Maciej Antek
Krzysztof Belka
Piotr Grabowski

Prosto do matury

Podręcznik do matematyki
dla liceum ogólnokształcącego i technikum

3

Zakres podstawowy

nowa era
Twoje mocne strony

Prosto do matury

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:
mgr. Zbigniewa Bobińskiego, dr Marii Borowskiej i dr Katarzyny Kozłowskiej.

Zakres kształcenia: podstawowy
Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: ponadpodstawowa (liceum ogólnokształcące i technikum)
Rok dopuszczenia: 2021

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 1008/3/2021

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Piotra Grabowskiego.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na **www.legalnakultura.pl**

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiejkolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024
ISBN 978-83-267-5090-8

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Magdalena Spalińska, Anna Dubiel
Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak
Konsultacje merytoryczne: Ewa Muszyńska
Redakcja językowa: Marta Zuchowicz
Korekta językowa: Anna Wesołowska
Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak
Projekt graficzny: Sławomir Włodarczyk, Ewa Kaletyn, Diana Gawronkiewicz/Podpunkt
Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn
Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska
Rysunki merytoryczne: Andrzej Oziębło
Opracowanie graficzne stron działowych: Maciej Galiński
Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Enzo Di Giacomo
Realizacja projektu graficznego: BOP s.c.

Fotografia na okładce: Getty Images/Moment/Logan Campbell.
Fotografie: Agencja Gazeta/Kamil Gozdan s. 231; BE&W: AKG IMAGES Gmbh s. 253, Alamy Stock Photo - Art World s. 202, GL Archive s. 249 (Blaise Pascal), BEW NEWS/cienki s. 156, IAM Ltd/WORLD HISTORY ARCHIVE s. 105 (Apoloniusz z Pergi); Getty Images: De Agostini - DEA PICTURE LIBRARY s. 249 (waza grecka), DEA/G. DAGLI ORTI s. 248, DigitalVision Vectors/goldhafen s. 104 (statki), E+/simonbradfield s. 205, iStock/Getty Images Plus/Campwillowlake s. 46; Indigo: Alamy Stock Photo/Pictorial Press Ltd s. 249 (Pierre de Fermat), Science Photo Library/Dennis Kunkel Microscopy s. 137; Shutterstock: Aaron Amat s. 146, Abundance s. 136 (ananas), Alexander Raths s. 253, Amatveev s. 121, Artens s. 152, ArtisticPhoto s. 7, erashov s. 170, Fotokostic s. 172, KeepWatch s. 39, KELENY s. 186, Mikbiz s. 215, Mimadeo s. 136 (szyszki), MM_photos s. 104, 105 (stara kartka), Monika Wisniewska s. 147, Nguyen Thai s. 136 (szyszka), Ruslan Guzov s. 161, Sergielev s. 218, Targn Pleiades s. 199, wavebreakmedia s. 122; Thinkstock/Getty Images: iStockphoto/Roob s. 258, Photodisc/James Woodson s. 273, Zoonar/J.Wachala s. 267.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku.
Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Drukarnia Orthdruk

Spis treści

Wstęp 5

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych 6

Dział 1. Trygonometria

1. Warto powtórzyć – funkcje trygonometryczne kąta wypukłego 8
2. Twierdzenie sinusów 12
3. Twierdzenie cosinusów 21
4. Związki miarowe w wielokątach 27
5. Powtórzenie 36

Dział 2. Geometria analityczna

1. Warto powtórzyć – równanie prostej 40
2. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej 46
3. Położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej 58
4. Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło 71
5. Okrąg i prosta 79
6. Symetria środkowa 87
7. Symetria osiowa 95
8. Symetrie wielokątów 106
9. Powtórzenie 114

Dział 3. Ciągi

1. Określenie i własności ciągu liczbowego 122
2. Ciąg arytmetyczny 138
3. Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 149
4. Ciąg geometryczny 158
5. Suma *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego 168
6. Oszczędzanie i kredyty w bankach 175
7. Powtórzenie 190

Dział 4. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

1. Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa 200
2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa 203
3. Reguła mnożenia 211
4. Obliczanie prawdopodobieństwa 222
5. Własności prawdopodobieństwa 234
6. Wartość oczekiwana w prostych grach losowych 242

7. Wstęp do statystyki 250
8. Mediana, średnia i dominanta 256
9. Miary rozproszenia 271
10. Powtórzenie 284

Odpowiedzi 291
Skorowidz 307
Wybrane wzory trygonometryczne 309
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych 310

Wstęp

Podręcznik *Prosto do matury* dla klasy trzeciej jest dostosowany do podstawy programowej obowiązującej w liceum od września 2019 r. i obejmuje treści z zakresu podstawowego.

Książka zawiera około tysiąca zadań do samodzielnego rozwiązania. To wystarczy do gruntownego przećwiczenia umiejętności nabytych podczas lekcji. Zadania trudniejsze oznaczono * lub **, zadania typu „Wykaż…" poprzedzono znakiem D, natomiast te zadania, do których rozwiązania przydatny jest kalkulator – znakiem .

Podręcznik dostosowany jest do samodzielnej nauki, co może być cenne na przykład w razie nieobecności w szkole. Wprowadzane pojęcia ilustrujemy przykładami rozwiązanych zadań. W zrozumieniu materiału bardzo pomogą kolorowe rysunki merytoryczne. Wybrane rozwiązane zadania typu maturalnego zostały oznaczone znakiem .

Po każdym temacie proponujemy zestaw siedmiu zadań zatytułowanych *Prosto do matury*. Warto, by po omówieniu każdego tematu uczniowie próbowali rozwiązywać je samodzielnie. Będzie to sprawdzianem umiejętności potrzebnych na maturze.

Uwaga: W zadaniach testowych, w których należy wybrać jedną odpowiedź spośród czterech podanych, wybrana odpowiedź nie musi być jedynym istniejącym rozwiązaniem postawionego problemu.

Odpowiedzi do pytań, poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Autorzy

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

$x \in A;\ x \notin A$	x należy do zbioru A; x nie należy do zbioru A
$\{a, b, c\}; \emptyset$	zbiór, którego elementami są a, b, c; zbiór pusty
N, **Z**, **Q**, **R**	zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych
$A \subset B$	zbiór A jest podzbiorem zbioru B
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A - B$	różnica zbiorów A i B
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek stopnia n z liczby a
$\log_a b$ ($\log b$)	logarytm przy podstawie a (10) liczby b
$(a; b)$	przedział otwarty, zbiór liczb większych od a i mniejszych od b
$\langle a; b\rangle$	przedział domknięty (zamknięty)
$\langle a; b)$	przedział lewostronnie domknięty
$(a; b\rangle$	przedział prawostronnie domknięty
$\|a\|$	wartość bezwzględna liczby a
$f(x)$	wartość funkcji f dla argumentu x
D; ZW	dziedzina funkcji; zbiór wartości funkcji
$o(S, r)$	okrąg o środku S i promieniu r
$k(S, r)$	koło o środku S i promieniu r
P; obw	pole figury; obwód figury
$A = (a, b)$	punkt A o współrzędnych a (tzw. odcięta) i b (tzw. rzędna)
AB; $\|AB\|$	odcinek o końcach A i B; długość odcinka AB
$a \parallel b$	prosta a jest równoległa do prostej b
$a \perp b$	prosta a jest prostopadła do prostej b
$\sphericalangle ABC$	kąt o wierzchołku B i ramionach: półprostej BA i półprostej BC
$\triangle ABC$	trójkąt ABC
Δ	delta; wyróżnik trójmianu kwadratowego
$\sin\alpha$	sinus kąta α
$\cos\alpha$	cosinus kąta α
$\operatorname{tg}\alpha$	tangens kąta α
(a_n); a_n	ciąg; n-ty wyraz ciągu (a_n)
S_n	suma n początkowych wyrazów ciągu
Ω	zbiór zdarzeń elementarnych
$\overline{\overline{A}}$	liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A
$P(A)$	prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A
A'	zdarzenie przeciwne do zdarzenia A
EX	wartość oczekiwana
$\overline{x}$; $\overline{x}_w$	średnia wyników; średnia ważona wyników
σ	odchylenie standardowe
σ^2	wariancja

Trygonometria

1

1. Warto powtórzyć – funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Powtórzymy najważniejsze pojęcia i fakty dotyczące trygonometrii.
Przypominamy, że w tych podręcznikach zamiast pisać „kąt ABC o mierze α” często używamy krótszej formy „kąt ABC równy α” albo „$\sphericalangle ABC = \alpha$”. Podobnie – piszemy „wysokość równa 5”, a nie „długość wysokości równa 5”, „trójkąt ma równe przyprostokątne” zamiast „trójkąt ma przyprostokątne równej długości” itp.

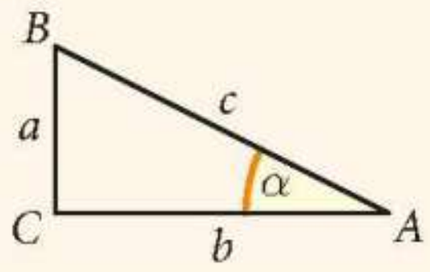
Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Definicja

W trójkącie prostokątnym, w którym α jest kątem ostrym:

- stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przeciwprostokątnej nazywamy **sinusem kąta** α i oznaczamy $\sin\alpha$,
- stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej nazywamy **cosinusem kąta** α i oznaczamy $\cos\alpha$,
- stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przyprostokątnej przyległej do tego kąta nazywamy **tangensem kąta** α i oznaczamy $\operatorname{tg}\alpha$.

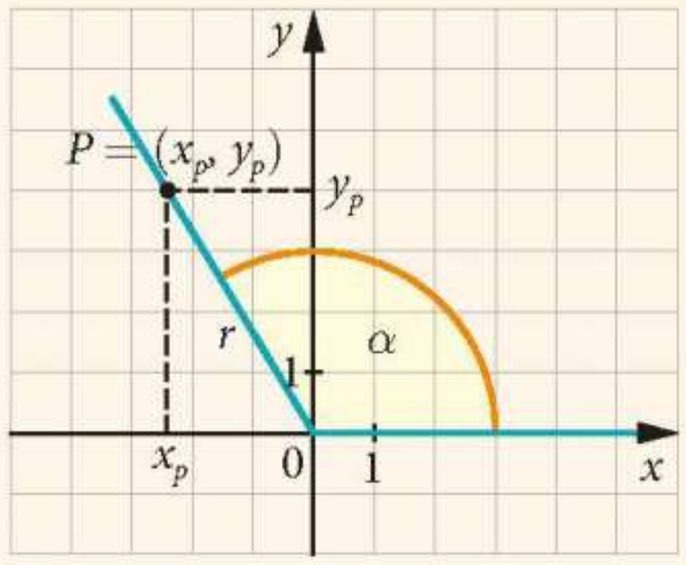
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$



Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Kąty umieszczamy w układzie współrzędnych w następujący sposób.

- Wierzchołek kąta α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) jest początkiem O układu współrzędnych.
- Ramię początkowe kąta α pokrywa się z dodatnią półosią x. Ramię końcowe (wodzące) kąta α jest odłożone w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.



- Dla punktu $P \neq O$ wybranego na ramieniu wodzącym kąta α odcinek OP nazywamy **promieniem wodzącym punktu** P.
  Tak samo nazywamy liczbę $r = |OP|$.

Jeżeli punkt $P = (x_P, y_P)$ leży na ramieniu wodzącym kąta α, a $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ jest promieniem wodzącym tego punktu, to:

$$\sin\alpha = \frac{y_P}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x_P}{r}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_P}{x_P} \text{ dla } x_P \neq 0$$

Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0

α	$(0°; 90°)$	$(90°; 180°)$
$\sin\alpha$	$+$	$+$
$\cos\alpha$	$+$	$-$
$\operatorname{tg}\alpha$	$+$	$-$

Podstawowe zależności trygonometryczne

Twierdzenie

Wzory redukcyjne

Jeżeli α jest kątem ostrym, to:

- $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$
- $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$
- $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$
- $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
- $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

Twierdzenie

- Dla każdego kąta $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$ zachodzi równość:
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
- Dla każdego kąta $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle - \{90°\}$ zachodzi równość:
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Przypomnijmy jeszcze wzór pozwalający obliczyć pole trójkąta o danych dwóch bokach i kącie zawartym między tymi bokami.

Twierdzenie

Jeżeli w trójkącie między bokami o długościach b i c zawarty jest kąt α, to pole P tego trójkąta wynosi:

$$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

Zadania

1.1. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym kąt C jest prosty i $\sphericalangle CAB = \alpha$. Dwa boki trójkąta spełniają podane warunki. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych sinus, cosinus i tangens kąta α.

a) $|BC| = 9,\ |AB| = 15$

b) $|AC| = 16,\ |AB| = 34$

c) $|BC| = 3,\ |AC| = 2$

d) $|AC| = \frac{1}{3}|AB|$

1.2. Dane są długości dwóch boków trójkąta prostokątnego ABC ($\sphericalangle BCA = 90°$). Odczytaj z tablic przybliżoną miarę $\sphericalangle CAB = \alpha$ (z dokładnością do 1°).

a) $|AB| = 5,\ |BC| = 3$

b) $|AB| = 20,\ |AC| = 3{,}8$

c) $|BC| = 1{,}7,\ |AC| = 5$

d) $|AC| = 9,\ |AB| = 40$

1.3. Bok prostokąta ma długość 18. Kąt między tym bokiem a przekątną prostokąta ma miarę 42°. Oblicz

a) długość przekątnej prostokąta z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

b) pole prostokąta z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

1.4. W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle BAC = 18°$, $\sphericalangle ABC = 63°$. Wysokość tego trójkąta opuszczona z wierzchołka C jest równa 6. Oblicz obwód trójkąta z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

1.5. Oblicz pole trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|BC| = |CA| = 24$ i kąt BCA ma miarę 30°.

1.6. Oblicz pole trójkąta ABC, w którym $|AB| = 12,\ |BC| = 7$ i kąt ABC ma miarę 120°.

1.7. Oblicz z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku pole rombu o boku 8 i kącie ostrym o mierze 68°.

1.8. Oblicz dokładną wartość wyrażenia.

a) $\sin 30° \cdot \cos 45° \cdot \operatorname{tg} 60°$

b) $\operatorname{tg} 135° + \sin 90° + \cos 120°$

c) $\sin^2 60° - \cos 135° \cdot \operatorname{tg} 0°$

d) $\sin 150° \cdot \cos 60° : \operatorname{tg}^2 120°$

1.9. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych sinus, cosinus i tangens kąta, którego ramię wodzące przechodzi przez punkt P.

a) $P = (12, 5)$

b) $P = (-2, 1)$

c) $P = (-11, 60)$

d) $P = \left(-2\sqrt{10}, 3\right)$

e) $P = \left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$

f) $P = (-6, 0)$

1.10. Oblicz wartość wyrażenia. Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych ani z kalkulatora.

a) $\cos 19° \cdot \operatorname{tg} 19° - \cos 71°$

b) $\sin 24° \cdot \cos 66° + \sin^2 114°$

1.11. Uprość wyrażenie $\sin(180° - \alpha) \cdot \cos(90° - \alpha) - \cos(180° - \alpha) \cdot \sin(90° - \alpha)$.

1.12. Kąt α spełnia podane warunki. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ i $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$

b) $\operatorname{tg}\alpha = 3$ i $0° \leqslant \alpha < 90°$

c) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ i $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$

d) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{9}{40}$ i $90° < \alpha \leqslant 180°$

D **1.13.** Udowodnij, że dane wyrażenie ma stałą wartość dla każdego kąta wypukłego α, dla którego jest określone. Podaj tę wartość.

a) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}$

b) $\dfrac{2\sin\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$

c) $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha - (\sin\alpha + \cos\alpha)}{\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}$

1.14. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta o wierzchołkach $A = (4, -2)$, $B = (2, 4)$, $C = (-1, 3)$.

1.15. W trapezie prostokątnym dłuższe ramię ma $6\sqrt{3}$, a długość krótszej podstawy wynosi $4\frac{1}{2}$. Kąt rozwarty tego trapezu ma miarę 120°. Oblicz pole trapezu.

1.16. Kąt α jest wypukły i $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{5}{12}$. Oblicz $\sin\alpha + \cos\alpha$.

1.17. Kąt α jest wypukły i $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Oblicz $|\sin\alpha - \cos\alpha|$.

2. Twierdzenie sinusów

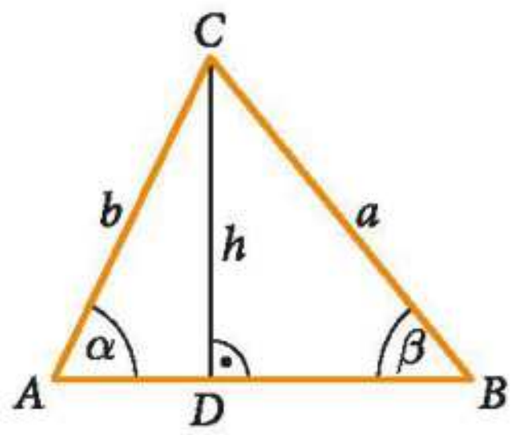
Umiejętności:

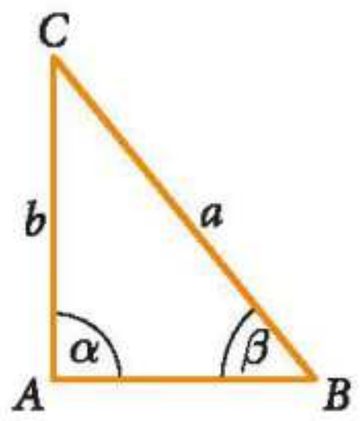
- znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów

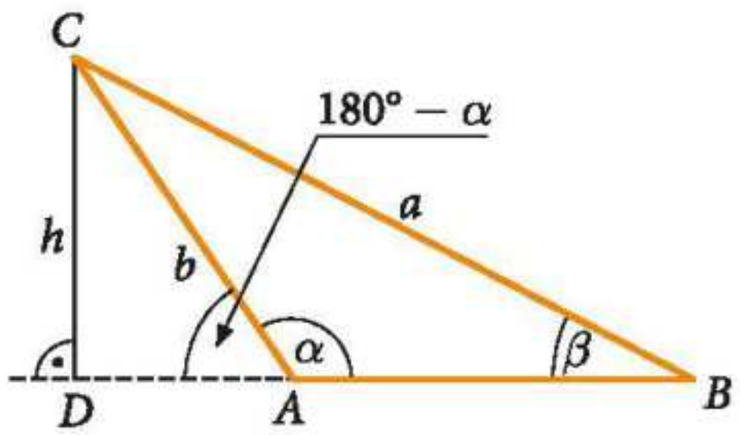
Zadanie polegające na wyznaczeniu wszystkich nieznanych długości boków oraz miar kątów w trójkącie nazywamy krótko **rozwiązywaniem trójkąta**. W kolejnych tematach zajmiemy się tym zagadnieniem. W tym celu będziemy stosować związki między funkcjami trygonometrycznymi zachodzące w trójkątach.

Pokażemy, że w każdym trójkącie wysokość można wyrazić w postaci iloczynu długości boku, na który ta wysokość nie jest opuszczona, i sinusa odpowiedniego kąta tego trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach.







Zauważmy, że:

- jeżeli α jest kątem ostrym, to $\sin\alpha = \frac{h}{b}$, czyli $h = b \cdot \sin\alpha$,
- jeżeli α jest kątem prostym, to $h = b$, czyli $h = b \cdot \sin\alpha$, ponieważ $\sin 90^\circ = 1$,
- jeżeli α jest kątem rozwartym, to $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{h}{b}$, czyli $h = b \cdot \sin(180^\circ - \alpha)$, więc $h = b \cdot \sin\alpha$.

Niezależnie od miary kąta mamy więc równość:

$$h = b \cdot \sin\alpha$$

W identyczny sposób możemy poprowadzić rozumowanie dla boku a i kąta β. Otrzymamy wówczas równość:

$$h = a \cdot \sin\beta$$

Zatem:

$$b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$$

Równość tę możemy zapisać w postaci:

$$(1) \qquad \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad \longleftarrow \sin\alpha \neq 0 \text{ i } \sin\beta \neq 0$$

Oznaczmy trzeci bok trójkąta literą c oraz kąt leżący naprzeciwko niego literą γ. Gdy poprowadzimy wysokość z wierzchołka A i będziemy rozumować podobnie jak wyżej, otrzymamy $b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\beta$ lub inaczej:

(2) $$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad \longleftarrow \sin\gamma \neq 0$$

Z równości (1) i (2) wynika, że:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Otrzymaną równość nazywamy **wzorem sinusów**.

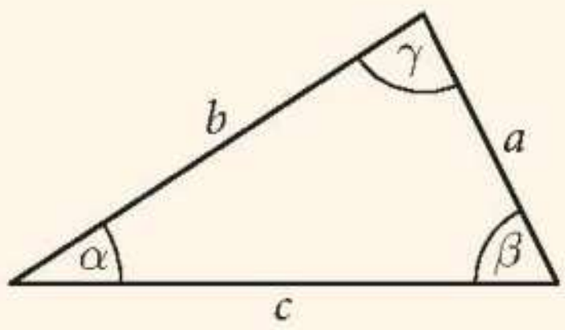
Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Wzór sinusów

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest stały.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



Twierdzenie to stosujemy na przykład do obliczania długości boków trójkąta, jeżeli dana jest jedna z nich oraz dane są kąty trójkąta.

Przykład 1 ◂ zad. 2.1

W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 12$, $\sphericalangle ABC = 45°$, $\sphericalangle BCA = 30°$. Obliczymy długość boku AC.

Rozwiązanie

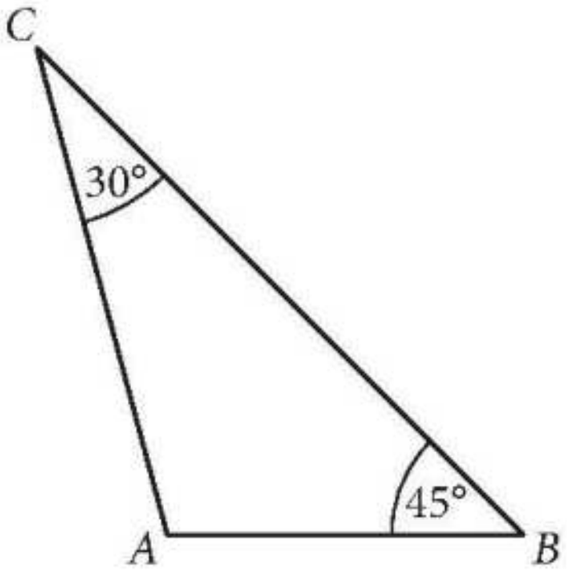
Na mocy twierdzenia sinusów mamy:

$$\frac{|AB|}{\sin\sphericalangle BCA} = \frac{|AC|}{\sin\sphericalangle ABC}$$

$$\frac{12}{\sin 30°} = \frac{|AC|}{\sin 45°}$$

$$\frac{12}{\frac{1}{2}} = \frac{|AC|}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$|AC| = 12\sqrt{2}$$



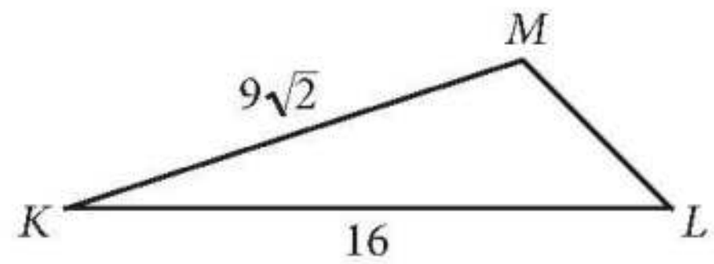
Odp.: Bok AC ma długość $12\sqrt{2}$.

Przykład 2 ◂ zad. 2.3

Trójkąt KLM jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku M. Dane są: $|KL| = 16$, $|KM| = 9\sqrt{2}$, $\sin\sphericalangle LMK = \frac{8}{9}$. Obliczymy miarę kąta KLM.

Rozwiązanie

Na mocy twierdzenia sinusów mamy:



$$\frac{|KL|}{\sin\sphericalangle LMK} = \frac{|KM|}{\sin\sphericalangle KLM}$$

$$\frac{16}{\frac{8}{9}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sin\sphericalangle KLM}, \text{ stąd } \sin\sphericalangle KLM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

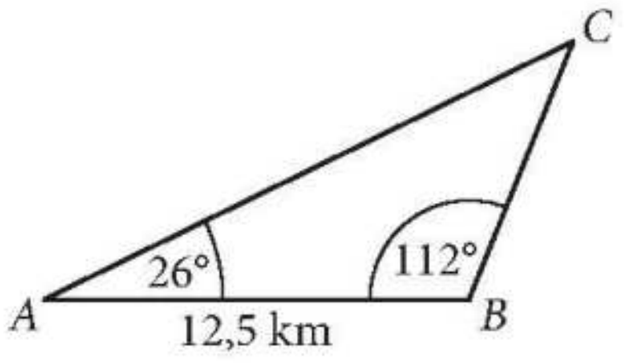
$\sphericalangle KLM = 45°$ lub $\sphericalangle KLM = 135°$ ⟵ $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$

Wiemy, że trójkąt KLM jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku M, zatem tylko kąt 45° spełnia warunki zadania.

Odp.: Kąt KLM ma miarę 45°.

Przykład 3 ◂ zad. 2.5

W górzystym terenie stoją dwie wieże triangulacyjne A i B. Odległość między nimi jest równa 12,5 km. Najwyższym w okolicy wierzchołkiem jest Góra Czarownic (oznaczona na rysunku literą C). Geodeta zmierzył dwa kąty: z wieży A kąt BAC o mierze 26° i z wieży B kąt ABC o mierze 112°. Obliczymy przybliżone odległości między Górą Czarownic a wieżami (mierzone w linii prostej i z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).



Rozwiązanie

Zastosujemy dwa razy wzór sinusów. Miarę kąta leżącego naprzeciwko boku AB znajdujemy jako dopełnienie do 180°:

$$\gamma = 180° - 26° - 112° = 42°, \text{ zatem } \frac{|AB|}{\sin 42°} = \frac{|AC|}{\sin 112°}$$

$$|AC| = \frac{12{,}5 \cdot \sin 112°}{\sin 42°} = \frac{12{,}5 \cdot \sin(180° - 68°)}{\sin 42°} = \frac{12{,}5 \cdot \sin 68°}{\sin 42°}$$

Odczytujemy z tablic matematycznych przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku:

$$\sin 68° \approx 0{,}93, \quad \sin 42° \approx 0{,}67$$

Zatem $|AC| \approx \frac{12{,}5 \cdot 0{,}93}{0{,}67} \approx 17{,}4$.

Do obliczenia odległości $|BC|$ wybieramy inną proporcję ze wzoru sinusów:

$$\frac{|AB|}{\sin 42^\circ} = \frac{|BC|}{\sin 26^\circ} \qquad \longleftarrow \sin 26^\circ \approx 0{,}44$$

$$\text{czyli } |BC| = \frac{12{,}5 \cdot \sin 26^\circ}{\sin 42^\circ} \approx \frac{12{,}5 \cdot 0{,}44}{0{,}67} \approx 8{,}2$$

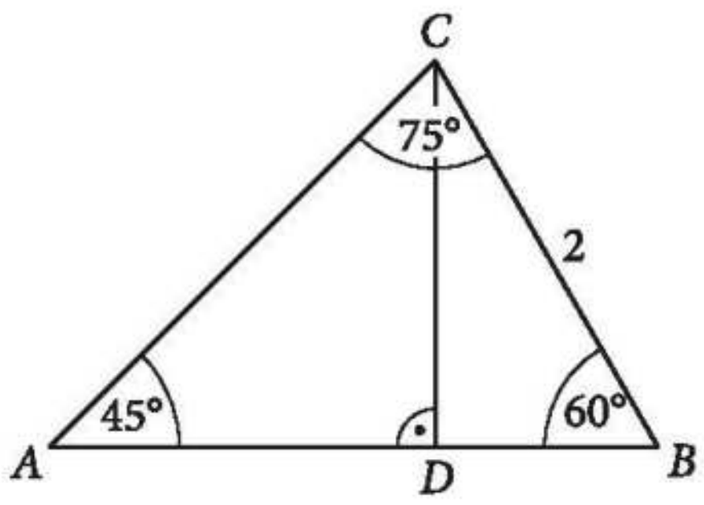
Odp.: Góra Czarownic jest oddalona od wieży A o ok. 17,4 km, a od wieży B o ok. 8,2 km.

D Przykład 4 ◀ zad. 2.15

Kąty trójkąta ABC mają miary 45°, 60°, 75°, a bok BC ma długość 2. Skorzystamy ze wzoru sinusów i wykażemy, że $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Dowód

Zauważmy najpierw, że istnieje dokładnie jeden trójkąt spełniający warunki zadania – możemy go skonstruować, gdy określimy odcinek jednostkowy. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zgodnie z nimi CD jest wysokością poprowadzoną z wierzchołka kąta o mierze 75°.



$$|DB| = 1 \text{ i } |DC| = \sqrt{3} \qquad \longleftarrow \triangle DBC \text{ jest połową trójkąta równobocznego o boku 2}$$

$$|AD| = \sqrt{3} \text{ i } |AC| = \sqrt{6} \qquad \longleftarrow \triangle ADC \text{ jest połową kwadratu o boku } |DC| = \sqrt{3}$$

$$|AB| = \sqrt{3} + 1$$

$$\frac{|AB|}{\sin 75^\circ} = \frac{|BC|}{\sin 45^\circ} \qquad \longleftarrow \text{twierdzenie sinusów dla trójkąta } ABC$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sin 75^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \text{ stąd } \sin 75^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Koniec dowodu

Zauważmy, że jeśli w trójkącie ABC poprowadzimy wysokość BE z wierzchołka kąta o mierze 60°, to możemy w podobny sposób wykazać, że:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Spotyka się również następujące zależności:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, \quad \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Za pomocą odpowiednich przekształceń można wykazać, że:

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Wzór sinusów stosujemy również do wyznaczania promienia okręgu opisanego na trójkącie.

