $A \cap B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
d) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{2, 3, 5\}$
4.8. a) $A \cup B = \left\{-3, -2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, 3\right\}$ b) $A \cup B = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$
c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ d) $A \cup B = A$ **4.9.** a) $A \cup B = (-\infty; 5\rangle$ b) $A \cup B = (-3; 4)$
c) $A \cup B = \mathbf{R}$ d) $A \cup B = A$ e) $A \cup B = \langle -3; 7)$ f) $A \cup B = B$ **4.10.** a) $A \cap B$ b) $A \cap B \cap C$
c) $A \cup B \cup C$ d) $B \cap C$ e) $A \cap C$ f) $A \cup C$ **4.11.** a) $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ b) $(-\infty; -2\rangle \cup (2; \infty)$
c) $(-1; 3) \cup (5; \infty)$ d) $\langle -3; 2) \cup (5; 7\rangle$ **4.12.** a) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 4\}$
b) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$, $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ c) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$,
$B = \{0, 1, 2\}$, $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ d) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$,
$A \cup B = A$ **4.13.** a) $A - B = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$, $B - A = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$ b) $A - B = A$, $B - A = B$
c) $A - B = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$, $B - A = \emptyset$ d) $A - B = \{3, 6, 9\}$, $B - A = \{1, 4, 7\}$
e) $A - B = \{-18, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 18\}$, $B - A = \emptyset$ f) $A - B = \{6, 9\}$, $B - A = \{-1, 1, 2\}$
4.14. a) $B \subset A$ b) $A \subset B$ c) $A = B$ d) $A \subset B$ e) $A \cap B = \emptyset$ f) $B = \emptyset$ **4.15.** a) $x \neq 0$,
$D = \mathbf{R} - \{0\}$ b) $x \neq 5$, $D = \mathbf{R} - \{5\}$ c) $x \neq 7$, $D = \mathbf{R} - \{7\}$ d) $x \geqslant 4$, $D = \langle 4; \infty)$ e) $D = \mathbf{R}$
f) $x \neq -1$ i $x \neq -2$, $D = \mathbf{R} - \{-2, -1\}$ g) $x \neq 0$ i $x \neq 2$ i $x \neq -3$, $D = \mathbf{R} - \{-3, 0, 2\}$ h) $x \geqslant 3$,
$D = \langle 3; \infty)$ i) $x \leqslant 1$ i $x \neq 4$, $D = (-\infty; 1\rangle$ j) $x \neq 0$ i $x \neq 1$ i $x \neq 2$, $D = \mathbf{R} - \{0, 1, 2\}$

k) $D = \mathbf{R}$ l) $x > 2$, $D = (2; \infty)$ m) $x \neq 3$ i $x > 5$, $D = (5; \infty)$ n) $x \geqslant -2$ i $x < 3$, $D = \langle -2; 3)$
o) $x \neq 0$, $D = \mathbf{R} - \{0\}$

s. 131

5.1. B **5.2.** D **5.3.** A **5.4.** F, F, P **5.5.** a) $3 - \sqrt{2}$ b) 0 c) $7 - 4\sqrt{3}$ d) $9 - 4\sqrt{5}$
e) $5\sqrt{3} - 3\sqrt{7}$ f) $3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$ **5.6.** a) -33 b) 2 c) 0 d) 1 **5.7.** a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2$
b) $2\sqrt{3} + \sqrt{5} - 5$ c) $\sqrt{10} + \sqrt{17} - \sqrt{47}$ d) $3 + \sqrt{50} - \sqrt{99}$ **5.8.** a) 7 b) 4 c) $5\sqrt{5}$ d) 5 e) 2
f) 8 g) 3 h) 2 **5.9.** a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 2 d) 1 **5.10.** a) $x \in \mathbf{R} - \{0\}$, -1 b) $x \in \mathbf{R} - \{3\}$, $\frac{1}{2}$
c) $x \in \mathbf{R} - \left\{\sqrt{2}\right\}$, $\frac{1}{3}$ d) $x \in \mathbf{R} - \left\{2\frac{1}{2}, 6\right\}$, 0 **5.11.** a) -3 b) 13 c) -5 d) 9 e) 6 f) -3
5.12. a) $|x + 7|$ b) $|3 - x|$ c) $|x - y + 2z|$ d) $|x - 1|$ e) $|3x + 1|$ f) $|5y - 1|$ g) $|2 - 5x|$
h) $\left|y - \sqrt{2}\right|$ **5.13.** a) $\sqrt{7} - 2$ b) $3 - \sqrt{2}$ c) -1 d) -4 e) 4 f) $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ **5.14.** a) -1
b) -1 c) 9 d) 2 dla $x \in \left(1; \sqrt{3}\right)$ lub $2\sqrt{3}x - 4$ dla $x \in \left\langle \sqrt{3}; 2\right)$ **5.15.** a) $2 - \sqrt{3}$ b) $-3 + \sqrt{10}$
c) $-1 + \sqrt{3}$ d) $-1 + \sqrt{2}$ e) $3 - \sqrt{3}$ f) $3 - \sqrt{7}$ **5.16.** *Wskazówka*: $\sqrt{(a \pm b)^2} = |a \pm b|$
5.17. Załóżmy, że $\sqrt{7} + \sqrt{11} > 6$. Wtedy $7 + 2\sqrt{77} + 11 > 36$, czyli $\sqrt{77} > 9$, zatem $77 > 81$. Ta nierówność okazała się fałszywa, zatem $\left|\sqrt{7} + \sqrt{11} - 6\right| = 6 - \sqrt{7} - \sqrt{11}$.

s. 133

1. F, F, P **2.** $3\sqrt{2}$ **3.** $-\frac{3}{2}|2x - 3|$

s. 139

6.1. D **6.2.** C **6.3.** C **6.4.** D **6.5.** C **6.7.** a) $x = -6$ lub $x = 6$ b) $x = -5$ lub $x = 5$
c) $x = -2$ lub $x = 2$ d) brak rozwiązań e) $x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{3}$ lub $x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{3}$ f) $x = 0$ g) $x = -\frac{1}{2}$ lub
$x = \frac{1}{2}$ h) $x = -2$ lub $x = 2$ **6.9.** a) $x \in (-9; 9)$ b) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle 4; \infty)$ d) $x \in \mathbf{R}$ e) $x = 0$ f) brak rozwiązań **6.10.** a) Odległość punktów
$A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (4)$ na tej osi jest równa 7. b) Odległość punktów
$A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu $B = (-2)$ na tej osi jest równa 1. **6.11.** a) $x = -4$ lub
$x = 6$ b) $x = -5$ lub $x = 1$ c) $x = 2\frac{2}{3}$ lub $x = 8$ d) $x = -14$ lub $x = 0$ e) brak rozwiązań
f) $x = -14$ lub $x = -8$ **6.12.** a) Odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od punktu
$B = (2)$ na tej osi jest mniejsza od 1. b) Odległość punktów $A = (x)$ leżących na osi liczbowej od
punktu $B = (-3)$ na tej osi jest mniejsza lub równa 2. c) Odległość punktów $A = (x)$ leżących na
osi liczbowej od punktu $B = (5)$ na tej osi jest większa lub równa 1. d) Odległość punktów $A = (x)$
leżących na osi liczbowej od punktu $B = \left(-\sqrt{2}\right)$ na tej osi jest większa od 3. **6.13.** a) $x \in \langle -11; -3\rangle$
b) $x \in (-\infty; 2) \cup (8; \infty)$ c) $x \in (1; 9)$ d) $x \in \mathbf{R}$ e) $x \in \mathbf{R} - \{4\}$ f) brak rozwiązań g) $x \in \mathbf{R}$
h) $x = 11$ **6.14.** a) $|x - 2| < 5$ b) $|x - 10| \leqslant 4$ c) $|x + 5| \leqslant 5$ d) $|x + 3| \leqslant 2$

6.15. a) $|x-9|>2$ b) $|x-3|\geqslant 5$ c) $|x+4|\geqslant 3$ d) $|x+1|>14$ **6.16.** a) $x\in(2;5)$ b) $x\in\langle -5;-3)\cup(1;5\rangle$ c) $x\in(-2;1\rangle\cup\langle 3;4)$ d) $x\in\langle -2;2\rangle$ e) $x\in\langle -4;-3)$ f) $x\in(-10;7)\cup(9;20)$ g) $x\in\langle 1;3\rangle\cup\{5\}$ h) brak rozwiązań **6.17.** a) $x\in(-7;-4)$ b) $x\in\langle -5;-3)\cup(3;5\rangle$ c) $x\in(-3;1\rangle\cup\langle 3;4)$ d) $x\in(-8;-2)$ **6.18.** a) $|AB|=8$ b) $|AB|=6$ c) $|AB|=7$ d) $|AB|=3\sqrt{3}$ e) $|AB|=9\sqrt{5}$ f) $|AB|=4$ g) $|AB|=2\sqrt{2}-1$ h) $|AB|=\sqrt{5}-1$

s. 142

1. F, F, P **2.** $x\in(-\infty;-5)\cup(9;\infty)$ **3.** $x\in(5;7)$ **4.** $|x-6|<8$

s. 150

7.1. C **7.2.** B **7.3.** D **7.4.** F, P, P **7.5.** F, P, F **7.6.** a) $x=-1$ lub $x=2\frac{2}{3}$ b) $x=-\frac{4}{5}$ lub $x=1\frac{3}{5}$ c) $x=-\frac{1}{3}$ lub $x=5$ d) $x=-\sqrt{3}$ lub $x=2\sqrt{3}$ e) $x=-2$ lub $x=3$ f) $x=-5\frac{1}{3}$ lub $x=4$ **7.7.** a) $x\in\left\langle 1;2\frac{1}{3}\right\rangle$ b) $x\in(-\infty;5)\cup(15;\infty)$ c) $x\in\left(\frac{3}{7};1\right)$ d) $x\in\left(-\infty;1\frac{2}{5}\right\rangle\cup\langle 3;\infty)$ e) $x\in(-\infty;-5)\cup(1;\infty)$ f) $x\in\left(-1\frac{5}{7};2\right)$ **7.8.** a) $x=2$ b) $x\in\mathbf{R}-\{\sqrt{5}-1\}$ c) brak rozwiązań d) $x\in\mathbf{R}$ **7.9.** a) $x=-5$ lub $x=-1$ b) $x=-\pi-3-\sqrt{7}$ lub $x=\pi-3+\sqrt{7}$ c) $x=-8$ lub $x=-6$ lub $x=-4$ lub $x=-2$ d) $x=\frac{6-2\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ lub $x=\frac{-6+2\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ lub $x=\frac{6+2\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ lub $x=\frac{-6-2\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ e) $x=-8$ lub $x=4$ lub $x=10$ lub $x=22$ f) $x=-23$ lub $x=21$ **7.11.** a) $x\in(2;12)$ b) $x\in\langle -1;1\rangle\cup\langle 5;7\rangle$ c) $x\in(-\infty;-16)\cup(-4;12)\cup(24;\infty)$ d) $x\in\left(-\infty;-1\frac{4}{5}\right\rangle\cup\langle 1;\infty)$ e) $x\in(0;25)$ f) $x\in\left(-\infty;2\frac{1}{3}\right)\cup(5;\infty)$ **7.12.** D **7.13.** 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 **7.14.** 3, 4, 5 **7.15.** spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą: I, brak rozwiązań: III **7.16.** a) $x=-\frac{1}{7}$ b) brak rozwiązań c) $x=2\frac{2}{3}$ d) $x=-3$ lub $x=0$ e) $x=3$ f) $x=0$ **7.17.** a) $x\in\langle -1;\infty)$ b) $x\in\left(-\infty;\frac{7}{8}\right)$ c) $x\in(-\infty;-5\rangle\cup\langle 0;\infty)$ d) $x\in(-\infty;2)$ e) $x\in\left\langle -\frac{2}{3};6\right\rangle$ f) $x\in(-\infty;-3)\cup(0;\infty)$ **7.18.** a) $x\in\langle -4;-3)$ b) $x\in(-10;7)\cup(9;20)$ c) $x\in\langle 1;3\rangle\cup\{5\}$ d) brak rozwiązań **7.19.** a) $x=-3$ lub $x=4$ b) $x\in(-\infty;-5\rangle$ c) $x=1$ lub $x=3\frac{2}{3}$ d) $x=5\frac{1}{3}$ lub $x=16$ **7.20.** a) $x=-\frac{1}{2}$ lub $x=4$ b) brak rozwiązań c) $x=0$ lub $x=6$ d) $x\in(-\infty;-4\rangle$ **7.21.** a) $x\in(0;6)$ b) $x\in\left\langle\frac{1}{2};7\right\rangle$ c) $x\in(-\infty;0)$ d) $x\in(-\infty;2\rangle\cup\langle 4;\infty)$ **7.22.** a) $x\in\mathbf{R}$ b) $x\in\left\langle -1\frac{3}{5};4\right\rangle$ c) brak rozwiązań d) $x\in\left\langle 3;4\frac{1}{2}\right\rangle$ **7.23.** a) $x=\frac{2}{5}$ lub $x=3\frac{3}{5}$ b) $x=-\frac{1}{4}$ lub $x=\frac{4}{5}$ c) $x=-\frac{1}{7}$ lub $x=13\frac{2}{3}$ d) $x\in\langle -1;1\rangle$ **7.24.** a) $x\in\left\langle -\frac{17}{22};-\frac{5}{22}\right\rangle$ b) $x\in\mathbf{R}$ c) $x\in(-\infty;-6\rangle\cup\left\langle\frac{2}{3};\infty\right)$ d) brak rozwiązań **7.25.** a) $x=\frac{1}{2}$ lub $x=2$ b) $x=-5-3\sqrt{3}$ lub $x=5-3\sqrt{3}$ c) $x=\frac{\pi-1+\sqrt{3}}{5}$ lub $x=\pi-1-\sqrt{3}$ d) $x=-5-2\sqrt{6}$ lub $x=5-2\sqrt{6}$

7.26. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; \infty)$ b) $x \in (-1; 1)$ c) $x \in \langle -0{,}6; -0{,}2\rangle \cup \langle 0{,}2; 0{,}6\rangle$ d) $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right\rangle \cup \langle 1; \infty)$ **7.27.** $x = 3$ **7.28.** $x \in \{-9, -3, 1, 7\}$

s. 153

1. P, P, F **2.** $x \in \{-9, -1\}$ **3.** $x \in (-1; 1) \cup (1; 3)$ **4.** $x \in \mathbf{R}$ **5.** brak rozwiązań

s. 161

8.1. P, F, F **8.2.** F, F, F **8.3.** a) $x = \frac{5-3m}{2}$ dla $m \in \mathbf{R}$ b) $x = \frac{6m}{m-1}$ dla $m \neq 1$, brak rozwiązań dla $m = 1$ c) $x = \frac{m+3}{m-1}$ dla $m \neq 1$, brak rozwiązań dla $m = 1$ d) $x = \frac{1}{5}$ dla $m \neq 2$, $x \in \mathbf{R}$ dla $m = 2$ **8.4.** a) $x = \frac{1-5k}{k^2-1}$ dla $k \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, brak rozwiązań dla $k = -1$ lub $k = 1$ b) $x = -\frac{7}{k+1}$ dla $k \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, brak rozwiązań dla $k = -1$, $x \in \mathbf{R}$ dla $k = 1$ c) $x = -\frac{1}{k}$ dla $k \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$, $x \in \mathbf{R}$ dla $k = 1$, brak rozwiązań dla $k = 0$ d) $x = \frac{1}{k+\sqrt{3}}$ dla $k \in \mathbf{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, $x \in \mathbf{R}$ dla $k = \sqrt{3}$, brak rozwiązań dla $k = -\sqrt{3}$ **8.5.** $x = 2$ dla $k > -1$, $x = -2$ dla $k < -1$, $x \in \mathbf{R}$ dla $k = -1$ **8.6.** $m = -2\frac{1}{5}$ **8.7.** $k \in \left\langle -\frac{1}{3}; 4\frac{2}{3}\right\rangle$ **8.8.** $k = 2$ **8.9.** Nie ma takiego k. **8.10.** $m \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right)$ **8.11.** a) $k = 1$ b) Nie ma takiego k. **8.12.** a) $p \in (-\infty; 5)$ b) $p \in \left(\frac{2}{5}; \infty\right)$ c) $p \in \left(-\infty; -2\frac{2}{3}\right)$ d) $p \in (-4; \infty)$ **8.13.** $m \in \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$ **8.14.** $m \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -1\frac{1}{8}\right\rangle$ **8.15.** $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$ **8.17.** a) $x = 1 + \frac{p}{m}$ dla $m \neq 0$ i $p \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$ dla $m = p = 0$, brak rozwiązań dla $m = 0$ i $p \neq 0$ b) $x = \frac{m+3}{p-1}$ dla $p \neq 1$ i $m \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$ dla $p = 1$ i $m = -3$, brak rozwiązań dla $p = 1$ i $m \neq -3$ **8.18.** $x = \frac{1}{m-p}$ dla $m \neq p$ i $m \neq -p$, $x \in \mathbf{R}$ dla $m = -p$, brak rozwiązań dla $m = p \neq 0$ **8.19.** $x = \frac{k^2-1}{p+2}$ dla $p \neq -2$, $x \in \mathbf{R}$ dla $p = -2$ i $k \in \{-1, 1\}$, brak rozwiązań dla $p = -2$ i $k \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ **8.20.** $\frac{4000-k}{50}$ dla $k \in \{2000, 2050, 2100, \ldots, 4000\}$ **8.21.** a) $x \in \mathbf{R}$ dla $k = 0$, $x < \frac{3k+6}{2k}$ dla $k > 0$, $x > \frac{3k+6}{2k}$ dla $k < 0$ b) brak rozwiązań dla $k = 0$, $x > \frac{1}{k} - 1$ dla $k > 0$, $x < \frac{1}{k} - 1$ dla $k < 0$ c) brak rozwiązań dla $k = 0$, $x < -1\frac{2}{3}$ dla $k > 0$, $x > -1\frac{2}{3}$ dla $k < 0$ d) $x \in \mathbf{R}$ dla $k = 0$, $x < 2 + \frac{1}{k}$ dla $k > 0$, $x > 2 + \frac{1}{k}$ dla $k < 0$ **8.22.** $p = 14$ **8.23.** a) brak rozwiązań dla $m = 2\frac{1}{2}$, $x > \frac{2-5m}{5-2m}$ dla $m < 2\frac{1}{2}$, $x < \frac{2-5m}{5-2m}$ dla $m > 2\frac{1}{2}$ b) $x \in \mathbf{R}$ dla $m = -1\frac{2}{3}$, $x > -\frac{4}{3m+5}$ dla $m > -1\frac{2}{3}$, $x < -\frac{4}{3m+5}$ dla $m < -1\frac{2}{3}$ **8.24.** $m = 3$ **8.25.** $m = 0$ **8.26.** tak, $p = -1\frac{1}{5}$ **8.27.** tak, $m = 2$ **8.29.** np. $(k-2)(k+2)x = k+2$