Twierdzenie

Twierdzenie sinusów

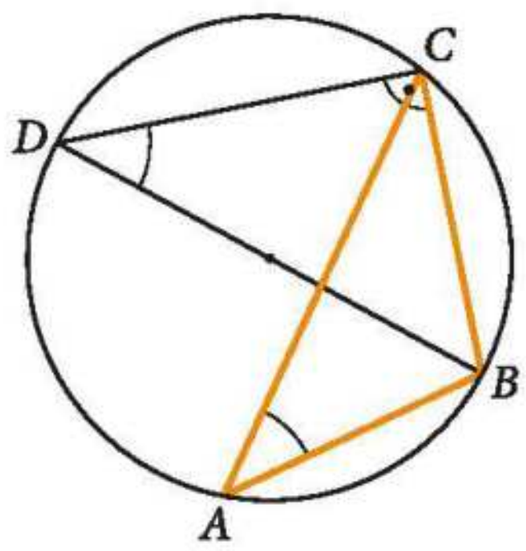
W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

Założenie

Trójkąt ABC jest dowolny.

Teza

Stosunek długości boku trójkąta ABC do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest równy długości $2R$, czyli średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.



Dowód

Zgodnie ze wzorem sinusów dowód wystarczy przeprowadzić dla jednego kąta. Któryś z kątów trójkąta jest kątem ostrym; oznaczmy jego wierzchołek literą A. Z innego wierzchołka (np. B) prowadzimy średnicę BD.

$\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC$ ⟵ kąty wpisane oparte na tym samym łuku

$\sin \sphericalangle BDC = \dfrac{|BC|}{|BD|}$ ⟵ trójkąt BDC jest prostokątny

$\sin \sphericalangle BDC = \dfrac{|BC|}{2R}$ ⟵ R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC

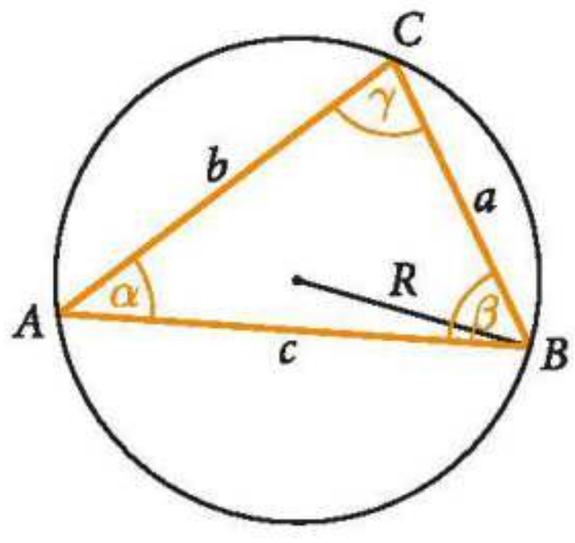
Po przekształceniu tego wzoru otrzymujemy:

$$2R = \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle BDC}$$

$$2R = \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle BAC} \quad \longleftarrow \sin \sphericalangle BDC = \sin \sphericalangle BAC$$

Koniec dowodu

Korzystając z oznaczeń przedstawionych na rysunku, możemy treść twierdzenia, łącznie ze wzorem sinusów, zapisać krótko:



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Przykład 5 ◂ zad. 2.16

Na trójkącie, którego dwa boki mają długości 9 i $3\sqrt{6}$, opisano okrąg o promieniu $3\sqrt{3}$. Obliczymy miary kątów i długość trzeciego boku trójkąta.

Rozwiązanie

Oznaczmy:

α, β, γ – kąty leżące odpowiednio naprzeciwko boków a, b, c trójkąta,

R – promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Przyjmijmy, że $a = 9,\ b = 3\sqrt{6}$.

- $\dfrac{9}{\sin\alpha} = 6\sqrt{3}$ ⟵ zgodnie ze wzorem $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$

  $\sin\alpha = \dfrac{9}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  $\alpha = 60°$ lub $\alpha = 120°$ ⟵ $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$

- $\dfrac{3\sqrt{6}}{\sin\beta} = 6\sqrt{3}$

  $\sin\beta = \dfrac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

  $\beta = 45°$ lub $\beta = 135°$ ⟵ $\sin\beta = \sin(180° - \beta)$

Suma kątów trójkąta wynosi 180°, zatem $\alpha + \beta < 180°$ i $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. Nie istnieje trójkąt o kątach $\alpha = 60°$ i $\beta = 135°$ ani trójkąt o kątach $\alpha = 120°$ i $\beta = 135°$.

Możliwe są więc dwa rozwiązania:

I. trójkąt o kątach $\alpha = 60°,\ \beta = 45°,\ \gamma = 75°$

II. trójkąt o kątach $\alpha = 120°,\ \beta = 45°,\ \gamma = 15°$

Długość trzeciego boku trójkąta obliczamy ze wzoru $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, czyli:

$c = 2R\sin\gamma$

$c = 6\sqrt{3}\sin 75° = 6\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \dfrac{9\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2}$ ⟵ dla I trójkąta

$c = 6\sqrt{3}\sin 15° = 6\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \dfrac{9\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{2}$ ⟵ dla II trójkąta

Odp.: $\alpha = 60°,\ \beta = 45°,\ \gamma = 75°,\ c = \dfrac{9\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2}$

lub $\alpha = 120°,\ \beta = 45°,\ \gamma = 15°,\ c = \dfrac{9\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{2}$

Zadania

W poniższych zadaniach odczytuj wartości funkcji trygonometrycznych z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku, a miary kątów z dokładnością do 1°. Możesz wykorzystywać podane w przykładzie 4 dokładne wartości sin 75° i sin 15°.

2.1. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 8$, $\sphericalangle CAB = 45°$, $\sphericalangle BCA = 120°$. Oblicz długość boku AC.

2.2. Kąty trójkąta ABC oznaczono α, β, γ, a literami a, b, c – boki odpowiednio przeciwległe do tych kątów. Oblicz

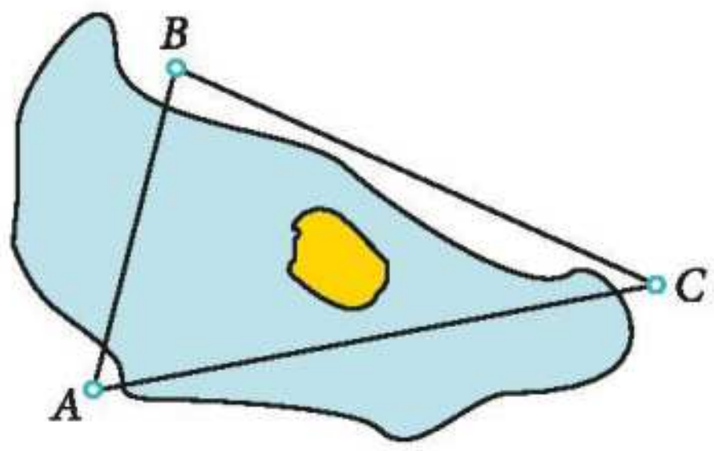
a) $\sin\beta$ dla $a = 20$, $b = 24$, $\alpha = 45°$.
b) b dla $c = 36$, $\alpha = 75°$, $\beta = 45°$.
c) $\sin\alpha$ dla $a = 11$, $c = 17$, $\gamma = 71°$.
d) c dla $a = 16$, $\beta = 26°$, $\gamma = 48°$.

2.3. Trójkąt ABC jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku A. Dane są: $|AB| = 6$, $|BC| = 8$, $\sin\sphericalangle CAB = \frac{2}{3}$. Oblicz miarę kąta ACB.

2.4. Oblicz brakujące miary kątów (z dokładnością do 1°) i długości boków (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) trójkąta ABC, w którym α, β, γ są kątami wewnętrznymi oraz a, b, c – bokami odpowiednio przeciwległymi.

a) $a = 7$ cm, $\alpha = 37°$, $\beta = 100°$
b) $b = 12{,}7$ cm, $\alpha = 78°$, $\beta = 45°$
c) $c = 11{,}3$ cm, $\gamma = 27°$, $\beta = 120°$

2.5. Gospodarstwa A, B, C są położone nad stawem, jak na rysunku obok. Zmierzono, że $|BC| = 300$ m, $\sphericalangle C = 35°$, $\sphericalangle B = 80°$. Wyznacz odległość między gospodarstwami A i B z dokładnością do 1 metra.



2.6. Przekątna równoległoboku ma długość 24 cm i dzieli kąt rozwarty równoległoboku na kąty o miarach 45° i 75°. Oblicz długości boków tego równoległoboku.

2.7. W trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$, przekątna AC ma długość 8 cm, $\sphericalangle CAB = 22°$ i $\sphericalangle ACB = 113°$. Oblicz miary kątów i długości boków trapezu z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

2.8. Na brzegu jeziora znajdują się dwie przystanie, oznaczone jako A i B, oddalone w linii prostej o 1,6 km. Z każdej z nich widoczna jest ta sama mała wyspa – oznaczmy ją W. Za pomocą kompasu zmierzono kąty: $\sphericalangle WAB = 54°$ i $\sphericalangle ABW = 48°$. Oblicz odległość wyspy od każdej z tych przystani (z dokładnością do 0,01 km).

2.9. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC, w którym
a) $\sphericalangle A = 14°$, $|BC| = 10$ cm. b) $\sphericalangle B = 124°$, $|AC| = 9$ cm.

2.10. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku S, $|AB| = 8$, $\sphericalangle ASC = 140°$ i $\sphericalangle CSB = 100°$. Oblicz długości boków BC oraz AC (z dokładnością do 0,01).

2.11. W trójkącie kąt o mierze 74° przylega do boku długości 10 cm. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 6 cm. Oblicz długości pozostałych boków i miary kątów trójkąta.

2.12. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie, w którym jeden z boków ma długość $7\sqrt{3}$, a kąty przyległe do tego boku mają miary 80° i 40°.

2.13. Okrąg o promieniu 18 cm jest opisany na trójkącie, którego kąty pozostają w stosunku 3 : 4 : 5. Oblicz długości boków tego trójkąta.

2.14. W trapezie równoramiennym przekątna o długości $3\sqrt{2}$ tworzy z krótszą podstawą kąt 45°, a z ramieniem kąt 75°. Oblicz obwód trapezu.

D * **2.15.** Wykaż, że $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

2.16. Na trójkącie, którego dwa boki mają 4,2 cm i 6,3 cm, opisano okrąg o promieniu 5 cm. Oblicz miary kątów tego trójkąta z dokładnością do 1° i długość jego trzeciego boku z dokładnością do 1 mm.

D * **2.17.** Punkt M jest punktem przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta ABC, różnym od jego wierzchołków. Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach ABM, BMC, ACM i ABC mają równe promienie.

D * **2.18.** Wykaż, że jeżeli w trójkącie ABC zachodzi związek $\dfrac{|AB|}{\cos \sphericalangle BCA} = \dfrac{|BC|}{\cos \sphericalangle CAB}$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

* **2.19.** Po tej samej orbicie okołoziemskiej o promieniu 11 tys. km krążą trzy satelity: A, B i C. Kąt BAC ma miarę 57°.
a) Wyznacz odległość między satelitami B i C.
b) Sprawdź, czy satelita C jest widoczny z kamery umieszczonej w satelicie B. Przyjmij, że promień Ziemi jest równy 6300 km.

* **2.20.** W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$, $|AC| = 4\sqrt{2}$, $\sphericalangle BCA = 30°$. Oblicz długość boku BC.

2.21. Przekątna równoległoboku ma długość d i dzieli jego kąt na dwa kąty o miarach α oraz β. Wyznacz długości boków tego równoległoboku.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 6\sqrt{3}$, $\sphericalangle BCA = 120°$. Wskaż promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

A. $3\sqrt{3}$ **B.** 6 **C.** $6\sqrt{3}$ **D.** 12

2. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 24$, $|BC| = 16$, $\sphericalangle BCA = 60°$. Wskaż wartość $\sin\sphericalangle CAB$.

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\sqrt{3}$

3. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 18$, $\sphericalangle CAB = 45°$, $\sin\sphericalangle BCA = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Wskaż długość boku AB.

A. $4\sqrt{6}$ **B.** 12 **C.** $12\sqrt{2}$ **D.** 27

4. Niech α, β, γ będą kątami trójkąta ABC, a, b, c – bokami odpowiednio przeciwległymi oraz $\alpha = 30°$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

B. $\frac{a}{c} = \frac{\sin\gamma}{2}$

C. Długość jednego z boków trójkąta jest równa promieniowi okręgu opisanego na tym trójkącie.

5. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$, $\sphericalangle CAB = 50°$, $\sphericalangle ABC = 75°$. Wyznacz długość boku BC z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

6. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 32$, $|BC| = 26$, $\sphericalangle BCA = 42°$. Wyznacz miarę kąta CAB z dokładnością do $1°$.

D **7.** Wykaż, że pole trójkąta o kątach α, β, γ wpisanego w okrąg o promieniu R wyraża się wzorem $P = 2R^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$.

3. Twierdzenie cosinusów

Umiejętności:

- znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia cosinusów

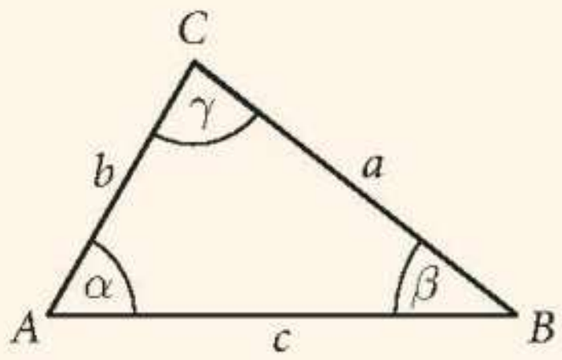
Trójkąt jest jednoznacznie określony, gdy dane są długości jego dwóch boków i kąt między nimi zawarty. Aby wyznaczyć długość trzeciego boku i miary pozostałych kątów, możemy skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie

Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkata o bokach a, b, c i kątach α, β, γ leżących odpowiednio naprzeciw tych boków zachodzą równości:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos\gamma$$



Założenie

Trójkąt ABC jest dowolny. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku w twierdzeniu.

Teza

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos\gamma$$

Twierdzenie cosinusów nazywane jest **uogólnionym twierdzeniem Pitagorasa**.

Dowód

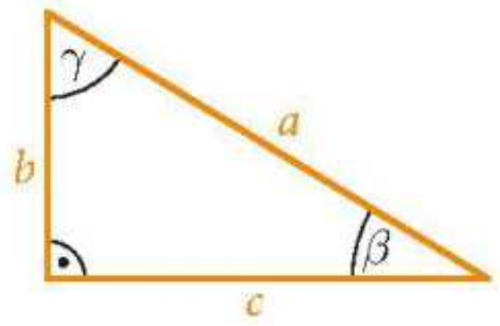
Wyznaczymy a w zależności od b, c oraz kąta α.

Zauważmy, że gdy α jest kątem prostym, to teza twierdzenia wynika wprost z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ i } \cos\alpha = \cos 90^\circ = 0$$

więc:

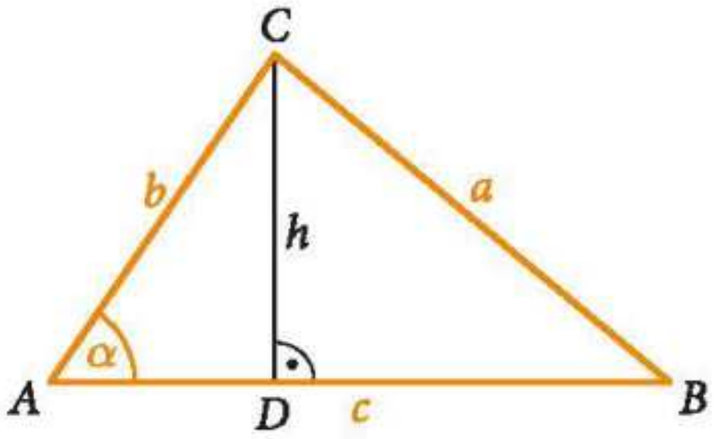
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$



Rozważmy pozostałe dwie sytuacje – gdy α jest kątem ostrym oraz gdy α jest kątem rozwartym.

Prowadzimy wysokość CD.

(1) $a^2 = |CD|^2 + |DB|^2$ ⟵ w $\triangle DBC$ na mocy twierdzenia Pitagorasa



Jeżeli $\alpha < 90°$, to:

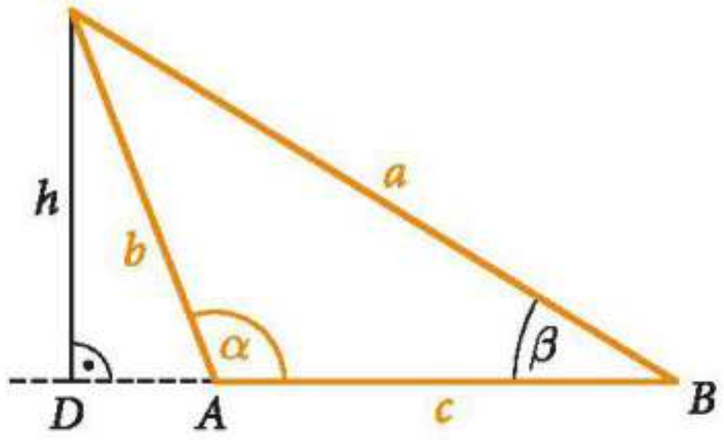
$$\frac{|CD|}{b} = \sin\alpha$$

$$\frac{|AD|}{b} = \cos\alpha$$

więc:

$$|CD| = b\sin\alpha$$

$$|DB| = c - |AD| = c - b\cos\alpha$$



Jeżeli $\alpha > 90°$, to:

$$\frac{|CD|}{b} = \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\frac{|AD|}{b} = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

więc:

$$|CD| = b\sin\alpha$$

$$|DB| = c + |AD| = c - b\cos\alpha$$

Niezależnie od rozwartości kąta α mamy więc:

$$|CD|^2 + |DB|^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 =$$
$$= b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha =$$
$$= b^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + c^2 - 2bc\cos\alpha =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Zatem, po podstawieniu do równości (1), mamy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Wyprowadzenie pozostałych dwóch równości przebiega analogicznie.

Koniec dowodu

Wniosek

Jeżeli oznaczymy długości boków trójkąta a, b, c oraz kąty leżące naprzeciwko nich odpowiednio α, β, γ, to prawdziwe są wzory:

- $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
- $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
- $\cos\gamma = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba}$

Przykład 1 ◀ zad. 3.2

Dane są długości dwóch boków trójkąta ABC: $|AB| = 6$, $|BC| = 4$ oraz $\sphericalangle ABC = 76°$. Obliczymy $|AC|$ z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

$$|AC|^2 = 36 + 16 - 48\cos 76° \approx 40{,}39 \qquad \longleftarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$|AC| \approx \sqrt{40{,}39} \approx 6{,}36$$

Odp.: $|AC| \approx 6{,}36$

Przykład 2 ◀ zad. 3.5

Wyznaczymy (z dokładnością do 1°) kąty trójkąta o bokach długości 7, 8 i 3.

Rozwiązanie

Oznaczmy: $a = 7$, $b = 8$, $c = 3$.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{64 + 9 - 49}{48} = \frac{1}{2}, \text{ stąd } \alpha = 60°$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + 9 - 64}{42} \approx -0{,}1429$$
$$0{,}1429 \approx \cos 82°$$
$$-0{,}1429 \approx -\cos 82° = \cos(180° - 82°) \qquad \longleftarrow \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\beta \approx 180° - 82° = 98°$$
$$\gamma \approx 22° \qquad \longleftarrow \alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Odp.: 60°, 98°, 22°

Przykład 3 ◀ zad. 3.6

Sprawdzimy, czy trójkąt o bokach długości $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+2$, $\sqrt{2}+3$ jest rozwartokątny.

Rozwiązanie

Największy kąt trójkąta leży naprzeciwko najdłuższego boku. Najdłuższy bok badanego trójkąta to $a = \sqrt{2}+3$. Niech α oznacza największy kąt trójkąta. Zbadamy znak cosinusa tego kąta.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ gdzie } b = \sqrt{2} \text{ i } c = \sqrt{2} + 2$$

Ponieważ $2bc > 0$, wystarczy zbadać znak wyrażenia w liczniku ułamka.

$$b^2 + c^2 - a^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}+2\right)^2 - \left(\sqrt{2}+3\right)^2 = -3 - 2\sqrt{2} < 0$$

Zatem $\cos\alpha < 0$, czyli α jest kątem rozwartym.

Odp.: Badany trójkąt jest rozwartokątny.

Przykład 4 ◂ zad. 3.8

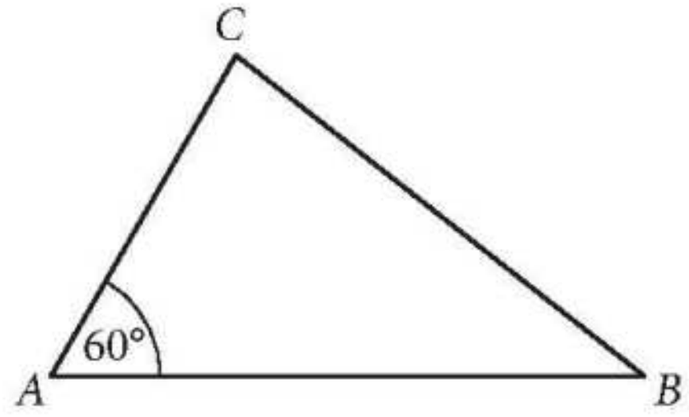
W trójkącie ABC mamy $\sphericalangle BAC = 60°$. Ponadto zachodzą warunki $|AB| = 2|AC| - 4$ i $|BC| = |AC| + 4$. Wyznaczymy długości boków tego trójkąta.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że $|AC| = x$. Wówczas $|AB| = 2x - 4$ i $|BC| = x + 4$. Zauważmy, że aby spełniony był warunek $|AB| > 0$, musimy założyć, że $x > 2$.

Na mocy twierdzenia cosinusów:

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \cos\sphericalangle BAC$$
$$(x+4)^2 = x^2 + (2x-4)^2 - 2 \cdot x \cdot (2x-4) \cdot \frac{1}{2}$$
$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 4x^2 - 16x + 16 - 2x^2 + 4x$$
$$2x^2 - 20x = 0, \text{ stąd } 2x(x-10) = 0$$



Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy $x = 10$.

Odp.: Boki trójkąta mają długości: $|AC| = 10$, $|BC| = 14$ i $|AB| = 16$.

Zadania

3.1. Oblicz cosinusy kątów trójkąta o danych długościach boków.

a) 5, 14, 15 b) 9, 10, 7 c) 7, 13, 16 d) $1 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2$

3.2. W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle C = 54°$, $|BC| = 10$, $|AC| = 8$. Oblicz długość boku AB z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

3.3. W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle A = 120°$, $|AC| = 6$, $|AB| = 12$. Oblicz długość boku BC oraz miary kątów trójkąta ABC z dokładnością do jednego stopnia.

3.4. Dwa boki trójkąta mają długości 7 i $3\sqrt{2}$, a kąt między nimi ma miarę 45°. Oblicz długość trzeciego boku i miary pozostałych kątów trójkąta z dokładnością do jednego stopnia.

3.5. Dane są długości boków trójkąta. Oblicz miary jego kątów z dokładnością do jednego stopnia.

a) 8, 7, 10 b) 3, 5, 6 c) 24, 11, 18 d) $\sqrt{5}, \sqrt{7}, 3$

3.6. Jakim trójkątem ze względu na kąty jest trójkąt o bokach podanej długości?

a) 5, 9, 13 b) 8, 15, 17 c) $3\sqrt{2}, 4, 1 + \sqrt{2}$ d) 7, 8, 9

3.7. Oblicz miarę największego kąta w trójkącie, którego boki mają długości $a = \left(3 - \sqrt{3}\right)$ cm, $b = 2\sqrt{3}$ cm, $c = 3\sqrt{2}$ cm.

3.8. W trójkącie ABC dane są: $\cos\sphericalangle BAC = \frac{25}{32}$, $|BC| = |AB| - 3$, $|AC| = |AB| - 2$. Wyznacz długości boków tego trójkąta.

3.9. Kąt trójkąta zawarty między dwoma bokami o długościach 14 cm i $7\sqrt{3}$ cm ma miarę 30°. Oblicz obwód trójkąta i promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.

3.10. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 5\sqrt{7}$, $\sphericalangle A = 60°$ oraz $|AC| : |AB| = 3 : 2$. Oblicz długości boków AC i AB.

3.11. W trójkącie ABC boki a, b, c są przeciwległe odpowiednio do kątów α, β, γ. Przerysuj tabelę i zastąp znaki ? odpowiednimi wartościami.

	a	b	c	α	β	γ
a)	$\sqrt{6}$	?	?	60°	45°	?
b)	?	$3\sqrt{2}$	?	?	60°	105°
c)	?	?	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	15°	?	45°
d)	$\sqrt{8}$	4	$2\sqrt{3}+2$	?	?	?
e)	$2\sqrt{2}$	?	$\sqrt{2}+\sqrt{6}$	?	?	75°
f)	$2\sqrt{3}-2$	?	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	?	105°	?

3.12. W równoległoboku krótsza przekątna i bok o długościach odpowiednio 12 cm i 8 cm tworzą kąt 60°. Oblicz długość drugiego boku i dłuższej przekątnej oraz miary kątów równoległoboku.

3.13. Dwa boki trójkąta ostrokątnego wpisanego w okrąg o promieniu r mają długości $r\sqrt{3}$ i $r\sqrt{2}$. Oblicz miary kątów trójkąta.

3.14. W czworokącie wypukłym kolejne boki mają długości: 2 cm, 5 cm, 7 cm i $2\sqrt{13}$ cm. Jedna z przekątnych ma długość 8 cm. Oblicz długość drugiej przekątnej tego czworokąta z dokładnością do 0,1 cm.

3.15. W trójkącie równobocznym ABC na boku BC wybrano taki punkt M, że $|BM| = \frac{1}{2}|MC|$. Wyznacz sinus kąta CAM.

3.16. Trójkąt ABC jest równoramienny, $|AC| = |BC| = 14$ i kąt między ramionami ma miarę 120°. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

D * **3.17.** Wykaż, że w równoramiennym trójkącie prostokątnym tangens kąta ostrego między środkowymi poprowadzonymi z wierzchołków kątów ostrych jest równy 0,75.

D * **3.18.** Udowodnij, że suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości wszystkich jego boków.

D * **3.19.** Sinusy kątów pewnego trójkąta mają się do siebie jak 2 : 3 : 4. Udowodnij, że ten trójkąt jest rozwartokątny.

D * **3.20.** W trójkącie o kątach α, β, γ spełniona jest nierówność $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma < 0$. Wykaż, że $\cos\gamma < 0$.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Dwa boki trójkąta mają długości 5 i 4, a kąt między nimi ma miarę 120°. Wskaż długość trzeciego boku tego trójkąta.

A. $\sqrt{21}$ **B.** $\sqrt{61}$ **C.** $\sqrt{41-20\sqrt{3}}$ **D.** $\sqrt{41+20\sqrt{3}}$

2. Trójkąt o bokach $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{30}$

A. jest ostrokątny.
B. jest prostokątny.
C. jest rozwartokątny.
D. nie istnieje.

3. Wskaż wartość cosinusa kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o podstawie 4 cm i ramionach 5 cm.

A. $\frac{3}{5}$ **B.** $\frac{4}{5}$ **C.** $\frac{17}{25}$ **D.** $\frac{2\sqrt{21}}{5}$

4. W trójkącie o bokach a, b, c kąt α leżący naprzeciwko boku a jest rozwarty. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $a^2 + b^2 > c^2$ **B.** $b^2 + c^2 > a^2$ **C.** $c^2 + a^2 > b^2$

5. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 5$, $|BC| = 2$, $|AC| = 4$. Wyznacz z dokładnością do 1° miary kątów tego trójkąta.

6. Stosunek boków trójkąta wynosi 3 : 5 : 6. Wyznacz cosinus największego kąta w tym trójkącie.

7. Punkty K i L dzielą przekątną AC kwadratu $ABCD$ o boku a na trzy równe części. Oblicz długość boku rombu $BLDK$.

4. Związki miarowe w wielokątach

Umiejętności:

- znajdowanie związków miarowych w wielokątach z użyciem trygonometrii

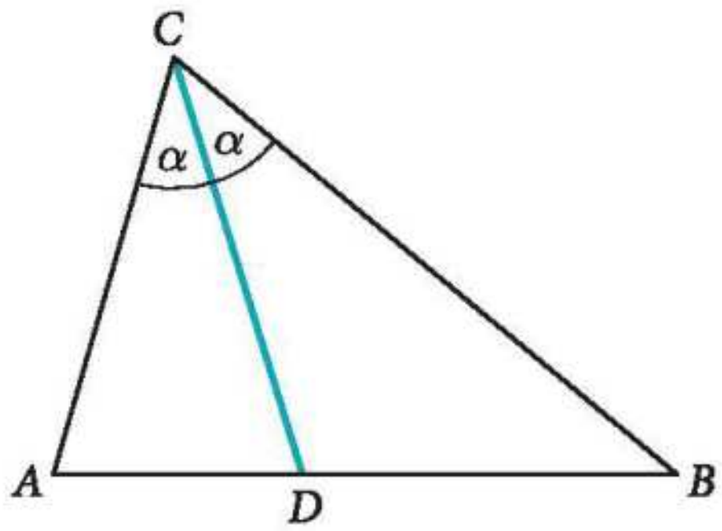
Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Twierdzenie o dwusiecznej

Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok trójkąta na odcinki proporcjonalne do boków przyległych do tego kąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Założenie

CD jest dwusieczną kąta ACB.