s. 164

1. P, F, P **2.** $x = \frac{5}{2-k}$ dla $k \in \mathbf{R} - \{0, 2\}$, $x \in \mathbf{R}$ dla $k = 0$, brak rozwiązań dla $k = 2$ **3.** $x \in \mathbf{R}$ dla $p = 0$, $x \geqslant \frac{p-1}{3p}$ dla $p > 0$, $x \leqslant \frac{p-1}{3p}$ dla $p < 0$ **4.** $m = -3$ i $k = 4$

s. 170

9.1. C **9.2.** C **9.3.** B **9.4.** B **9.5.** P, P, P **9.6.** a) np. (1, −6), (5, −2), (0, −7) b) np. (2, 1), (3, −1), (0, 5) c) np. (1, 1), $\left(\frac{5}{8}, 0\right)$, $\left(0, 2\frac{2}{3}\right)$ d) np. (2, 2), (−5, −5), (0, 0) e) np. (−1, 9), (3, 9), (7, 9) f) np. (11, 3), (11, −7), (11, 105) **9.7.** a) tak b) tak c) nie d) nie e) tak f) nie **9.8.** a) tak b) tak c) nie d) tak e) nie f) tak **9.9.** a) np. $x + y = 5$ b) np. $x - y = -2$ c) np. $2x - y = -6$ d) np. $-3x + y = -7$ e) np. $-7x + y = 0$ f) np. $x + 2y = 0$ **9.11.** tak **9.12.** $m = 3$ **9.13.** *Wskazówka*: $11x = 19 + 7y$, zatem dobierz taką liczbę y, aby prawa strona tego równania była podzielna przez 11. **9.14.** (1, 16), (4, 9), (7, 2). *Wskazówka*: Przekształć równanie do równoważnej postaci $y = \frac{55 - 7x}{3}$. **9.15.** (11, 51), (24, 34), (37, 17), (50, 0). *Wskazówka*: Przekształć równanie do równoważnej postaci $x = 50 - \frac{13y}{17}$.

s. 172

1. P, F, P **2.** np. $x = -1$, $y = -1$ **3.** tak **4.** $m = 5$

s. 184

10.1. D **10.2.** C **10.3.** B **10.4.** P, P, P **10.5.** a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$ **10.6.** a) nieskończenie wiele par liczb (x, y) spełniających równanie $3x - y = 5$ b) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1\frac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 1\frac{1}{3} \\ y = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$

10.7. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

10.8. a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ b) brak rozwiązań c) $\begin{cases} x = -7 \\ y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 0{,}3 \\ y = -0{,}2 \end{cases}$ e) brak rozwiązań f) $\begin{cases} x = -1{,}5 \\ y = -3 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -7 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ **10.9.** a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -2\frac{1}{7} \\ y = 2\frac{1}{7} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 1\frac{4}{11} \\ y = -3\frac{2}{33} \end{cases}$ d) nieskończenie wiele par liczb (x, y) spełniających równanie $x + y = 0$ **10.10.** a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 3\frac{1}{2} \\ y = 7\frac{1}{2} \end{cases}$ **10.11.** a) $\begin{cases} x = 19 \\ y = -15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ **10.12.** a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 2\frac{41}{65} \\ y = -3\frac{1}{5} \\ z = -1\frac{42}{65} \end{cases}$ **10.13.** a) $\begin{cases} x = -7 \\ y = -4 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 11 \\ y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -\frac{1}{9} \\ y = \frac{11}{9} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = -25 \\ y = 11 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ **10.16.** a) jedno b) nieskończenie wiele c) zero d) nieskończenie wiele **10.17.** d) np.: I. $x + y = 2$, II. $14x - 24y = -2$, III. $3{,}5x - 6y = -2{,}5$

10.20. I i II: nieoznaczony, I i III oraz II i III: sprzeczne, IV z pozostałymi: oznaczone; rozwiązania układów IV i I oraz IV i II – $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$, IV i III – $\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$ **10.21.** a) $\begin{cases} x = y + 12 \\ \frac{x+y}{2} = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 20 \\ 2x - y = 19 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y + 0{,}3x = 84 \\ x - 0{,}1y = 74 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y + 5 = x \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{3} - 4 \end{cases}$ **10.22.** $\begin{cases} x = 21 \\ y = 17 \end{cases}$ **10.23.** 25 dwuzłotówek i 15 pięciozłotówek

10.24. Staszek: 43 km, Jurek: 37 km **10.25.** jogurt: 2,50 zł, serek: 5,20 zł **10.26.** 20 zł i 14 zł

10.27. kromka chleba: 30 kcal, szklanka mleka: 122 kcal **10.28.** 20 dziewcząt i 20 chłopców

10.29. wystarczy (k = 10 zł, m = 15 zł) **10.30.** kolejowy: 89 zł 60 gr, tramwajowy: 64 zł

10.31. pociągiem: 30 minut, tramwajem: 15 minut **10.32.** 12 g i 8 g **10.33.** 12 cm i 8 cm

10.34. 20 i 10 **10.35.** 45, 75, 90. *Wskazówka*: Niech a, b, c oznaczają szukane liczby, przy czym $a < b < c$. Wówczas $\begin{cases} c = b + \frac{1}{3}a \\ b = a + \frac{1}{3}c \\ a = 20 + \frac{1}{3}b \end{cases}$. **10.36.** Szkoły wystawiły odpowiednio 40, 32 i 28 uczniów.

Wskazówka: Niech x, y, z oznaczają liczby uczniów wystawionych przez szkoły. Wówczas $\begin{cases} x = 1\frac{1}{4}y \\ y = z + 4 \\ y + z = x + 20 \end{cases}$. **10.37.** v_p = 3 km/h i v_s = 12 km/h. *Wskazówka*: Niech v_p oznacza prędkość prądu, a v_s – prędkość własną statku (w km/h). Wówczas $\begin{cases} v_s + v_p = \frac{90}{6} \\ v_s - v_p = \frac{90}{10} \end{cases}$. **10.38.** 9^{20}. *Wskazówka*: Niech v_1 oznacza średnią prędkość pociągu osobowego, a v_2 – średnią prędkość pociągu pospiesznego (w km/h). Wówczas $\begin{cases} v_1 \cdot 1\frac{48}{60} + v_2 \cdot 1 = 240 \\ v_1 \cdot \frac{52}{60} + v_2 \cdot 1\frac{40}{60} = 240 \end{cases}$. Stąd v_1 = 75 km/h i v_2 = 105 km/h. Po rozwiązaniu równania $75t + 105t = 240$ otrzymujemy $t = 1\frac{1}{3}$.

s. 190

1. P, P, F **2.** 75 dziewcząt i 65 chłopców **3.** $x = -2$, $y = -2$

4. czereśnie: 7,50 zł, truskawki: 5,20 zł

s. 191

1. D **2.** D **3.** B **4.** D **5.** C **6.** A **7.** B **8.** B **9.** B **10.** B **11.** A **12.** C
13. D **14.** C **15.** D **16.** D **17.** C **18.** D **19.** B **20.** C **21.** D **22.** C
23. F, P, P **24.** F, P, P **25.** P, P, P **26.** P, P, P **27.** F, P, F **28.** F, F, P **29.** P, P, F
30. P, F, F **31.** P, P, F **32.** F, P, P **33.** F, P, P **34.** F, P, F **35.** F, F, P **36.** $x = -1\frac{5}{12}$
37. $x > -9{,}5$ **38.** 0, 1, 2, 3, 4 **39.** $x \geqslant -2{,}8, -3$ **40.** a) $\langle 0; 3)$ b) $\langle -5; 0) \cup (2; 3)$ c) $(2; \infty)$ d) $(-7; -5)$ **41.** $m \in \langle -1; 2)$ **42.** $m \geqslant 4$ **43.** a) $x = -7$ lub $x = 7$ b) $x = -13$ c) $x = 6$ lub $x = 12$ d) $x = -5$ lub $x = -3$ e) brak rozwiązań f) $x = -1{,}5$ lub $x = 3{,}5$
44. a) $x \in (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$ b) $x \in (4; 16)$ c) $x \in (-\infty; -7\rangle \cup \langle 3; \infty)$ d) $x \in \mathbf{R}$ e) brak rozwiązań f) $x \in \langle -14; 8\rangle$ **45.** a) $|x - 4| \leqslant 8$ b) $|x + 6| \leqslant 3$ c) $\left|x - \sqrt{2}\right| \leqslant \sqrt{2}$ d) $\left|x - \frac{7}{2}\right| \leqslant 2$
46. $|x - 1| \geqslant 5$ **47.** $x = -4$ lub $x = 20$ **48.** $x \in (-\infty; -10) \cup (-6; 0) \cup (4; \infty)$ **49.** $x = -1\frac{2}{7}$
50. $x \in (-\infty; -1)$ **51.** $x = -\frac{2}{5}$ lub $x = 2$ **52.** $x = -\frac{1}{5}$ lub $x = 5$ **55.** $\left\langle -4; -2\frac{1}{4}\right)$
56. $m \in \left(\frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right\rangle$. *Wskazówka*: Musi być spełniony następujący układ warunków $\begin{cases} 4 - m \leqslant 2 \\ 5 \geqslant 3m - 5 \\ 2 < 3m - 5 \\ 4 - m < 5 \end{cases}$.
57. $x = -3\frac{2}{5}$ lub $x = 3$ **58.** $x \in \left(\frac{2}{3}; 3\right) \cup (7; \infty)$ **62.** $m < -5$ **63.** $x = 1\frac{2}{3}m - 2$
64. $x = \frac{1}{k+1}$ dla $k \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, $x \in \mathbf{R}$ dla $k = 1$, brak rozwiązań dla $k = -1$
65. $m = -1$ i $k \neq 0$ **66.** $x \in \mathbf{R}$ dla $p = 0$, $x \geqslant \frac{p}{3}$ dla $p > 0$, $x \leqslant \frac{p}{3}$ dla $p < 0$ **67.** a) (1, 2) b) (4, 3) c) (−2, 2) d) (1, −4) **68.** a) $\left(2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\right)$ b) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}, -\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)$ c) $\left(9, \frac{1}{3}\right)$ d) $\left(2^{10}, 2^{12}\right)$ **69.** a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = \frac{24}{11} \\ y = -\frac{14}{11} \end{cases}$ b) układ sprzeczny c) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases}$ **71.** $A = 37$ **72.** $A = 531$ lub $A = 612$ **73.** 360 i 100
74. 14 080 zł, strata 29,6% **75.** 240 **76.** Zebra: 41%, Lis: 29%, Lew: 18%, Wielbłąd: 12%
77. b) 32%

3. Funkcje

s. 204

1.1. C **1.2.** B **1.3.** C **1.4.** P, P, P **1.6.** a) tak b) tak c) nie d) nie e) tak f) nie
1.7. Funkcjami są przyporządkowania: a), c), d). **1.8.** a) $f(-2) = 2\sqrt{2}$, $f\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{7}$ b) $f(-2) = 22$, $f\left(\sqrt{3}\right) = 7 - 6\sqrt{3}$ c) $f(-2) = 0$, $f\left(\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$ d) $f(-2) = 2$, $f\left(\sqrt{3}\right) = 1$

1.9.

a)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−17	−13	−9	−5	−1	3	7

b)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	−1	−2	−1	2	7	14

c)

x	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	4	3	2	1	2	3

d)

x	−3	−1	0	8	10
$f(x)$	$\sqrt[3]{-3}$	−1	0	2	$\sqrt[3]{10}$

1.10. $x \in D$ i a) np. $f(x) = x^2$ b) np. $f(x) = 2x + 3$ c) np. $f(x) = x - 1$ d) np. $f(x) = x^3$

1.11. a) $f(x) = -x$, $x \in \mathbf{R}$ b) $f(x) = (x+1)^2$, $x \in \mathbf{N}$ c) $f(x) = 2x^2$, $x \in \mathbf{R}$ d) $f(x) = |x| - 2$, $x \in \mathbf{R}$ e) $f(x) = \log x$, $x > 0$ f) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbf{R}$ **1.12.** a) $P(r) = \pi r^2$ dla $r > 0$ b) $P(a) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ dla $a > 0$ c) $O(a) = 6a$ dla $a > 0$ d) $V(a) = 6a^3$ dla $a > 0$

1.13. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej: a) liczbę przeciwną do kwadratu tej liczby, b) dodatniej liczbę odwrotną do pierwiastka kwadratowego z tej liczby, c) wartość bezwzględną tej liczby powiększonej o 3, d) różnej od zera sumę tej liczby i liczby do niej odwrotnej.