Teza

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

Dowód

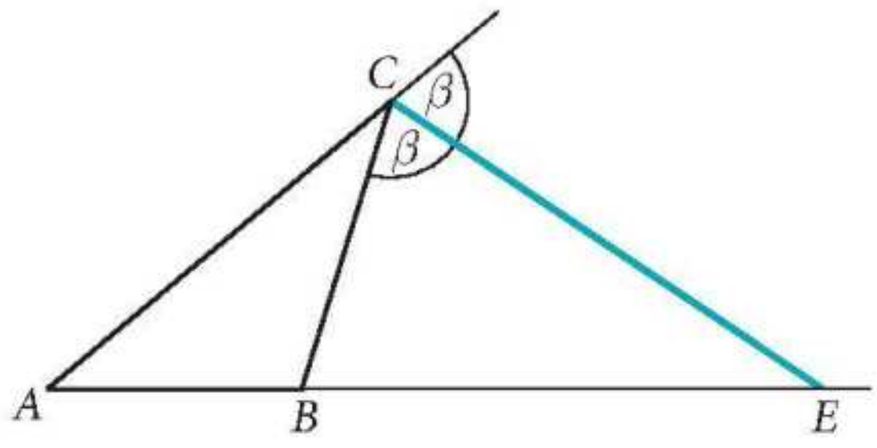
$$\frac{P_{\triangle ADC}}{P_{\triangle DBC}} = \frac{|AD|}{|DB|} \quad \longleftarrow \text{trójkąty } ADC \text{ i } DBC \text{ mają wspólną wysokość}$$

$$\frac{P_{\triangle ADC}}{P_{\triangle DBC}} = \frac{|AC| \cdot |DC| \cdot \sin\alpha}{|CB| \cdot |DC| \cdot \sin\alpha} = \frac{|AC|}{|CB|} \quad \longleftarrow \text{pole trójkąta jest równe } P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

Zatem $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$.

Koniec dowodu

Zachodzi też twierdzenie o dwusiecznej kąta zewnętrznego, czyli przyległego do kąta wewnętrznego trójkąta. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wtedy twierdzenie to przyjmuje następującą postać:

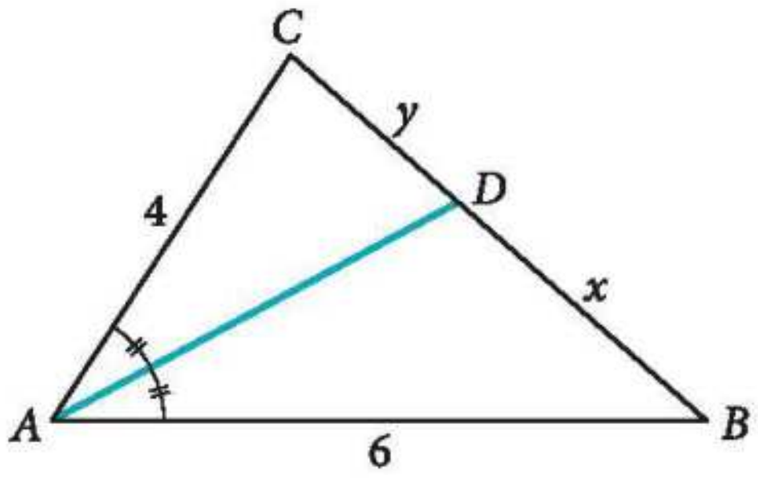


Jeżeli prosta zawierająca dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku C trójkąta ABC przecina prostą AB w punkcie E, to $\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|CB|}$.

Dowód tego twierdzenia pominiemy.

Przykład 1 ◂ zad. 4.2

Boki trójkąta mają długości $|AB| = 6$, $|BC| = 5$, $|AC| = 4$. Obliczymy długości odcinków, na które dwusieczna AD dzieli bok BC.



Rozwiązanie

Oznaczmy $|BD| = x$, $|DC| = y$.

$$\frac{x}{y} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \longleftarrow \text{na mocy twierdzenia o dwusiecznej}$$

$$x + y = 5 \quad \longleftarrow \text{z warunków zadania}$$

Rozwiązujemy układ równań:

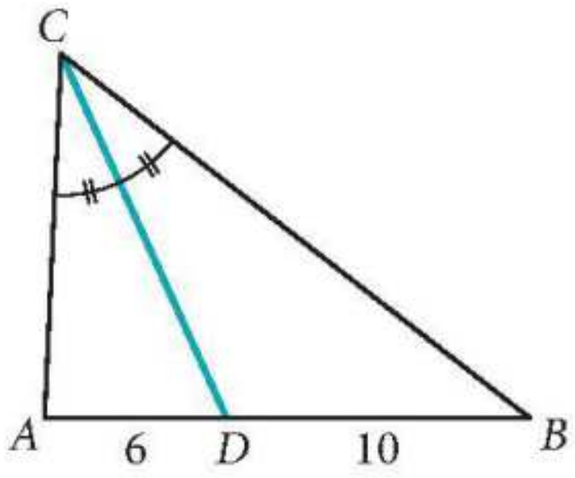
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{6}{4} \\ x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Odp.: $|BD| = 3$, $|DC| = 2$

Przykład 2 ◂ zad. 4.4

Obwód trójkąta ABC jest równy 40, a dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku C dzieli bok AB na odcinki o długościach $|AD| = 6$ i $|DB| = 10$. Obliczymy długości boków trójkąta ABC.

Rozwiązanie



$$|AB| = |AD| + |DB| = 16$$

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|} \quad \longleftarrow \text{na mocy twierdzenia o dwusiecznej}$$

Zatem:

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{6}{10}, \text{ stąd } |AC| = \frac{3}{5}|CB|$$

$$16 + |CB| + \frac{3}{5}|CB| = 40 \quad \longleftarrow \text{obwód trójkąta } ABC \text{ jest równy } 40$$

$$\frac{8}{5}|CB| = 24$$

$$|CB| = \frac{5}{8} \cdot 24 = 15, \quad |AC| = \frac{3}{5} \cdot 15 = 9$$

Odp.: $|AB| = 16$, $|AC| = 9$, $|CB| = 15$

Wyprowadzimy teraz wzory łączące długości boków trójkąta i jego pole z promieniami okręgów: wpisanego w ten trójkąt i opisanego na nim.

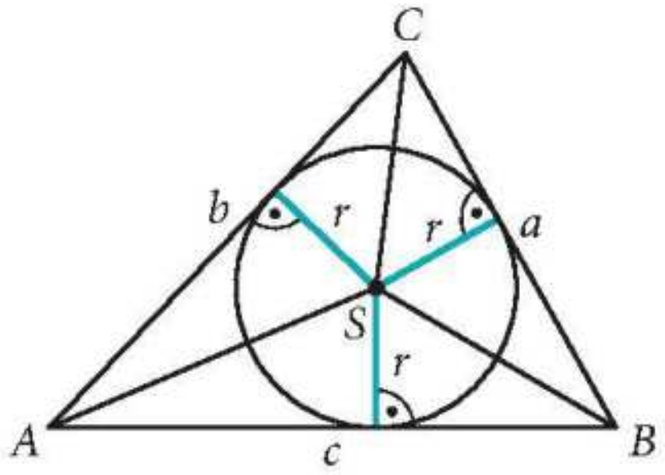
Twierdzenie

Pole P trójkąta jest równe iloczynowi połowy obwodu trójkąta i promienia r okręgu wpisanego w ten trójkąt:

$$P = pr$$

gdzie $2p$ oznacza obwód trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Założenia

a, b, c są długościami boków trójkąta,
$2p$ oznacza obwód trójkąta,
r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Teza

Pole P trójkąta jest równe $P = pr$.

Dowód

Wyznaczymy pole tego trójkąta.

$$P = P_{\triangle ABS} + P_{\triangle BCS} + P_{\triangle CAS}$$

$$P = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br \quad \longleftarrow r \text{ jest wysokością każdego z trójkątów: } ABS, BCS, CAS$$

$$P = \frac{1}{2}r(c + a + b)$$

$$P = pr$$

Koniec dowodu

Twierdzenie

Pole P trójkąta o bokach długości a, b, c jest równe:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

gdzie R oznacza promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Założenia

a, b, c są długościami boków trójkąta,
R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Teza

Pole P trójkąta jest równe $P = \frac{abc}{4R}$.

Dowód

Niech α oznacza kąt trójkąta leżący naprzeciw boku o długości a. Mamy:

$$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} \qquad \longleftarrow \text{z twierdzenia sinusów } \frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

Koniec dowodu

Podamy jeszcze wzór (jego wyprowadzenie pominiemy), za pomocą którego można obliczyć pole trójkąta, gdy dane są tylko długości jego boków.

Twierdzenie

Wzór Herona

Pole P trójkąta o bokach długości a, b, c jest równe:

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie $2p$ oznacza obwód trójkąta.

Zauważmy, że w podanym wzorze niezależnie od rodzaju trójkąta wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, więc spełniają nierówność trójkąta:

$$a+b>c, \qquad a+c>b, \qquad b+c>a,$$

a stąd po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$p-c>0, \qquad p-b>0, \qquad p-a>0.$$

Przykład 3 ◀ zad. 4.8

Dany jest trójkąt o bokach długości 6, 5 i 7. Obliczymy promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Rozwiązanie

Niech p oznacza połowę obwodu, a P – pole tego trójkąta. Wówczas:

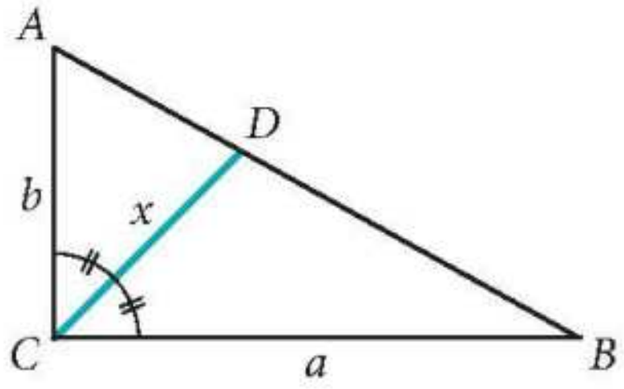
$$p = 9,\ P = \sqrt{9\cdot 3\cdot 4\cdot 2} = 6\sqrt{6}$$

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{6\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}, \qquad r = \frac{P}{p} = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Odp.: $R = \frac{35\sqrt{6}}{24},\ r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

D Przykład 4 ◀ zad. 4.15

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a i b poprowadzono dwusieczną kąta prostego. Wykażemy, że zawarty w trójkącie odcinek tej dwusiecznej ma długość $\frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$.



Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Dowód

$$P_{BDC} = \frac{1}{2}a \cdot x \cdot \sin 45^\circ = \frac{ax\sqrt{2}}{4}$$

$$P_{ADC} = \frac{1}{2}b \cdot x \cdot \sin 45^\circ = \frac{bx\sqrt{2}}{4}$$

Pole trójkąta ABC jest sumą pól trójkątów BDC i ADC. Zatem:

$$\frac{ab}{2} = \frac{ax\sqrt{2}}{4} + \frac{bx\sqrt{2}}{4}$$

$$2ab = x\sqrt{2}(a+b)$$

$$x\sqrt{2} = \frac{2ab}{a+b}, \text{ stąd } x = \frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$$

Koniec dowodu

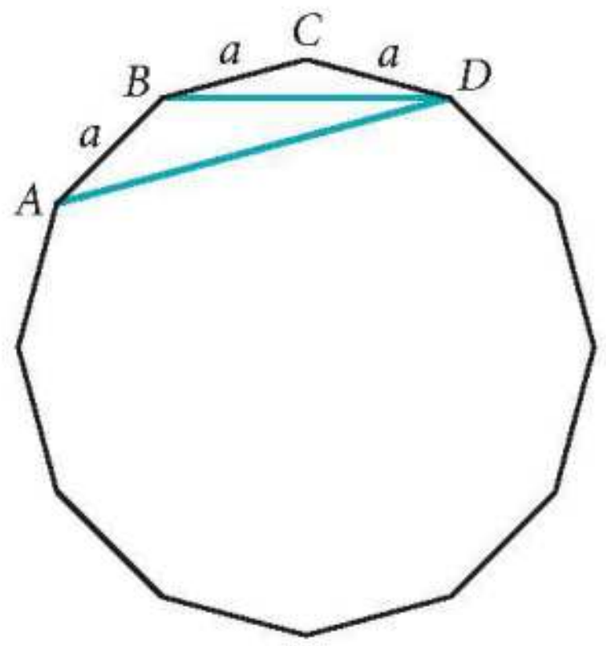
Przykład 5 ◀ zad. 4.19

Dany jest dwunastokąt foremny o boku a. Obliczymy

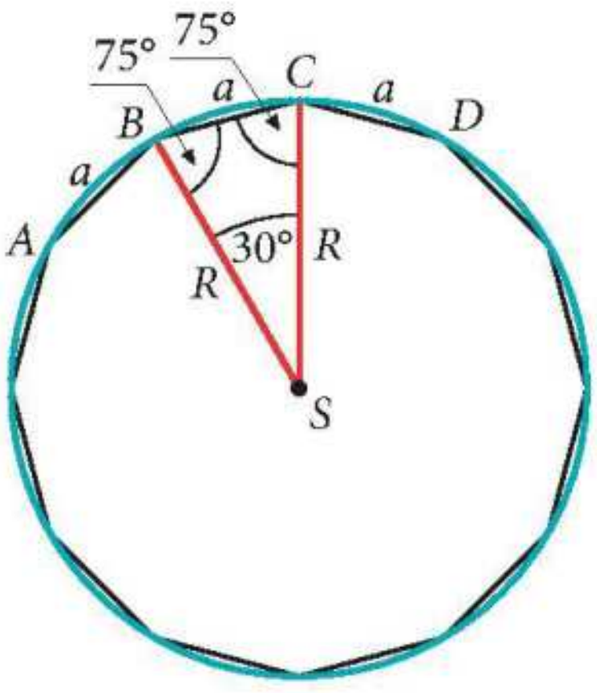
a) promień okręgu przechodzącego przez wszystkie wierzchołki tego dwunastokąta.

b) długość przekątnej BD.

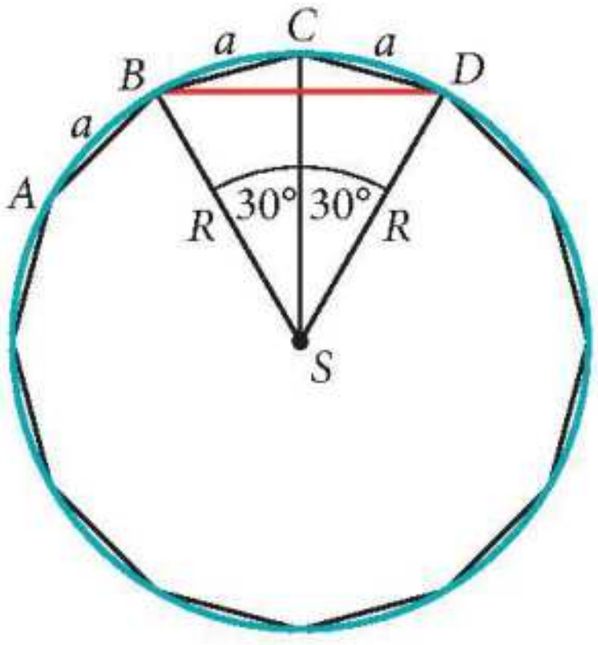
c) długość przekątnej AD.



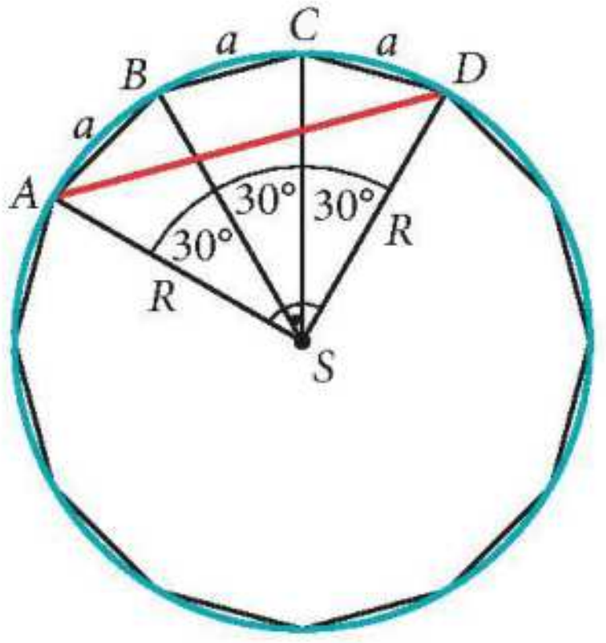
Rozwiązanie



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

a) Zauważmy, że środek S okręgu przechodzącego przez wszystkie wierzchołki dwunastokąta jest środkiem symetrii tego wielokąta. Niech R będzie promieniem tego okręgu (rys. 1).

Dwunastokąt ma wszystkie boki tej samej długości, zatem kąt BSC ma miarę $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Trójkąt BCS jest równoramienny o kącie przy podstawie 75°, więc:

$$\frac{\frac{a}{2}}{R} = \cos 75^\circ$$

$$R = \frac{a}{2\cos 75^\circ} \qquad \longleftarrow \cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$R = \frac{2a}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{2a\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \frac{2a\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$$

Odp.: $R = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$

b) Trójkąty BCS i CDS są przystające, więc trójkąt BSD jest równoboczny (rys. 2) i $|BD| = R$, czyli:

$$|BD| = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$$

Odp.: $|BD| = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$

c) Trójkąt ASD jest prostokątnym trójkątem równoramiennym, czyli jest połową kwadratu (rys. 3). Zatem:

$$|AD| = R\sqrt{2}$$

$$|AD| = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}a\sqrt{2} = a\left(1+\sqrt{3}\right)$$

Odp.: $|AD| = a\left(1+\sqrt{3}\right)$

Zadania

4.1. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 i 8. Oblicz długości odcinków, na które dwusieczna kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną.

4.2. Boki trójkąta mają długości $|AB| = 8$, $|BC| = 7$, $|AC| = 12$. Oblicz długości odcinków, na które każda z dwusiecznych dzieli przeciwległy bok.

4.3. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 6 cm, a ramiona po 12 cm. Dwusieczne kątów przy podstawie przecinają ramiona w punktach M i N. Oblicz długość odcinka MN.

4.4. W trójkącie ABC dana jest suma długości boków: $|AB|+|AC| = 33$. Dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku A dzieli bok BC na odcinki o długościach $|BD| = 12$ i $|DC| = 10$. Oblicz długości boków AB i AC.

4.5. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 2a$, $|BC| = a$ i $\sphericalangle ACB = 120°$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Wyznacz długość odcinka AD.

4.6. Oblicz pole trójkąta o bokach podanej długości.
a) 4, 6, 8 b) 8, 11, 13 c) 6, 10, 11 d) 4, 6, 7

4.7. Odcinki o długościach 5 cm, 12 cm, 13 cm są bokami trójkąta. Oblicz stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

4.8. Boki trójkąta mają długości 4 cm, 5 cm, 6 cm. Oblicz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

4.9. Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ma miarę 32°. Oblicz (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

4.10. Na boku BC równobocznego trójkąta ABC wybrano taki punkt D, że stosunek pola trójkąta ADB do pola trójkąta ADC wynosi 1 : 2. Wyznacz tangens kąta DAB.

4.11. Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu $\sqrt{3}$ jest równa 120°. Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

4.12. Dwa boki trójkąta mają długości 8 i 15, a kąt między nimi ma miarę 60°. Oblicz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

4.13. Dwa boki trójkąta mają długości 4 cm i 5 cm. Jego pole jest równe 8 cm^2. Oblicz długość x trzeciego boku trójkąta oraz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

4.14. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli bok przeciwległy w stosunku 2 : 3. Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.

4.15. Dany jest trójkąt ABC, w którym: $|AB| = 8$, $|BC| = 4$ i $\sphericalangle ABC = 56°$. Oblicz długość dwusiecznej BD w tym trójkącie. Wynik podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

4.16. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 4$ cm, $|BC| = \sqrt{3}$ cm, $|AC| = 3$ cm. Oblicz pole trójkąta ABC oraz stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

4.17. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych jest dwa razy mniejszy od drugiego. Długość okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi 2π cm. Oblicz pole koła opisanego na trójkącie.

4.18. Boki trójkąta ABC mają długości: $|AB| = 4$ cm, $|AC| = |BC| = 8$ cm.

a) Oblicz promień r okręgu wpisanego w trójkąt ABC i promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.

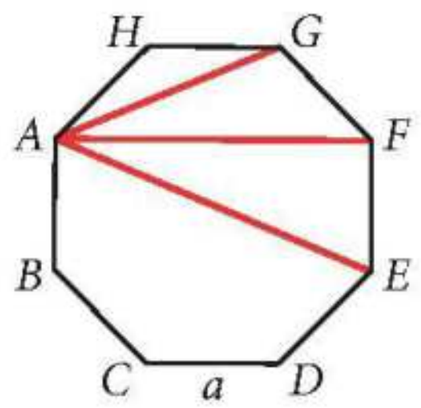
b) Oblicz stosunek pól figur, na które symetralna boku AC rozcina trójkąt ABC.

4.19. Bok ośmiokąta foremnego $ABCDEFGH$ ma długość a (zob. rysunek). Wyznacz długość

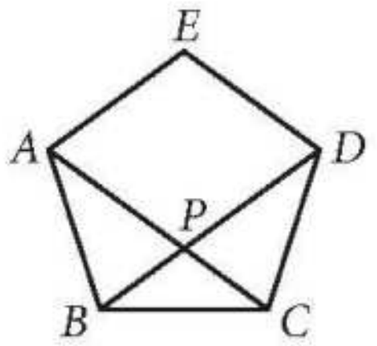
a) przekątnej AG.

b) przekątnej AF.

c) przekątnej AE.



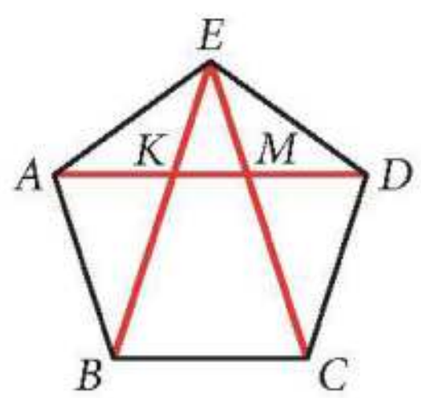
D **4.20.** W pięciokącie foremnym $ABCDE$ punkt P jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD, jak na rysunku. Udowodnij, że czworokąt $APDE$ jest rombem.



D **4.21.** W kwadracie o boku długości 1 zawarty jest trójkąt. Wykaż, że pole tego trójkąta nie jest większe niż sinus dowolnego jego kąta.

D **4.22.** W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną AD. Wykaż, że $|BD| < |AB|$.

4.23. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CD dzieli przeciwprostokątną AB na odcinki o długościach 4 cm i 16 cm. Oblicz promienie okręgów wpisanych w trójkąty ADC i CDB oraz odległość między środkami tych okręgów.



D **4.24.** W pięciokącie foremnym $ABCDE$ o boku 1 przekątne EB i EC przecinają przekątną AD odpowiednio w punktach K i M, jak na rysunku. Wykaż, że $|KM| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

4.25. Dwa boki trójkąta o polu P mają długości a i b. Wyznacz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm.

A. 3 cm **B.** 2 cm **C.** 4 cm **D.** 1 cm

2. Ile wynosi pole trójkąta o bokach 4, 5, 7?

A. $4\sqrt{6}$ **B.** $6\sqrt{6}$ **C.** 4 **D.** $3\sqrt{6}$

3. W trójkącie ABC o boku $|AC| = 18$ dwusieczna CD dzieli bok AB w stosunku $|BD| : |DA| = 1 : 6$. Wskaż długość boku CB.

A. 1 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** 3 **D.** 5

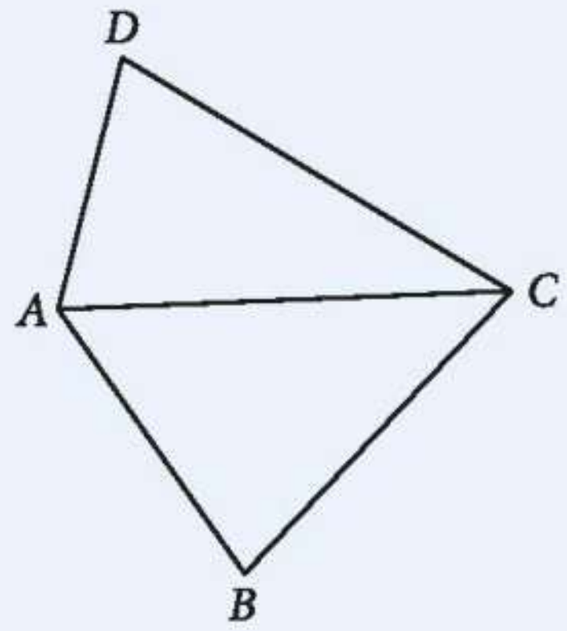
4. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Jeden z kątów ostrych tego trójkąta jest dwa razy mniejszy od drugiego kąta ostrego.

B. Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, z których jeden jest dwa razy krótszy od drugiego.

C. Stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi $1 + \sqrt{3}$.

5. W czworokącie $ABCD$ przedstawionym na rysunku obok dane są: $|AB| = 5$, $|BC| = 6$, $|CD| = 7$, $|DA| = 4$, $|AC| = 7$. Oblicz pole tego czworokąta.



6. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$, $|AB| = 1 + \sqrt{3}$ i $\sphericalangle ACB = 120°$. Oblicz długości odcinków, na które dwusieczna kąta przy podstawie dzieli ramię tego trójkąta.

7. Boki prostokąta $ABCD$ mają długości $|AB| = 20$, $|BC| = 25$. Oblicz odległość między środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i CDA.

5. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–10 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 3\sqrt{7}$, $\sphericalangle BCA = 30°$. Wskaż promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

A. $3\sqrt{3}$ **B.** $3\sqrt{7}$ **C.** $1{,}5\sqrt{7}$ **D.** 6

2. Promień okręgu opisanego na trójkącie jest równy 17. Jeden z kątów trójkąta ma miarę 78°. Do którego przedziału należy długość boku leżącego naprzeciw tego kąta?

A. $\langle 30;\ 31)$ **B.** $\langle 31;\ 32)$ **C.** $\langle 32;\ 33)$ **D.** $\langle 33;\ 34)$

3. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 24$, $\sphericalangle ABC = 45°$, $\sphericalangle CAB = 75°$. Zatem

A. $|AC| = 8\sqrt{3}$. **B.** $|AC| = 8\sqrt{6}$. **C.** $|AC| = 12\sqrt{6}$. **D.** $|AC| = 24\sqrt{3}$.

4. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 8$, $|AC| = 6\sqrt{2}$, $\sphericalangle ABC = 45°$. Wskaż wartość $\sin \sphericalangle ACB$.

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5. Dwa boki trójkąta mają długości 3 i 8, a kąt między nimi ma miarę 135°. Wskaż długość trzeciego boku tego trójkąta.

A. $\sqrt{73 - 24\sqrt{2}}$ **B.** $\sqrt{73 - 12\sqrt{2}}$ **C.** $\sqrt{73 + 12\sqrt{2}}$ **D.** $\sqrt{73 + 24\sqrt{2}}$

6. Trójkąt o bokach $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{17}$

A. jest ostrokątny.
B. jest prostokątny.
C. jest rozwartokątny.
D. nie istnieje.

7. Boki trójkąta mają długości $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ i 3. Wskaż wartość cosinusa największego kąta w tym trójkącie.

A. $\frac{5}{6\sqrt{3}}$ **B.** $\frac{1}{2\sqrt{21}}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{13\sqrt{7}}{42}$

8. Boki trójkąta mają długości 7, 12 i 13. Ile wynosi pole tego trójkąta?

A. $12\sqrt{3}$ **B.** $24\sqrt{3}$ **C.** $4\sqrt{273}$ **D.** $8\sqrt{273}$

9. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 12 i 16. Ile wynosi promień okręgu wpisanego w ten trójkąt?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

10. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 15$, $|AC| = 12$, $|BC| = 18$. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie D. Wskaż długość odcinka CD.
A. 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

W zadaniach 11–15 oceń prawdziwość podanych zdań.

11. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 10$, $|AC| = 8$, $\sphericalangle ABC = 30°$. Wynika stąd, że
A. $\sin\sphericalangle ACB = \frac{5}{8}$.
B. trójkąt ABC jest rozwartokątny.
C. są dwa trójkąty spełniające warunki zadania.

12. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 3$, $|AC| = 5$, $\sphericalangle ACB = 45°$. Wynika stąd, że
A. są dwa trójkąty spełniające warunki zadania.
B. trójkąt ABC jest rozwartokątny.
C. dane są błędne, taki trójkąt nie istnieje.

13. Boki trójkąta mają się do siebie jak $3 : 5 : 6$. Wynika stąd, że
A. trójkąt ten jest rozwartokątny.
B. cosinus największego kąta tego trójkąta jest równy $-\frac{1}{15}$.
C. cosinus najmniejszego kąta tego trójkąta jest równy $\frac{13}{15}$.

14. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $\sphericalangle ABC = 30°$. Zatem
A. pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{2}ac$.
B. promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy b.
C. $\sin\sphericalangle CAB = \frac{a}{2b}$.

15. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = \sqrt{5}$, $|BC| = \sqrt{6}$, $|AC| = \sqrt{7}$. Zatem
A. $\cos\sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{30}}{15}$. **B.** $\cos\sphericalangle CAB = \frac{3}{\sqrt{35}}$. **C.** $\sin\sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

16. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 6$, $\sphericalangle ABC = 35°$, $\sphericalangle BCA = 74°$. Wyznacz obwód tego trójkąta z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

17. Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 20, $\sphericalangle CAB = 40°$ i $\sphericalangle ABC = 22°$. Wyznacz obwód tego trójkąta z dokładnością do 0,1.

18. Bok BC trójkąta ABC ma długość $16\sqrt{3}$, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 16. Wyznacz miarę $\sphericalangle CAB$.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

19. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 7$, $|BC| = 9$, $|CA| = 10$. Wyznacz długość środkowej BD.

20. W równoległoboku $ABCD$ dane są: $|AB| = 11$, $|BC| = 8$, $\sphericalangle ABC = 60°$. Wyznacz długości przekątnych tego równoległoboku.

D **21.** Wykaż, że nie istnieje trójkąt, w którym sinusy kątów są równe $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ i $\frac{5}{7}$.

22. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D, że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz

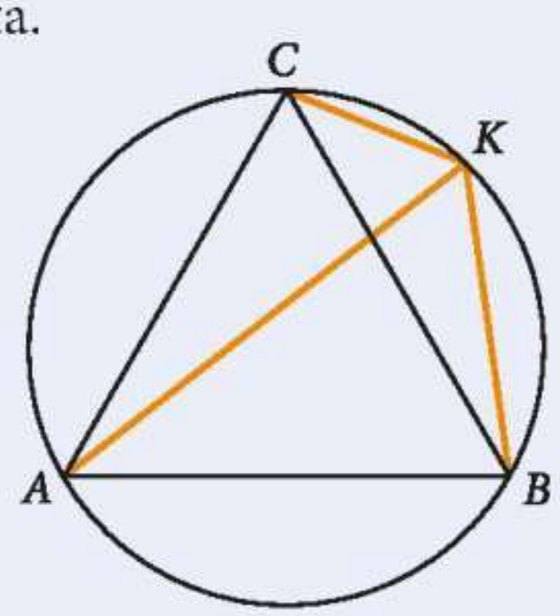
a) miary kątów CAD i DAB z dokładnością do $1°$.

b) stosunek promieni okręgów opisanych na trójkątach ACD i ABD.

23. W trójkącie rozwartokątnym ABC o kącie rozwartym przy wierzchołku B dane są $|AB| = 4\sqrt{2}$ i $|AC| = 4\left(1 + \sqrt{3}\right)$. Poprowadzono wysokość BD i otrzymano trójkąt równoramienny ABD. Wyznacz kąty trójkąta ABC oraz pole P koła opisanego na tym trójkącie.

24. W trójkącie równoramiennym ABC miara kąta BAC jest równa $30°$, a podstawa AB ma długość 8. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

D * **25.** Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg. Na łuku BC obrano punkt K, jak na rysunku obok. Wykaż, że $|CK|^2 - |CK| \cdot |AK| = |KB|^2 - |KB| \cdot |KA|$.



D **26.** Boki trójkąta mają długości $2a$, $3a$, $4a$. Wykaż, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $\frac{8\sqrt{15}}{15}a$.

27. Odcinki o długościach: $2\sqrt{3}$, $3 - \sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ są bokami trójkąta.

a) Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta.

b) Oblicz wysokość poprowadzoną z wierzchołka tego kąta.

c) Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

28. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 6$, $|BC| = 9$, $\sphericalangle ABC = 60°$. Wyznacz długości odcinków, na które dwusieczna kąta ABC dzieli bok CA.

* **29.** W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na odcinki o długościach $2 + \sqrt{3}$ i $3 + 2\sqrt{3}$. Wyznacz miary kątów trójkąta.

Geometria analityczna

2

1. Warto powtórzyć – równanie prostej

Równanie prostej na płaszczyźnie

Równanie $ax + by + c = 0$ o zmiennych x i y opisuje:

- całą płaszczyznę, gdy $a = b = c = 0$,
- zbiór pusty, gdy $a = b = 0$ i $c \neq 0$,
- prostą, gdy a i b nie są jednocześnie równe 0.

Każdą prostą na płaszczyźnie możemy opisać za pomocą równania:

$$ax + by + c = 0, \text{ gdzie } a^2 + b^2 \neq 0$$

- Warunek $a^2 + b^2 \neq 0$ oznacza, że a i b nie mogą być **jednocześnie** równe 0.
- Warunek $ab \neq 0$ oznacza, że **żadna** z liczb a, b nie może być równa 0.

- Jeżeli $b \neq 0$, to równanie $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ jest wzorem funkcji liniowej zmiennej x i opisuje na płaszczyźnie prostą, która jest wykresem tej funkcji.
- Jeżeli $b = 0$ i $a \neq 0$, to równanie $x = -\frac{c}{a}$ opisuje na płaszczyźnie prostą prostopadłą do osi x, która nie jest wykresem żadnej funkcji.

Równanie $ax + by + c = 0$, w którym a i b nie są jednocześnie równe zero, czyli równanie liniowe z dwiema niewiadomymi, nazywamy **równaniem prostej w postaci ogólnej**, natomiast równanie $y = mx + n$ **równaniem kierunkowym prostej o współczynniku kierunkowym m i wyrazie wolnym n.**

Przykład 1 ◂ zad. 1.6

Przekształcimy dane równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej.

Rozwiązanie

a) $3x - y - 5 = 0$
$-y = -3x + 5$
$y = 3x - 5$

b) $x + 4y - 7 = 0$
$4y = -x + 7$
$y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

Jeżeli prosta ma równanie w postaci kierunkowej, to jest ono tylko jedno.

Przykład 2 ◂ zad. 1.8

Przekształcimy dane równanie kierunkowe prostej do postaci ogólnej.

Rozwiązanie

a) $y = \sqrt{11}x - 6$
$-\sqrt{11}x + y + 6 = 0$

⟵ wystarczy przenieść wszystkie wyrazy na jedną stronę i uporządkować je

b) $y = -\frac{6}{7}x + \frac{3}{2}$

$\frac{6}{7}x + y - \frac{3}{2} = 0$

$12x + 14y - 21 = 0$

Równanie danej prostej w postaci ogólnej można zapisać na nieskończenie wiele sposobów (jedne równania powstają z innych przez pomnożenie przez liczbę różną od zera).

⟵ jeżeli zależy nam na współczynnikach całkowitych, to obydwie strony równania mnożymy przez 14

Przykład 3 ◀ zad. 1.10

Napiszemy równanie prostej przechodzącej przez dane punkty.

a) $(-1, 1)$ i $(-1, 12)$ b) $(-1, -4)$ i $(7, 12)$

Rozwiązanie

a) Pierwsze współrzędne obu punktów są takie same, zatem prosta przechodząca przez te punkty jest prostopadła do osi x i ma równanie $x = -1$.

b) Pierwsze współrzędne obu punktów są różne, zatem do rozwiązania zadania korzystamy z równania kierunkowego prostej $y = mx + n$.

$\begin{cases} -4 = -m + n \\ 12 = 7m + n \end{cases}$ $\begin{cases} 4 = m - n \\ 12 = 7m + n \end{cases}$ $\begin{cases} 4 = m - n \\ 16 = 8m \end{cases}$ $\begin{cases} m = 2 \\ n = -2 \end{cases}$

Odp.: a) $x = -1$ b) $y = 2x - 2$

Przykład 4 ◀ zad. 1.11

Wyznaczymy punkty przecięcia prostej o równaniu $2x - 5y + 10 = 0$ z osiami układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć punkt przecięcia prostej z osią x, rozwiązujemy układ równań:

$\begin{cases} 2x - 5y + 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

⟵ każdy punkt osi x ma współrzędną $y = 0$

$\begin{cases} 2x + 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$

Punkt przecięcia prostej z osią x ma współrzędne $(-5, 0)$.

Aby wyznaczyć punkt przecięcia prostej z osią y, rozwiązujemy układ równań:

$\begin{cases} 2x - 5y + 10 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

⟵ każdy punkt osi y ma współrzędną $x = 0$

$\begin{cases} -5y + 10 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$

Punkt przecięcia prostej z osią y ma współrzędne $(0, 2)$.

Odp.: Punkty przecięcia prostej z osiami to $(-5, 0)$ i $(0, 2)$.

Punkt $A = (x_A, y_A)$ jest punktem wspólnym prostej $k: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ i prostej $l: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają równania obu prostych, czyli gdy para liczb (x_A, y_A) należy do zbioru rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Równania prostych równoległych i prostopadłych

Przypomnijmy zależności między równaniami prostych równoległych i prostych prostopadłych.

Prosta k	Prosta l taka, że $l \parallel k$	Prosta p taka, że $p \perp k$
$y = mx + n,\ m \neq 0$	$y = mx + n_1$	$y = -\frac{1}{m}x + n_2$
$x = a$	$x = a_1$	$y = a_2$
$y = b$	$y = b_1$	$x = b_2$

Przykład 5 ◂ zad. 1.20, 1.21

Dana jest prosta $l: y = -3x + 2$. Przez punkt $A = (4, 3)$ poprowadzono prostą k równoległą do prostej l oraz prostą h prostopadłą do l. Napiszemy równania prostej k i prostej h.

Rozwiązanie

- $k: y = -3x + n$ ⟵ każda prosta równoległa do l ma równanie tej postaci
  $3 = -3 \cdot 4 + n$ ⟵ $A = (4, 3) \in k$
  $n = 15$
  $k: y = -3x + 15$

- $h: y = \frac{1}{3}x + c$ ⟵ każda prosta prostopadła do l ma równanie tej postaci
  $3 = \frac{4}{3} + c$ ⟵ $A = (4, 3) \in h$
  $c = \frac{5}{3}$
  $h: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Odp.: $k: y = -3x + 15$, $h: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

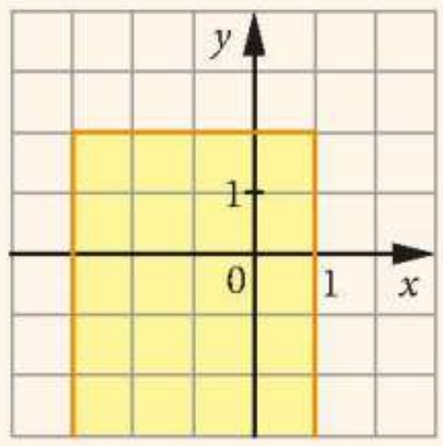
Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Wskaż równanie, za pomocą którego można opisać wykres funkcji $f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{3}$.

A. $-9x + 15y + 10 = 0$
B. $9x - 15y - 10 = 0$
C. $-9x - 15y + 10 = 0$
D. $9x + 15y + 10 = 0$

1.2. Wskaż zbiór, którego ilustracją jest figura przedstawiona na rysunku.



A. $D = \{(x, y): -3 \leqslant x \leqslant 1 \text{ i } y < 2\}$
B. $D = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } -3 \leqslant x \leqslant 2\}$
C. $D = \{(x, y): -3 < x < 1 \text{ i } y \leqslant 2\}$
D. $D = \{(x, y): -3 \leqslant x \leqslant 1 \text{ i } y \leqslant 2\}$

1.3. Wskaż punkt przecięcia prostej $18x - 4y - 3 = 0$ z osią x.

A. $\left(0, \frac{1}{6}\right)$ **B.** $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$ **D.** $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

1.4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Równanie $x + 3y - 2 = 0$ jest równaniem prostej przechodzącej przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.
B. Prosta o równaniu $5x - 7 = 0$ jest równoległa do osi y.
C. Prosta o równaniu $3y - 3\pi = 0$ nie jest wykresem funkcji.

1.5. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej podany zbiór.

a) $A = \{(x, y): -3 \leqslant x \leqslant 1\}$
b) $B = \left\{(x, y): x \in \langle -2; 4\rangle \text{ i } y = -\frac{1}{2}x\right\}$
c) $C = \{(x, y): x < 0 \text{ i } 1 < y < 3\}$
d) $D = \{(x, y): x \in \mathbf{Z} \text{ i } y = 2\}$
e) $E = \{(x, y): x \in \langle -1; 2\rangle \text{ i } y = 1 - 2x\}$
f) $F = \{(x, y): x \in \langle 0; 3\rangle \text{ i } y \in \langle -3; 0\rangle\}$
g) $G = \{(x, y): |x| < 5 \text{ i } y = |x| + 1\}$
h) $H = \left\{(x, y): |x| < 4 \text{ i } y = \sqrt{|-x|}\right\}$

1.6. Przekształć równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej, jeśli to możliwe.

a) $2x - y = 0$
b) $\frac{1}{2}x + 3y - 1 = 0$
c) $2y - 8 = 0$
d) $3x - 5 = 0$
e) $-6x - 2y + 1 = 0$
f) $x - 3y - 4 = 0$

1.7. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej o podanym równaniu.

a) $5x + y + 1 = 0$
b) $x - y + 9 = 0$
c) $3x - 4y + 2 = 0$
d) $\pi x - 2y + 3 = 0$

1.8. Przekształć równanie prostej z postaci kierunkowej do postaci ogólnej.

a) $y = 3x + 1$
b) $y = \frac{1}{5}x - 3$
c) $y = -\frac{2}{9}x + \frac{2}{3}$
d) $y = -5x$
e) $y = \frac{3}{4}x - 5$
f) $y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{2}$

1.9. Sprawdź, czy oba równania przedstawiają tę samą prostą.

a) $x - y + \frac{5}{2} = 0,\ -x + y - 2\frac{1}{2} = 0$
b) $-2x + y = 0,\ 2x - y = 0$
c) $-3x + 5y - 1 = 0,\ 3x + 5y - 1 = 0$
d) $4x - 2y + 1 = 0,\ -2x + y - 1 = 0$
e) $7x - 5 = 0,\ 7y - 5 = 0$
f) $1\frac{1}{2}x + 3y - 4 = 0,\ 3x + 6y - 8 = 0$

1.10. Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty.

a) $A = (4, -5)$ i $B = (2, 3)$
b) $A = (-9, -1)$ i $B = (3, 3)$
c) $A = (2, 6)$ i $B = \left(7, 3\frac{1}{2}\right)$
d) $A = \left(-1, \frac{1}{3}\right)$ i $B = \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

1.11. Wyznacz punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych i narysuj tę prostą.

a) $x + 2y - 4 = 0$
b) $3x - y + 6 = 0$
c) $-2x + 4y - 1 = 0$
d) $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 1 = 0$

1.12. Napisz pięć par liczb spełniających podane równanie.

a) $x + 3y - 6 = 0$
b) $7x + 14y + 2 = 0$

1.13. Wyznacz punkt wspólny prostych k i l.

a) k: $2x - 3y + 6 = 0$ l: $x + 2y - 4 = 0$
b) k: $-\frac{2}{3}x - y + 1 = 0$ l: $x - y - 4 = 0$
c) k: $4x - y - 8 = 0$ l: $x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$
d) k: $-3x + y - 2 = 0$ l: $1{,}5x - 0{,}5y + 2 = 0$
e) k: $3x + 0{,}6y + 1{,}2 = 0$ l: $2x - 3y - 6 = 0$
f) k: $5x + 3y - 6 = 0$ l: $2x + 1{,}2y - 2{,}4 = 0$

1.14. Narysuj w układzie współrzędnych zbiór punktów opisany danym równaniem.

a) $(x-7)y=0$

b) $(x+3)(x-y)=0$

c) $x^2-12x+36=0$

d) $x^2-4x+3=0$

e) $(x+5)^2+(y-2)^2=0$

f) $(x+3)^2=0$

g) $|x+7|+|y-1|=0$

h) $y^2+10y+25=0$

1.15. Narysuj w jednym układzie współrzędnych proste o równaniach: $y=-x+5$, $y=2x-8$, $y=-x-4$ oraz $y=2x+2$. Ile osi symetrii ma figura będąca sumą tych prostych? Czy ma środek symetrii?

1.16. Dla jakich wartości m wykres funkcji $f(x)=-|x|+m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z równoległobokiem o wierzchołkach $(0,-4)$, $(4,0)$, $(2,4)$, $(-2,0)$?

1.17. Dla jakich wartości m wykres funkcji $f(x)=mx+m+4$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem o wierzchołkach $(3,3)$, $(-3,3)$, $(-3,-1)$, $(3,-1)$?

1.18. Dobierz m tak, aby prosta o równaniu $(m+2)x+y=m-1$ nie miała punktów wspólnych z podaną ćwiartką układu współrzędnych.

a) I b) II c) III d) IV

1.19. Dla jakich wartości m prosta o podanym równaniu przechodzi przez pierwszą, trzecią i czwartą ćwiartkę układu współrzędnych?

a) $(m+3)x-y+m+1=0$

b) $(1-m)x-y+m+5=0$

1.20. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt A i równoległej do prostej l.

a) $A=(2,3)$ $l\colon y=5x-2$

b) $A=(-3,-1)$ $l\colon y=\frac{2}{3}x-2$

c) $A=\left(\frac{1}{2},3\right)$ $l\colon y=-4x+1\frac{2}{3}$

d) $A=(3,-2)$ $l\colon x=-2$

e) $A=(-4,5)$ $l\colon y=-\frac{1}{2}x+3$

f) $A=\left(\sqrt{2},4\right)$ $l\colon y=2\sqrt{2}x+3$

1.21. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prostej l.

a) $A=(6,5)$ $l\colon y=-3x+1$

b) $A=(0,-4)$ $l\colon y=7x+1$

c) $A=\left(\sqrt{12},4\right)$ $l\colon y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$

d) $A=(-1,-7)$ $l\colon y=-0{,}2x+5{,}6$

e) $A=\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ $l\colon x=1\frac{1}{2}$

f) $A=\left(-3,1+\sqrt{2}\right)$ $l\colon y=\frac{3\sqrt{2}}{2}x+13$

2. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej

Umiejętności:

- obliczanie odległości między dwoma punktami
- wyznaczanie współrzędnych środka odcinka

Planimetria jest częścią geometrii zajmującą się badaniem własności figur na płaszczyźnie, a jej początki sięgają czasów przed naszą erą. Około 300 lat p.n.e. w dziele *Elementy* Euklides zawarł znane wówczas twierdzenia planimetrii w formie teorii aksjomatycznej.

W pierwszej i drugiej klasie prezentowaliśmy fragmenty geometrii euklidesowej. Tutaj przedstawimy inny sposób opisywania własności figur na płaszczyźnie, nazywany **geometrią analityczną**. Jej twórcy, żyjącemu w XVII w. Kartezjuszowi, matematyka zawdzięcza m.in. wprowadzenie pojęcia układu współrzędnych. W geometrii analitycznej badanie figur sprowadza się do badania opisujących je liczb i funkcji.

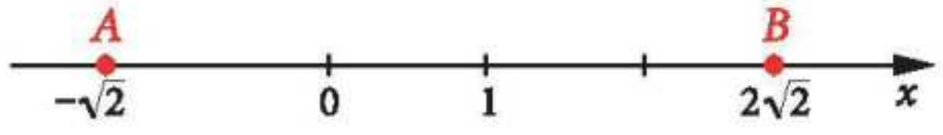


René Descartes, Kartezjusz (1596–1650) – matematyk, fizyk i filozof francuski. Autor licznych dzieł naukowych, m.in. *Rozprawy o metodzie*. W tym traktacie filozoficzno-matematycznym znalazł się pierwszy opis układu współrzędnych na płaszczyźnie; stamtąd pochodzi też słynna maksyma „Myślę, więc jestem" (*Cogito ergo sum*). Kartezjusz wprowadził m.in. pojęcia zmiennej i funkcji, sformułował prawa odbicia i załamania światła oraz zależność między masą a prędkością ciała, zbliżoną do obecnej zasady zachowania pędu.

Odległość między punktami

Przypomnijmy:

- Płaszczyzną kartezjańską nazywamy płaszczyznę z wprowadzonym na niej prostokątnym układem współrzędnych.
- Odległość między punktami A i B, czyli długość odcinka AB, oznaczamy $|AB|$.
- Odległość między punktami $A = (a)$ i $B = (b)$ na osi liczbowej jest równa $|AB| = |a - b|$.



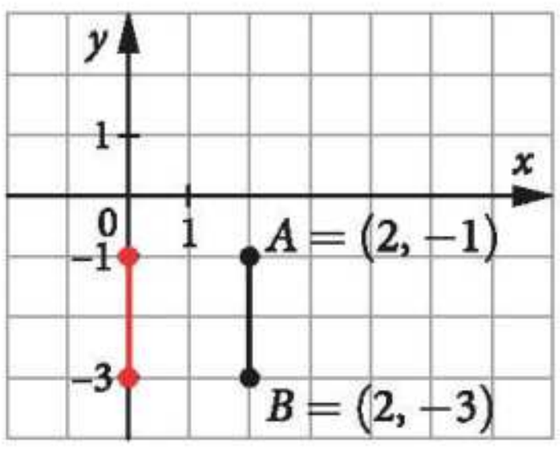
Zatem gdy $A = \left(-\sqrt{2}\right)$ i $B = \left(2\sqrt{2}\right)$, to $|AB| = \left|-\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right| = \left|-3\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}$.

Pokażemy teraz, jak mierzy się odległość między punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej. Przeanalizujmy najpierw sytuację, gdy pierwsze lub drugie współrzędne punktów są takie same.

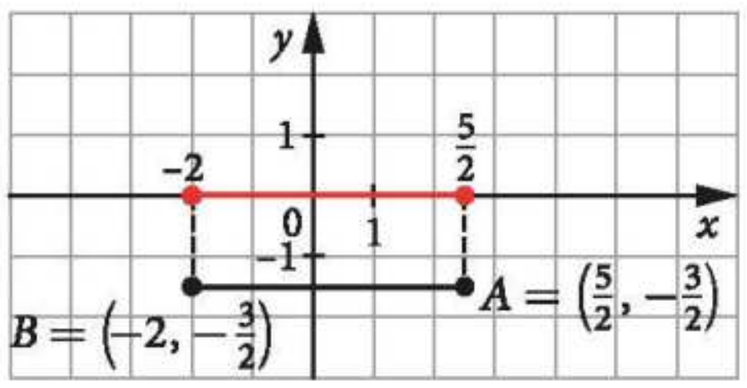
Do obliczania odległości na płaszczyźnie kartezjańskiej musimy mieć identyczne jednostki na obydwu osiach.

Przykład 1

a) Długość odcinka AB jest taka sama jak odległość między punktami odpowiadającymi liczbom -1 i -3 na osi y, czyli $|AB| = |-1-(-3)| = |2| = 2$.



b) Długość odcinka AB jest taka sama jak odległość między punktami odpowiadającymi liczbom $\frac{5}{2}$ i -2 na osi x, czyli $|AB| = \left|\frac{5}{2}-(-2)\right| = 4\frac{1}{2}$.



Przykład 2 ◂ zad. 2.1

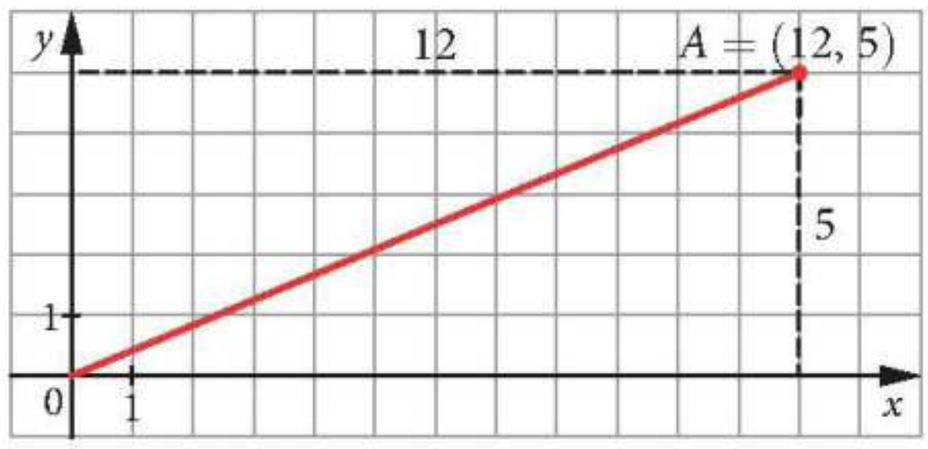
Obliczymy odległość punktu $A = (12, 5)$ od początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Odcinek OA jest przekątną prostokąta, którego boki mają długości 12 i 5.
Stosujemy twierdzenie Pitagorasa.

$$|OA|^2 = 12^2 + 5^2 = 169$$

Odp.: $|OA| = 13$



Przykład 3

Obliczymy odległość między punktami $A = (1, 2)$ i $B = (5, -1)$.

Rozwiązanie

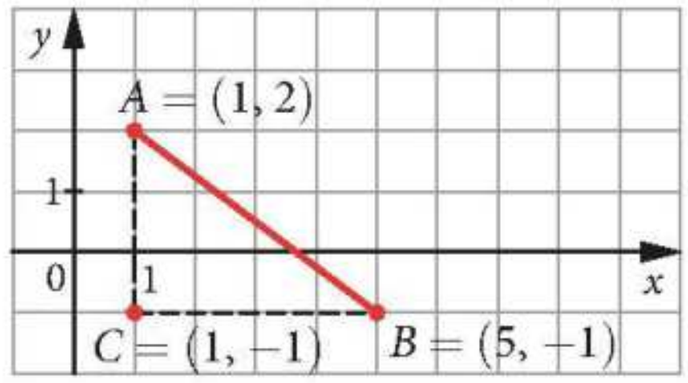
Odcinek AB jest przekątną prostokąta, którego boki mają długości:

$$|AC| = |2-(-1)| = 3, \quad |BC| = |5-1| = 4$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2, \quad |AB|^2 = 3^2 + 4^2, \text{ czyli } |AB|^2 = 25$$

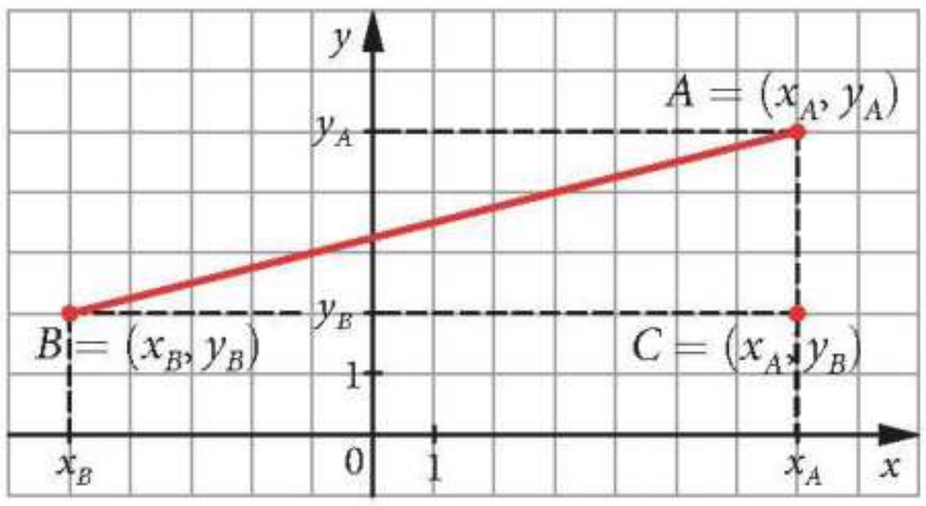
Odp.: $|AB| = 5$



Powtórzmy rozumowanie z przykładu 3 dla dwóch dowolnych punktów. Przyjmijmy, że na płaszczyźnie kartezjańskiej dane są dwa punkty o współrzędnych:

$$A = (x_A, y_A) \text{ i } B = (x_B, y_B)$$

Wprowadzony pomocniczo punkt C ma współrzędne $C = (x_A, y_B)$.



Odcinek AB jest przekątną prostokąta, którego boki mają długości:

$|BC| = |x_A - x_B|$ ⟵ drugie współrzędne punktów B i C są równe

$|AC| = |y_A - y_B|$ ⟵ pierwsze współrzędne punktów A i C są równe

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$$

$$|AB|^2 = |x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2$$

$$|AB|^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Dla dowolnej liczby $a \in \mathbf{R}$: $|a|^2 = a^2$.

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli na płaszczyźnie kartezjańskiej dane są punkty o współrzędnych $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to odległość między nimi jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Ponieważ:

$$|a - b| = |b - a| \text{ oraz } (a - b)^2 = (b - a)^2$$

otrzymany wzór można zapisać w postaci:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Przykład 4 ◀ zad. 2.2–2.5

Obliczymy odległość między punktami A i B o podanych współrzędnych.

Rozwiązanie

a) $A = (3, 1),\ B = (5, 3)$

$$|AB| = \sqrt{(3-5)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

b) $A = (-7, -3),\ B = (17, -13)$

$$|AB| = \sqrt{[17-(-7)]^2 + [-13-(-3)]^2} = \sqrt{24^2 + (-10)^2} = \sqrt{576+100} =$$
$$= \sqrt{676} = 26$$

c) $A = \left(-\sqrt{3}, 7\right),\ B = \left(\sqrt{2}, 3-\sqrt{5}\right)$

$$|AB| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 + \left[7-\left(3-\sqrt{5}\right)\right]^2} = \sqrt{3+2\sqrt{6}+2+\left(4+\sqrt{5}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{5+2\sqrt{6}+16+8\sqrt{5}+5} = \sqrt{26+2\sqrt{6}+8\sqrt{5}}$$

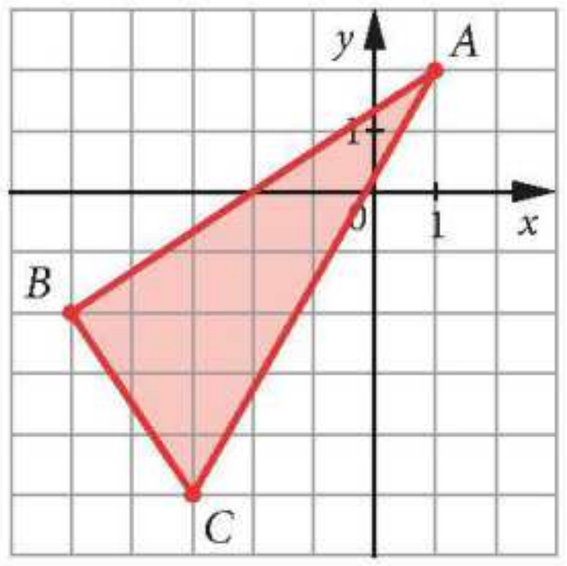
Przykład 5 ◀ zad. 2.6

Obliczymy obwód i pole trójkąta o wierzchołkach:
$A = (1, 2),\ B = (-5, -2),\ C = (-3, -5)$.

Rozwiązanie

Wyznaczymy najpierw długości boków trójkąta.

$$|AB| = \sqrt{(1+5)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$
$$|BC| = \sqrt{(-5+3)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{13}$$
$$|AC| = \sqrt{(1+3)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{65}$$



Obwód trójkąta jest równy:

$$|AB| + |CB| + |CA| = 2\sqrt{13} + \sqrt{13} + \sqrt{65} =$$
$$= 3\sqrt{13} + \sqrt{65}$$

Na podstawie rysunku można przypuszczać, że trójkąt ABC jest prostokątny.
Sprawdźmy rachunkowo, czy rzeczywiście tak jest:

$$|AB|^2 + |CB|^2 = \left(\sqrt{52}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2 = 52 + 13 = 65 = \left(\sqrt{65}\right)^2 = |CA|^2$$

Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, trójkąt ABC jest prostokątny, z kątem prostym przy wierzchołku B. Zatem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$$

Odp.: Obwód trójkąta jest równy $3\sqrt{13} + \sqrt{65}$, a jego pole wynosi 13.