1.14. a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3

b) 2, 3, 5, 7

1.15. a) 12 b) np. 9993 c) 1001, 1010, 1100, 2000

s. 206

1. F, P, P **2.** a) $f(x) = 2^x$ dla $x > 0$ b) $f(x) = \log x$ dla $x \in \mathbf{N} - \{0\}$ c) To nie jest funkcja. d) $f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}$ dla $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ **3.** $D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

4.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{11}$

5. $f\left(14 - 6\sqrt{5}\right) = \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{9 - 6\sqrt{5} + 5} = \sqrt{\left(3 - \sqrt{5}\right)^2} = \left|3 - \sqrt{5}\right| = 3 - \sqrt{5}$

s. 210

2.1. B **2.2.** D **2.3.** C **2.4.** a) $D = \mathbf{R}$ b) $D = \mathbf{R} - \{5\}$ c) $D = \mathbf{R}$ d) $D = \mathbf{R} - \left\{2\sqrt{3}\right\}$

2.5. a) $D = \langle 0; \infty)$ b) $D = \langle 3; \infty)$ c) $D = (-\infty; 5\rangle$ d) $D = (-\infty; 7\rangle$ e) $D = \langle 1; \infty)$ f) $D = \{3\}$

2.6. a) $D = \langle -3; \infty) - \{1\}$ b) $D = \mathbf{R} - \{-1, 3\}$ c) $D = (-\infty; 3\rangle - \{0\}$ d) $D = (-\infty; 4\rangle - \{-1\}$

2.7. $m = 6$ **2.8.** $m = -4$ **2.10.** a) $D = \mathbf{R}$ b) $D = \mathbf{R} - \{-2\}$ c) $D = \mathbf{R} - \{-5, 5\}$ d) $D = \mathbf{R}$ e) $D = (-\infty; -8\rangle \cup \langle 0; \infty)$ f) $D = \mathbf{R} - \{6, 14\}$ **2.11.** a) $D = (-\infty; -7) \cup (7; \infty)$ b) $D = \langle -2; 2\rangle$ c) $D = \mathbf{R}$ d) $D = \langle 1; 5\rangle$ **2.12.** a) $D = (-\infty; -5) \cup \langle 5; \infty)$ b) $D = (-\infty; 2\rangle - \{-3\}$ c) $D = (-\infty; -3\rangle \cup \langle 1; \infty)$ d) $D = (-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; \infty) - \{-3, 3\}$ e) $D = (-1; 0\rangle \cup \langle 2; 7)$ f) $D = \mathbf{R} - \{2, 4\}$ **2.13.** a) $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right\rangle$ b) $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 2; \infty)$ c) $(-\infty; -12\rangle \cup \langle -6; 2\rangle \cup \langle 8; \infty)$ d) $\langle -2; 6\rangle$ e) $\left(-\infty; 1\frac{1}{2}\right\rangle$ f) $\left\langle \frac{1}{2}; \infty\right)$ **2.14.** tak, $m = 1$ **2.15.** Nie ma takiego m. **2.16.** $m = -2$

2.17. a) np. $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x-7)(x-9)}$ b) np. $f(x) = \sqrt{x+6}$ c) np. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{7-x}}$ d) np. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x+3|-6}}$ e) np. $f(x) = \sqrt{|2-x|-4}$ f) np. $f(x) = \frac{\sqrt{|x-4|-1}}{x}$
2.18. $f(x) = 3x$, $D = (0; \infty)$ **2.19.** $f(x) = 2x + 10$, $D = (5; \infty)$ **2.20.** $f(x) = 20 - 2x$, $D = (5; 10)$ **2.21.** $P(d) = \frac{1}{2}d(5-d)$, $D = (0; 5)$ **2.22.** a) $y = 6x^2 + 12x$, $D = (0; \infty)$ b) $y = x^3 + 3x^2$, $D = (0; \infty)$

s. 212

1. F, P, P **2.** $D = (-\infty; 2\rangle$ **3.** $D = \langle -4; 2\rangle$ **4.** $D = \left\langle -\frac{1}{2}; \infty\right) - \{4\}$
5. $f(x) = x + 32$, $D = (0; 32)$

s. 215

3.1. C **3.2.** B **3.3.** D **3.4.** a) $ZW = \{-4, -1, 2, 5\}$ b) $ZW = \{2, 5, 8, 11\}$ c) $ZW = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\right\}$ d) $ZW = \{-3, 0, 2\}$ **3.5.** $ZW = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3.6. $ZW = \{4, 7, 8, 10, 11, 12, 15\}$ **3.7.** $ZW = \{12, 14, 16, 18, 20, 22\}$ **3.8.** $ZW = (0; 1\rangle$
3.9. a) ZW – zbiór liczb całkowitych nieparzystych b) $ZW = \{-1, 1\}$ c) $ZW = \langle 0; 3\rangle$ d) $ZW = \{-1, 1\}$ **3.10.** a) $-1, 3, 5$ b) $4, 8$ c) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1$ d) $-4, 0, 4$ **3.11.** *Wskazówka:* Rozwiąż równanie $k(x) = 1$. **3.12.** a) $D = \{1, 4, 6\}$ b) $D = \{-2, 3, 50\}$ c) $D = \{0, 1, 4\}$ d) $D = \{-3, 1, 3\}$ **3.13.** $ZW = \{9, 36, 81\}$ **3.14.** a) np. $f(x) = x$ dla $x \in \mathbf{R}$ b) np. $f(x) = |x|$ dla $x \in \mathbf{Z}$ c) np. $f(x) = -x$ dla $x \in \langle -1; \infty)$ d) np. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$
3.15. np. funkcja, która każdej liczbie wymiernej przyporządkowuje najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą danej liczbie **3.16.** Gdyby liczba całkowita k była wartością funkcji dla pewnego argumentu $n \in \mathbf{N}$, prawdziwa byłaby równość $k = \frac{2^n + 17}{2^n + 6}$, czyli $k \cdot 2^n + 6k = 2^n + 17$, stąd $2^n(1-k) = 6k - 17$. Lewa strona ostatniej równości jest parzysta, a prawa nie. Sprzeczność.
3.17. Nie. *Wskazówka:* Rozpatrz np. funkcję, która liczbom wymiernym przyporządkowuje 1, a liczbom niewymiernym przyporządkowuje -1.

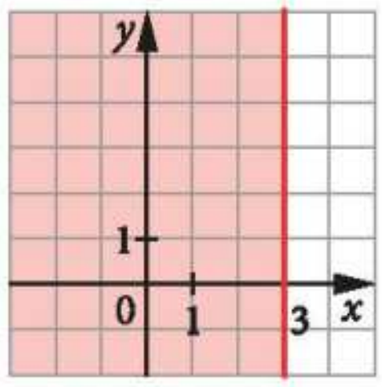
s. 217

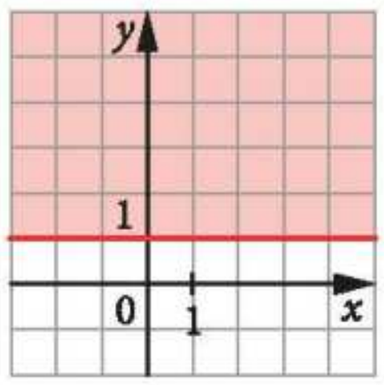
1. P, P, F **2.** $D = \{-2, 0, 4\}$ **3.** tak, $f\left(1\frac{1}{2}\right) = 3$ **4.** $ZW = (0; 25)$
5. *Wskazówka:* Sprawdź, czy rozwiązaniem równania $f(x) = 7\sqrt{2}$ jest liczba naturalna.

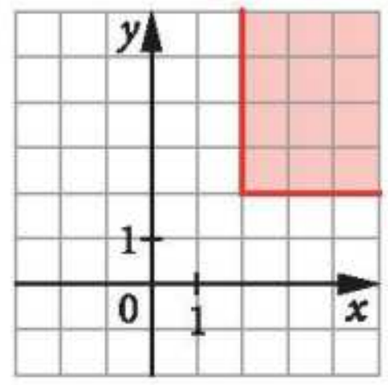
s. 220

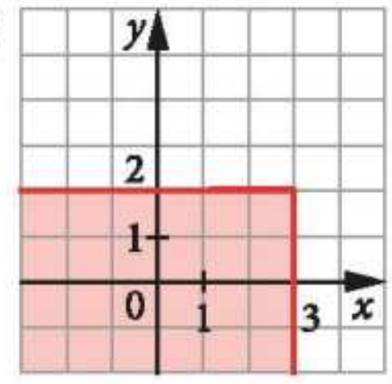
4.2. a) trójkąt prostokątny równoramienny b) równoległobok c) trapez równoramienny d) prostokąt **4.3.** Czworokąt $ABCD$ jest prostokątem o polu 24.

4.4.

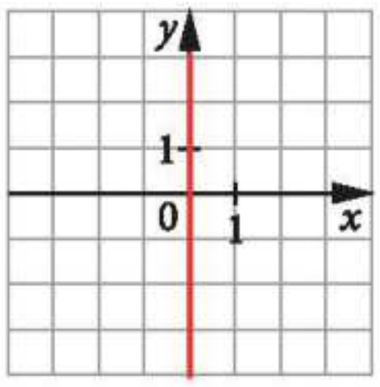
a) 

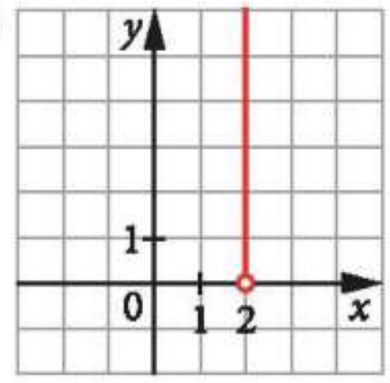
b) 

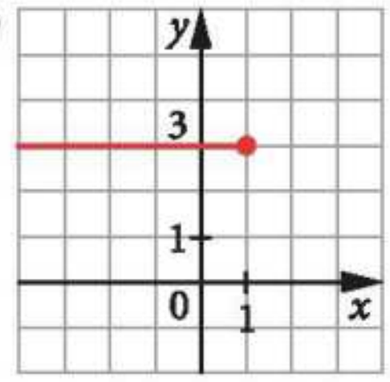
c) 

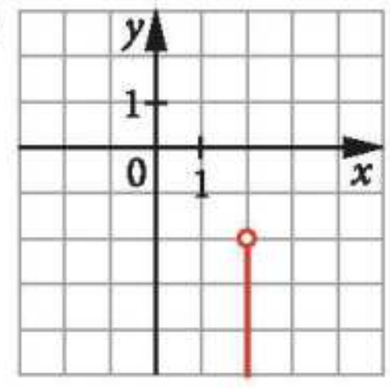
d) 

4.5.

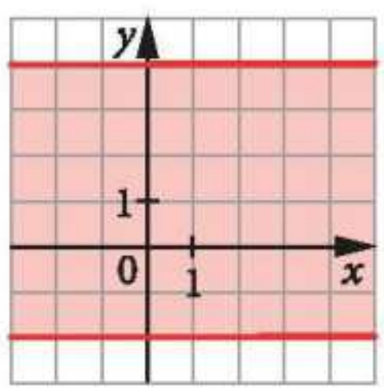
a) 

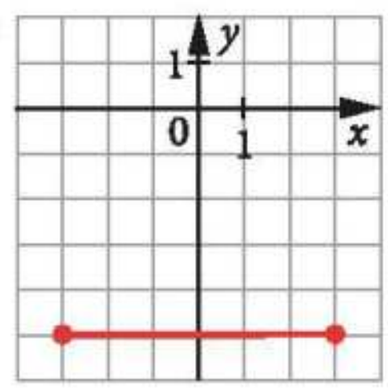
b) 

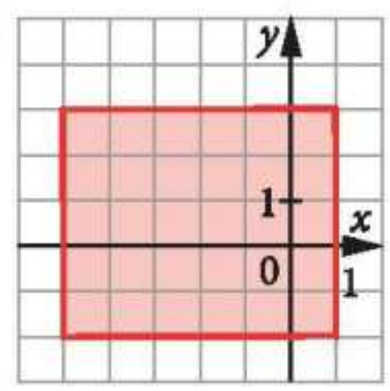
c) 

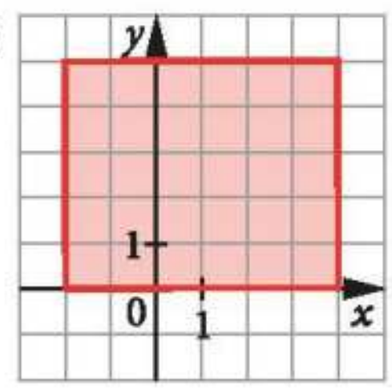
d) 

4.6.

a) 

b) 

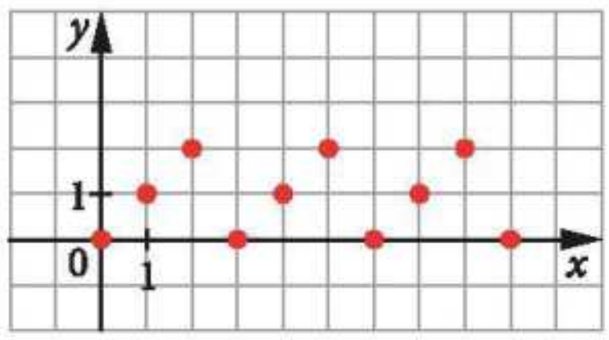
c) 

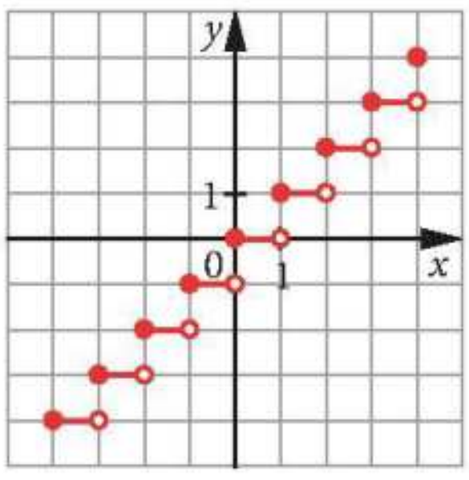
d) 

4.7. *BiC* **4.8.** *LiP*

s. 224

5.1. C **5.2.** B **5.3.** B **5.4.** B

5.6. a) 

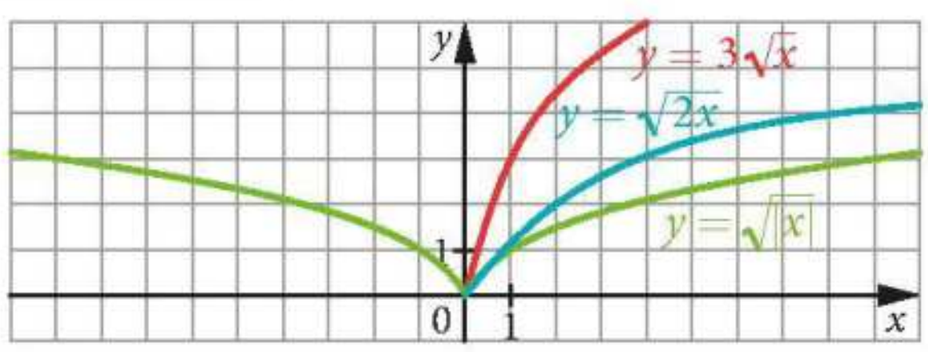
5.9. 

5.10. *Wskazówka:*

Powierzchnia [dm^2]	1,17	1,50	2,34	3,15
Cena [zł]	0,75	0,90	1,60	1,80

5.12. a) $D = \langle 0;\ \infty)$ b) $D = \mathbf{R}$ c) $D = \langle 0;\ \infty)$

Patrz rysunek po prawej.



5.13. a) tak b) nie c) tak d) nie e) tak f) nie

5.14. a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ dla $x \in \{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$

c) $ZW = \left\{-2, -\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, 6\right\}$

5.15. a) $f(2{,}4) = 2$, $f(-1) = -1$, $f\left(\frac{11}{3}\right) = 3$, $f\left(-\sqrt{13}\right) = -4$ b) $ZW = \mathbf{Z}$

s. 227

1. P, F, P **2.** *Wskazówka:*

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2 - 4$	5	0	-3	-4	-3	0	5

3. $ZW = \{-8, -4, -2, 1, 4\}$ **4.** Nie, bo argumentowi $x = -2$ odpowiadają różne y.
5. b) *Wskazówka:* Reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 3 jest równa 0, 1 lub 2. Wykaż, że w żadnym z tych przypadków reszta z dzielenia liczby n^2 przez 3 nie jest równa 2.

s. 232

6.1. D **6.2.** C **6.3.** D **6.4.** $D = (-2; 5\rangle$, $ZW = \langle -3; 4\rangle$ **6.5.** w 1960 roku
6.6. a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 0\}$; $f(x) = 2$ dla $x = 2$; $f(x) = \frac{1}{2}$ dla $x \in \left\{-2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; $f(x) = 1$ dla $x \in \{-3, 1, 3\}$ b) $f(x) = 1$ dla $x \in \left\{-1, 1\frac{1}{2}\right\}$; $f(x) = -1$ dla $x \in \{-2, 3\}$; $f(x) = 2$ dla $x \in \langle 0, 1\rangle$; $f(x) = -2$ dla $x \in \langle -4, -3\rangle \cup \{4\}$ **6.7.** Patrz tabela.