Przykład 6 ◂ zad. 2.7

Dane są równania boków trójkąta:
$AB\colon 3x - y + 7 = 0$, $AC\colon x - y - 1 = 0$
i $BC\colon x + y - 3 = 0$.
Obliczymy jego obwód.

Zgodnie z przyjętą w naszych podręcznikach zasadą „równanie boku trójkąta" oznacza skrót określenia „równanie prostej, w której zawiera się bok trójkąta". Podobnie należy rozumieć „równanie wysokości trójkąta", „równanie dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta" itp.

Rozwiązanie

Do obliczenia długości boków trójkąta potrzebne są współrzędne jego wierzchołków. Aby je znaleźć, należy rozwiązać odpowiednie układy równań (rachunki zostawiamy do samodzielnego wykonania).

- $\begin{cases} 3x - y + 7 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ ⟵ punkt przecięcia prostych AB i AC jest wierzchołkiem A trójkąta

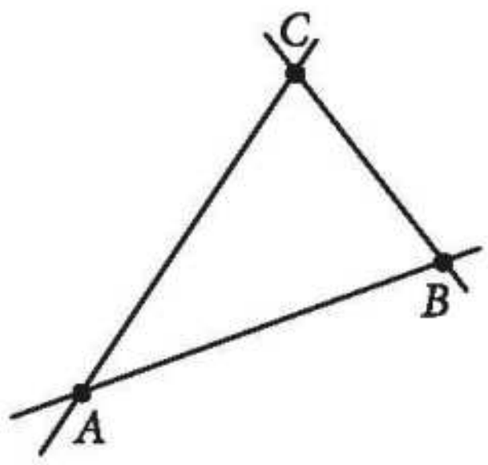
  $A = (-4, -5)$

- $\begin{cases} 3x - y + 7 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ ⟵ punkt przecięcia prostych AB i BC jest wierzchołkiem B trójkąta

  $B = (-1, 4)$

- $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ ⟵ punkt przecięcia prostych AC i BC jest wierzchołkiem C trójkąta

  $C = (2, 1)$



Obliczamy długości boków trójkąta.

$$|AB| = \sqrt{(-1+4)^2 + (4+5)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$
$$|AC| = \sqrt{(2+4)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}$$
$$|BC| = \sqrt{(2+1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$$

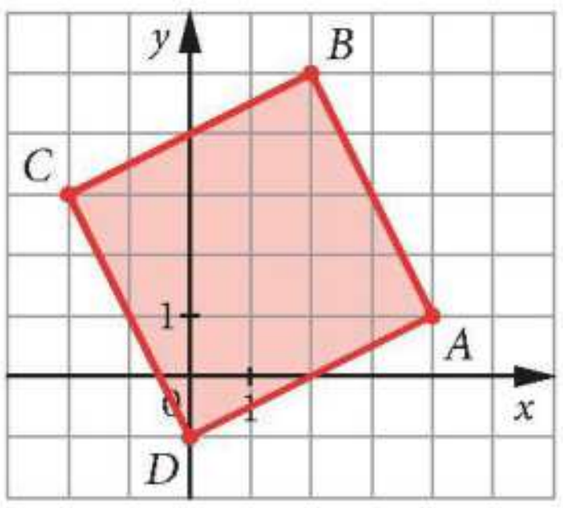
Odp.: Trójkąt ABC ma obwód równy $3\sqrt{10} + 9\sqrt{2}$.

Przykład 7

Obliczymy obwód i pole czworokąta $ABCD$, w którym $A = (4, 1)$, $B = (2, 5)$, $C = (-2, 3)$, $D = (0, -1)$.

Rozwiązanie

$$|AB| = \sqrt{(2-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$|BC| = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$
$$|CD| = \sqrt{2^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$$
$$|DA| = \sqrt{4^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$



Czworokąt $ABCD$ jest rombem, a ponadto:

$$|DB| = \sqrt{2^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$|DB|^2 = 40,\ |AB|^2 = 20,\ |DA|^2 = 20$$

$|DB|^2 = |AB|^2 + |DA|^2$, więc czworokąt $ABCD$ jest rombem o kątach prostych, czyli kwadratem. Obwód tego kwadratu jest równy $8\sqrt{5}$, a pole 20.

Odp.: Obwód czworokąta $ABCD$ wynosi $8\sqrt{5}$, a jego pole 20.

Środek odcinka

Środek odcinka jest jednym z podstawowych pojęć geometrii. Można je definiować na różne sposoby. My posłużymy się pojęciem odległości.

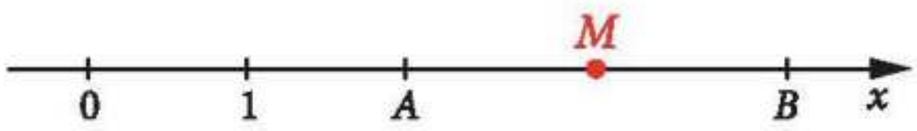
Definicja

Środkiem odcinka AB nazywamy taki punkt M, że $|AM| = |MB| = \frac{1}{2}|AB|$.

Wyznaczymy współrzędne środka odcinka w zależności od współrzędnych końców tego odcinka. Zaczniemy od sytuacji prostszej – gdy odcinek leży na osi liczbowej.

Przyjmijmy, że końcami odcinka są punkty $A = (a)$ oraz $B = (b)$ takie, że $b > a$. Oznaczmy współrzędną środka M literą m. Odległość punktu M od punktu A jest wtedy równa $m-a$, odległość punktu M od B jest równa $b-m$. Zgodnie z definicją zachodzi równość $m - a = b - m$, czyli:

$$m = \frac{a+b}{2}$$



Współrzędna środka odcinka jest średnią arytmetyczną współrzędnych końców tego odcinka.

Jeżeli będziemy rozpatrywać punkty na płaszczyźnie kartezjańskiej, to możemy sprawdzić, że powyższy wzór zachodzi odpowiednio dla każdej z dwóch współrzędnych. Prawdziwe jest więc następujące twierdzenie:

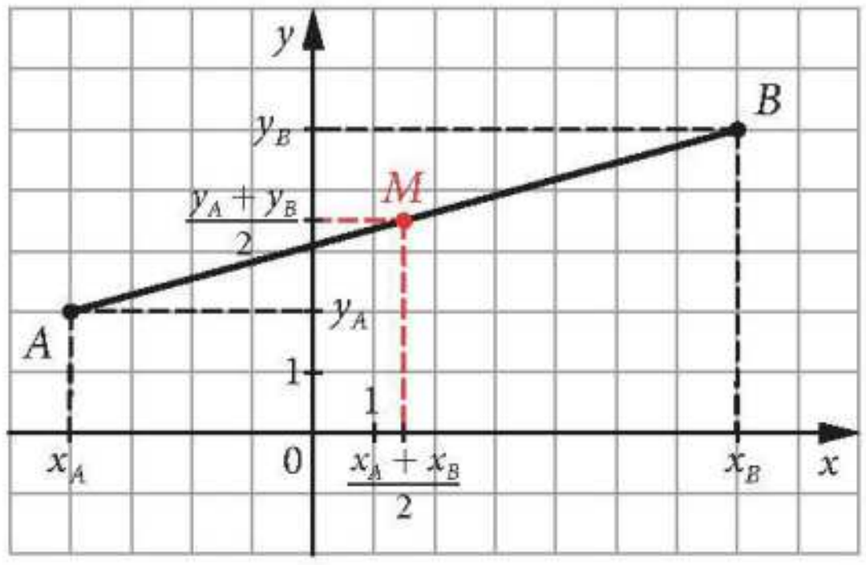
Twierdzenie

Środkiem odcinka o końcach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest punkt:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych końców tego odcinka.

Aby udowodnić to twierdzenie, można obliczyć długości odcinków AM, MB, AB i sprawdzić, że spełnione są równości podane w definicji. Te dosyć żmudne rachunki pominiemy. Natomiast uzasadnienie geometryczne prezentujemy na rysunku obok.



Przykład 8 ◂ zad. 2.9

Środkiem odcinka AB o końcach $A = (-2, 7)$ i $B = (4, 11)$ jest punkt $M = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{7+11}{2}\right)$, czyli punkt $M = (1, 9)$.

Przykład 9 ◂ zad. 2.10

Środkiem odcinka AB jest punkt $M = (3, -2)$. Punkt A ma współrzędne $A = (2, 5)$. Wyznaczymy współrzędne drugiego końca odcinka.

Rozwiązanie

Przyjmijmy $B = (x, y)$. Zgodnie ze wzorem na współrzędne środka odcinka mamy:

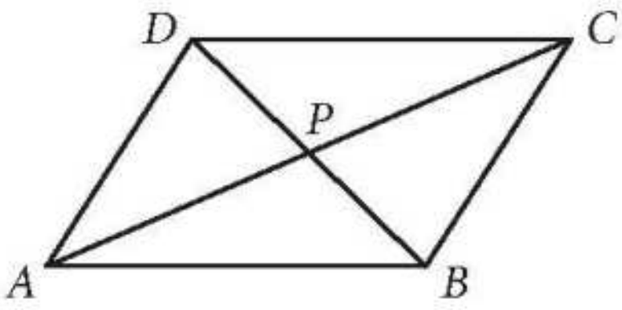
$$3 = \frac{2+x}{2} \quad \text{oraz} \quad -2 = \frac{5+y}{2}$$

Stąd $x = 4$, $y = -9$, zatem $B = (4, -9)$.

Odp.: $B = (4, -9)$

Przykład 10 ◂ zad. 2.14

W równoległoboku $ABCD$ dane są wierzchołki $A = (-3, -4)$, $B = (4, -2)$ i $D = (0, 2)$. Wyznaczymy współrzędne wierzchołka C tego równoległoboku.



Rozwiązanie

W równoległoboku punkt przecięcia przekątnych jest środkiem każdej z nich. Wykorzystamy tę własność.

Wykonujemy kolejne kroki.

Krok 1: Wyznaczamy współrzędne punktu P – środka odcinka BD.

$$P = \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2}\right) = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = (2, 0)$$

Krok 2: Zapisujemy współrzędne punktu P jako środka odcinka AC o danym końcu A oraz szukanym końcu C.

$$P = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{-3 + x_C}{2}, \frac{-4 + y_C}{2}\right)$$

Krok 3: Wyznaczamy współrzędne punktu C – porównujemy odpowiednie współrzędne i rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} \frac{-3 + x_C}{2} = 2 \\ \frac{-4 + y_C}{2} = 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} -3 + x_C = 4 \\ -4 + y_C = 0 \end{cases} \text{ i ostatecznie } C = (7, 4)$$

Odp.: $C = (7, 4)$

Środek ciężkości trójkąta

Przykład 11

W trójkącie o wierzchołkach $A = (-2, 4)$, $B = (0, -2)$ i $C = (6, 4)$ poprowadzono środkową boku AC. Napiszemy równanie tej środkowej.

Środkową boku trójkąta nazywamy **odcinek** łączący środek boku z przeciwległym wierzchołkiem.

Rozwiązanie

Szukana środkowa przechodzi przez środek boku AC oraz wierzchołek B. Środek boku AC ma współrzędne $(2, 4)$, punkt $B = (0, -2)$, zatem środkowa boku AC jest prostą o równaniu kierunkowym $y = ax + b$.

Wyznaczamy współczynniki a i b.

$$\begin{cases} 4 = 2a + b \\ -2 = b \end{cases}$$

Stąd $a = 3$ i $b = -2$.

Odp.: Środkowa boku AC ma równanie $y = 3x - 2$.

Przypomnijmy poznane w drugiej klasie twierdzenie o środkowych w trójkącie.

Twierdzenie

Trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten, nazywany **środkiem ciężkości trójkąta**, dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2 : 1$ (licząc od wierzchołka).

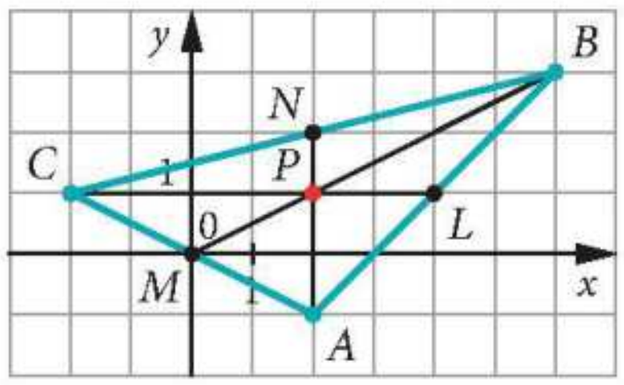
Podamy bez dowodu następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Środkiem ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ i $C = (x_C, y_C)$ jest punkt:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Współrzędne środka ciężkości trójkąta są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych wierzchołków tego trójkąta.



Przykład 12 ◂ zad. 2.15

Wyznaczymy środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (-5, 8)$, $B = (-1, -2)$ i $C = (4, 5)$.

Rozwiązanie

Niech S oznacza środek ciężkości tego trójkąta. Zatem:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = \left(\frac{-5 - 1 + 4}{3}, \frac{8 - 2 + 5}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

Odp.: $S = \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$

Przykład 13 ◂ zad. 2.16

W trójkącie ABC dane są: punkty $A = (-5, 2)$, $B = (6, -8)$ i środek ciężkości $S = (1, 0)$. Wyznaczymy współrzędne wierzchołka C.

Rozwiązanie

Do obliczenia współrzędnych wierzchołka C zastosujemy wzór na współrzędne środka ciężkości trójkąta.

$$(1, 0) = \left(\frac{-5 + 6 + x_C}{3}, \frac{2 - 8 + y_C}{3}\right)$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{1 + x_C}{3} \\ 0 = \frac{-6 + y_C}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 = 1 + x_C \\ 0 = -6 + y_C \end{cases} \qquad \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 6 \end{cases}$$

Odp.: $C = (2, 6)$

Zadania

2.1. Oblicz odległość punktu P od początku układu współrzędnych.

a) $P = (-4,\ 3)$
b) $P = (2,\ -5)$
c) $P = (-3,\ -9)$
d) $P = \left(3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}\right)$

2.2. Oblicz odległość między podanymi punktami.

a) $A = (3,\ 7)$ i $B = (11,\ 7)$
b) $P = (-2,\ 5)$ i $Q = (5,\ 5)$
c) $K = \left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$ i $L = \left(-2\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$
d) $M = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ i $N = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

2.3. Oblicz długość odcinka AB.

a) $A = (1,\ -2),\ B = (4,\ 2)$
b) $A = (5,\ -3),\ B = (-1,\ 5)$
c) $A = (-6,\ -1),\ B = (6,\ 8)$
d) $A = (-35,\ -4),\ B = (5,\ 5)$

2.4. Oblicz obwód trójkąta o danych wierzchołkach.

a) $A = (3,\ 1),\ B = (4,\ 3),\ C = (-2,\ 6)$
b) $A = (-2,\ -2),\ B = (-1,\ -7),\ C = (2,\ -5)$
c) $A = (-1,\ -1),\ B = (-2,\ 3),\ C = (3,\ 1)$
d) $A = (3,\ 3),\ B = (0,\ 4),\ C = (0,\ 0)$

2.5. Oblicz obwód wielokąta, którego kolejnymi wierzchołkami są podane punkty.

a) $A = (-3,\ -2),\ B = (1,\ 1),\ C = (5,\ -2)$
b) $A = (5,\ 8),\ B = (-4,\ -4),\ C = (4,\ 11)$
c) $A = (0,\ 0),\ B = (2,\ 2),\ C = (-1,\ 5),\ D = (-3,\ 3)$
d) $A = (-2,\ -2),\ B = (2,\ 1),\ C = (2,\ 5),\ D = (-1,\ 1)$

D **2.6.** Wykaż, że trójkąt PQR jest prostokątny i oblicz jego pole.

a) $P = (5,\ 0),\ Q = (3,\ 6),\ R = (0,\ 5)$
b) $P = (-6,\ -4),\ Q = (2,\ -2),\ R = (-3,\ 1)$
c) $P = (4,\ -3),\ Q = (2,\ 5),\ R = (-2,\ 4)$
d) $P = (-4,\ -6),\ Q = (6,\ -1),\ R = (-6,\ -2)$

2.7. Oblicz obwód trójkąta, którego boki zawierają się w prostych o podanych równaniach.

a) $7x + y + 16 = 0$, $3x + 4y - 36 = 0$, $4x - 3y + 2 = 0$
b) $x + 2y - 6 = 0$, $x - y - 3 = 0$, $x + 4 = 0$
c) $4x + 3y - 2 = 0$, $3x + 4y + 2 = 0$, $x - y + 3 = 0$
d) $3x - 4y - 15 = 0$, $2x - 5y - 10 = 0$, $4x - 3y - 6 = 0$

2.8. Narysuj trójkąt ograniczony podanymi prostymi i oblicz jego pole.

a) $y = \frac{3}{4}x + 3$ $y = -x + 3$ $y = 0$

b) $y = x + 5$ $y = -3x - 3$ $x = 0$

c) $y = -1$ $y = 2x + 1$ $y = -x + 4$

2.9. Oblicz współrzędne środka odcinka AB.

a) $A = (2, 3)$, $B = (8, 5)$

b) $A = (-1, 4)$, $B = (-3, -2)$

c) $A = (0, -1)$, $B = (-5, 3)$

d) $A = (1, -7)$, $B = (-8, 0)$

2.10. Punkt M jest środkiem odcinka AB o danym końcu A. Wyznacz współrzędne punktu B.

a) $A = (3, 4)$, $M = (1, 7)$

b) $A = (-1, 5)$, $M = (0, 1)$

c) $A = (4, -16)$, $M = (-3, -8)$

d) $A = (-7, -2)$, $M = (-1, 3)$

2.11. Punkty $M = (2, 0)$ i $N = (5, -2)$ dzielą odcinek AB na trzy równe części. Znajdź współrzędne końców tego odcinka.

2.12. Wyznacz współrzędne środków boków trójkąta o wierzchołkach: $A = (3, 1)$, $B = (-5, 5)$, $C = (2, -3)$.

2.13. Oblicz obwód trójkąta, którego wierzchołkami są środki boków trójkąta o wierzchołkach: $A = (-3, -3)$, $B = (3, 1)$, $C = (-9, 5)$.

2.14. W równoległoboku $ABCD$ dane są współrzędne trzech wierzchołków. Wyznacz współrzędne czwartego wierzchołka tego równoległoboku.

a) $A = (-4, -2)$, $B = (2, 3)$, $C = (3, 8)$

b) $B = (-3, 0)$, $C = (4, -3)$, $D = (2, 3)$

2.15. Wyznacz środek ciężkości trójkąta ABC.

a) $A = (-1, 2)$, $B = (3, 5)$, $C = (4, -10)$

b) $A = (-5, -6)$, $B = (-2, 4)$, $C = (16, -1)$

2.16. W trójkącie ABC dane są: $B = (6, 3)$, $C = (-7, 10)$ oraz środek ciężkości $S = (-2, 4)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka A.

2.17. Oblicz długości środkowych w trójkącie ABC.

a) $A = (2, 6)$, $B = (6, -2)$, $C = (-4, -4)$

b) $A = (1, -3)$, $B = (-2, -1)$, $C = (-5, -3)$

c) $A = (2, 4)$, $B = (-2, 2)$, $C = (-1, 4)$

d) $A = (-2, -4)$, $B = (2, -1)$, $C = (0, -2)$

D **2.18.** Wykaż, że środki kolejnych boków czworokąta $ABCD$ o wierzchołkach: $A = (4, -4)$, $B = (6, 2)$, $C = (-2, 4)$, $D = (-4, 2)$ są wierzchołkami rombu.

D **2.19.** Wykaż, że środki kolejnych boków czworokąta $ABCD$ o wierzchołkach: $A = (5, -1)$, $B = (1, 5)$, $C = (-3, 1)$, $D = (-1, -3)$ są wierzchołkami kwadratu.

* **2.20.** W trójkącie ABC dane są: wierzchołek $C = (2, 7)$, środek $M = (0, 5)$ boku AC i środek $K = (4, 3)$ boku BC. Wyznacz równania środkowych trójkąta ABC.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Odległość punktu $A = \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ od początku układu współrzędnych wynosi

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 6.

2. Długość odcinka o końcach $G = \left(2\sqrt{7}, 0\right)$ oraz $R = \left(\sqrt{7}, -\sqrt{2}\right)$ jest równa

A. 3. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** $2\sqrt{14}$. **D.** $4\sqrt{14}$.

3. Obwód trójkąta o wierzchołkach $A = (-1, -2)$, $B = (2, 2)$, $C = (-2, -1)$ wynosi

A. 12. **B.** $12 + \sqrt{2}$. **C.** $10 + \sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{102}$.

4. Dane są punkty: $A = (-4, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (-3, 1)$, $D = (2, -1)$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $|AB| < |CD|$ **B.** $|AB| \geqslant |CD|$ **C.** $|CB| < |AD|$

5. Oblicz obwód trójkąta, którego boki zawierają się w prostych o równaniach $x + y = 0$, $2x + y - 2 = 0$, $2x - y + 6 = 0$.

6. Punkty $A = (5, 2)$, $B = (0, 7)$ i $D = (5, -5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz obwód i długości przekątnych tego równoległoboku.

D **7.** Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $G = (4, -3)$, $H = (-1, 2)$, $L = (7, 0)$ jest prostokątny, i oblicz jego pole.

3. Położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej

Umiejętności:

- stosowanie geometrycznej interpretacji współczynnika kierunkowego prostej
- opisywanie prostych równoległych i prostopadłych za pomocą równań w postaci ogólnej
- obliczanie odległości punktu od prostej

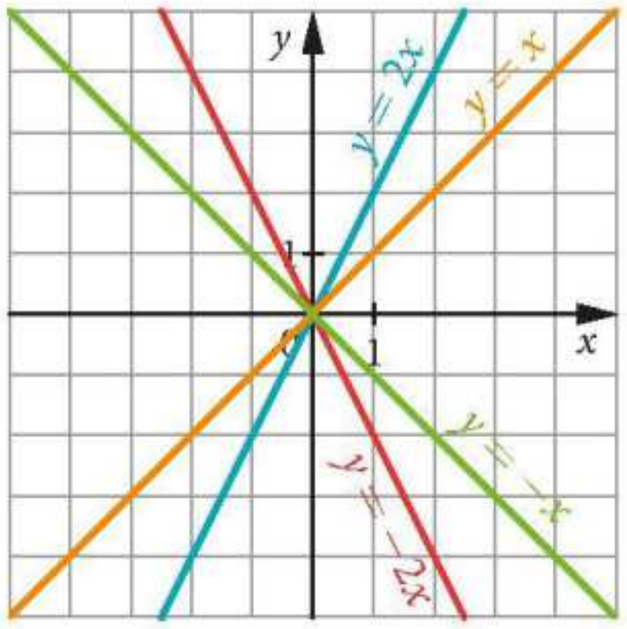
Geometryczna interpretacja współczynnika kierunkowego prostej

Przypomnijmy:

Definicja

Współczynnik a, występujący we wzorze funkcji $f(x) = ax$ $(D = \mathbf{R})$, nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**.

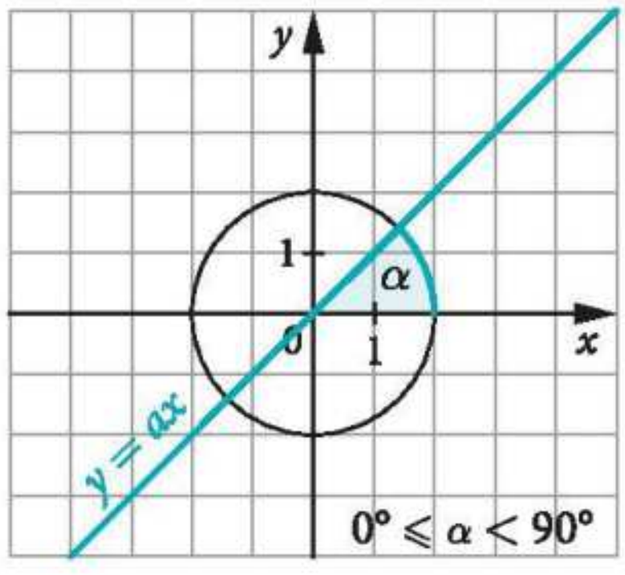
Wykresem funkcji $f(x) = ax$ jest prosta. Zauważmy, że $f(0) = 0$ i $f(1) = a$, zatem wykres funkcji f przechodzi przez punkty $(0, 0)$ oraz $(1, a)$.

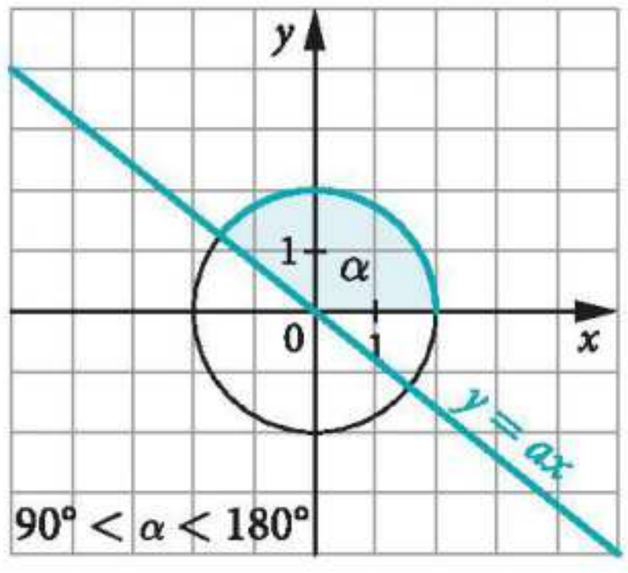


Jeżeli:

- $a = 0$, to wykres funkcji pokrywa się z osią x,
- $a > 0$, to wykres zawiera się w I i III ćwiartce układu współrzędnych,
- $a < 0$, to wykres zawiera się w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.

Prosta o równaniu $y = ax$ wyznacza z osią x cztery kąty wypukłe. Jeden z nich, na poniższych rysunkach oznaczony α, nazywamy **kątem nachylenia prostej do osi** x. Mówimy też, że jest to **kąt, jaki prosta tworzy z osią** x.

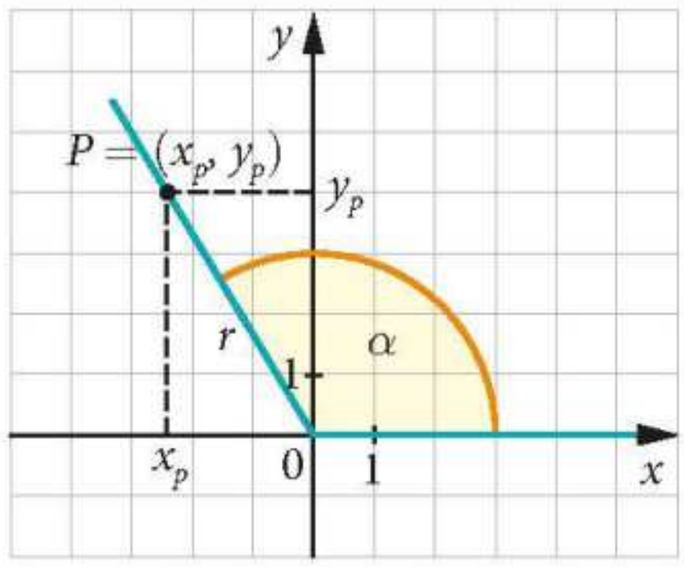




Kąt nachylenia prostej $y = ax$ do osi x spełnia zatem następujące warunki:
- jego wierzchołkiem jest początek układu współrzędnych,
- dodatnia półoś x jest jego ramieniem początkowym, a ramię końcowe zawiera się w prostej $y = ax$,
- $0° \leqslant \alpha < 180°$ i $\alpha \neq 90°$.

Zauważmy, że jeśli punkt $P \neq (0, 0)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = ax$, to jego współrzędne (x, y) spełniają warunek:

$$\frac{y}{x} = a$$



Z drugiej strony – jeżeli punkt $P = (x, y)$ leży na końcowym ramieniu kąta α, który prosta $y = ax$ tworzy z osią x, to:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

Zatem **współczynnik kierunkowy a jest równy tangensowi kąta nachylenia α** wykresu funkcji $f(x) = ax$ do osi x:

$$a = \operatorname{tg}\alpha$$

Kąt nachylenia wykresu funkcji $f(x) = ax$ do osi x jest kątem:
- zerowym, gdy $a = 0$,
- ostrym, gdy $a > 0$,
- rozwartym, gdy $a < 0$.

Przykład 1 ◂ zad. 3.1

Napiszemy równanie prostej postaci $y = ax$, nachylonej do osi x pod kątem
a) $120°$. b) $45°$.

Rozwiązanie

a) $a = \operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) =$
$= -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$
$y = -\sqrt{3}x$

b) $a = \operatorname{tg} 45° = 1$
$y = x$

Odp.: a) $y = -\sqrt{3}x$ b) $y = x$

Przykład 2 ◂ zad. 3.2

Wyznaczymy w przybliżeniu do $1°$ kąt nachylenia podanej prostej do osi x.
a) $y = 0{,}4x$ b) $y = -4x$

Rozwiązanie

a) $y = 0{,}4x$, zatem α jest takim kątem, że $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4$.
Z tablic matematycznych odczytujemy wartość kąta, którego tangens jest w przybliżeniu równy 0,4: $\operatorname{tg} 22° \approx 0{,}4$.

b) $y = -4x$, zatem α jest takim kątem, że $\operatorname{tg}\alpha = -4$.
Z tablic matematycznych odczytujemy wartość kąta β, którego tangens jest w przybliżeniu równy 4: $\operatorname{tg} 76^\circ \approx 4$.
Korzystamy ze wzoru redukcyjnego $\operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = -\operatorname{tg}\beta$.
Zatem:

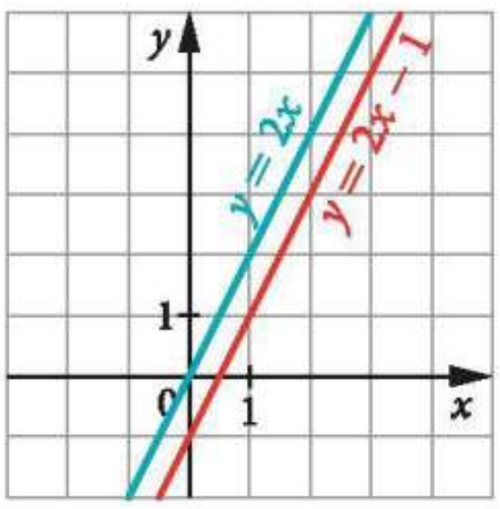
$$-4 = -\operatorname{tg} 76^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 76^\circ) = \operatorname{tg}\alpha$$

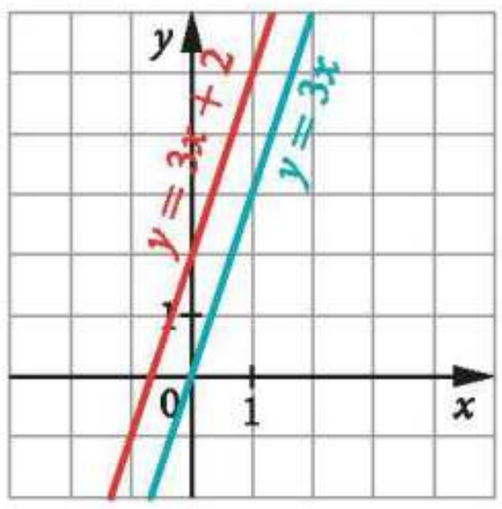
czyli $\alpha = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$.

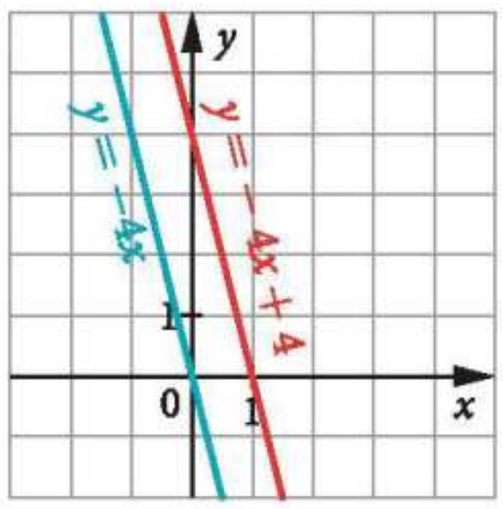
Odp.: a) 22° b) 104°

Równania prostych równoległych na płaszczyźnie

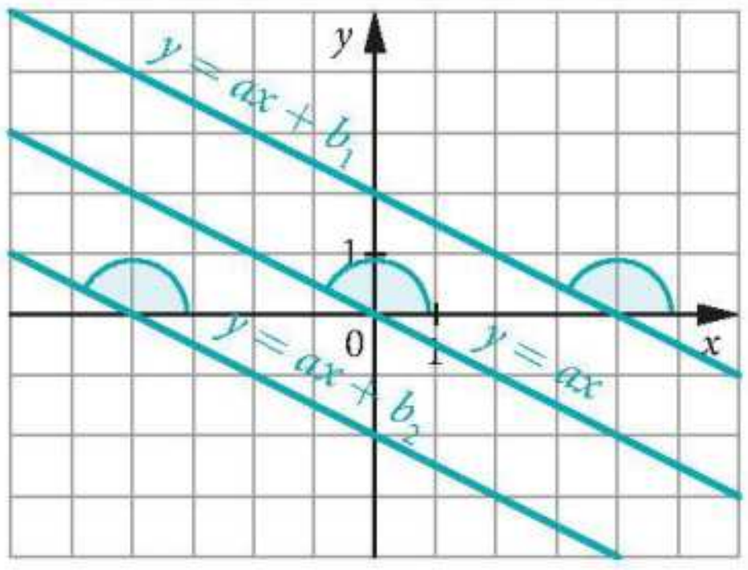
Przypomnijmy:
Jeżeli wykres funkcji $y = ax$ przesuniemy równolegle o b jednostek wzdłuż osi y, to otrzymamy wykres funkcji $f(x) = ax + b$.







Inaczej mówiąc, prosta $y = ax + b$, $b \in \mathbf{R}$, jest nachylona do osi x pod takim samym kątem jak prosta $y = ax$.



Proste k i l na płaszczyźnie nazywamy równoległymi, jeżeli nie mają punktu wspólnego albo gdy mają wszystkie punkty wspólne.

Przykład 3 ◂ zad. 3.3

Napiszemy równanie prostej nachylonej do osi x pod kątem 150° i przechodzącej przez punkt $M = (-3, 5)$.

Rozwiązanie

$y = ax + b$ ⟵ szukamy współczynników a i b

$a = \operatorname{tg} 150° = \operatorname{tg}(180° - 30°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$

$5 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 + b$ ⟵ podstawiamy współrzędne punktu M

$b = 5 + \sqrt{3}$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5 + \sqrt{3}$

Odp.: Szukana prosta ma równanie $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5 + \sqrt{3}$.

Udowodnimy twierdzenie, które sformułowaliśmy w klasie pierwszej.

Twierdzenie

Proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe, tzn. gdy $a_1 = a_2$.

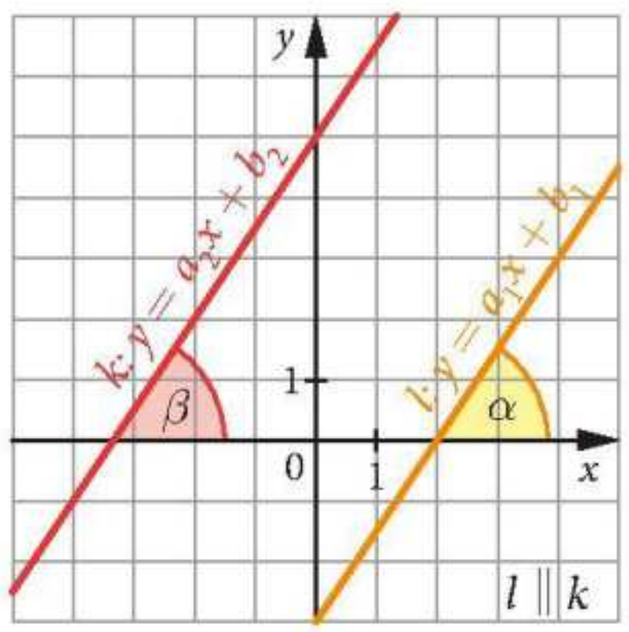
Dowód

Dwie proste w układzie współrzędnych są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich kąty nachylenia do osi x są równe:

$\alpha = \beta$ ⟵ kąty odpowiadające

Oznaczmy $a_1 = \operatorname{tg}\alpha$ i $a_2 = \operatorname{tg}\beta$.

Mamy więc udowodnić dwa twierdzenia:
1. Jeżeli $\alpha = \beta$, to $a_1 = a_2$.
2. Jeżeli $a_1 = a_2$, to $\alpha = \beta$.



Pierwsze twierdzenie jest oczywiste: jeżeli $\alpha = \beta$, to $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, czyli $a_1 = a_2$.

W drugą stronę: jeżeli $a_1 = a_2$, to $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$.
Kąty α i β są kątami nachylenia prostych do osi x, czyli $\alpha, \beta \in \langle 0°; 180°) - \{90°\}$.
Dla takich kątów równość $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$ oznacza, że $\alpha = \beta$.

Koniec dowodu

Zbadamy teraz zależność między równaniami ogólnymi prostych równoległych.
Niech $k\colon ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0$.
Zastanówmy się, jaką postać mają równania prostych równoległych do prostej k.
Rozpatrzymy trzy przypadki.

I. Prosta k jest równoległa do osi y (jest prostą pionową, $a \neq 0,\ b = 0$):

$k\colon ax + c = 0$, czyli $k\colon x + \frac{c}{a} = 0$, inaczej: $x + c_1 = 0$

Prosta l równoległa do prostej k jest również prostą równoległą do osi y, zatem jej równanie ma postać $x + d = 0$.

II. Prosta k jest równoległa do osi x (jest prostą poziomą, $a = 0,\ b \neq 0$):

$k\colon by + c = 0$, czyli $k\colon y + \frac{c}{b} = 0$, inaczej: $y + c_1 = 0$

Prosta l równoległa do prostej k jest również prostą równoległą do osi x, zatem jej równanie ma postać $y + d = 0$.

III. Prosta k nie jest równoległa do żadnej z osi układu współrzędnych $(ab \neq 0)$:

$k\colon ax + by + c = 0$

Na mocy udowodnionego wcześniej twierdzenia wiemy, że prosta l jest równoległa do k wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe obydwu prostych są równe.

Wyznaczamy równanie kierunkowe prostej k:

$by = -ax - c$, stąd $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Zatem prosta l ma równanie kierunkowe $l\colon y = -\frac{a}{b}x + c_1$, a po przekształceniu do postaci ogólnej $l\colon ax + by - bc_1 = 0$, inaczej: $ax + by + d = 0$.

Zauważmy, że w każdym z trzech przypadków równania prostych k i l różnią się tylko wyrazem wolnym. Nasze rozważania zapiszemy w postaci twierdzenia.

Twierdzenie

Prosta l jest równoległa do prostej $k\colon ax + by + c = 0\ \left(a^2 + b^2 \neq 0\right)$ wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $ax + by + d = 0$.
Ponadto jeżeli $c = d$, to $k = l$, a jeżeli $c \neq d$, to $k \neq l$.

Przykład 4 ◀ zad. 3.4

Dana jest prosta $k\colon 2x - 5y + 1 = 0$. Wyznaczymy równanie równoległej do niej prostej

a) l przechodzącej przez punkt $A = (-3, 4)$.

b) p przechodzącej przez punkt $B = \left(0, \sqrt{3}\right)$.

Rozwiązanie

Każdą prostą równoległą do prostej k można opisać za pomocą równania postaci $2x - 5y + c = 0$. Zatem:

a) $2 \cdot (-3) - 5 \cdot 4 + c = 0$, stąd $c = 26$, czyli $l: 2x - 5y + 26 = 0$

b) $-5 \cdot \sqrt{3} + c = 0$, stąd $c = 5\sqrt{3}$, czyli $p: 2x - 5y + 5\sqrt{3} = 0$

Odp.: a) $l: 2x - 5y + 26 = 0$ b) $p: 2x - 5y + 5\sqrt{3} = 0$

Przykład 5 ◂ zad. 3.5

Sprawdzimy, czy proste $l: \frac{6}{7}x - \frac{8}{7}y + \sqrt{11} = 0$, $m: 2x - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$ i $p: -3\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y + 2\sqrt{5} = 0$ są równoległe do prostej $k: -3x + 4y - 2 = 0$.

Równanie ogólne prostej możemy zapisać na nieskończenie wiele sposobów (możemy mnożyć obydwie jego strony przez dowolną liczbę różną od zera).

Rozwiązanie

- Prosta l jest równoległa do prostej $k: -3x + 4y - 2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $-3x + 4y + c = 0$, gdzie $c \in \mathbf{R}$.
  Przekształcamy dane równanie prostej l tak, żeby współczynnik przy x wynosił -3.

  $\frac{6}{7}x - \frac{8}{7}y + \sqrt{11} = 0$ ⟵ obie strony równania mnożymy przez $-\frac{7}{2}$

  $-3x + 4y - \frac{7\sqrt{11}}{2} = 0$

  Zatem $c = -\frac{7\sqrt{11}}{2}$, czyli prosta l jest równoległa do prostej k (i różna od k).

- Postępujemy podobnie jak poprzednio. Przekształcamy dane równanie prostej m tak, żeby współczynnik przy x wynosił -3.

  $2x - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$ ⟵ obie strony równania mnożymy przez $-\frac{3}{2}$

  $-3x + 4y - 2 = 0$

  Zatem $c = -2$, czyli prosta l jest równoległa do prostej k, bo jest z nią identyczna.

- Przekształcamy dane równanie prostej p tak, żeby współczynnik przy x wynosił -3.

  $-3\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y + 2\sqrt{5} = 0$ ⟵ obie strony równania dzielimy przez $\sqrt{5}$

  $-3x - 4y + 2 = 0$

  Równania $-3x - 4y + 2 = 0$ nie doprowadzimy do żądanej postaci.

  Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} -3x - 4y + 2 = 0 \\ -3x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$ prowadzi do wyznaczenia dokładnie jednego punktu wspólnego prostych p i k: $(x, y) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Zatem proste p i k nie są równoległe.

Odp.: Proste l oraz m są równoległe do k, prosta p nie jest równoległa do k.

Równania prostych prostopadłych na płaszczyźnie

Twierdzenie

Prosta l jest prostopadła do prostej k: $ax + by + c = 0 \ \left(a^2 + b^2 \neq 0\right)$ wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $bx - ay + c_1 = 0$.

Dowód

Zauważmy, że każde równanie ogólne prostej można przekształcić do postaci, w której przynajmniej jeden ze współczynników przy zmiennych x, y ma wartość 1.

Rozważymy więc trzy możliwe sytuacje.

I. $a = 0$ i $b = 1$
Prosta k ma wtedy równanie $y + c = 0$, czyli jest równoległa do osi x. Każda prosta l prostopadła do k jest więc prostopadła do osi x, czyli ma równanie postaci $x + p = 0$. Zatem teza twierdzenia jest prawdziwa.

II. $a = 1$ i $b = 0$
Prosta k ma równanie $x + c = 0$, czyli jest równoległa do osi y. Każda prosta l prostopadła do k ma więc równanie postaci $y + q = 0$ lub inaczej $-y - q = 0$, czyli teza twierdzenia jest prawdziwa.

III. $ab \neq 0$
Przekształcamy równanie prostej k do postaci kierunkowej.

$$k\colon y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Korzystamy z twierdzenia udowodnionego w klasie pierwszej:

Prosta l prostopadła do prostej $k: y = mx + p \ (m \neq 0)$ ma równanie postaci $y = -\frac{1}{m}x + q$.

Zatem:

$$l\colon y = \frac{b}{a}x + q$$
$$l\colon bx - ay + aq = 0 \qquad \longleftarrow c_1 = aq$$
$$l\colon bx - ay + c_1 = 0$$

Koniec dowodu

Przykład 6 ◀ zad. 3.7

Napiszemy równanie prostej l prostopadłej do prostej k: $2x + 7y = 0$ i przechodzącej przez punkt $A = \left(2\sqrt{7}, -\sqrt{7}\right)$.

Rozwiązanie

$l\colon 7x - 2y + c = 0$ ⟵ l jest prostopadła do k

$14\sqrt{7} + 2\sqrt{7} + c = 0$ ⟵ $A = \left(2\sqrt{7}, -\sqrt{7}\right) \in l$

$c = -16\sqrt{7}$

Odp.: $l\colon 7x - 2y - 16\sqrt{7} = 0$

Odległość punktu od prostej

Przykład 7

Obliczymy odległość punktu $P = (-2, 3)$ od prostej $l\colon 3x - 4y + 1 = 0$.

Rozwiązanie

Wykonamy kolejne kroki.

Krok 1: Wyznaczymy równanie prostej k prostopadłej do l i przechodzącej przez punkt P.

Krok 2: Wyznaczymy współrzędne punktu Q przecięcia prostych l i k.

Krok 3: Obliczymy długość odcinka PQ, która jest szukaną odległością punktu P od prostej l.

Mamy więc (rachunki pozostawiamy do samodzielnego wykonania):

1. $k\colon 4x + 3y + c = 0$
   $-8 + 9 + c = 0$, stąd $c = -1$
   $k\colon 4x + 3y - 1 = 0$

2. Z rozwiązania układu równań:
   $\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$
   otrzymujemy $Q = \left(\frac{1}{25}, \frac{7}{25}\right)$.

3. $|PQ| = \sqrt{\left(\frac{1}{25} + 2\right)^2 + \left(\frac{7}{25} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{7225}{25^2}} = \frac{85}{25} = \frac{17}{5}$

Odp.: Punkt P jest odległy od prostej l o $\frac{17}{5}$.

Jeśli przeprowadzimy powyższe rozumowanie dla dowolnego punktu $P = (x_0, y_0)$ i dowolnej prostej $ax + by + c = 0$, to po rachunkach, których nie będziemy tu podawać, otrzymamy wzór na odległość punktu od prostej.

Twierdzenie

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $ax + by + c = 0$ $\left(a^2 + b^2 \neq 0\right)$ jest równa:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Przykład 8 ◀ zad. 3.8

Odległość punktu $P = (1, -5)$ od prostej $x + 2y - 3 = 0$ jest równa

$$\frac{|1 - 10 - 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Przykład 9 ◀ zad. 3.12–3.14

Obliczymy pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (-8, 0)$, $B = (5, 1)$, $C = (-2, 2)$.

Rozwiązanie

I sposób

Wykorzystamy wzór na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2}a \cdot h$. Jako podstawę przyjmiemy bok AB (więc $a = |AB|$). Wówczas wysokość h poprowadzona z wierzchołka C jest odległością punktu C od prostej AB. Mamy zatem:

$$a = |AB| = \sqrt{(5 + 8)^2 + 1^2} = \sqrt{170}$$

Równanie prostej AB zapisujemy w postaci $y = mx + n$ i po podstawieniu współrzędnych punktów A i B mamy:

$$\begin{cases} 0 = -8m + n \\ 1 = 5m + n \end{cases}$$

$$m = \frac{1}{13},\ n = \frac{8}{13}$$

Prosta AB ma równanie: $y = \frac{1}{13}x + \frac{8}{13}$, a w postaci ogólnej: $x - 13y + 8 = 0$.

Obliczamy odległość punktu C od prostej AB, czyli wysokość trójkąta.

$$h = \frac{|1 \cdot (-2) - 13 \cdot 2 + 8|}{\sqrt{1^2 + 13^2}} = \frac{20}{\sqrt{170}}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{170} \cdot \frac{20}{\sqrt{170}} = 10$$

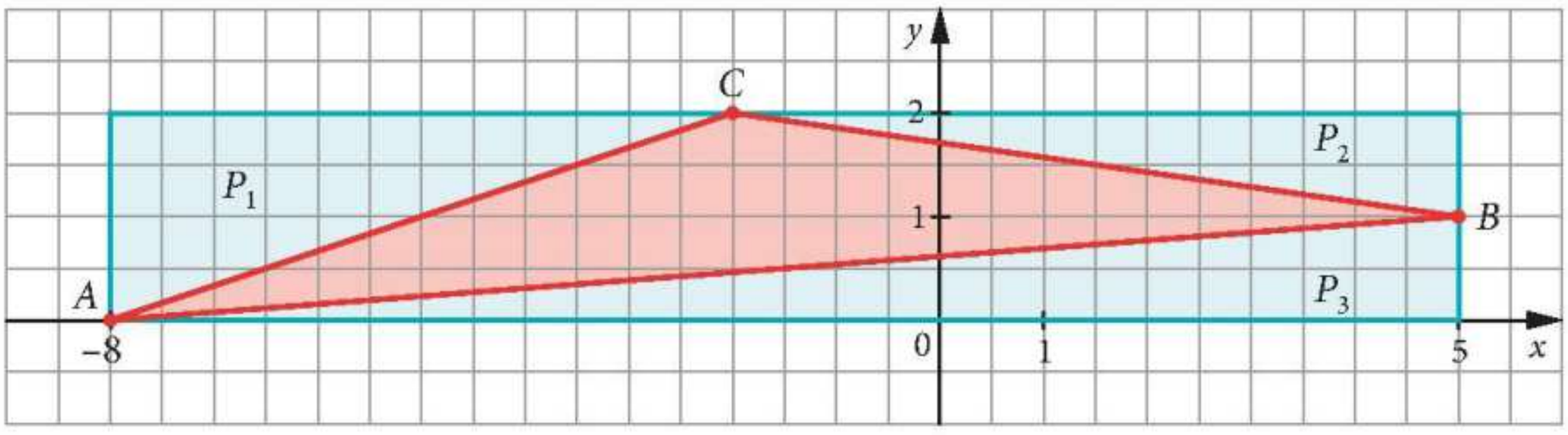
Odp.: Pole trójkąta ABC jest równe 10.

II sposób

Opisany powyżej sposób rozwiązania jest jedną z ogólnych metod stosowanych w takich zadaniach. Natomiast w tym konkretnym przypadku na pytanie można odpowiedzieć szybciej, ponieważ wierzchołki trójkąta są punktami kratowymi.

Punkt kratowy to punkt, którego współrzędne są liczbami całkowitymi.

Zaznaczamy odpowiednie figury w układzie współrzędnych.



Aby obliczyć pole trójkąta ABC, należy od pola P prostokąta odjąć sumę pól trzech trójkątów (na rysunku oznaczonych P_1, P_2 oraz P_3).

$$P_{ABC} = P - (P_1 + P_2 + P_3) = 13 \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 13\right) =$$
$$= 26 - 16 = 10$$

Odp.: Pole trójkąta ABC jest równe 10.

Przykład 10 ◂ zad. 3.16

Obliczymy odległość między prostymi równoległymi $k\colon x + y - 1 = 0$ i $l\colon x + y - 3 = 0$.

Mierzenie odległości między prostymi ma sens tylko wtedy, gdy te proste są równoległe.

Rozwiązanie

Wyznaczamy jakikolwiek punkt leżący na jednej z prostych, np. punkt przecięcia prostej k z osią y: $(0, 1)$. Następnie obliczamy odległość tego punktu od drugiej prostej:

$$\frac{|0 + 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Odp.: Odległość między prostymi jest równa $\sqrt{2}$.

Zadania

3.1. Napisz równanie prostej postaci $y = ax$, która tworzy z osią x podany kąt.

a) $150°$
b) $135°$
c) $60°$
d) $30°$

3.2. Wyznacz kąt nachylenia prostej do osi x. Wynik podaj z dokładnością do 1°.

a) $y = 0{,}6x$
b) $y = -2{,}6x$
c) $y = 9x$
d) $y = -14x$
e) $y = 0{,}06x$
f) $y = -0{,}1x$

3.3. Napisz równanie prostej l nachylonej do osi x pod kątem α i przechodzącej przez punkt P.

a) $\alpha = 45°$ $P = (4, 18)$
b) $\alpha = 60°$ $P = (5, 1)$
c) $\alpha = 30°$ $P = (-5, 0)$
d) $\alpha = 120°$ $P = \left(\sqrt{3}, 2\right)$
e) $\alpha = 0°$ $P = (-3, -2)$
f) $\alpha = 135°$ $P = (0, -7)$

3.4. Napisz równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt P.

a) $k: 9x - 2y + 1 = 0$ $P = (0, -3)$
b) $k: 2x + 3y - 10 = 0$ $P = (1, 1)$
c) $k: 7x + y - 18 = 0$ $P = (5, 0)$
d) $k: 6x - 5y + 19 = 0$ $P = (-2, -3)$
e) $k: x + 11y - 21 = 0$ $P = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$
f) $k: 5x + \sqrt{3}y - 18 = 0$ $P = \left(2, -\sqrt{3}\right)$

3.5. Sprawdź, czy proste l i p są równoległe do prostej k.

a) $k: x - 2y + 9 = 0$ $l: 2x - 4y + 7 = 0$ $p: 3x + 2y - 1 = 0$
b) $k: -3x + y + 7 = 0$ $l: 9x + 3y - \sqrt{2} = 0$ $p: 6x - 2y + 11 = 0$
c) $k: \sqrt{7}x + 2\sqrt{7}y + 3\sqrt{7} = 0$ $l: -6x - 12y + 7 = 0$ $p: 3x + 6y + \sqrt{2} = 0$
d) $k: x + y = 0$ $l: 3x - 3y + 5 = 0$ $p: -1\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + 7 = 0$

3.6. W równoległoboku $ABCD$ dane są wierzchołek $C = (10, 4)$ oraz równania boków AB: $y = 1$ i AD: $3x - 2y - 4 = 0$. Oblicz długości boków i przekątnych tego równoległoboku.

3.7. Napisz równanie ogólne prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P.

a) $k: 8x + 3y - 1 = 0$ $P = (-2, -2)$
b) $k: 5x + 11y = 0$ $P = (-1, -5)$
c) $k: \sqrt{2}x - 3y + 2\sqrt{2} = 0$ $P = \left(0, \sqrt{2}\right)$
d) $k: \sqrt{3}x + \sqrt{2}y + 1 = 0$ $P = (0, 0)$
e) $k: 6x - 2y + 17 = 0$ $P = (3, -2)$
f) $k: 4x + 7y + \sqrt{15} = 0$ $P = \left(\sqrt{3}, 1\right)$

3.8. Wyznacz odległości punktów $A = (4, 1)$, $B = (0, 2)$, $C = (2, 2)$ od prostej o równaniu $3x - 4y + 2 = 0$.

3.9. Wyznacz odległości punktów $A = (2, 0)$, $B = (3, -2)$, $C = (-3, -7)$ od prostej o równaniu $y = 2x - 1$.

3.10. Wyznacz odległość punktu przecięcia prostych o równaniach $y = -\frac{5}{2}x + 2$ i $y = x - 5$ od prostej o równaniu $y = -x + 3$.

3.11. Wyznacz odległość punktu $P = (3, 0)$ od prostej przechodzącej przez punkty $A = (1, -3)$ i $B = (-4, 9)$.

3.12. Oblicz pole trójkąta ABC o podanych wierzchołkach.

a) $A = (5, 5)$ $B = (-2, 4)$ $C = (-1, -3)$

b) $A = (1, 2)$ $B = (4, 8)$ $C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{23}{4}\right)$

c) $A = (-4, -2)$ $B = (1, 5)$ $C = (-3, 6)$

3.13. Boki trójkąta zawierają się w prostych: $4x + 3y - 21 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$, $3x + y - 7 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta i oblicz jego pole.

3.14. Narysuj w układzie współrzędnych czworokąt $ABCD$ i oblicz jego obwód oraz pole.

a) $A = (4, -2)$ $B = (2, 1)$ $C = (-3, 2)$ $D = (1, -4)$

b) $A = (7, 2)$ $B = (5, 4)$ $C = (-1, -2)$ $D = (1, -4)$

c) $A = (-1, 0)$ $B = (1, 3)$ $C = (-2, 5)$ $D = (-4, 2)$

d) $A = (-4, 0)$ $B = (1, -5)$ $C = (2, 2)$ $D = (-2, 4)$

3.15. W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty oraz $A = (11, 6)$ i $B = (0, 9)$. Przyprostokątna CB zawiera się w prostej o równaniu $y = -3x + 9$. Oblicz współrzędne punktu C oraz długości boków tego trójkąta.

3.16. Wyznacz odległość między prostymi k i l.

a) k: $3x + 4y = 0$ l: $3x + 4y + 10 = 0$

b) k: $x - 2y + 1 = 0$ l: $x - 2y - 4 = 0$

c) k: $y = x$ l: $y = x - 3$

d) k: $y = -\frac{1}{3}x + 2$ l: $y = -\frac{1}{3}x - 1$

3.17. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB.

a) $A = (-3, -1)$, $B = (3, 5)$

b) $A = (0, 2)$, $B = (8, 0)$

c) $A = (1, -1)$, $B = (-2, 5)$

d) $A = (-5, 6)$, $B = (3, 1)$

3.18. W trójkącie ABC dane są wierzchołki $A = (2, 7)$, $B = (-1, 4)$, $C = (5, 2)$. Wyznacz równanie wysokości AD tego trójkąta.

* **3.19.** W trójkącie ABC dane są współrzędne wierzchołka $A = (-4, -2)$ oraz równania wysokości BD: $2x + y - 2 = 0$ i CE: $x - 4y + 8 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C.

3.20. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dane są współrzędne wierzchołków $A = (5, 2)$ i $B = (-1, 4)$. Punkt C leży na prostej $k: 2x - 3y + 19 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C.

3.21. W trapezie prostokątnym $ABCD$ o podstawach AB i CD dane są współrzędne wierzchołków $A = (-2, -2)$, $B = (8, 3)$, $C = (3, 8)$. Oblicz pole tego trapezu.

3.22. W trójkącie ABC o kątach $\sphericalangle CAB = 60°$ i $\sphericalangle ABC = 45°$ dane są współrzędne wierzchołków $A = (0, 0)$ i $B = (8, 0)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż kąt, który przybliża z dokładnością do 1° kąt nachylenia prostej $y = -1{,}6x$ do osi x.

A. 58° **B.** 167° **C.** 122° **D.** −122°

2. Wskaż prostą, która tworzy z osią x kąt o mierze 150°.

A. $\sqrt{3}x + y + 3 = 0$
B. $\sqrt{3}x + 3y - 11 = 0$
C. $\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$
D. $\sqrt{3}x - 3y + 3 = 0$

3. Wskaż prostą równoległą do prostej $x - \sqrt{3}y + \sqrt{2} = 0$.

A. $x - y + \sqrt{2} = 0$
B. $x + \sqrt{3}y + \sqrt{7} = 0$
C. $\sqrt{3}x - 3y - 11 = 0$
D. $x - y - 1 = 0$

4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Prosta o równaniu $x - 2y - 1 = 0$ jest

A. równoległa do prostej $2x - y - 1 = 0$.

B. prostopadła do prostej $2x + y + 2 = 0$.

C. oddalona o $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ od prostej $x - 2y - 3 = 0$.

5. Napisz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-1, 2)$ i $B = (5, -4)$.

6. Dane są współrzędne wierzchołków $A = (-3, 1)$ i $B = (3, 3)$ oraz punktu przecięcia przekątnych $S = (1, 5)$ równoległoboku $ABCD$. Oblicz długości boków i przekątnych tego równoległoboku.