	$f(x) = -2$	$f(x) = 0$	$f(x) = 1$
a)	-4	-1	0
b)	2	$-3, -1, 1$	$-4, 0$
c)	-1	3	4

6.8. a) $f(x) = -1$ dla $x \in \{-4, 0\}$, $f(x) = 3$ dla $x = 2$
b) $g(x) = 0$ dla $x = 0$, $g(x) = 2$ dla $x \in \{-1, 1\}$
c) $h(x) = -2$ dla $x = -3$, $h(x) = 1$ dla $x \in \langle 2; 4)$
6.9. a) $x = -5$ lub $x = 7$ b) $x = -6$ c) $x = -4$ lub $x = 2$, lub $x = 6$ d) $x = -3$ lub $x = 0$, lub $x = 3$, lub $x = 5$
6.10. a) 16 s b) 20 km/h c) po 5 s **6.11.** najniższy w roku 2008, najwyższy w roku 2003
6.12. a) $D = \langle -2; 2\rangle$, $ZW = \langle -5; 3\rangle$, wartość najmniejsza: -5 dla $x = 2$, wartość największa: 3 dla $x = -2$ b) $D = \langle -5; 5\rangle$, $ZW = \langle -5; 1\rangle$, wartość najmniejsza: -5 dla $x = 5$, wartość największa: 1 dla $x \in \langle -2; 1\rangle$ c) $D = \langle -6; 5)$, $ZW = (-6; -2\rangle \cup \langle 2; 4\rangle$, brak wartości najmniejszej, wartość największa: 4 dla $x = -2$ d) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -3; 3\rangle$, wartość najmniejsza: -3 dla $x = 2$, wartość największa: 3 dla $x = -2$ e) $D = \langle -4; 2\rangle$, $ZW = \langle -3; 3\rangle$, wartość najmniejsza: -3 dla $x = -4$, wartość największa: 3 dla $x = 2$ f) $D = \langle -4; 2\rangle$, $ZW = \langle 0; 6\rangle$, wartość najmniejsza: 0 dla $x = -3$, wartość największa: 6 dla $x = -1$ **6.13.** a) wartość najmniejsza: -3 dla $x = 1$, wartość największa: -1 dla $x = 0$ b) wartość najmniejsza: -3 dla $x = -5$, wartość największa: 1 dla $x \in \langle -2; 0\rangle$ c) wartość najmniejsza: -2 dla $x = 2$, wartość największa: 4 dla $x = -2$ d) wartość najmniejsza: -3 dla $x = 2$, wartość największa: 2 dla $x = -1$ e) wartość najmniejsza: 1 dla $x \in \langle -1; 1\rangle$, wartość największa: 3 dla $x = 2$ f) wartość najmniejsza: 1 dla $x = 1$, wartość największa: 6 dla $x = -1$ **6.16.** a) 4 b) 2 c) 1 d) 0 **6.17.** a) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2)$, 1 rozwiązanie dla $m = -2$, 2 rozwiązania dla $m \in (-2; \infty)$ b) 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-2, 2\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-2; 2)$
c) 0 rozwiązań dla $m = 0$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ d) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0\rangle \cup (4; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m = 4$, 2 rozwiązania dla $m \in (0; 4)$ e) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2)$, 1 rozwiązanie dla $m \in \{-2\} \cup (4; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in (-2; 4\rangle$ f) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in \langle -2; 1) \cup \{4\}$, 2 rozwiązania dla $m \in \langle 1; 2) \cup (3; 4)$, 3 rozwiązania dla $m \in \langle 2; 3\rangle$ **6.18.** a) nie, tak b) nie, nie c) tak, nie d) tak, tak **6.19.** 3 razy **6.20.** 3 razy

s. 238

1. P, P, P **2.** $D = \langle -5; 5\rangle$, $ZW = \langle -5; 1\rangle$, wartość najmniejsza: -3 dla $x = 4$, wartość największa: 1 dla $x = 1$ **3.** $D = (-3; 4)$, $ZW = (-1; 4\rangle$, wartość największa: 4 dla $x = 2$, wartość najmniejsza: 1 dla $x = -1$ **5.** $m \in \{-2\} \cup \langle 1; 2\rangle$

s. 242

7.1. B **7.2.** D **7.3.** C **7.4.** a) 1 b) -2, 3 oraz każda liczba z przedziału $\langle 0; 1\rangle$ c) -2, 0, 2, 3 d) -2, 2, 6 e) -2 f) -2, 2 **7.6.** a) 2 b) 6 c) $\sqrt{6}$ d) 2 e) $\frac{2}{\pi}$ f) 10^{-4} **7.7.** a) -1, 3 b) -2, 0 c) 0, 1 d) -5, -1, 2 **7.8.** a) -3, 11 b) brak miejsc zerowych c) -4, -2, 2, 4 d) -1, 3 **7.9.** a) $-\frac{1}{3}$ b) -3 c) -2, 0 d) brak miejsc zerowych e) -6, 4 f) 1 **7.10.** a) 0 b) brak miejsc zerowych c) 1, 5 d) 5 e) 1 f) 7 **7.11.** a) $-\frac{5}{7}$ b) brak miejsc zerowych c) brak miejsc zerowych d) 2 e) 1 f) -5 **7.12.** $f(3) = 3^{11} \cdot 3 - 9^6 = 3^{12} - \left(3^2\right)^6 = 3^{12} - 3^{12} = 0$ **7.13.** $D = \langle 3; \infty)$, $-3 \notin D$ **7.15.** a) -2, $\frac{1}{3}$ b) -3, 3 c) -1, 2 d) 2 e) $\log_2 7$ f) log 2, log 3 **7.16.** np. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ **7.17.** $m = -2$ **7.18.** $m = -3$ **7.19.** $k = -8$ **7.20.** a) I. $m \in \mathbf{R} - \{0\}$ II. $m = 0$ b) I. $m \in \mathbf{R} - \{1\}$ II. $m = 1$ c) I. $m \in \mathbf{R} - \{-2\}$ II. $m = -2$ d) I. $m \in \mathbf{R} - \{3\}$ II. $m = 3$ **7.21.** a) $m > 3$ b) $m > 15$ c) $m < -4$ d) $m < 1$ **7.22.** $m < -\frac{6}{5}$. *Wskazówka*: $D = \left\langle \frac{3}{5}; \infty \right)$, zatem $-\frac{m}{2} > \frac{3}{5}$. **7.23.** $m \in (0; 5)$

s. 245

1. F, P, P **2.** -5, -1, 5 **3.** brak miejsc zerowych **4.** $m = 7$ lub $m = -5$ **5.** -5, 1

s. 251

8.1. B **8.2.** A **8.3.** D **8.4.** a) w latach 1950–1980 b) w roku 1960 **8.5.** spadek poniżej 2%: USA w 1998 r., Japonia od 1992 r. (w 1999 r. brak danych), UE od 1997 r.; najwyższa wartość: USA – w 1990 r. ok. 5,5% **8.6.** a) I. $x \in (1; \infty)$ II. $x \in (-\infty; 1\rangle$ III. $x \in (-\infty; 3)$ IV. $x \in \langle 0; \infty)$ b) I. $x \in (-1; 2)$ II. $x \in \langle -3; -1\rangle \cup \langle 2; 3\rangle$ III. $x \in \langle -3; 3\rangle - \{0\}$ IV. $x \in \langle -3; 3\rangle$ c) I. $x \in (2; \infty)$ II. $x \in (-\infty; 2\rangle$ III. $x \in (-\infty; 4)$ IV. $x \in \{-1\} \cup \langle 1; \infty)$ **8.7.** a) $w(x) > 0$ dla $x \in (-2; 0) \cup (2; 3)$, $w(x) \leqslant 0$ dla $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 0; 2\rangle \cup \langle 3; \infty)$ b) $z(x) > 2$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (4; \infty)$, $z(x) \leqslant 0$ dla $x \in \langle -2; 3\rangle$, $z(x) < 4$ dla $x \in (-4; 5)$ c) $m(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$, $m(x) < 0$ dla $x \in (-2; 2)$, $m(x) \leqslant -1$ dla $x \in \langle -1; 1\rangle$ **8.9.** a) tak b)–d) nie **8.10.** a) tak b), c) nie **8.11.** a) malejąca w przedziale $(-\infty; -1\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -1; \infty)$ b) rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -2\rangle$ i $\langle -1; 1\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -2; -1\rangle$, stała w przedziale $\langle 1; \infty)$ c) rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$ d) rosnąca w przedziale $\langle -3; 1\rangle$, malejąca w każdym z przedziałów $\langle 1; 2)$ i $\langle 2; 3)$ e) rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1\rangle$ i $\langle 1; \infty)$, malejąca w przedziale $\langle -1; 1\rangle$ f) malejąca w każdym

z przedziałów $(-\infty; -3\rangle$ i $\langle 2; \infty)$, rosnąca w przedziale $\langle -3; 2\rangle$ g) stała w każdym z przedziałów $(-\infty; -4\rangle$ i $\langle 4; \infty)$, malejąca w przedziale $\langle -4; 0\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 0; 4\rangle$ h) malejąca w każdym z przedziałów $(-4; -3\rangle$ i $\langle -1; 1\rangle$, stała w każdym z przedziałów $\langle -3; -1\rangle$ i $\langle 1; 3\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 3; 6)$ i) rosnąca w przedziale $(-\infty; -2\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -2; \infty)$ j) malejąca w przedziale $(-\infty; 1\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 1; \infty)$ **8.12.** a) funkcja rosnąca b) funkcja rosnąca w latach 1950–1980, malejąca w latach 1980–2010 **8.14.** a) jedna b) jedna c) sześć d) dziesięć **8.15.** a) nie b) nie c) tak d) nie

s. 257

1. F, P, F **2.** $x \in \langle -4; -3) \cup (0; 5)$ **3.** malejąca w każdym z przedziałów $\langle -4; -2\rangle$ i $\langle 2; 8\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -2; 2\rangle$ **5.** Taka funkcja jest niemalejąca lub nierosnąca, czyli jest monotoniczna.

s. 264

9.1. D **9.2.** A **9.3.** B **9.4.** a) nie b) tak c) nie **9.5.** 720 **9.6.** 21 km/h **9.7.** o 7^{30} **9.8.** nie **9.9.** po zwiększeniu na 25 dni; po zmniejszeniu na 40 dni; wysokość składki: 300 zł **9.10.** $\frac{pt}{s}$ miesięcy **9.11.** $\frac{m}{60h}$ km **9.12.** o 20 zł **9.13.** 12 min **9.14.** 18 godz. i 40 min **9.15.** 8 godz. **9.16.** $\frac{st}{s+t}$ dni **9.17.** pierwsza: 2 godz., druga: 1 godz. **9.19.** a) 2 b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{4}$ d) Nie ma takiego a. **9.21.** a) $(-1, -6), (2, 3), (-2, -3), (3, 2), (-3, -2), (6, 1), (-6, -1), (1, 6)$ b) $(1, 8), (-1, -8), (2, 4), (-2, -4), (4, 2), (-4, -2), (8, 1), (-8, -1)$ c) $(1, 12), (-1, -12), (2, 6), (-2, -6), (6, 2), (-6, -2), (3, 4), (-3, -4), (4, 3), (-4, -3), (12, 1), (-12, -1)$ d) $(1, -9), (-1, 9), (3, -3), (-3, 3), (9, -1), (-9, 1)$

s. 267

1. F, P, F **2.** Patrz tabela po prawej.
3. $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 2; \infty)$ **4.** po 6 godz. i 15 min
5. a) $\frac{4}{3}p$ b) $\frac{2}{3}p$ c) $\frac{10}{9}p$

x	3	6	2	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
y	2	1	3	12	4

s. 271

10.1. D **10.2.** B **10.3.** C **10.4.** b) $D = (-\infty; 4) - \{-2\}$, $ZW = (-2; \infty)$, brak wartości najmniejszej, brak wartości największej; miejsca zerowe: $-3, -1$; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 4)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; -2) \cup (-2; -1)$; funkcja malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$ i $\langle 3; 4)$, rosnąca w przedziale $(-2; 1\rangle$, stała w przedziale $\langle 1; 3\rangle$; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2\rangle$, 1 rozwiązanie dla $m \in (2; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in (-2; 1\rangle$, 3 rozwiązania dla $m \in (1; 2)$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 2$ **10.5.** a) $D = \langle 0; 1\rangle \cup (4; \infty)$, $ZW = \langle 0; 1\rangle \cup (2; \infty)$; miejsce zerowe: 0; $f(x) > 0$ dla $x \in (0; 1\rangle \cup (4; \infty)$, funkcja nie przyjmuje wartości ujemnych; brak wartości największej, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$; funkcja jest rosnąca; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0) \cup (1; 2\rangle$, 1 rozwiązanie dla $m \in \langle 0; 1\rangle \cup (2; \infty)$

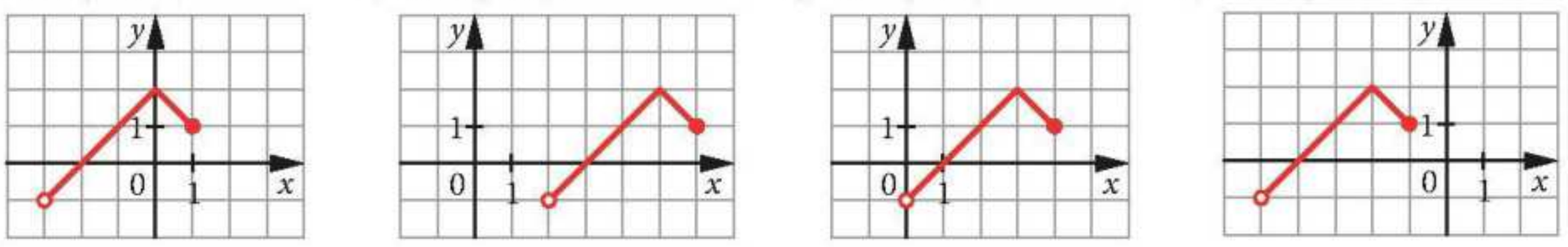
b) $D = (-6; -2) \cup \langle 1; 3\rangle$, $ZW = (-3; -1) \cup \langle 2; 6\rangle$; brak miejsc zerowych; $f(x) > 0$ dla $x \in \langle 1; 3\rangle$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-6; -2)$; wartość największa: 6 dla $x = 1$, brak wartości najmniejszej; funkcja nie jest monotoniczna, ale jest malejąca w każdym z przedziałów $(-6; -2)$ i $\langle 1; 3\rangle$; $f(x) = m$ ma:
0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle -1; 2) \cup (6; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-3; -1) \cup \langle 2; 6\rangle$
c) $D = (-\infty; -1) \cup (0; 2)$, $ZW = (-\infty; -1) \cup (0; 2)$; brak miejsc zerowych; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -1)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 2)$; brak wartości największej, brak wartości najmniejszej; funkcja nie jest monotoniczna, ale jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$ i $(0; 2)$; $f(x) = m$ ma:
0 rozwiązań dla $m \in \langle -1; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$ **10.9.** Największa różnica, równa 10, jest w kwietniu, maju, lipcu i sierpniu. **10.12.** a) $f(x) = g(x)$ dla $x = 1$, $f(x) < g(x)$ dla $x \in (-\infty; 1)$, $f(x) > g(x)$ dla $x \in (1; \infty)$ b) $f(x) = g(x)$ dla $x = -1$, $f(x) < g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1)$, $f(x) > g(x)$ dla $x \in (-1; \infty)$ c) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1, 6\}$, $f(x) < g(x)$ dla $x \in (-1; 6)$, $f(x) > g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (6; \infty)$ d) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-3, 2, 4\}$, $f(x) < g(x)$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (2; 4)$, $f(x) > g(x)$ dla $x \in (-3; 2) \cup (4; \infty)$
10.16. a) $x \in (-2; -1) \cup (1; 2)$ b) $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle -2; 0) \cup (3; \infty)$ c) $x \in (0; 4) - \{1, 3\}$
d) $x \in (-3; -2) \cup (-1; 0\rangle \cup \langle 3; 5)$ **10.17.** $x \in (-6; -4)$

s. 276

1. F, F, P **2.** $D = \langle -6; 3\rangle$, $ZW = \langle -1; 3\rangle$; wartość największa: 3 dla $x = 1$, wartość najmniejsza: -1 dla $x = -3$; miejsca zerowe: $-4, -2, 3$; $g(x) < 0$ dla $x \in (-4; -2)$, $g(x) > 0$ dla $x \in \langle -6; -4) \cup (-2; 3)$; funkcja nie jest monotoniczna, natomiast: maleje w każdym z przedziałów $\langle -6; -3\rangle$ i $\langle 1; 3\rangle$, rośnie w przedziale $\langle -3; 1\rangle$; $g(x) = m$ ma 3 rozwiązania dla $m \in \langle 0; 2\rangle$
3. a) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$, miejsca zerowe: -4, 2, $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup \langle -2; 2)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-4; -2) \cup (2; \infty)$, brak wartości największej, brak wartości najmniejszej, funkcja nie jest monotoniczna, ale jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$ i $\langle -2; \infty)$
b) dla $m \in (-\infty; -1\rangle \cup (3; \infty)$ **5.** cztery miesiące (od maja do września)

s. 280

11.1. B **11.2.** A **11.3.** A **11.4.** *Wskazówka*: Punkty wykresu należy przesunąć: I. w prawo o 1 jednostkę, II. w lewo o 3 jednostki, III. w prawo o 2 jednostki, IV. w lewo o 5 jednostek.
11.5.
a) $D = (-3; 1\rangle$ b) $D = (2; 6\rangle$ c) $D = (0; 4\rangle$ d) $D = (-5; -1\rangle$



11.6. *Wskazówka*: Punkty wykresu należy przesunąć: I. w górę o 1 jednostkę, II. w dół o 1 jednostkę, III. w górę o 2 jednostki, IV. w dół o 3 jednostki. **11.7.** *Wskazówka*: Punkty wykresu $\frac{1}{x}$ należy przesunąć: a) w lewo o 1 jednostkę, b) w prawo o 2 jednostki, c) w górę o 3 jednostki,

d) w dół o 4 jednostki. **11.8.** *Wskazówka*: Należy przesunąć punkty wykresu: a) $\frac{6}{x}$ w lewo o 3 jednostki, b) $\frac{3}{x}$ w dół o 5 jednostek, c) $\frac{8}{x}$ w górę o 1 jednostkę, d) $\frac{2}{x}$ w prawo o 2 jednostki. **11.9.** *Wskazówka*: Punkty wykresu $\sqrt{x}$ należy przesunąć: a) w lewo o 1 jednostkę, b) w górę o 5 jednostek, c) w dół o 3 jednostki, d) w prawo o 4 jednostki. **11.10.** a) I. $g(x) = |x| + 7$ II. $g(x) = |x - 5|$ b) I. $g(x) = 2x + 4$ II. $g(x) = 2x - 13$ c) I. $g(x) = x^2 - 3x + 10$ II. $g(x) = x^2 - 13x + 43$ d) I. $g(x) = \frac{8x + 4}{x + 1}$ II. $g(x) = \frac{x - 8}{x - 4}$ e) I. $g(x) = 2^{x-4} + 7$ II. $g(x) = 2^{x-9}$ f) I. $g(x) = \log(x - 3) + 13$ II. $g(x) = \log(x - 8) + 6$ **11.11.** a) $D = \langle 0; 15\rangle$, $ZW = \langle 2; 8\rangle$ b) $D = \langle -6; 9\rangle$, $ZW = \langle 2; 8\rangle$ c) $D = \langle -5; 10\rangle$, $ZW = \langle -2; 4\rangle$ d) $D = \langle -5; 10\rangle$, $ZW = \langle 9; 15\rangle$ **11.12.** a) malejąca w przedziale $(-\infty; -1\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -1; \infty)$ b) malejąca w przedziale $(-\infty; -6\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -6; \infty)$ c), d) malejąca w przedziale $(-\infty; -3\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -3; \infty)$ **11.13.** a) 7 dla $x = -4$ b) 7 dla $x = 7$ c) 12 dla $x = -3$ d) -2 dla $x = -3$ **11.15.** $k = 3$ **11.16.** $f(x - k) = (x - k)^2 + 3 = x^2 - 2kx + k^2 + 3$. Zatem $-12 = -2k$ i $m = k^2 + 3$. Stąd $k = 6$ i $m = 39$.

s. 282

1. P, F, P **2.** *Wskazówka*: Punkty wykresu należy przesunąć: a) w prawo o 5 jednostek. b) w górę o 4 jednostki. **3.** -4, 1, 3 **4.** rosnąca w przedziale $(-\infty; 9\rangle$, stała w przedziale $\langle 9; 11\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 11; \infty)$

s. 287

12.1. D **12.2.** C **12.3.** D **12.4.** *Wskazówka*: Punkty wykresu należy przekształcić symetrycznie względem osi x. **12.5.** a) $D = (0; \infty)$, $ZW = (-\infty; 0)$ b) $D = \langle -3; 5\rangle$, $ZW = \langle -7; -2\rangle$ c) $D = \langle -4; \infty)$, $ZW = (-2; \infty)$ d) $D = (3; 9)$, $ZW = (-5; 4\rangle$ **12.8.** *Wskazówka*: Punkty wykresu należy przekształcić symetrycznie względem osi y.

12.10.

Pary funkcji, których wykresy są symetryczne względem osi x	Pary funkcji, których wykresy są symetryczne względem osi y
$f_1(x) = 2x - 3$ i $f_3(x) = -2x + 3$	$f_1(x) = 2x - 3$ i $f_2(x) = -2x - 3$
$g_1(x) = x^2 + 2x + 7$ i $g_4(x) = -x^2 - 2x - 7$	$g_1(x) = x^2 + 2x + 7$ i $g_2(x) = x^2 - 2x + 7$
$h_1(x) = 10^{x-2}$ i $h_2(x) = -10^{x-2}$	$h_1(x) = 10^{x-2}$ i $h_3(x) = 10^{-x-2}$

12.11. a) $D = \{-8, -6, 3\}$, $ZW = \{0, 2, 8\}$ b) $D = (-\infty; 0)$, $ZW = (0; \infty)$ c) $D = (-9; \infty)$, $ZW = (0; \infty)$ d) $D = \langle -9; -2\rangle$, $ZW = \langle -1; 3\rangle$ **12.12.** a) $x = -3$, $x = -2$, $x = 5$ b) $x = -5$, $x = 2$, $x = 3$ **12.13.** a) wartość najmniejsza: -5 dla $x = 1$, wartość największa: 3 dla $x = 5$ b) wartość najmniejsza: -3 dla $x = -5$, wartość największa: 5 dla $x = -1$ **12.14.** malejąca w przedziale $(-\infty; 1\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 1; \infty)$ **12.15.** $D = (-12; 3)$, malejąca w przedziale $(-12; -3\rangle$, stała w przedziale $\langle -3; 3\rangle$ **12.16.** Tak, wartość najmniejsza: 0, wartość największa: 4. **12.20.** a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4$, $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

s. 291

1. P, P, F **2.** Punkty wykresu należy przekształcić symetrycznie względem osi x. Funkcja $y = f(x)$: $D = \langle -3; 4\rangle$, $ZW = \langle -1; 2\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -3; -2\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -2; 1\rangle$, stała w przedziale $\langle 1; 4\rangle$. Funkcja $y = g(x)$: $D = \langle -3; 4\rangle$, $ZW = \langle -2; 1\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -3; -2\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -2; 1\rangle$, stała w przedziale $\langle 1; 4\rangle$. **3.** Punkty wykresu należy przekształcić symetrycznie względem osi y. Funkcja $y = f(x)$: $D = \langle -3; 4\rangle$, miejsca zerowe: -3, -1. Funkcja $y = h(x)$: $D = \langle -4; 3\rangle$, miejsca zerowe: 1, 3. **4.** *Wskazówka*: Narysuj funkcję, której dziedziną jest przedział $\langle -5; -1\rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle -2; 1\rangle$.

s. 299

13.1. F, P, P **13.2.** F, P, F **13.4.** Punkt P jest środkiem odcinka AB. **13.5.** a) $\overrightarrow{DB}$ b) $\vec{0}$ c) $\overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{AB}$ **13.6.** a) $\overrightarrow{DB}$ b) $\overrightarrow{BD}$ c) $\vec{0}$ d) $\overrightarrow{AD}$ **13.9.** $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ **13.10.** $\vec{u} = -\frac{2}{3}(\vec{v} + \vec{w})$ **13.11.** $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BE}$ **13.12.** a) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AS}$ b) $\overrightarrow{AS}$ **13.13.** $\overrightarrow{KL} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DC}$ **13.18.** $m = 3$, $k = -5$ **13.19.** F, P, P, F, P, P **13.21.** *Wskazówka*: Zauważ, że $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u}$ oraz $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{v}$ i rozwiąż odpowiedni układ równań.

s. 302

1. P, F, F **2.** a) $\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AC}$ c) $\vec{0}$ **4.** $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a}$, $\vec{c} = -\frac{4}{3}\vec{a}$ **5.** $k = m = 2$

s. 312

14.1. a) $\overrightarrow{AB} = [3, 2]$ b) $\overrightarrow{AB} = [4, 1]$ c) $\overrightarrow{AB} = [-2, 0]$ d) $\overrightarrow{AB} = [0, 4]$ **14.2.** a) $P = (3, 1)$ b) $P = (2, -1)$ c) $P = (-2, -2)$ d) $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **14.3.** a) $K = (2, -4)$ b) $K = (2, 2)$ c) $K = (3, -2)$ d) $K = (5, -5)$ **14.4.** a) $[5, 0]$ b) $[0, 1]$ c) $[-3, 0]$ d) $\left[0, -2\frac{1}{2}\right]$ **14.5.** a) $S = (-1, 2)$ b) $S = (0, 3)$ c) $S = (4, 3)$ d) $S = (1, 4)$ **14.6.** a) $B = (4, 8)$ b) $B = (-1, 5)$ c) $B = \left(6, \frac{2}{3}\right)$ d) $B = \left(4\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$ **14.7.** $C = (-10, 8)$, $D = (0, -8)$ **14.8.** $B = (0, -4)$, $C = (2, 2)$, $D = (-2, 2)$ **14.9.** a) współliniowe b) niewspółliniowe c) niewspółliniowe **14.10.** a) $x = 10$ b) $y = -2$ **14.11.** a) $[2, -11]$ b) $[6, -5]$ c) $[-6, -3]$ d) $\left[5, \frac{1}{2}\right]$ **14.12.** a) $D = (-2, -2)$ b) $D = (-2, 0)$ c) $D = (-5, -2)$ d) $D = \left(0, -\frac{2}{5}\right)$ **14.13.** a) $k = 3$ b) $k = -\frac{1}{2}$ c) Nie ma takiego k. d) $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **14.14.** a) $\vec{c} = [-2, 3]$ b) $\vec{c} = [5, -9]$ c) $\vec{c} = \left[-7, 12\frac{1}{2}\right]$ d) $\vec{c} = \left[-5\frac{1}{2}, 9\right]$ **14.15.** a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5$ b) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5$ c) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3\sqrt{5}$ d) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{13}$ **14.16.** a) $[2, -3]$, $\sqrt{13}$ b) $[10, 1]$, $\sqrt{101}$ c) $[-6, -3]$, $3\sqrt{5}$ d) $[-8, 4]$, $4\sqrt{5}$ **14.17.** $2\sqrt{10}$ **14.20.** $B = (10, 3)$, $C = (6, 7)$, $D = (-2, 6)$ **14.23.** $5\sqrt{3}$

s. 314

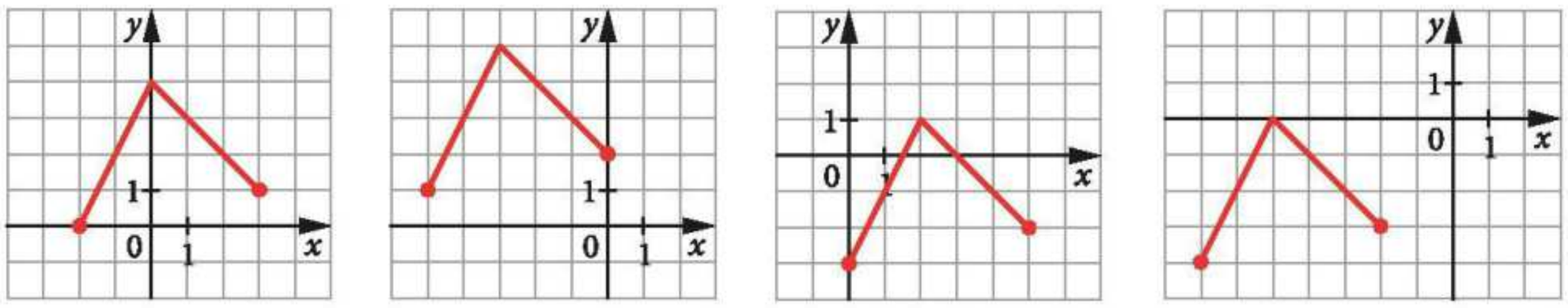
1. P, F, P **2.** $P = \left(-4\sqrt{3}, 7\sqrt{2}\right)$ **3.** nie **4.** $C = (3, 6)$, 60

s. 318

15.1. C **15.2.** C **15.3.** C **15.4.** a) $M = (2, -1)$ b) $M = \left(2, \sqrt{5}\right)$ c) $M = (0, -5)$ d) $M = \left(0, -9 - \sqrt{3}\right)$ **15.5.** $(-1, 2)$ **15.6.** a) $M = (2, -9)$ b) $M = (4, 7)$ c) $M = \left(7, 5 - \sqrt{3}\right)$ d) $M = (2, 13)$

15.7.

a) b) c) d)



15.8. *Wskazówka*: Punkty wykresu należy przekształcić następująco:

a) symetria względem osi x, a następnie przesunięcie o wektor $[0, 2]$, $D = \langle -3; 3\rangle$, $ZW = \langle -1; 1\rangle$,

b) symetria względem osi y i przesunięcie o wektor $[0, -3]$, $D = \langle -3; 3\rangle$, $ZW = \langle -2; 0\rangle$,

c) symetria względem osi x i przesunięcie o wektor $[1, 0]$, $D = \langle -2; 4\rangle$, $ZW = \langle -3; -1\rangle$,

d) symetria względem osi y i przesunięcie o wektor $[0, 4]$, $D = \langle -3; 3\rangle$, $ZW = \langle 5; 7\rangle$.

15.9. *Wskazówka*: Punkty wykresu należy przekształcić następująco:

a) symetria względem osi x, a następnie przesunięcie o wektor $[1, 2]$, rosnąca w przedziale $(-\infty; 1\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 1; \infty)$, b) symetria względem osi x, a następnie przesunięcie o wektor $[1, -2]$, rosnąca w przedziale $(-\infty; 1\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 1; \infty)$, c) symetria względem osi x, a następnie przesunięcie o wektor $[-3, 1]$, rosnąca w przedziale $(-\infty; -3\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -3; \infty)$, d) symetria względem osi x, symetria względem osi y, a następnie przesunięcie o wektor $[0, 3]$, rosnąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 0; \infty)$. **15.10.** a) $D = \langle 2; \infty)$ b) $D = \langle -3; \infty)$ c) $D = \mathbf{R} - \{2\}$ d) $D = \mathbf{R} - \{-3\}$ **15.11.** a) $D = \langle -5; \infty)$ b) $D = \langle 2; \infty)$ c) $D = \mathbf{R} - \{-4\}$ d) $D = \mathbf{R} - \{1\}$ **15.13.** $D = \langle 6; 10\rangle$, $ZW = \langle 0; 2\rangle$ **15.14.** -32 dla $x = 15$ **15.15.** wartość największa: -5 dla $x = 3$, wartość najmniejsza: -9 dla $x = 0$

15.16. Patrz tabela po prawej.

Wartość m	Liczba rozwiązań równania $g(x) = m$
$m \in (-\infty; 5)$	0
$m = 5$	1
$m \in (5; \infty)$	2

15.17. $D = \langle -6; 1\rangle$, funkcja malejąca w każdym z przedziałów $\langle -6; -4\rangle$ i $(-4; 1\rangle$ **15.18.** *Wskazówka*: Punkty wykresu należy przekształcić przez symetrię względem osi y i przesunąć o wektor $[0, -2]$.

15.19. $x \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ **15.20.** $m \in (1; 2)$

15.22. a) $(-5; 4)$ b) $\langle 0; 4\rangle$ c) 2 rozwiązania

s. 321

1. P, F, P **2.** -2 **3.** $\left(-1\frac{1}{2}; 3\right)$ **4.** 1 rozwiązanie

s. 322

1. C **2.** A **3.** B **4.** B **5.** B **6.** D **7.** C **8.** A **9.** A **10.** C **11.** B **12.** D
13. A **14.** A **15.** C **16.** D **17.** D **18.** A **19.** B **20.** A **21.** B **22.** B **23.** B
24. C **25.** B **26.** F, P, P **27.** F, P, F **28.** P, F, P **29.** F, F, F **30.** F, F, P **31.** P, F, P
32. F, P, F **33.** F, F, P **34.** P, F, P **35.** P, F, P **36.** P, F, P **37.** F, P, P **38.** P, F, P
39. P, P, P **40.** $f(1) = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $f(2) = 7 + 4\sqrt{3}$, $f\left(2\sqrt{3}\right) = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$ **41.** a) $D = \mathbf{R} - \{0\}$
b) $D = \langle 2; \infty)$ c) $D = (0; \infty)$ d) $D = \langle 0; 2)$ e) $D = (-\infty; 3)$ f) $D = \langle 0; 1)$ **42.** a) $D = \mathbf{R} - \{7\}$
b) $D = \mathbf{R} - \{-3, 1\}$ c) $D = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 10; \infty)$ d) $D = \mathbf{R}$ e) $D = \left\langle -\frac{2}{3}; \infty\right) - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ f) $D = \langle 1; 5\rangle$
43. a) $ZW = \{-8, -2, 1, 16\}$ b) $ZW = \left\{-1, \frac{1}{5}, 0\right\}$ c) $ZW = \{0, 1, 8\}$ d) $ZW = \{0, 1, 16\}$
44. -25, -4 **46.** a) $D = \{-1, 1, 2\}$ b) $D = \{1, 7, 10\}$ c) $D = \left\{0, \frac{1}{2}, 8\right\}$ d) $D = \{-1, 1, 2\}$
47.

x	20	21	22	23	24	25
y	42	32	36	24	60	31

48. a) 2 b) $-6, -3, 0$ c) $-5, 7$
d), e) brak miejsc zerowych f) 8
49. $||x - 1| + 1| \geqslant 0$, więc $f(x) \geqslant 2$
50. f: malejąca, g: rosnąca **51.** $D = \langle -1; 19\rangle$, $ZW = \langle -4; -2\rangle$ **52.** *Wskazówka*: Punkty wykresu należy przesunąć o wektor $[-2, -3]$. **53.** $f(x - 4) > 0$ dla $x \in (2; 9)$, $f(x - 4) < 0$ dla $x \in (9; 13)$ **54.** Funkcja $y = g(-x)$ jest malejąca w przedziale $\langle -6; -4\rangle$, stała w przedziale $\langle -4; -3\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle -3; 3\rangle$. **55.** wartość największa: 12 dla $x = -4$, wartość najmniejsza: -3 dla $x = 4$ **56.** $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$. *Wskazówka*: Zaznacz punkt F należący do odcinka AC taki, że $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FC}$ i zauważ, że $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AD}$ oraz $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB}$.
57. $A' = (8, -9)$, $B' = (16, -3)$, $C' = (5, -4)$ **58.** a) z 90 elementów b) $ZW = \{1, 2, 3, \ldots, 18\}$
c) wartość najmniejsza: 1 dla argumentu 10, wartość największa: 18 dla argumentu 99
e) dla argumentów: 13, 22, 31, 40 **59.** a) $V(x) = x^2(20 - 2x)$, $D = (0; 10)$ b) $P(x) = 80x - 6x^2$, $D = (0; 10)$ **63.** a) $D = \langle -3; 3\rangle$, $ZW = \langle -4; 3\rangle$; wartość najmniejsza: -4 dla $x \in \langle -3; -1\rangle$; wartość największa: 3 dla $x = 3$; miejsce zerowe: 1; $f(x) > 0$ dla $x \in (1; 3\rangle$, $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -3; 1)$; funkcja jest stała w przedziale $\langle -3; -1\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -1; 3\rangle$; $f(x) = m$ ma: nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = -4$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-4; 3\rangle$, 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -4) \cup (3; \infty)$ **64.** b) $ZW = \langle -1; 5\rangle$ c) $-3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4}$ **65.** b) 1 rozwiązanie c) $\langle 0; 8\rangle$
67. $x \in \langle -2; 7)$ **68.** a) nie, nie b) o ok. 269%, o ok. 289% c) 230 zł, wzrosła o ok. 5% d) zimą
69. $D = (-7, -6)$ **70.** $P = (0, 5)$ **71.** $obw = 5\sqrt{5} + \sqrt{85}$, $P = 10$