7. W trójkącie o wierzchołkach $A = (-5, -1)$, $B = (3, 3)$, $C = (-1, 6)$ poprowadzono wysokość CD. Oblicz $|CD|$.

4. Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło

Umiejętności:

- opisywanie okręgu za pomocą równania $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
- opisywanie koła za pomocą nierówności $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant r^2$

Równanie okręgu

Okręgiem o środku S i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny oddalonych o r od punktu S. Punkt $P=(x, y)$ należy zatem do okręgu o środku $S=(a, b)$ i promieniu r $(r>0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$|SP|=r$$

Po podstawieniu współrzędnych punktów S i P do wzoru na odległość otrzymujemy równanie:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

Obie strony tego równania są liczbami dodatnimi, zatem możemy je podnieść do kwadratu i otrzymamy:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Równania $f(x)=g(x)$ i $f^2(x)=g^2(x)$ nie muszą być równoważne, tzn. najczęściej mają różne zbiory rozwiązań. Na przykład rozwiązaniem równania $x=2$ jest tylko liczba 2, natomiast rozwiązaniami równania $x^2=4$ są dwie liczby: 2 oraz -2.
Jeżeli chcemy podnieść równanie $f(x)=g(x)$ stronami do kwadratu i otrzymać równanie równoważne, to równocześnie musimy założyć, że $f(x)$ i $g(x)$ mają ten sam znak – są albo niedodatnie, albo nieujemne.

Wniosek

Równanie $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $r>0$, opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej **okrąg** o środku $S=(a, b)$ i promieniu r.

Przykład 1 ◂ zad. 4.1

Zapiszemy równanie okręgu o danym środku S i promieniu r.

Rozwiązanie

a) $S=(1, 5)$, $r=3$
Do wzoru $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ podstawiamy $a=1$, $b=5$, $r=3$ i otrzymujemy równanie $(x-1)^2+(y-5)^2=9$.

b) $S = (-2, 3)$, $r = \sqrt{2}$
Równanie tego okręgu ma postać: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$.

c) $S = (3, 0)$, $r = 1$
Równanie okręgu ma postać: $(x - 3)^2 + y^2 = 1$.

Przykład 2 ◀ zad. 4.2

Sprawdzimy, czy dane równanie opisuje okrąg. Jeśli tak, odczytamy współrzędne jego środka i promień.

a) $x^2 + (y - 4)^2 = 1$

b) $\left(x + \sqrt{7}\right)^2 + (3 - y)^2 = 5$

c) $(x - 3)^2 + (2y - 3)^2 = 1$

d) $(x - 5)^2 + (y + 8)^2 = -4$

e) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 0$

Rozwiązanie

a) Równanie opisuje okrąg o środku $S = (0, 4)$ i promieniu $r = 1$.

b) Równanie można zapisać w postaci $\left(x + \sqrt{7}\right)^2 + (y - 3)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$, więc opisuje ono okrąg o środku $S = \left(-\sqrt{7}, 3\right)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$.

c) Równanie nie opisuje okręgu, ponieważ nie można go zapisać w postaci $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

d) Równanie nie opisuje okręgu. Żadna para liczb (x, y) go nie spełnia. Równanie opisuje zbiór pusty.

e) Równanie opisuje zbiór jednoelementowy. Tylko współrzędne punktu $(5, -3)$ spełniają to równanie.

Przykład 3 ◀ zad. 4.5

Napiszemy równanie okręgu o środku $S = (1, -9)$ przechodzącego przez punkt $A = (0, 2)$.

Rozwiązanie

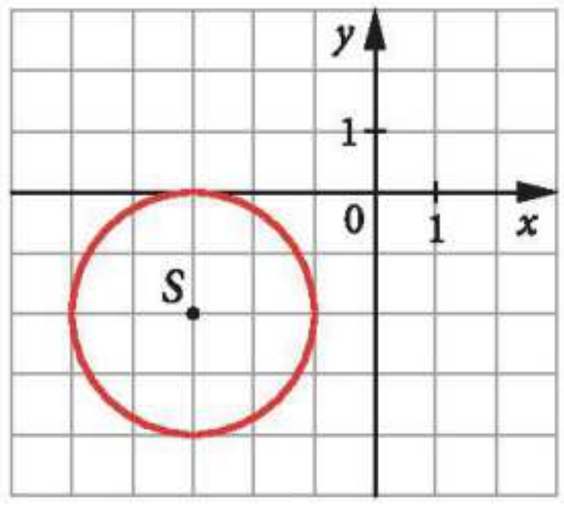
Szukane równanie ma postać $(x - 1)^2 + (y + 9)^2 = r^2$.
Promień r tego okręgu jest równy odległości jego środka S od punktu A. Wystarczy obliczyć kwadrat tej odległości:

$$r^2 = (1 - 0)^2 + (-9 - 2)^2 = 1^2 + 11^2 = 122$$

Odp.: $(x - 1)^2 + (y + 9)^2 = 122$

Przykład 4 ◀ zad. 4.6

Napiszemy równanie okręgu o środku $S = (-3, -2)$ stycznego do osi x.



Rozwiązanie

Promień tego okręgu jest równy odległości jego środka od osi x.

Zatem $r = 2$ i szukane równanie ma postać

$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

Odp.: $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$

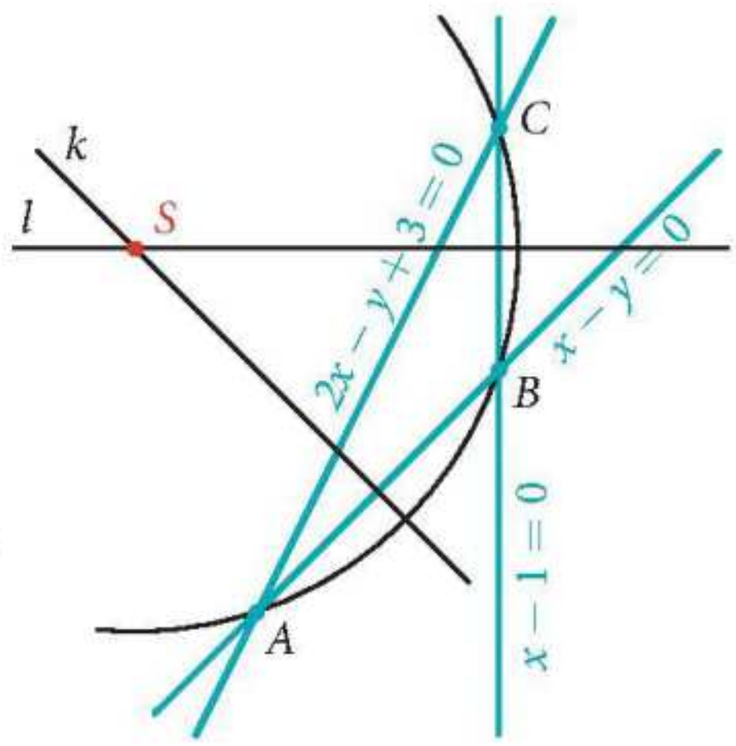
Przykład 5 ◀ zad. 4.14, 4.15

Napiszemy równanie okręgu opisanego na trójkącie o bokach zawartych w prostych $2x - y + 3 = 0$, $x - y = 0$ oraz $x - 1 = 0$.

Rozwiązanie

I sposób

Na rysunku mamy pomocniczy szkic sytuacji podanej w zadaniu.



Opiszemy etapy konstruowania okręgu opisanego na trójkącie.

Należy wyznaczyć kolejno:

Krok 1: Wierzchołki trójkąta – oznaczmy je A, B i C.

Krok 2: Równania symetralnych k i l dwóch wybranych boków trójkąta ABC.

Krok 3: Punkt S przecięcia tych symetralnych będący środkiem szukanego okręgu.

Krok 4: Odległość punktu S od jednego z wierzchołków trójkąta, będącą promieniem r szukanego okręgu.

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:

prosta AC: $2x - y + 3 = 0$, prosta AB: $x - y = 0$, prosta BC: $x - 1 = 0$.

Wykonujemy kolejne kroki.

1. Rozwiązujemy trzy układy równań (przekształcenia rachunkowe zostawiamy do samodzielnego wykonania):

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

i otrzymujemy: $A = (-3, -3)$, $B = (1, 1)$ i $C = (1, 5)$.

2. Wyznaczamy równania symetralnych k, l boków AB i BC.

- $(-1, -1)$ ⟵ współrzędne środka boku AB

$k: x + y + c = 0$ ⟵ $k \perp AB$

$c = 2$ ⟵ $(-1, -1) \in k$

$k: x + y + 2 = 0$

- $(1, 3)$ ⟵ współrzędne środka boku BC

$l: y + c = 0$ ⟵ $l \perp BC$

$c = -3$ ⟵ $(1, 3) \in l$

$l: y - 3 = 0$

3. Rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$$

są współrzędne środka szukanego okręgu: $S = (-5, 3)$.

4. $r^2 = |SC|^2 = 36 + 4 = 40$

Odp.: $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 40$

II sposób

Wyznaczamy (jak w I sposobie) współrzędne wierzchołków A, B, C trójkąta.

Niech $S = (a, b)$ będzie środkiem szukanego okręgu, a r – jego promieniem. Okrąg przechodzi przez punkty $A = (-3, -3)$, $B = (1, 1)$ i $C = (1, 5)$, więc współrzędne każdego z tych punktów spełniają równanie okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} (-3 - a)^2 + (-3 - b)^2 = r^2 \\ (1 - a)^2 + (1 - b)^2 = r^2 \\ (1 - a)^2 + (5 - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

Zauważmy, że prawe strony wszystkich równań są identyczne.

Skoro $r^2 = (-3 - a)^2 + (-3 - b)^2$, możemy zapisać podany układ równań w postaci:

$$\begin{cases} (1 - a)^2 + (1 - b)^2 = (-3 - a)^2 + (-3 - b)^2 \\ (1 - a)^2 + (5 - b)^2 = (-3 - a)^2 + (-3 - b)^2 \end{cases}$$

Po przekształceniach otrzymujemy kolejno:

$$\begin{cases} 1 - 2a + a^2 + 1 - 2b + b^2 = 9 + 6a + a^2 + 9 + 6b + b^2 \\ 1 - 2a + a^2 + 25 - 10b + b^2 = 9 + 6a + a^2 + 9 + 6b + b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8a - 8b = 16 \\ -8a - 16b = -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b = -2 \\ a + 2b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -5 \\ b = 3 \end{cases}$$

Obliczamy r^2: $r^2 = (-3 + 5)^2 + (-3 - 3)^2$, czyli $r^2 = 40$.

Zatem $S = (-5, 3)$ i $r^2 = 40$.

Odp.: $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 40$

Nierówność opisująca koło

Przypomnijmy:
Punkt $P = (x, y)$ należy do koła o środku $S = (a, b)$ i promieniu r $(r > 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|SP| \leqslant r$.

Wniosek

Nierówność $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2$, $r > 0$, opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej **koło** o środku $S = (a, b)$ i promieniu r.

Nierówność $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów leżących na zewnątrz tego koła.

Przykład 6 ◂ zad. 4.16

Sprawdzimy, które z punktów: $A = (-2, 2)$, $B = \left(2, 2-2\sqrt{2}\right)$, $C = (3, 5)$, $D = (-1, 0)$ należą do koła o środku $S = (1, 2)$ i promieniu 3.

Rozwiązanie

Nierówność opisująca to koło ma postać $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 9$.
Aby sprawdzić położenie punktu względem koła, podstawiamy współrzędne punktu do lewej strony tej nierówności.

- $(-2-1)^2 + (2-2)^2 = (-3)^2 + 0 = 9 \leqslant 9$ ⟵ $A = (-2, 2)$

Punkt A należy do okręgu o środku $S = (1, 2)$ i promieniu 3. Okrąg ten jest brzegiem danego koła, więc punkt A należy do tego koła.

- $(2-1)^2 + \left(2-2\sqrt{2}-2\right)^2 = 1 + 8 = 9 \leqslant 9$ ⟵ $B = \left(2, 2-2\sqrt{2}\right)$

Punkt B należy do okręgu, który jest brzegiem danego koła, więc należy do tego koła.

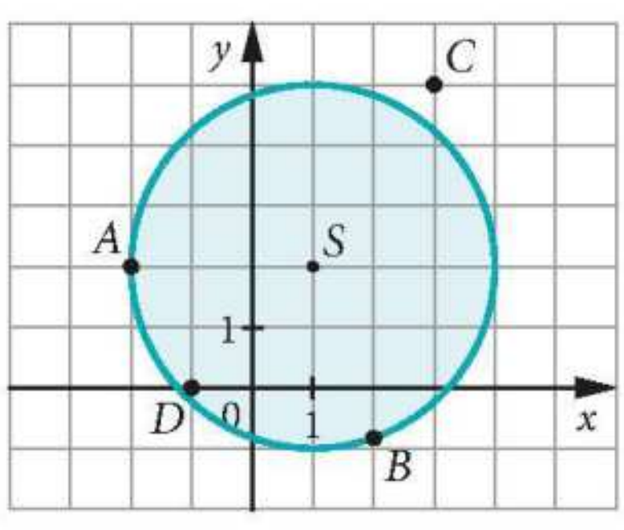
- $(3-1)^2 + (5-2)^2 = 4 + 9 = 13 > 9$ ⟵ $C = (3, 5)$

Punkt C nie należy do koła. Współrzędne punktu C spełniają nierówność $(x-1)^2 + (y-2)^2 > 3^2$, zatem C leży na zewnątrz koła o środku S i promieniu 3.

- $(-1-1)^2 + (0-2)^2 = 4 + 4 = 8 < 9$ ⟵ $D = (-1, 0)$

Punkt D należy do koła o środku S i promieniu 3.

Obok zamieszczamy ilustrację zadania.



Odp.: Punkty A, B oraz D należą do podanego koła.

D **Przykład 7** ◀ zad. 4.17

Wykażemy, że odcinek AB o końcach $A = (-1, 6)$, $B = (1, 4)$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem o równaniu $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Dowód

Sprawdzamy położenie końców odcinka względem okręgu. W tym celu podstawiamy ich współrzędne do równania okręgu. Dla punktu A mamy:

$$(-1 + 5)^2 + (6 - 4)^2 = 16 + 4 < 25$$

czyli punkt A leży wewnątrz koła ograniczonego tym okręgiem.
Dla punktu B mamy:

$$(1 + 5)^2 + (4 - 4)^2 = 36 > 25$$

czyli punkt B leży na zewnątrz tego koła.
Zatem odcinek AB ma dokładnie jeden punkt wspólny z danym okręgiem.

Koniec dowodu

Zadania

4.1. Napisz równanie okręgu o środku S i promieniu r.

a) $S = (-1, 3)$ $r = 3$
b) $S = (0, 0)$ $r = 11$
c) $S = (-2, -5)$ $r = 1$
d) $S = (0, 5)$ $r = 3\sqrt{2}$
e) $S = (6, -4)$ $r = 5$
f) $S = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ $r = \sqrt{3}$

4.2. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą podanego równania?

a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$
b) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 0$
c) $x^2 + y^2 = 2$
d) $(x + 2)^2 + y^2 + 1 = 0$
e) $(x + 2)^2 + y^2 - 3 = 0$
f) $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = -16$

4.3. Odczytaj z równania środek i promień okręgu.

a) $(x + 3)^2 + (y + 11)^2 = 5$
b) $x^2 + y^2 = 196$
c) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$
d) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 14$

4.4. Sprawdź, czy punkty A, B należą do okręgu o podanym równaniu.

a) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$ $A = (6, 3)$, $B = (2, 5)$
b) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ $A = (2, 0)$, $B = (1, 1)$

4.5. Do okręgu o środku $S = (4, 3)$ należy punkt $A = (8, 0)$. Napisz równanie tego okręgu.

4.6. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie $S = (-2, 5)$ stycznego
a) do osi x.
b) do osi y.

4.7. Napisz równanie okręgu o promieniu 4, który jest styczny do obu osi układu współrzędnych.

4.8. Napisz równanie okręgu, którego promień wynosi 3, środek leży na osi y i który jest styczny do osi x.

4.9. Napisz równanie okręgu stycznego do osi x w punkcie $A = (2, 0)$ i przechodzącego przez punkt
a) $B = (5, 3)$.
b) $B = (7, 5)$.

4.10. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (-1, 2)$ i współśrodkowego z okręgiem o równaniu $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

4.11. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (5, 1)$ i $B = (2, -2)$, którego środek leży na prostej $y - 1 = 0$.

4.12. Napisz równanie okręgu stycznego do osi y, którego środek jest punktem przecięcia prostych $2x - y + 4 = 0$ i $x - 2y + 2 = 0$.

4.13. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (9, 8)$ i stycznego do obu osi układu współrzędnych.

4.14. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.
a) $A = (5, 1)$, $B = (4, 6)$, $C = (-1, 5)$
b) $A = (1, 0)$, $B = (5, 2)$, $C = (2, 3)$
c) $A = (0, 2)$, $B = (9, -1)$, $C = (8, 6)$

4.15. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie, którego boki zawierają się w prostych o równaniach: $y = 3x - 9$, $2x + y - 1 = 0$ i $y = -x + 3$.

4.16. Zbadaj położenie punktów A, B, C względem koła.
a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 \leqslant 4$ $\quad A = (2, 3)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, 1)$
b) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 \leqslant 1$ $\quad A = (3, -1)$, $B = (-2, -1)$, $C = (1, 1)$

D **4.17.** Wykaż, że odcinek AB ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem o podanym równaniu.

a) $A = (3, 1),\ B = (-2, 3)$ $\quad (x+1)^2 + (y-6)^2 = 25$

b) $A = (6, 1),\ B = (5, 2)$ $\quad (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

c) $A = (-4, 1),\ B = (-3, -2)$ $\quad (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$

d) $A = (0, 4),\ B = (-2, 2)$ $\quad (x+1)^2 + (y+2)^2 = 18$

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż punkt leżący na okręgu o równaniu $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$.

A. $(3, 0)$ **B.** $(3, -4)$ **C.** $(-3, -4)$ **D.** $(-3, 0)$

2. Odległość między środkami okręgów o równaniach $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$ oraz $(x-3)^2 + y^2 = 8$ jest równa

A. $\sqrt{26}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** 8. **D.** $4 + \sqrt{8}$.

3. Odcinek o końcach $P = (0, 0),\ Q = (8, 6)$ jest średnicą okręgu o równaniu

A. $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$.

B. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

C. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 5$.

D. $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 5$.

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Okrąg o środku $S = (-9, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$ można opisać za pomocą równania $(x+9)^2 + y^2 = 2$.

B. Punkt $M = \left(\sqrt{2} - 9, 0\right)$ należy do okręgu o środku $S = (-9, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$.

C. Punkt $N = \left(\sqrt{2} - 9, -1\right)$ leży na zewnątrz koła o środku $S = (-9, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$.

5. Dane są punkty $M = (-5, 8)$ i $N = (3, 2)$. Napisz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek MN.

6. Napisz równanie okręgu stycznego do osi y, którego środek jest punktem przecięcia prostych $2x - y + 4 = 0$ i $x - 2y + 2 = 0$.

D **7.** Dane są punkty: $A = (0, 1),\ B = (3, 0),\ C = (4, 3),\ D = (1, 4)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem i napisz równanie okręgu, którego średnicami są przekątne tego kwadratu.

5. Okrąg i prosta

Umiejętności:

- określanie wzajemnego położenia prostej i okręgu (koła)
- wyznaczanie punktów wspólnych prostej i okręgu
- wyznaczanie równania stycznej do okręgu

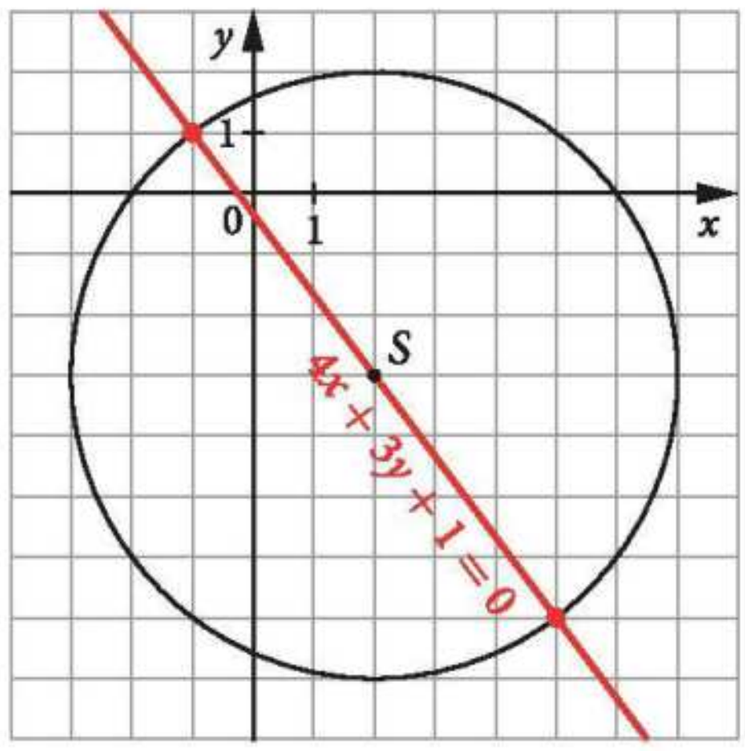
Prostą i okrąg możemy opisać za pomocą równań, zatem wyznaczenie punktów wspólnych tych dwóch figur sprowadza się do rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ px + qy + m = 0 \end{cases}$$

w którym $r > 0$ oraz $p^2 + q^2 \neq 0$.

Przykład 1 ◂ zad. 5.2

Z wykresu przedstawiającego okrąg o środku $S = (2, -3)$ i promieniu $r = 5$ oraz prostą o równaniu $4x + 3y + 1 = 0$ możemy odczytać ich punkty wspólne: $A = (-1, 1)$ i $B = (5, -7)$. Sprawdzimy rachunkowo, czy współrzędne tych punktów zostały poprawnie odczytane.



Rozwiązanie

Aby sprawdzić, czy współrzędne punktów zostały odczytane poprawnie, podstawiamy je do układu równań opisujących okrąg i prostą.

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 \\ 4x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 + 16 = 25 \\ -4 + 3 + 1 = 0 \end{cases} \longleftarrow A = (-1, 1) \qquad \begin{cases} 9 + 16 = 25 \\ 20 - 21 + 1 = 0 \end{cases} \longleftarrow B = (5, -7)$$

Dla każdego z punktów obydwie równości są prawdziwe. Zatem współrzędne punktów przecięcia okręgu z prostą zostały poprawnie odczytane z rysunku.

Przykład 2 ◂ zad. 5.3

Wyznaczymy punkty wspólne prostej $2x + y - 7 = 0$ i okręgu $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 20$, a następnie wykonamy ilustrację graficzną rozwiązania.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ (x+2)^2 + (-2x+7-1)^2 = 20 \end{cases} \longleftarrow \text{podstawiamy } y = -2x + 7$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x + 7 \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases}$$

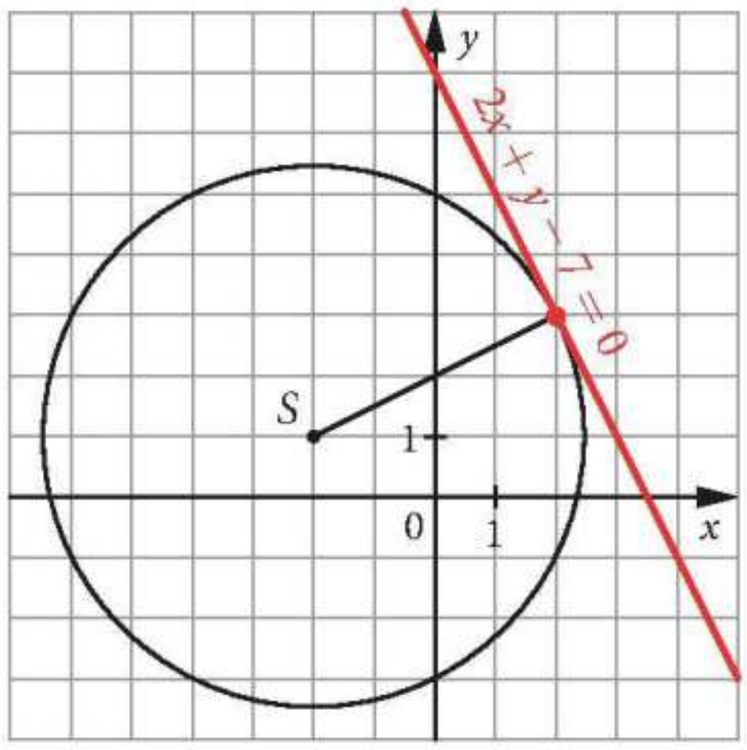
Jedynym pierwiastkiem drugiego równania jest liczba 2. Zatem rozwiązaniem układu jest jedna para liczb: $x = 2,\ y = 3$.

Prosta i okrąg mają więc jeden punkt wspólny, a to oznacza, że prosta jest styczna do okręgu w punkcie (2, 3).

Żeby zilustrować tę sytuację na płaszczyźnie kartezjańskiej, zauważmy, że równanie:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 20$$

opisuje okrąg o środku $S = (-2, 1)$ i promieniu $r = \sqrt{20}$. Rysunek możemy łatwo wykonać bez znajdowania odcinka o długości r, bo wiemy już, że punkt (2, 3) leży na okręgu.



Odp.: Prosta jest styczna do okręgu w punkcie (2, 3).

Przykład 3

Zbadamy wzajemne położenie prostej $y = x + 3$ i okręgu $x^2 + (y+2)^2 = 9$.

Rozwiązanie

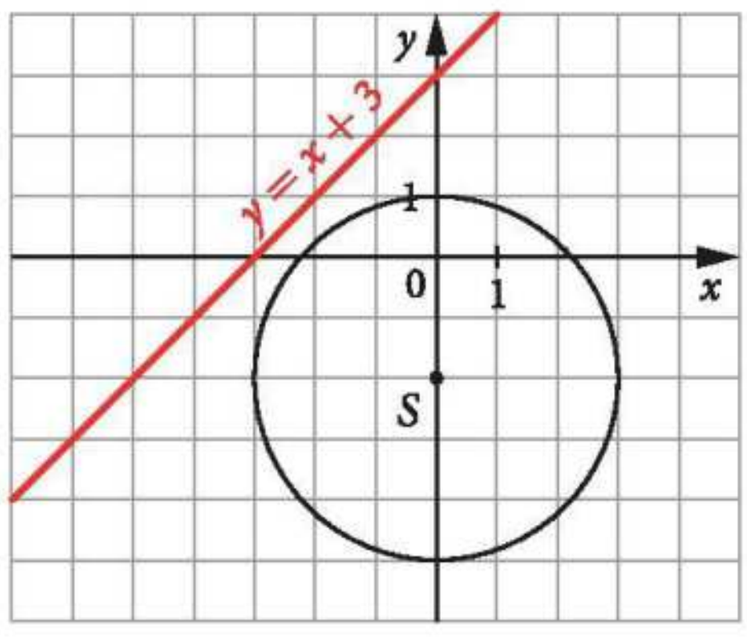
$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + (y+2)^2 = 9 \end{cases}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + 5x + 8 = 0 \end{cases}$$

Wyróżnik równania kwadratowego jest równy $\Delta = 25 - 32 = -7$, czyli równanie nie ma rozwiązań. Zatem układ równań także ich nie ma. Okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych. Można to również odczytać z rysunku.

Innym sposobem rozwiązania jest obliczenie odległości środka okręgu od prostej i porównanie jej z promieniem.



Odp.: Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.

Zbadamy teraz, jaką figurą jest zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej opisany za pomocą układu warunków:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2 \\ px + qy + m = 0 \end{cases}$$

w którym $r > 0$ oraz $p^2 + q^2 \neq 0$.

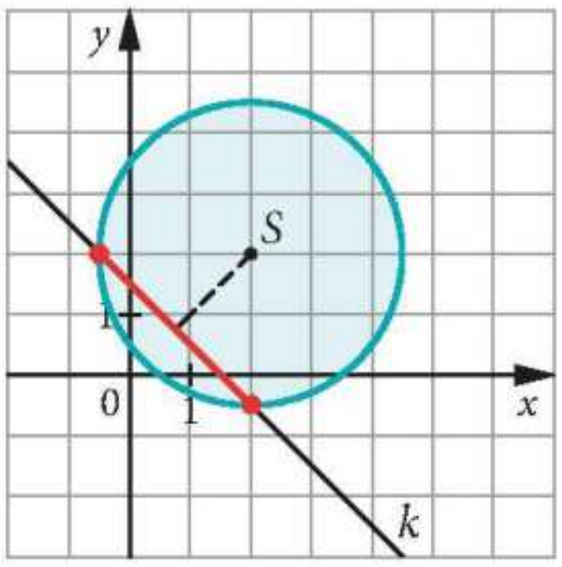
Pierwszy warunek opisuje koło o środku $S = (a, b)$ i promieniu r, drugi jest równaniem prostej, nazwijmy ją k. Punkt (x, y) spełnia podany układ warunków, gdy należy do każdej z tych figur. Są trzy możliwości.

I. Odległość punktu $S = (a, b)$ od prostej k jest mniejsza od r:
wtedy prosta k przecina koło, czyli punkty wspólne obu figur tworzą odcinek – opisywany zbiór jest odcinkiem (rys. 1).

II. Odległość punktu $S = (a, b)$ od prostej k jest równa r:
wtedy prosta k jest styczna do koła, czyli jedynym punktem wspólnym tych figur jest punkt styczności – opisywany zbiór jest jednoelementowy (rys. 2).