4. Funkcja liniowa

s. 341

1.1. B **1.2.** C **1.3.** D **1.4.** a) $y = 2\pi r$, 2π b) $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $s = 80t$, 80

1.5. a) $a = -9$ b) $a = \frac{11}{7}$ c) $a = -\frac{\pi}{2}$ d) $a = \sqrt{5}$ **1.6.** 1 **1.8.** a) B i C b) D c) C i D d) B, C i D **1.9.** a) $m > \frac{1}{2}$ b) $m < \frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $m > 3\pi$ d) $m > 0{,}26$ e) $m > -\frac{9}{25}$ f) $m > -\frac{2}{3}$

1.10. a) $m < -\frac{2}{7}$ b) $m < -\sqrt{\frac{5}{3}}$ c) $m > \frac{8}{3}$ d) $m < 1{,}9$ e) $m < -\frac{27}{8}$ f) $m < -\frac{1}{4}$

1.11. a) malejąca dla $m > 9$, rosnąca dla $m < 9$, stała dla $m = 9$ b) malejąca dla $m < 4$, rosnąca dla $m > 4$, stała dla $m = 4$ c) malejąca dla $m > -2$, rosnąca dla $m < -2$, stała dla $m = -2$ d) malejąca dla $m \in (-3; 3)$, rosnąca dla $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$, stała dla $m \in \{-3, 3\}$ e) malejąca dla $m > 1$, rosnąca dla $m < 1$, stała dla $m = 1$ f) malejąca dla $m \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$, stała dla $m \in \{-2, 2\}$ **1.12.** Wszystkie zdania są prawdziwe. **1.14.** a) $x < -3$ b) $x > -3\pi$

1.15. a) $ZW = \langle -2; 3\rangle$, $f(0) = 0$, funkcja rosnąca, wartość najmniejsza: -2 dla $x = -6$, wartość największa: 3 dla $x = 9$, $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in \langle -2; 3\rangle$, nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$ b) $ZW = (-\infty; 6\rangle$, $f(0) = 0$, funkcja rosnąca, brak wartości najmniejszej, wartość największa: 6 dla $x = 2$, $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in (-\infty; 6\rangle$, nie ma rozwiązań dla $m \in (6; \infty)$ c) $ZW = \langle -1; 2)$, $f(0) = 0$, funkcja malejąca, wartość najmniejsza: -1 dla $x = 4$, brak wartości największej, $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in \langle -1; 2)$, nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1) \cup \langle 2; \infty)$ d) $ZW = \langle -1; \infty)$, $f(0) = 0$, funkcja rosnąca, wartość najmniejsza: -1 dla $x = -5$, brak wartości największej, $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla $m \in \langle -1; \infty)$, nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1)$ **1.16.** a) $ZW = \langle 0; \infty)$, malejąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 0; \infty)$, brak wartości największej, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$ b) $ZW = (0; \infty)$, malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, rosnąca w przedziale $(0; \infty)$, brak wartości największej, brak wartości najmniejszej c) $ZW = \langle 0; 6\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -4; 0\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 0; 6\rangle$, wartość największa: 6 dla $x = 6$, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$ d) $ZW = \langle 0; 3)$, malejąca w przedziale $(-9; 0\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 0; 6\rangle$, brak wartości największej, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$

s. 343

1. P, F, F **3.** $m = 4$ lub $m = -1$ **4.** b) brak wartości największej, wartość najmniejsza: $-\frac{5}{2}$ dla $x = 5$ c) $x \in (-6; -2)$ **5.** $m \in \left(-\sqrt{3} + 1; \sqrt{3} + 1\right)$

s. 350

2.1. D **2.2.** D **2.3.** B **2.5.** a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = 2x - 3$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ d) $f(x) = -\frac{3}{2}x - 4$ **2.7.** a) $x = \frac{2}{5}$ b) $x = 3$ c) $x = \sqrt{2}$ d) $x = 0$ e) brak miejsc zerowych f) $x = \sqrt{3}$ **2.8.** a) $x = -5$ b) $x = 3$ c) brak miejsc zerowych d) $x = -3$, $x = 5$ e) $x = -11$, $x = 3$ f) $x = -2$, $x = 3$ **2.9.** a) $(2, 0)$, $(0, -6)$ b) $(-7, 0)$, $\left(0, 3\frac{1}{2}\right)$ c) $(0, 0)$ d) $\left(\frac{1}{10}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$

e) Wykres pokrywa się z osią x. f) $\left(\frac{4}{5}, 0\right), \left(0, -1\frac{3}{5}\right)$ **2.10.** a) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$, miejsce zerowe: $x = 6$, funkcja malejąca, $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 6)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (6; \infty)$ b) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$, miejsce zerowe: $x = 10$, funkcja rosnąca, $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; 10)$, $f(x) > 0$ dla $x \in (10; \infty)$ c) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \mathbf{R}$, miejsce zerowe: $x = \frac{2}{3}$, funkcja rosnąca, $f(x) < 0$ dla $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$, $f(x) > 0$ dla $x \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$ d) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \{4\}$, brak miejsc zerowych, funkcja stała, $f(x) = 4$ dla $x \in \mathbf{R}$

2.12. $f(1) = -1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f(-1) = 3$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2$ **2.13.** $x > -3$ **2.14.** $x \leqslant 4\frac{2}{3}$ **2.15.** $x < 2$ **2.16.** a) C, D b) A, B, D **2.17.** a) $m = -1$ b) $m = 1$ c) $m = 3$ d) $m = 0$ **2.18.** $m = -3$ **2.19.** a) $m = -1$, $f(x) = -3x + 8$ b) $m = -\frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{2}{5}x + 4$ c) $m = \frac{1}{2}$, $f(x) = 5x + 11$ d) $m = 3$, $f(x) = -2x - 9$ **2.20.** $k = 8$ **2.21.** a) $x = \frac{5}{3}$ b) A należy, B nie należy c) malejąca **2.22.** a) $x = 1{,}6$ b) $\sqrt{2}$ c) $x \geqslant 8$ **2.23.** $m \in (-1; 2)$ **2.24.** $m \in (-\infty; -5)$ **2.25.** $k \in (1; 7)$ **2.26.** $k \in (-\infty; -1)$ **2.27.** $k \in (1; \infty)$ **2.28.** a) $ZW = \langle 1; \infty)$ b) $ZW = \langle 2; \infty)$ c) $ZW = \langle -7; \infty)$ d) $ZW = \langle -4; \infty)$ e) $ZW = \langle 1; \infty)$ f) $ZW = \langle -3; \infty)$ **2.29.** a) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (7; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 7$, 4 rozwiązania dla $m \in (0; 7)$ b) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (2; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 2$, 4 rozwiązania dla $m \in (0; 2)$ c) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (6; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 6$, 4 rozwiązania dla $m \in (0; 6)$ d) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (5; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 5$, 4 rozwiązania dla $m \in (0; 5)$ **2.30.** a) $m = -7$ lub $m = 7$ b) $m = -4$ c) $m = 3$ d) Nie ma takiego m.

s. 354

1. F, F, P **2.** pas pomiędzy prostymi $y = -\frac{1}{2}x - 2$ i $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ **3.** a) $x = \frac{3}{2}$ b) -6 c) $x < -1$ **4.** $(-3, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(13, 0)$, $(17, 0)$ **5.** b) tak, wartość 3 dla $x = 0$ oraz $x = 4$ c) tak, wartość 0 dla $x = 2$

s. 359

3.1. C **3.2.** D **3.3.** C **3.4.** a) $y = 4$ b) $y = -2$ c) $y = -2x - 9$ d) $x = 5$ e) $y = 5x - 7$ f) $y = 3\frac{3}{4}x - 5\frac{1}{4}$ **3.5.** a) $-5\frac{1}{3}$ b) -3 c) $3\left(2\sqrt{7} + 5\right)$ d) $2 - \sqrt{3}$ e) $-\frac{7\sqrt{3}}{12}$ f) $2 - \sqrt{2}$ **3.6.** a) $a = 4\left(\sqrt{3} - 1\right)$, $y = 4\left(\sqrt{3} - 1\right)x - 4\left(\sqrt{3} - 1\right)$ b) $a = -3$, $y = -3x + 5{,}5$ c) $a = 1 + \sqrt{2}$, $y = \left(1 + \sqrt{2}\right)x - 3$ d) $a = -\frac{3}{5}$, $y = -\frac{3}{5}x + 2\sqrt{3}$ e) $a = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 2$ f) $a = 2\left(\sqrt{5} - 1\right)$, $y = 2\left(\sqrt{5} - 1\right)x - 5$ **3.7.** a) $y = 4x - 1$ b) $y = -\frac{1}{2}x - 1$ c) $y = 12x + 4$ d) $y = -2x + 3$ e) $y = -3x + 7$ f) $y = -2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$ **3.9.** a) nie b) nie c) tak d) nie e) tak f) nie **3.10.** a) $y = -2$ b) $x = 3$ c) $x = 0$ d) $y = -1$ e) $x = 6$ f) $y = 1$ **3.11.** a) $m \neq 1$ b) $m \neq 1$ c) $m \neq 2$ d) $m \neq 5$ **3.12.** tak, $k = -2$ **3.13.** *Wskazówka*: Wyznacz najpierw równanie prostej AB. **3.14.** a) ok. 18^{25} b) ok. 18^{25} **3.15.** $f(t) = -50t + 120$, $t \in \left\langle 0; 2\frac{2}{5}\right\rangle$

3.16. a) $f(t) = \left|1{,}5 \cdot 10^8 - 3 \cdot 10^5 t\right|$, $t \geqslant 0$ b) 12^{08} c) 16^{10}

s. 362

1. P, P, P **2.** $y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{2}$ **3.** tak **4.** $k = -1$ lub $k = \frac{1}{3}$ **5.** ok. 9^{02}

s. 366

4.1. A **4.2.** C **4.3.** C **4.5.** a) $D = \langle 0; 1\rangle$, $y = 5x + 1$ b) $D = \langle 1; 2\rangle$, $y = 3x - 4$ c) $D = \langle -3; \infty)$, $y = 3$ **4.8.** a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -3\rangle \\ -2 & \text{dla } x \in (-3; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 2\rangle \\ 2 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty) \\ -x & \text{dla } x \in \langle -3; 3\rangle \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -x - 1 & \text{dla } x \in \langle -1; 1\rangle \\ x - 3 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$ **4.9.** a) rosnąca b) nierosnąca c) malejąca d) niemalejąca **4.10.** a) $a = -2$, $b = 4$ b) $a = 5$, $b = 1$ c) $a = -7$, $b = 3$ d) $a = 2$, $b = 2$ **4.11.** prawdziwe: A, B, C, F, G, fałszywe: D, E **4.12.** a) rosnąca b) malejąca c) nierosnąca d) rosnąca **4.13.** a) A: 4000 zł B: 3750 zł C: 6000 zł b) $A(x) = 0{,}2x$ dla $x \geqslant 0$, $B(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \langle 0; 5000\rangle \\ 0{,}25(x - 5000) & \text{dla } x \in (5000; \infty) \end{cases}$, $C(x) = \begin{cases} 0{,}2x & \text{dla } x \in \langle 0; 10\,000\rangle \\ 0{,}3x & \text{dla } x \in (10\,000; \infty) \end{cases}$ d) do 25 000 zł **4.14.** wartość najmniejsza: 0 dla $x = -\frac{1}{2}$, największa: 5 dla $x = -3$ lub $x = 2$ **4.15.** stała w przedziale $(-\infty; -1\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -1; 2\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 2; \infty)$ **4.16.** $m \in \{0\} \cup (3; \infty)$ **4.17.** $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -1; 3\rangle$; miejsce zerowe: 2; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (2; 3\rangle$; stała w każdym z przedziałów $(-\infty; -1\rangle$ i $(3; \infty)$, malejąca w przedziale $\langle -1; 3\rangle$; wartość największa: 3 dla $x \in (-\infty; -1\rangle \cup (3; \infty)$, wartość najmniejsza: -1 dla $x = 3$; $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in \langle -1; 3)$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 3$

s. 370

1. F, F, F **4.** Funkcja nie jest monotoniczna. **5.** $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$

s. 376

5.1. B **5.2.** D **5.3.** D **5.4.** P, P, P **5.6.** a) $y = x$ b) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ c) $y = 3\frac{1}{2}$ d) Nie ma równania w postaci kierunkowej. e) $y = x + \frac{1}{2}$ f) $y = -\frac{1}{2}x + 2$ **5.7.** a) $a = -1$ b) $a = 4$ c) $a = -\frac{2}{3}$ d) $a = \frac{\sqrt{2}}{5}$ **5.8.** a) $2x - y - 5 = 0$ b) $2x - 3y + 15 = 0$ c) $x + y = 0$ d) $4x + 14y - 3 = 0$ e) $x + 3y - 3 = 0$ f) $2x - 5y - 10 = 0$ **5.9.** a) tak b) nie c) tak d) nie e) tak f) tak **5.11.** a) (0, 3), (3, 0) b) (0, −2), (1, 0) c) (0, 3), (7, 0) d) (0, 2), (5, 0)

e) $\left(0, -\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ f) $(0, -2)$, $(-1, 0)$ **5.14.** a) dwie proste: $x = 0$ i $y = x$ b) dwie proste: $x = 2$ i $y = -1$ c) prosta $x = 3$ d) prosta $y = -4$ e) punkt $(1, -2)$ f) dwie proste: $x = 2$ i $x = -5$ g) punkt $(1, -3)$ h) prosta $x = 6$ **5.15.** 4 osie symetrii i środek symetrii **5.16.** a) I, III, IV b) I, III c) II, III, IV d) I, II, IV e) I, III, IV f) II, III **5.17.** a) $m > 0$ b) $m < 0$ **5.18.** a) Nie ma takiego m. b) $m \geqslant 3$ c) $m \leqslant 1$ d) $m \in \langle 1; 3\rangle$ **5.19.** a) $m \leqslant 0$ b) $m \leqslant -2$ c) $m \leqslant -1$ d) Nie ma takiego m. **5.20.** a) $m > 5$ b) $m \in (2; 4)$ c) $m > 2$ d) $m \in (-4; 1)$ **5.21.** a) $m = 7$ b) $m = -3$ c) Nie ma takiego m. d) $m = 3$ **5.22.** a) $m = 0$ b) Nie ma takiego m. c) $m = -3$ d) $m = 5$ **5.23.** $m \in \langle -5; 1\rangle$ **5.24.** $m \leqslant -\frac{1}{2}$

s. 379

1. F, F, P **2.** $(7, 0)$, $(0, 2)$ **3.** $m < 0$ **4.** prostokąt o polu 42 **5.** $m \in \langle -8; 5\rangle$

s. 383

6.1. B **6.2.** D **6.3.** A **6.6.** a) $y = -x + 1$ b) $y = -2x$ c) $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x - \frac{2}{3}$ d) $x = \frac{1}{5}$ e) $y = -7$ f) $y = x + 5$ **6.7.** $m = 4$ **6.8.** a) $m = 3$ b) $m = 2$ c) $m = -3$ d) $m = 0$ e) $m = -4$ f) $m = -\frac{1}{2}$ **6.9.** a) $y = -\frac{1}{3}x + 2$ b) $y = 2x - 5$ c) $x = 3$ d) $y = -2$ e) $y = -5x - 3$ f) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ **6.10.** $m = -\frac{1}{3}$ **6.11.** $k = -\frac{5}{2}$, punkt przecięcia: $\left(2\frac{4}{13}, -\frac{6}{13}\right)$ **6.12.** $m = -\frac{1}{3}$ lub $m = -1$ **6.13.** $m = -8$ lub $m = -\frac{2}{3}$ **6.14.** $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$ **6.15.** $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$ **6.16.** $k = 7{,}5$, $m = -13$ lub $k = -1{,}4$, $m = 4{,}8$

s. 385

1. P, F, P **2.** $k \perp m$, $p \perp l$, $r \parallel t$ **3.** $f(x) = -3x + 6$ **4.** $m = -1$ lub $m = 4$ **5.** $k = -\frac{13}{128}$, $m = \frac{3}{64}$

s. 390

7.1. D **7.2.** C **7.3.** A **7.4.** P, P, F **7.5.** a) $x = -8$, $y = -10$ b) $x = 1$, $y = -4$ c) $x = 2$, $y = -1$ d) $x = -2$, $y = 1$ **7.6.** a) $x = 2$, $y = -1$ b) brak rozwiązań c) $x = 2$, $y = 0$ d) nieskończenie wiele par liczb (x, y) spełniających równanie $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

7.7. a) układy oznaczone i ich rozwiązania: $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$, $x = -2$, $y = -3$; $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$, $x = 2$, $y = 5$; $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$, $x = 2$, $y = -1$; $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$, $x = 4$, $y = 3$; $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + y = 7 \end{cases}$, $x = 6$, $y = 1$

b) układ sprzeczny: $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ **7.8.** a) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$, $(3, 1)$ b) $\begin{cases} x + 4 = 0 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$, $(-4, 1)$

c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$, brak rozwiązań **7.9.** $k \in (2, \infty)$ **7.12.** a) parę prostych przecinających się

b) parę prostych przecinających się c) parę prostych przecinających się d) jedną prostą
7.13. $m = 2,\ k = 2$ **7.14.** $m = -15$ **7.15.** nie

s. 392

1. P, P, F **3.** $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$ **4.** np. $y = 3x - 1$ **5.** $k \neq -6,\ m \in \mathbf{R}$

s. 393

1. C **2.** B **3.** C **4.** C **5.** D **6.** B **7.** A **8.** C **9.** D **10.** A **11.** B **12.** C
13. C **14.** C **15.** C **16.** C **17.** B **18.** B **19.** A **20.** D **21.** D **22.** F, F, P
23. F, P, P **24.** P, F, F **25.** P, F, P **26.** P, P, F **27.** P, P, P **28.** F, P, P **29.** P, P, P
30. F, F, F **31.** $f(x) = 1\frac{2}{3}x - 5$ **32.** a) $y = -2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ **33.** $m \in \left(-\infty;\ 1\frac{1}{2}\right)$
34. $m = \frac{1}{2}$ **36.** a) $a = \frac{1}{2},\ b \in \langle -2;\ 2\rangle$ b) $a \in \langle 1;\ 2\rangle,\ b = 0$ **37.** a) $k \parallel l$ b) $k = l$
38. a) proste równoległe b) jedna prosta c) proste równoległe d) (3, 3) **39.** a) $x + y - 1 = 0$
b) $\sqrt{2}x + 3y + 2 = 0$ **40.** a) $-x + 2y - 5 = 0$ b) $x + 2y - 3 = 0$ **41.** a) $m = 2$ b) $m = 5$
42. $x = 3$ **44.** $m \in \left(-4;\ \frac{1}{3}\right) \cup (3;\ 8)$ **45.** $m = 3$ **46.** *Wskazówka*: Po rozwiązaniu układu równań $\begin{cases} (k+m)(-2) + k = 2 \\ (k-m)(-2) - m - 2 = 2 \end{cases}$ otrzymujemy $\begin{cases} k = -2 \\ m = 0 \end{cases}$. Ale wówczas układ jest nieoznaczony.
47. rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty;\ -1)$ i $(-1;\ \infty)$
48. a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty;\ -2) \\ 2x + 3 & \text{dla } x \in \langle -2;\ 1\rangle \\ 6 - x & \text{dla } x \in (1;\ \infty) \end{cases}$ **49.** a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty;\ -3\rangle \\ x + 2 & \text{dla } x \in (-3;\ 3) \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 3;\ \infty) \end{cases}$
c) stała w każdym z przedziałów $(-\infty;\ -3\rangle$ i $\langle 3;\ \infty)$, rosnąca w przedziale $(-3;\ 3)$ **50.** wartość największa: 0 dla $x \in \{-5, -1\}$, wartość najmniejsza: -3 dla $x \in \{-3, 2\}$ **51.** $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -2;\ 4\rangle$, miejsce zerowe: 3, $f(x) > 0$ dla $\langle -1;\ 3)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty;\ -1) \cup (3;\ \infty)$, wartość największa: 4 dla $x = -1$, wartość najmniejsza: -2 dla $x \in (-\infty;\ -1) \cup \langle 5;\ \infty)$.
Zdania A, B, C są prawdziwe. **52.** $(2, -1)$ **54.** $x \in (1;\ 8)$ **55.** $b \in (4;\ 10\rangle$ **56.** b) tak
c) $y = 2x - 6$ **57.** a) $g(x) = 2x + 4$, miejsce zerowe: -2 c) $x \in (-\infty;\ -2)$ **58.** a) $x = 4,\ x = 1\frac{3}{4}$
b) $x = 2$ c) $x \in \left(1\frac{3}{4};\ 4\right)$ d) $x \in (2;\ \infty)$ **59.** $m > 2$ **60.** $g(x) = 2x - 16$ **61.** $p = -2,\ q = 3$ lub $p = 2,\ q = -3$. *Wskazówka*: $(4p + 3q)(2p + q) = -1$. Ponieważ liczby p, q są całkowite, rozpatrujemy dwa przypadki: $\begin{cases} 4p + 3q = 1 \\ 2p + q = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} 4p + 3q = -1 \\ 2p + q = 1 \end{cases}$.

5. Funkcja kwadratowa

s. 406

1.1. D **1.2.** D **1.3.** C **1.4.** a) $y = x^2$ b) $y = \frac{1}{2}x^2$ c) $y = 6x^2$ d) $y = 18x^2$ e) $y = \pi x^2$
f) $y = 4\pi x^2$ **1.7.** a) $a = \frac{1}{2}$ b) $a = -1$ c) $a = 1$ d) $a < 0$ **1.9.** B, C, D **1.10.** a) $m = 5$
b) $m = 1$ c) $m = 1$ d) $m = -1$ **1.11.** a) $a = 2$ b) $a = -1$ c) $a = 6$ d) $a = 0{,}81$

1.12. $ZW = \mathbf{R}$, funkcja rosnąca **1.13.** wartość największa: 8 dla $x = -2$, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$ **1.14.** $x > -1$ **1.15.** $m \in (0;\ 3)$ **1.16.** a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 0 \\ -\frac{1}{2}x & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$

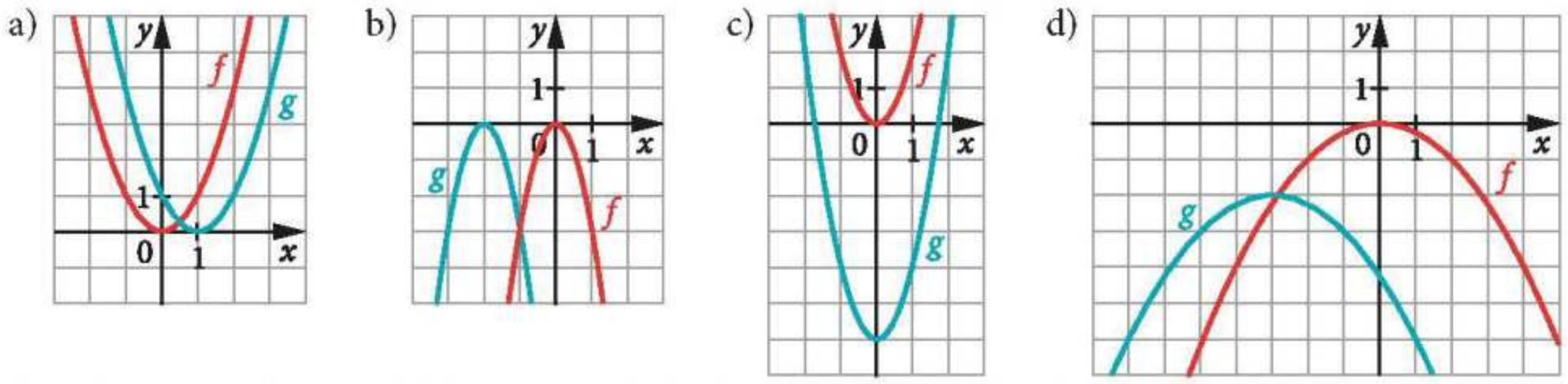
b) $f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{dla } x < -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{dla } -2 \leqslant x < 2 \\ -2 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$ **1.17.** Parabole nie przechodzą przez punkty leżące na osiach układu współrzędnych różne od punktu (0, 0).

s. 409

1. P, P, P **2.** wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$, brak wartości największej **3.** $m = 2$
4. $m = -1$ lub $m = 0$

s. 414

2.1. B **2.2.** D **2.3.** C **2.4.** a) $f(x) = 2(x - 14)^2 + 8$, $W = (14, 8)$ b) $f(x) = 2(x + 5)^2$, $W = (-5, 0)$ c) $f(x) = 2\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + 6$, $W = \left(\sqrt{3}, 6\right)$ d) $f(x) = 2(x + 5)^2 + 24$, $W = (-5, 24)$
2.5. a) $[0, 14]$ b) $[14, -3]$ c) $[-4, 22]$ d) $\left[-\sqrt{3}, 13 - \sqrt{3}\right]$
2.6.



2.7. a) $c = -3$ b) $c = -2$ lub $c = 2$ **2.8.** a) $c = 4$ b) $c = -2$ c) $c = -4$ **2.9.** a) $x = 0$ lub $x = 2$ b) $x = -5$ lub $x = -1$ c) $x = 2$ lub $x = 8$ d) $x = 0$ lub $x = 2$ **2.10.** a) $x = -4$ b) $x = -1$ c) $x = \sqrt{2} - 1$ d) $x = -3 + \sqrt{5}$ **2.11.** a) malejąca w przedziale $(-\infty;\ 2\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 2;\ \infty)$ b) rosnąca w przedziale $(-\infty;\ -7\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -7;\ \infty)$ c) malejąca w przedziale $(-\infty;\ 1\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 1;\ \infty)$ d) malejąca w przedziale $\left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right\rangle$, rosnąca w przedziale $\left\langle -\sqrt{3};\ \infty\right)$ e) rosnąca w przedziale $(-\infty;\ 3\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 3;\ \infty)$ f) malejąca w przedziale $\left(-\infty;\ -\sqrt{10}\right\rangle$, rosnąca w przedziale $\left\langle -\sqrt{10};\ \infty\right)$ **2.12.** a) $ZW = (-\infty;\ 5\rangle$, wartość największa: 5 dla $x = -1$ b) $ZW = \langle -7;\ \infty)$, wartość najmniejsza: -7 dla $x = 1$ c) $ZW = \langle 2;\ \infty)$, wartość najmniejsza: 2 dla $x = \pi$ d) $ZW = (-\infty;\ -1\rangle$, wartość największa: -1 dla $x = -3$ e) $ZW = (-\infty;\ -3\rangle$, wartość największa: -3 dla $x = -\frac{1}{2}$ f) $ZW = \langle 0;\ \infty)$, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 2$ **2.13.** a) 0 rozwiązań dla $m \in (5;\ \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m = 5$, 2 rozwiązania dla $m \in (-\infty;\ 5)$ b) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty;\ 0)$, 1 rozwiązanie dla $m = 0$, 2 rozwiązania dla $m \in (0;\ \infty)$ c) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty;\ 0)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (2;\ \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 2$, 4 rozwiązania dla $m \in (0;\ 2)$ d) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty;\ 0)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (1;\ \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 1$, 4 rozwiązania dla $m \in (0;\ 1)$

e) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-1\} \cup (4; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 4$, 4 rozwiązania dla $m \in (-1; 4)$ f) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-2\} \cup (2; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 2$, 4 rozwiązania dla $m \in (-2; 2)$ **2.14.** a) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ b) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 5$ c) $y = 3(x+1)^2 - 2$ d) $y = 2(x-3)^2 - 1$ e) $y = -5(x-2)^2 + 6$ f) $y = (x+3)^2 - 2$ **2.15.** malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -2\rangle$ i $\langle 1; \infty)$, rosnąca w przedziale $\langle -2; 1\rangle$ **2.16.** $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 0; 4\rangle \cup \langle 7; \infty)$ **2.17.** $m \in (0; 1)$ **2.19.** a) $y = -2(x-2)^2$ b) $y = -2(x-2)^2 + 2$ c) $y = -2(x-2)^2 + 8$ d) $y = -2(x-2)^2 - 4$

Wskazówka: Przekształć wierzchołek paraboli przez symetrię względem odpowiedniej prostej.

2.20. a) $y = -2(x-1)^2 + 3$ b) $y = -2(x-5)^2 + 3$ c) $y = -2(x+3)^2 + 3$ d) $y = -2(x+5)^2 + 3$

2.21. *Wskazówka*: Rozważ dwa przypadki. **2.23.** a) prostą $x = 0$ b) prostą $y = 0$ c) prostą $x = 4$ d) prostą $y = x$

s. 417

1. F, F, F **2.** $ZW = \langle -11; \infty)$, malejąca w przedziale $(-\infty; 7\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 7; \infty)$.

3. $x \neq -1$ **4.** 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (3; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 3$, 4 rozwiązania dla $m \in (0; 3)$ **5.** $y = 3(x+4)^2 - 4$

s. 422

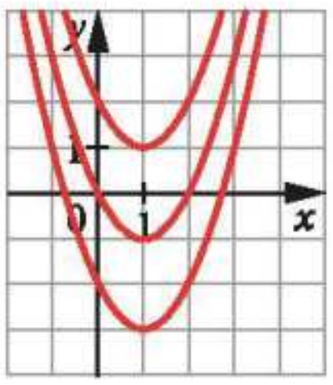
3.1. A **3.2.** C **3.3.** C **3.4.** F, P, F **3.5.** F, P, P **3.6.** P, P, F **3.7.** P, P, P

3.8. a) $y = -2x^2 + 12x - 17$ b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ c) $y = -3x^2 - 30x - 50$ d) $y = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 10$

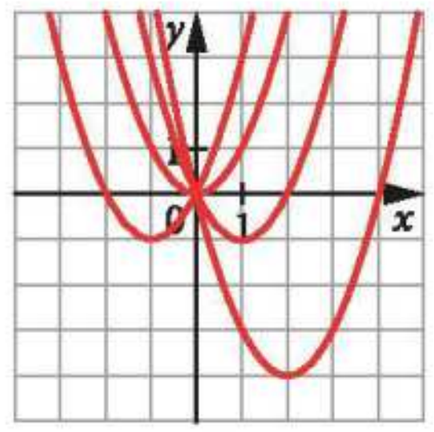
3.9. a) $y = -3x^2 + 2x - 5 + \sqrt{2}$, $a = -3$, $b = 2$, $c = -5 + \sqrt{2}$ b) $y = \left(3 - \sqrt{5}\right)x^2 + \left(\sqrt{3} - 2\right)x + 4$, $a = 3 - \sqrt{5}$, $b = \sqrt{3} - 2$, $c = 4$ **3.10.** a) $y = 3x^2 + 6x + 1$ b) $y = 2x^2 - 12x + 17$ c) $y = -5x^2 + 20x - 14$ d) $y = x^2 + 6x + 7$ **3.11.** a) $y = (x+3)^2$ b) $y = 3(x-1)^2$ c) $y = -(x+2)^2 + 5$ d) $y = \frac{1}{3}(x+3)^2 - 3$ e) $y = -2(x+1)^2 - 7$ f) $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 2$

3.12. a) $y = (x-1)^2 + 2$ b) $y = -2(x+3)^2 - 2$ c) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}$ d) $y = 3(x-3)^2 - 12$ e) $y = -\frac{2}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ f) $y = -0{,}5(x+0{,}2)^2$ **3.13.** a) malejąca w przedziale $(-\infty; -2\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -2; \infty)$ b) rosnąca w przedziale $(-\infty; 1\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 1; \infty)$ c) rosnąca w przedziale $(-\infty; -3\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -3; \infty)$ d) malejąca w przedziale $(-\infty; -1\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -1; \infty)$ e) rosnąca w przedziale $(-\infty; 3\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 3; \infty)$ f) malejąca w przedziale $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right\rangle$, rosnąca w przedziale $\left\langle -\sqrt{2}; \infty\right)$ **3.14.** a) $(0, -3)$ b) $(-2, 0)$ c) $(-1, -2)$ d) $(-5, -1)$ e) $(2, -12)$ f) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ **3.15.** a) $ZW = (-\infty, 5\rangle$ b) $ZW = \langle 0; \infty)$ c) $ZW = (-\infty, 0\rangle$ d) $ZW = \langle 0; \infty)$ **3.16.** a) $b = 4$, $c = 2$ b) $b = 4$, $c = 4$ lub $b = -4$, $c = 4$ c) $b = -6$, $c = 6$ **3.17.** $b = -8$, $c = 2$ **3.18.** $a = -1$, $b = -6$ **3.19.** $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$ **3.20.** a) $m = 12$ b) $m = -4$ c) $m = -4\sqrt{2} + 1$

3.21. oś symetrii: $x = 1$



3.22. $b = -6$ lub $b = 6$



3.23. a) $y = x^2 - 12x + 34$ b) $y = -x^2 + 4x - 6$ c) $y = x^2 + 8x + 14$ d) $y = -x^2 + 4x$

3.24. a) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (19; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 19$, 4 rozwiązania dla $m \in (0; 19)$ b) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-1\} \cup (16; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 16$, 4 rozwiązania dla $m \in (-1; 16)$
c) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-1\} \cup (18; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 18$, 4 rozwiązania dla $m \in (-1; 18)$ d) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-2\} \cup (0; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 0$, 4 rozwiązania dla $m \in (-2; 0)$

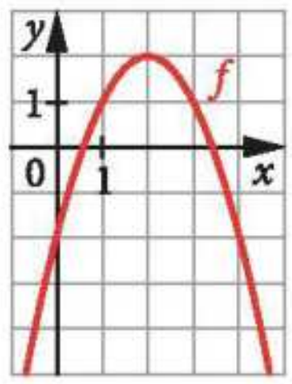
3.25. *Wskazówka:* $f(x_1) - f(x_2) = 2x_1^2 - 8x_1 + 1 - \left(2x_2^2 - 8x_2 + 1\right) = 2\left(x_1^2 - x_2^2\right) - 8(x_1 - x_2) =$
$= 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 8(x_1 - x_2) = 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4) = 2(x_1 - x_2)\left((x_1 - 2) + (x_2 - 2)\right)$

s. 425

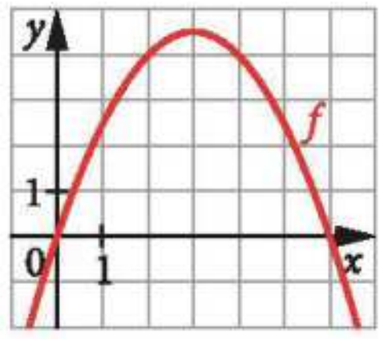
1. F, F, P **2.** rosnąca w przedziale $\left(-\infty; 4\frac{1}{2} + 2\sqrt{5}\right\rangle$, malejąca w przedziale $\left\langle 4\frac{1}{2} + 2\sqrt{5}; \infty\right)$
3. $x = 2$, $m = 0$ **4.** $k = 2$ **5.** $m = 8\frac{3}{4}$

s. 428

1. B **2.** D **3.** A **4.** C **5.** A **6.** B **7.** A **8.** C **9.** C **10.** B **11.** A **12.** B
13. A **14.** B **15.** A **16.** P, P, P **17.** F, P, P **18.** F, F, P **19.** P, P, P **20.** F, F, P
21. F, P, P **22.** a) $W = (1, 0)$ b) $W = (-3, 5)$ c) $W = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$ d) $W = (-6, -9)$
23. a) $ZW = \left(-\infty; -\sqrt{2}\right\rangle$ b) $ZW = \langle 5; \infty)$ c) $ZW = (-\infty; -1\rangle$ d) $ZW = \langle 0; \infty)$ **24.** a) np. $y = x^2 - 10x$ b) np. $y = -x^2 + 3x$ c) np. $y = 2x^2 - 4x + 4$ **25.** $y = \frac{1}{8}(x + 3)^2 - 7$ **26.** $k = \frac{1}{2}$
27. a) oś symetrii: $x = -4$; malejąca w przedziale $(-\infty; -4\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -4; \infty)$ b) oś symetrii: $x = -1$; rosnąca w przedziale $(-\infty; -1\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -1; \infty)$ c) oś symetrii: $x = \sqrt{2} - 1$; malejąca w przedziale $\left(-\infty; \sqrt{2} - 1\right\rangle$, rosnąca w przedziale $\left\langle \sqrt{2} - 1; \infty\right)$ d) oś symetrii: $x = -2\sqrt{2} - 1$; malejąca w przedziale $\left(-\infty; -2\sqrt{2} - 1\right\rangle$, rosnąca w przedziale $\left\langle -2\sqrt{2} - 1; \infty\right)$
28. $f(x) = 2(x + 2)^2 - 6$, $ZW = \langle -6; 2\rangle$ **29.** $ZW = (-\infty; 2\rangle$ **30.** a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 6$ b) 6
31. $m \in (3; \infty)$ **32.** a) $f(x) = -(x - 2)^2 + 2$ b) Patrz rysunek po prawej.
c) rosnąca w przedziale $(-\infty; 5\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 5; \infty)$



33. $y = \frac{1}{4}x^2 - 5$ **34.** $b = 6,\ c = 2$ **35.** a) $b = 3,\ c = 0$ b)



36. $a = 2$ **37.** $f(x) = -x^2 + 2x + 1$. *Wskazówka*: Osią symetrii paraboli jest prosta $x = 1$.

38. $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$, rosnąca w przedziale $(-\infty;\ 2\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 2;\ \infty)$

39. 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty;\ 2) \cup (3;\ \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{2,\ 3\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (2;\ 3)$ **40.** $\langle -2;\ 3\rangle$

41. a) $f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & \text{dla } x \in (-\infty;\ -1) \\ -2x^2 & \text{dla } x \in \langle -1;\ 1) \\ 2x - 4 & \text{dla } x \in \langle 1;\ \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty;\ 0) \cup (4;\ \infty) \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{dla } x \in \langle 0;\ 4\rangle \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{dla } x \in (-\infty;\ 0) \\ 2x^2 - 4x - 1 & \text{dla } x \in \langle 0;\ 2\rangle \\ x - 3 & \text{dla } x \in (2;\ \infty) \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \in (-\infty;\ -4) \\ \frac{1}{2}x^2 + 2x & \text{dla } x \in \langle -4;\ 0\rangle \\ -\frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (0;\ \infty) \end{cases}$

43. $m \in \{-3\} \cup (1;\ 2)$

6. Figury na płaszczyźnie

s. 435

1.1. B **1.2.** C **1.3.** D **1.4.** C **1.5.** a) $\alpha = 43°,\ \beta = 137°,\ \gamma = 43°$ b) $\alpha = 110°,\ \beta = 70°$ c) $\alpha = 105°$ **1.6.** a) $\alpha = 80°$ b) $\alpha = 120°$ **1.8.** a) $\alpha = 30°$ b) $\alpha = 15°$ **1.9.** $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 = 20°$, $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4 = 70°$ **1.10.** a) 135° b) 50° c) 125° d) 155° **1.12.** 5 razy **1.13.** 124° **1.14.** a) tak b) nie c) nie d) tak

s. 442

2.1. D **2.2.** B **2.3.** C **2.4.** P, F, F **2.5.** A, D **2.6.** nie **2.7.** 4 **2.8.** P, F, P **2.9.** a) 90°, 60°, 30°, 100°, 80° b) 150°, 150°, 30°, 30° **2.10.** a) 14 b) 35 c) 90 d) 4850 **2.11.** pięciokąty **2.12.** a) w siedmiokącie b) w dziewięciokącie c) w trzynastokącie **2.13.** 0, 3 lub 4 **2.14.** a) tak b) tak c) nie d) nie **2.15.** a) $|BC| = 2$ lub $|BC| = 3$ b) $|BC| = 5$ **2.17.** a) $\alpha = 40°$ b) $\alpha = 65°$ c) $\alpha = 90°$ d) $\alpha = 50°$ **2.18.** a) $\alpha = 20°$ b) $\alpha = 35°$ c) $\alpha = 110°$ d) $\alpha = 31°$ **2.19.** 60°, 80° **2.20.** 40°, 70°, 70° **2.21.** 135° **2.22.** 60°, 50°, 100°, 150° **2.23.** a) 5 b) 6 c) 8 d) 14 **2.24.** 175° **2.25.** 360° **2.26.** a) 260° b) 310°

s. 445

1. P, F, F **2.** 62°, 87°, 31° **3.** 140° **4.** 14 **5.** $m \in \left(\frac{13}{4}; \frac{9}{2}\right)$

s. 452

3.1. C **3.2.** A **3.3.** C **3.4.** F, F, P **3.6.** A, B, C, E **3.7.** a), b), c), d) – tak, e), f) – nie **3.8.** $|AB| = |CD| = |EF| = |GH|$, $|BC| = |DE| = |FG| = |HA|$ **3.9.** Kiedy pary boków przy jednym wierzchołku są odpowiednio równe. **3.10.** a) tak b) tak c) tak **3.11.** a) tak b) nie **3.22.** *Wskazówka*: Przedłuż środkowe poza punkty D i D' i rozpatrz równoległoboki $ABED$ i $A'B'E'D'$. Udowodnij przystawanie trójkątów ABE i $A'B'E'$ oraz ACE i $A'C'E'$.

s. 455

1. P, P, F

s. 456

1. D **2.** C **3.** C **4.** B **5.** B **6.** B **7.** A **8.** B **9.** C **10.** C **11.** C **12.** D **13.** B **14.** D **15.** A **16.** C **17.** D **18.** C **19.** D **20.** C **21.** D **22.** A **23.** D **24.** C **25.** P, P, F **26.** F, P, P **27.** F, P, F **28.** P, F, F **29.** F, P, F **30.** F, F, P **31.** a) 45° b) 18° c) 31° d) 43° **32.** 72°, 108° **33.** $\alpha = 157{,}5°$ **34.** a) 15 b) 30 **35.** 3 **36.** Nie można. **37.** a) 25° b) 50° c) 55° d) 30° **38.** 20°, 60°, 100° **39.** 50°, 50°, 80° lub 70°, 70°, 40° **40.** 58°, 87° **41.** 80° **42.** 70°, 70°, 40° **43.** 18°, 72° **44.** 22,5°, 67,5° **45.** 60°, 120° **46.** $\sphericalangle A = 65°$, $\sphericalangle B = 30°$, $\sphericalangle C = 150°$, $\sphericalangle D = 115°$ **47.** tak **48.** 72°, 72°, 108°, 108° **51.** *Wskazówka*: Udowodnij przystawanie trójkątów APS, BQP, CRQ i DSR.

Skorowidz

Argument funkcji 200

Cechy podzielności 32
— przystawania trójkątów 449, 450

Długość wektora 294, 311
działania na potęgach 60, 78
dziedzina funkcji 200

Funkcja 200
— liniowa 344
— malejąca 249
— monotoniczna 250
— niemalejąca 249
— nierosnąca 250
— rosnąca 249

Hiperbola 263

Iloczyn (część wspólna) zbiorów 121

Liczba pierwsza 32
— złożona 32
liczby względnie pierwsze 36
logarytm 86
— dziesiętny 89

Metoda podstawiania 173
— przeciwnych współczynników 175
miejsce zerowe funkcji 239

Parabola 402
podzbiór 11, 115
pojęcie pierwotne 8
postać kanoniczna funkcji kwadratowej 411, 419
— ogólna funkcji kwadratowej 418
przedziały liczbowe 115, 116
przybliżenie z nadmiarem 46
— z niedomiarem 46

Rozkładanie wektora na składowe 299
równanie kierunkowe prostej 355, 373
— ogólne prostej 373
różnica zbiorów 124

Sposoby określania funkcji 201–203
suma zbiorów 123

Środkowa boku trójkąta 440

Teza 9
trójmian kwadratowy 418

Układ równań liniowych 169
— — — nieoznaczony 179, 381
— — — oznaczony 179, 381
— — — sprzeczny 179, 381

Wartość bezwzględna liczby 128, 129
— funkcji 200
wektor 294
— jednostkowy 303
— przeciwny 294
— swobodny 295
— zaczepiony (związany) 295
wektory równoległe 294, 296
wielkości odwrotnie proporcjonalne 258
— wprost proporcjonalne 334
wierzchołek paraboli 403, 411, 419
własności działań na wektorach 298
— logarytmu 88
współczynnik kierunkowy 337, 357
— proporcjonalności 335
współrzędne wektora 303, 306
wyróżnik funkcji kwadratowej 419
wzory skróconego mnożenia 21–24

Założenie 9
zbiór 9
— liczb całkowitych 13
— — naturalnych 12
— nieskończony 10
— pusty 11
— skończony 10
— wartości funkcji 213

nowa era Twoje mocne strony

Prosto do matury

Podręcznik *Prosto do matury 1* do zakresu podstawowego i rozszerzonego został opracowany z myślą o uczniach przygotowujących się do matury z matematyki w zakresie rozszerzonym. Prawie 2000 zadań z odpowiedziami pozwala wyćwiczyć umiejętności sprawdzane na maturze.



Pomoc w zrozumieniu

Przykładowe rozwiązania zadań typu maturalnego pokazują różne możliwości radzenia sobie z takimi zadaniami.

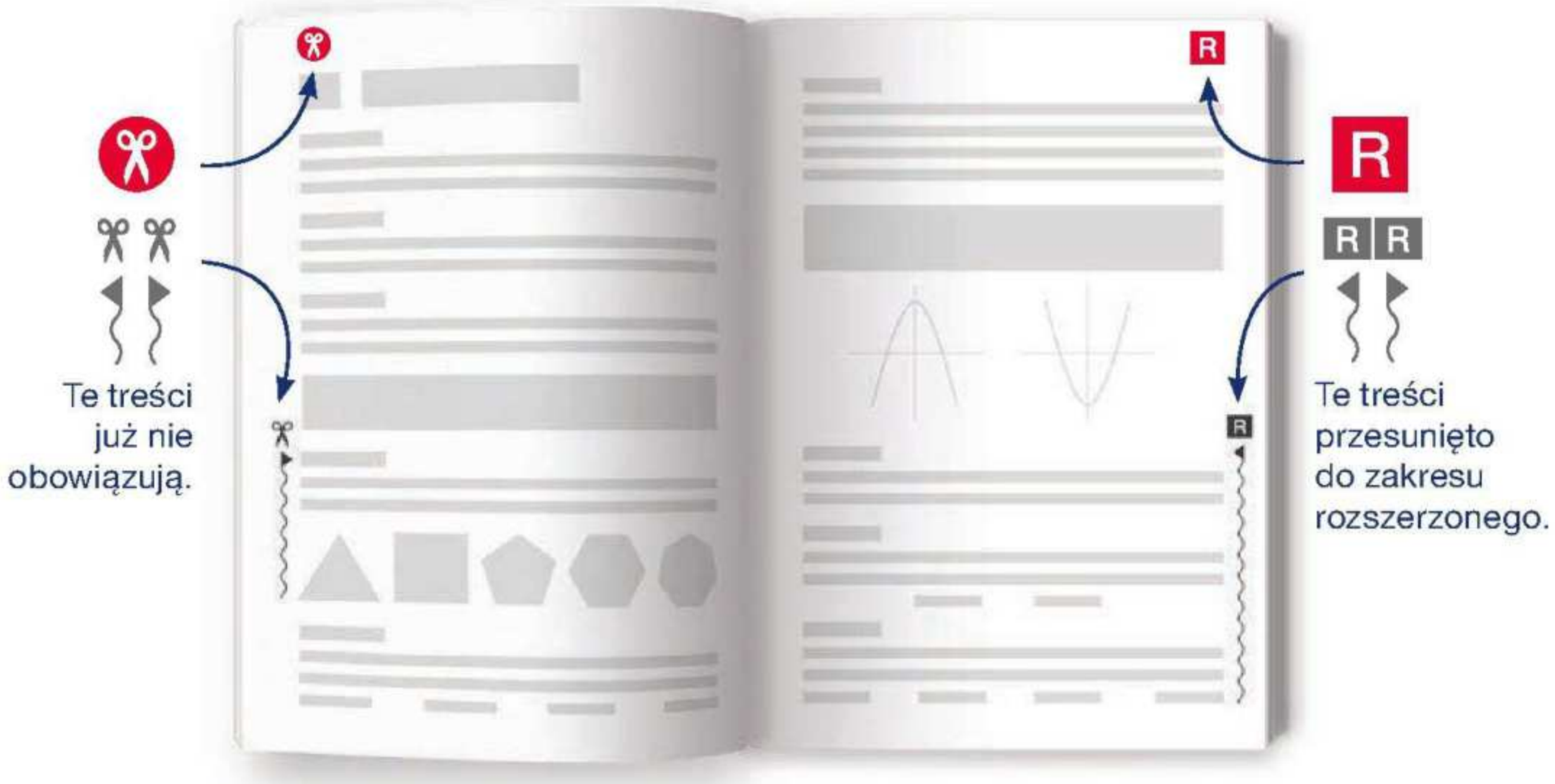
Porządkowanie i syntetyzowanie

Warto powtórzyć przypominają wiadomości z wcześniejszego etapu nauki.

Obszerne powtórzenia

Powtórzenie po każdym dziale zawiera zadania różnego typu, zarówno zamknięte, jak i otwarte.

W podręczniku znajdziesz oznaczenia związane ze zmianami obowiązującymi od września 2024 r.



Czerwone ikony na górze strony informują, że na tej stronie są zmiany.
Ich dokładne umiejscowienie wskazują szare ikony z falkami.

Nowa Era Sp. z o.o.

www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-5118-9

9 788326 751189