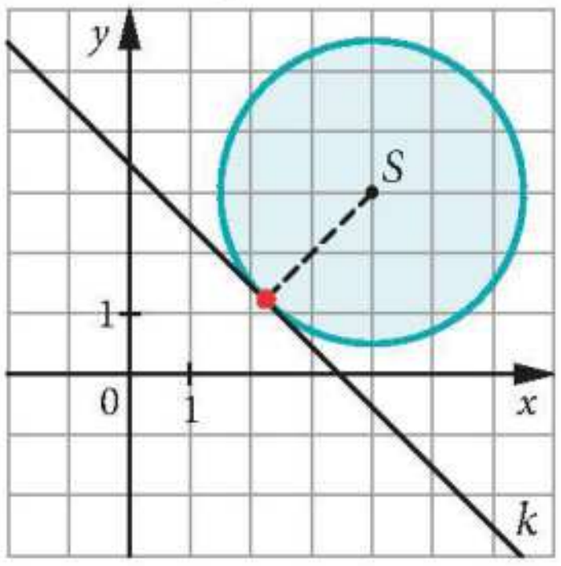
III. Odległość punktu $S = (a, b)$ od prostej k jest większa od r:
wtedy prosta k jest rozłączna z kołem, czyli figury nie mają punktów wspólnych – opisywany zbiór jest zbiorem pustym (rys. 3).

odcinek



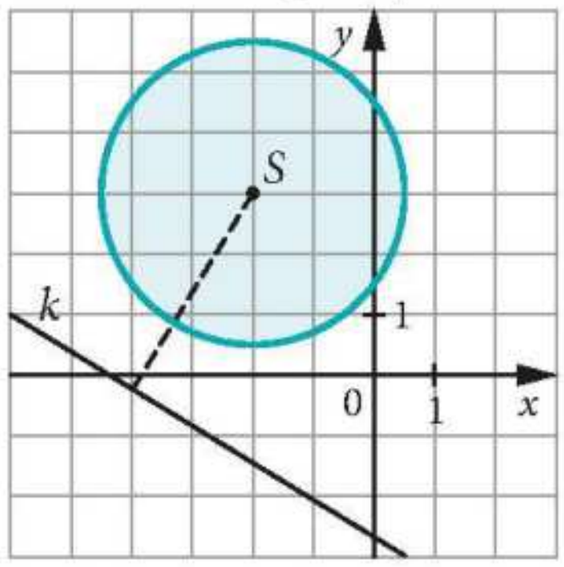
Rys. 1

punkt



Rys. 2

zbiór pusty



Rys. 3

Przykład 4 ◀ zad. 5.8

Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 \leqslant 11 \\ y = 3 - 2{,}5x \end{cases}$?

Rozwiązanie

Nierówność $(x-4)^2 + (y-2)^2 \leqslant 11$ opisuje koło o środku $S = (4, 2)$ i promieniu $r = \sqrt{11}$. Natomiast $y = 3 - 2{,}5x$ jest równaniem kierunkowym prostej.

Zapiszemy równanie prostej, nazwijmy ją k, w postaci ogólnej:

$k\colon 2{,}5x + y - 3 = 0$

czyli $k\colon 5x + 2y - 6 = 0$.

Sprawdzamy, jaka jest zależność między odległością punktu S od prostej k a promieniem r koła.

$$\frac{|20 + 4 - 6|}{\sqrt{25 + 4}} = \frac{18}{\sqrt{29}} = \frac{18\sqrt{29}}{29} \approx 3{,}34 \quad \longleftarrow \text{odległość środka } S \text{ od prostej } k$$

Zauważmy, że $\sqrt{11} < 3{,}32$, natomiast $\frac{18\sqrt{29}}{29} > 3{,}32$. Otrzymaliśmy układ nierówności:

$$\frac{18\sqrt{29}}{29} > 3{,}32 > \sqrt{11}$$

Zatem prosta o równaniu $y = 3 - 2{,}5x$ nie ma punktów wspólnych z kołem opisanym za pomocą nierówności $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 11$.

Odp.: Opisany zbiór jest zbiorem pustym.

Przykład 5 ◂ zad. 5.11

Okrąg o środku $S = (1, 2)$ przechodzi przez punkt $M = (-2, 1)$. Napiszemy równanie stycznej do tego okręgu w punkcie M.

Rozwiązanie

Szukana styczna (oznaczmy ją k) jest prostopadła do prostej MS, jej równanie można zapisać w postaci kierunkowej:

$k\colon y = ax + b$

Do wyznaczenia współczynnika a potrzebny jest współczynnik kierunkowy m prostej MS: $y = mx + p$.

$$\begin{cases} 2 = m + p \\ 1 = -2m + p \end{cases} \quad \longleftarrow \text{podstawiamy współrzędne punktów } S \text{ i } M$$

Stąd $m = \frac{1}{3}$. Zauważmy, że do rozwiązania zadania nie jest potrzebna wartość p.

$$a = -\frac{1}{m} = -3$$

$k\colon y = -3x + b$

$1 = 6 + b \quad \longleftarrow$ szukana styczna przechodzi przez punkt M

$k\colon y = -3x - 5$

Odp.: Styczna ma równanie $y = -3x - 5$.

Przykład 6 ◀ zad. 5.14

Napiszemy równania stycznych do okręgu $(x-1)^2+(y+3)^2=5$ prostopadłych do prostej $l\colon x-2y=0$.

Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy dwoma sposobami. W pierwszym odwołamy się do konstrukcyjnego wyznaczania takich stycznych, a w drugim pokażemy metodę rachunkową.

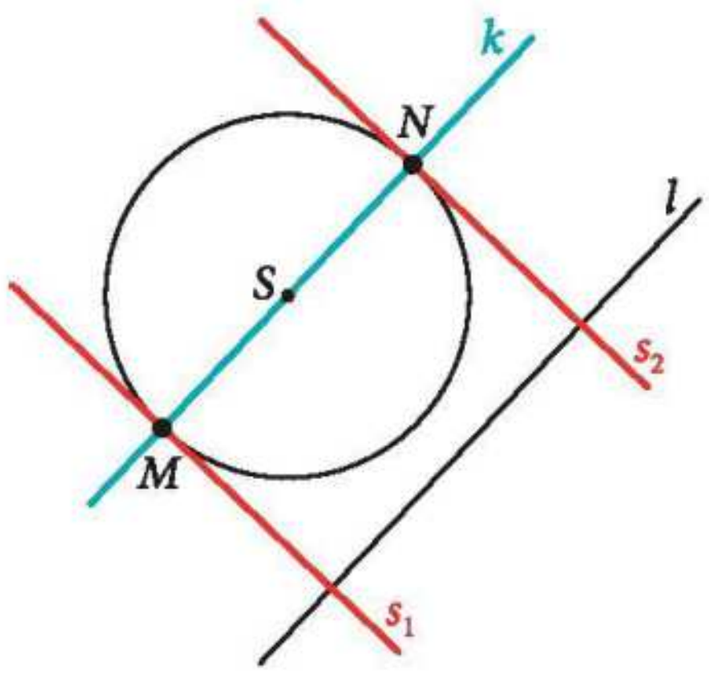
I sposób

Konstrukcja stycznych opisanych w zadaniu przebiega następująco:

Krok 1: Przez środek okręgu prowadzimy prostą k równoległą do l.

Krok 2: Wyznaczamy punkty M i N przecięcia okręgu prostą k. Są to punkty styczności szukanych stycznych (na rysunku oznaczonych s_1, s_2).

Krok 3: Przez punkty M i N prowadzimy proste s_1 i s_2 prostopadłe do l.



Wykonujemy kolejne kroki.

1. Z równania okręgu $(x-1)^2+(y+3)^2=5$ odczytujemy jego środek $S=(1,-3)$. Następnie znajdujemy równanie prostej k, równoległej do l i przechodzącej przez S.

$k\colon x-2y+c=0$

$1+6+c=0$ $\longleftarrow S\in k$

$k\colon x-2y-7=0$

2. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+3)^2=5\\ x-2y-7=0\end{cases}$$

i otrzymujemy $\begin{cases}x=3\\ y=-2\end{cases}$ lub $\begin{cases}x=-1\\ y=-4\end{cases}$.

Zatem $M=(3,-2)$, $N=(-1,-4)$.

3. Znajdujemy równania stycznych s_1 i s_2.

$s_1\colon 2x+y+c=0$ i $6-2+c=0$ $\longleftarrow s_1\perp l$ i $M\in s_1$

$s_1\colon 2x+y-4=0$

$s_2\colon 2x+y+c=0$ i $-2-4+c=0$ $\longleftarrow s_2\perp l$ i $N\in s_2$

$s_2\colon 2x+y+6=0$

Odp.: Szukane styczne mają równania $y=-2x+4$, $y=-2x-6$.

II sposób

Prosta jest styczna do okręgu o środku S i promieniu r wtedy i tylko wtedy, gdy odległość punktu S od tej prostej jest równa r.

Okrąg dany w zadaniu ma środek $S = (1, -3)$ i promień $\sqrt{5}$.

Każdą prostą prostopadłą do prostej l można opisać za pomocą równania postaci $2x + y + c = 0$. Jeżeli skorzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej, to otrzymamy równanie z niewiadomą c.

$$\frac{|2 \cdot 1 - 3 + c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \qquad \longleftarrow S = (1, -3),\ r = \sqrt{5}$$

$$\frac{|c - 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|c - 1| = 5$$

$$c - 1 = 5 \text{ lub } c - 1 = -5$$

$$c = 6 \text{ lub } c = -4$$

$|x| = a$ $(a > 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = a$ lub $x = -a$.

Równania stycznych to $2x + y + 6 = 0$ i $2x + y - 4 = 0$.

Odp.: Szukane styczne mają równania $y = -2x + 4$, $y = -2x - 6$.

Zadania

5.1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej opisany za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 \leqslant 4 \\ y = 2 - x \end{cases}$

A. jest odcinkiem.

B. ma dokładnie dwie osie symetrii.

C. jest zbiorem pustym.

5.2. Zbadaj graficznie i rachunkowo wzajemne położenie prostej i okręgu o danych równaniach.

a) $y = x - 1$ $\quad (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$

b) $y = 2x + 1$ $\quad (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$

c) $y = -x - 2$ $\quad (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$

d) $y = 3x - 5$ $\quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$

5.3. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia okręgu i prostej o danych równaniach.

a) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ $\quad x - y + 1 = 0$

b) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$ $\quad x + y - 8 = 0$

c) $(x-2)^2 + y^2 = 25$ $\quad x - 5 = 0$

d) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ $\quad 2x - y + 4 = 0$

5.4. Oblicz długość cięciwy, którą okrąg $(x+1)^2+(y+4)^2=10$ wycina z prostej $y=2x-7$.

5.5. Przez środek okręgu $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ i punkt $P=(1,6)$ poprowadzono prostą przecinającą ten okrąg w dwóch punktach. Wyznacz te punkty.

5.6. Okrąg $(x+2)^2+(y-4)^2=32$ o środku S przecina oś x w punktach A i B. Oblicz pole i obwód trójkąta ABS.

5.7. Punkty $A=(0,-1)$ i $B=(-2,1)$ należą do okręgu $(x-1)^2+(y-2)^2=10$. Znajdź współrzędne takiego punktu C należącego do tego okręgu, aby $|AC|=|BC|$.

5.8. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą podanego układu warunków?

a) $\begin{cases}(x+2)^2+(y-5)^2\leqslant 4\\ 2x+3y-4=0\end{cases}$

b) $\begin{cases}(x+3)^2+(y+5)^2\leqslant 32\\ y=x+6\end{cases}$

c) $\begin{cases}(x-10)^2+(y-1)^2\leqslant 100\\ x=19\end{cases}$

d) $\begin{cases}(x-6)^2+(y+12)^2\leqslant 100\\ x-2y-6=0\end{cases}$

5.9. Wierzchołki trapezu $ABCD$ leżą na okręgu $(x-4)^2+(y-1)^2=25$. Jedna podstawa trapezu zawiera się w prostej $y-5=0$, a druga jest średnicą okręgu. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

5.10. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A=(2,2)$ oraz przez punkty przecięcia okręgu $(x-2)^2+(y-2)^2=9$ z prostą $y+x=1$.

5.11. Okrąg o środku $S=(-1,-2)$ przechodzi przez punkt $M=(0,3)$. Napisz równanie stycznej do tego okręgu w punkcie M.

5.12. Napisz równanie okręgu o środku $S=(-3,1)$ stycznego do prostej $2x-y+1=0$.

5.13. Napisz równania stycznych do okręgu $x^2+y^2=18$ równoległych do prostej $y=-x+2$.

5.14. Napisz równania stycznych do danego okręgu prostopadłych do prostej k.

a) $(x+1)^2+(y+2)^2=18$ $\quad k\colon y=x$

b) $(x+1)^2+(y-3)^2=10$ $\quad k\colon x-y=7$

5.15. Okrąg o środku $S=(6,3)$ jest styczny do prostej l w punkcie $A=(2,1)$. Napisz równania okręgu i prostej l.

D **5.16.** Wykaż, że styczne do okręgu $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ poprowadzone z początku układu współrzędnych są prostopadłe.

5.17. Z punktu $A = (4, -4)$ poprowadzono styczne do okręgu $(x-3)^2+(y+1)^2 = 5$. Oblicz długość odcinka łączącego punkty styczności.

5.18. Okrąg styczny do osi y w punkcie $P = (0, 5)$ wyznacza na osi x cięciwę o długości $4\sqrt{6}$. Napisz równanie tego okręgu i znajdź jego punkty przecięcia z osią x.

5.19. W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku C dany jest wierzchołek $A = (4, -1)$. Przeciwprostokątna ma równanie $2x + y - 7 = 0$, a przyprostokątna przeciwległa wierzchołkowi A – równanie $x - y + 1 = 0$.

a) Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.
b) Wyznacz współrzędne wierzchołka C.
c) Oblicz pole trójkąta ABC.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż styczną do okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

A. $x = 2$ **B.** $x = 7$ **C.** $y = 2$ **D.** $y = 3$

2. Ile punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisanych za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 1)^2 \leqslant 4 \\ y = 2 + x \end{cases}$?

A. dwa **B.** jeden **C.** nieskończenie wiele **D.** zero

3. Która prosta przecina okrąg $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ w dwóch punktach?

A. $y = 2$ **B.** $x + y - \sqrt{3} = 0$ **C.** $x - y + 2 = 0$ **D.** $x = 3$

4. Dany jest okrąg o środku $S = (13, 2)$ i promieniu $r = 4$ oraz prosta $k: x - y = 11$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Prosta k jest styczna do okręgu $o(S, r)$.
B. Prosta k przecina okrąg $o(S, r)$.
C. Figura złożona z prostej k i okręgu $o(S, r)$ ma dokładnie jedną oś symetrii.

5. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (-1, 2)$, współśrodkowego z okręgiem o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$.

6. Oblicz długość cięciwy, którą okrąg $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ wyznacza na prostej $y = -x + 3$.

7. Napisz równania stycznych do okręgu $(x - 8)^2 + (y + 2)^2 = 1$ prostopadłych do prostej $y - 2 = 0$.

6. Symetria środkowa

Umiejętności:

- wyznaczanie środka symetrii w figurach środkowosymetrycznych
- wyznaczanie obrazu figur w symetrii środkowej na płaszczyźnie
- wyznaczanie obrazu okręgu lub wielokąta w symetrii środkowej o środku w początku układu współrzędnych
- stosowanie poznanych twierdzeń w zadaniach wieloetapowych

Symetria środkowa była już omawiana w szkole podstawowej. Powtórzymy własności tego przekształcenia, a następnie rozważymy jego działanie na płaszczyźnie kartezjańskiej.

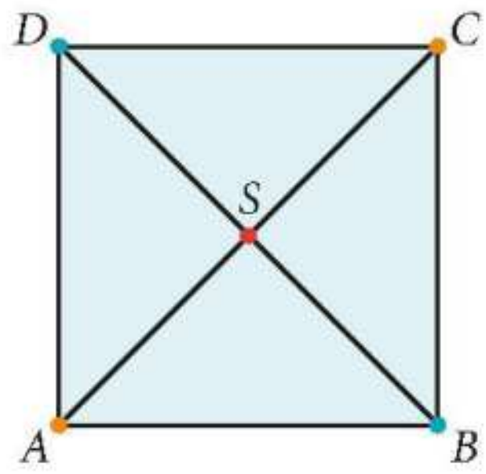
Symetria środkowa na płaszczyźnie

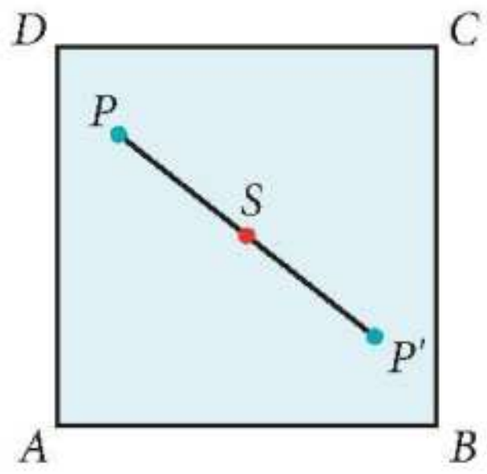
Punkty A i A' **są symetryczne względem punktu** S, gdy S jest środkiem odcinka AA'. Punkt S nazywamy **środkiem symetrii** punktów A i A'.

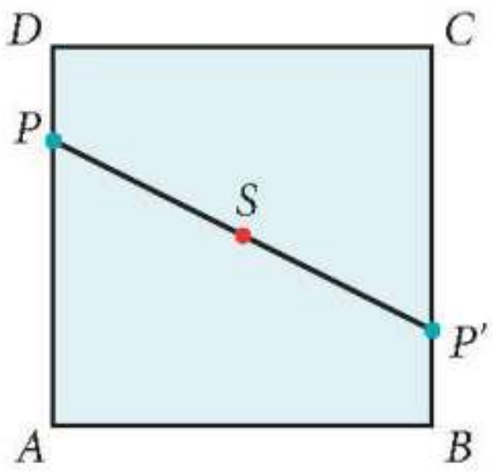


Jeżeli punkt A' jest symetryczny do punktu A względem punktu S, to również punkt A jest symetryczny do punktu A' względem punktu S. Punkt S jest symetryczny do punktu S względem punktu S.

Popatrzmy na kwadrat $ABCD$ i punkt S przecięcia jego przekątnych.







Punkty A i C są symetryczne względem punktu S. Podobnie punkty B i D są symetryczne względem punktu S.

Wybierzmy dowolny punkt P tego kwadratu. Punkt P' symetryczny do punktu P względem punktu S również należy do kwadratu $ABCD$.

Podobnie – gdy punkt P należy do brzegu kwadratu, symetryczny do niego punkt P' także należy do brzegu kwadratu.

W takiej sytuacji mówimy, że punkt S jest środkiem symetrii kwadratu $ABCD$.

O kwadracie powiemy, że jest figurą środkowosymetryczną.

Definicja

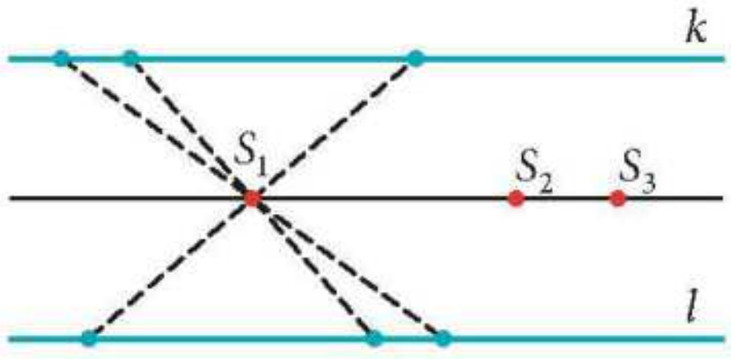
Punkt S nazywamy **środkiem symetrii figury** F, jeżeli dla każdego punktu A należącego do F punkt A' symetryczny do A względem S też należy do F. Figurę F nazywamy **środkowosymetryczną**.

Przykład 1 ◀ zad. 6.2

a) Odcinek jest figurą środkowosymetryczną. Środkiem symetrii odcinka jest jego środek.

b) Okrąg jest figurą środkowosymetryczną. Środkiem symetrii okręgu jest jego środek.

c) Figura złożona z dwóch prostych równoległych k, l ma nieskończenie wiele środków symetrii. Tworzą one prostą równoległą do k i do l, jednakowo od nich oddaloną.

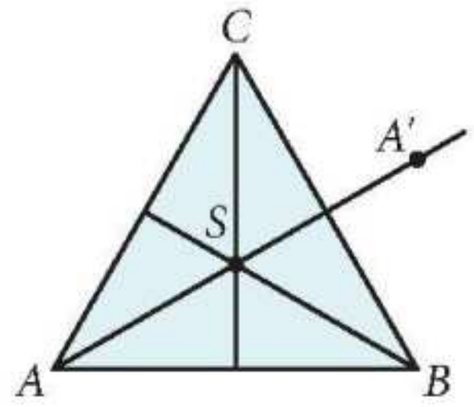


Wśród znanych figur geometrycznych wyróżnimy te, które mają środek symetrii, i te, które go nie mają. Na przykład:

Figury mające środek symetrii	Figury niemające środka symetrii
odcinek	półprosta
prostokąt, kwadrat	kąt, trójkąt
równoległobok, romb	trapez niebędący równoległobokiem, deltoid niebędący rombem
okrąg, koło	

D **Przykład 2** ◀ zad. 6.3

Wykażemy, że punkt S przecięcia wysokości trójkąta równobocznego nie jest jego środkiem symetrii.



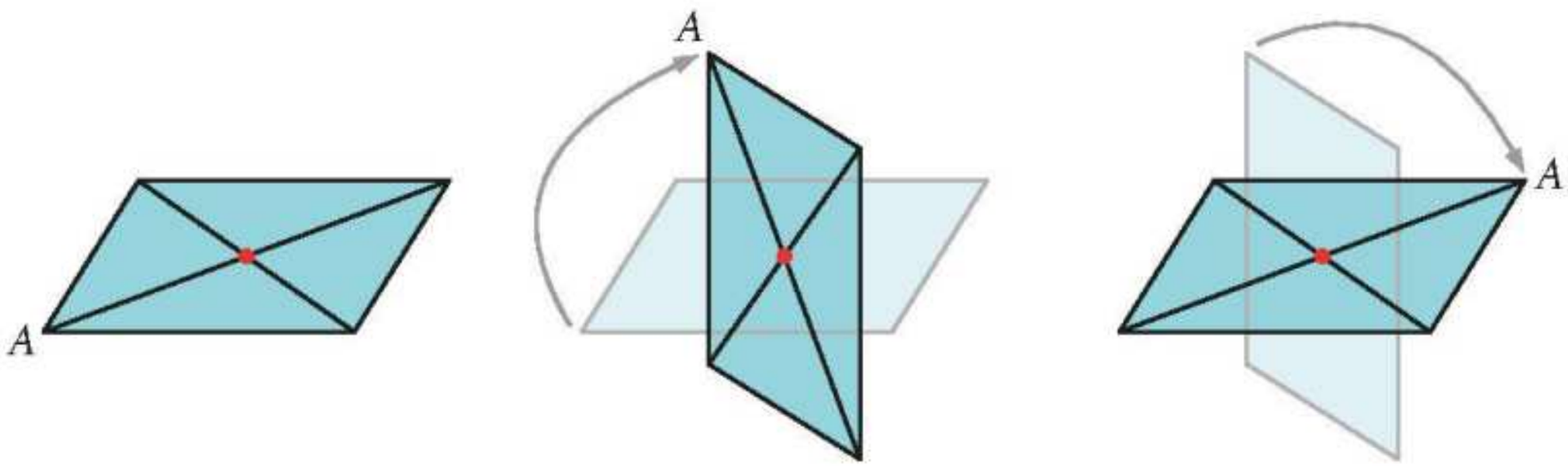
Rozwiązanie

Gdyby tak było, punkt A' symetryczny do wierzchołka A względem S należałby do trójkąta. Tak nie jest, zatem punkt S nie jest środkiem symetrii trójkąta ABC.

Podobnej próby nie przejdzie żaden inny kandydat na środek symetrii trójkąta równobocznego, a tym bardziej żadnego innego.

Trójkąt **nie** ma środka symetrii.

Figura środkowosymetryczna ma tę własność, że gdy obrócimy ją o 180° wokół jej środka symetrii, to figura przed obrotem i figura po obrocie nałożą się na siebie.



Można to sprawdzić dla wymienionych w tabeli figur środkowosymetrycznych. Nie istnieje natomiast punkt o takiej własności dla półprostej, kąta czy trapezu.

Przekształcenie płaszczyzny, które każdemu jej punktowi P przyporządkowuje punkt P' symetryczny do P względem ustalonego punktu S, nazywamy **symetrią środkową o środku** S.

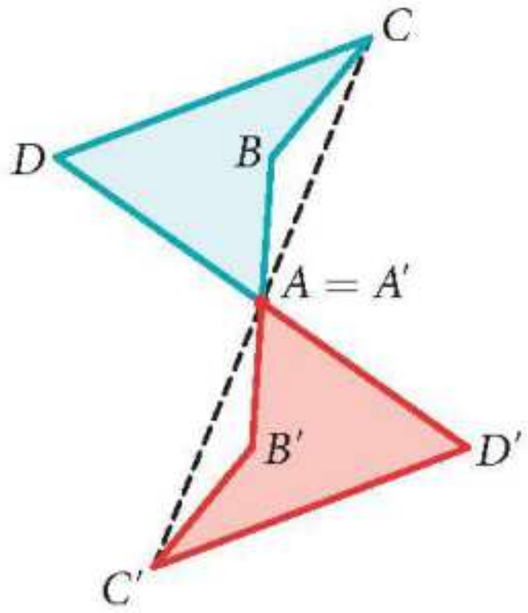
Przykład 3 ◀ zad. 6.5

Narysujemy figurę, która jest obrazem danego czworokąta $ABCD$ w symetrii środkowej o środku A.

Rozwiązanie

Zauważmy, że obrazem:

- wierzchołka czworokąta $ABCD$ jest wierzchołek czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu leżącego na brzegu czworokąta $ABCD$ jest punkt należący do brzegu czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu wewnętrznego czworokąta $ABCD$ jest punkt wewnętrzny czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu A jest ten sam punkt.



Jeżeli w jakimś przekształceniu obrazem punktu P jest ten sam punkt P, to nazywamy go **punktem stałym** tego przekształcenia.
Symetria środkowa względem punktu S ma jeden punkt stały – jest nim środek tej symetrii.

Figury: F i jej obraz F' w symetrii środkowej **są przystające**. Oznacza to, że obrazem odcinka jest odcinek o tej samej długości, obrazem prostej – prosta, kąta – kąt o tej samej mierze, okręgu o promieniu r – okrąg o promieniu r, trójkąta ABC – przystający do niego trójkąt $A'B'C'$ itd.

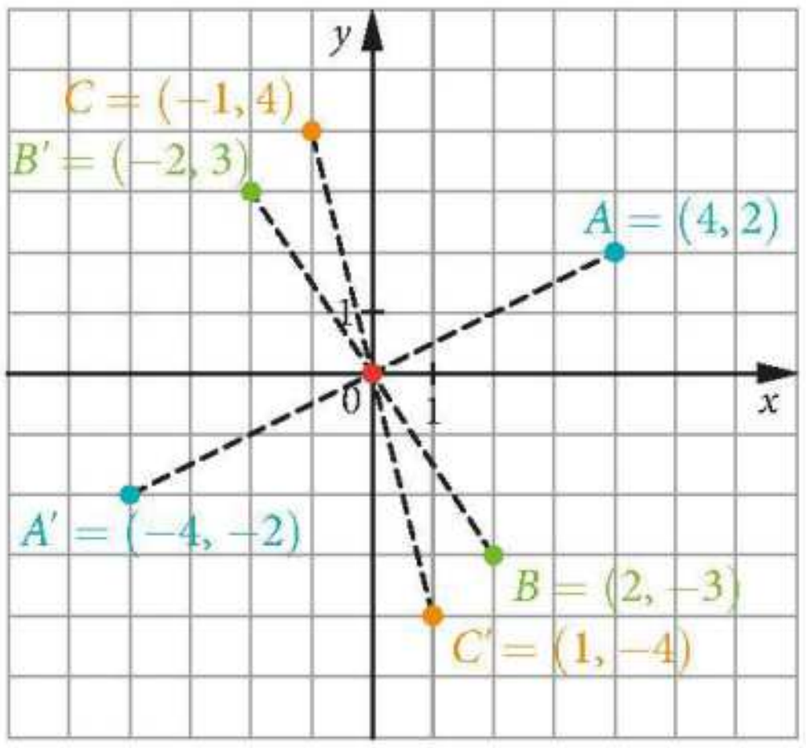
Symetria środkowa względem początku układu współrzędnych

Płaszczyznę kartezjańską można przekształcić przez symetrię względem dowolnego punktu. Ograniczymy się jednak do omówienia sytuacji, gdy środkiem symetrii jest początek układu współrzędnych.

Przyjrzyjmy się rysunkowi.
Jeśli $P'=(x', y')$ jest obrazem punktu $P=(x,y)$ w symetrii względem punktu (0, 0), to:

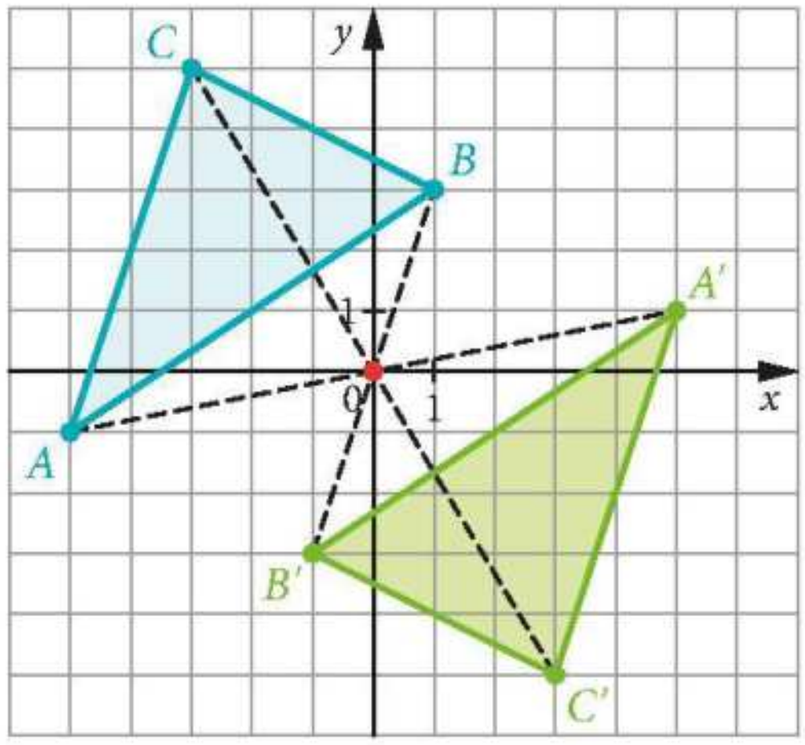
$$\begin{cases} \dfrac{x'+x}{2}=0 \\ \dfrac{y'+y}{2}=0 \end{cases} \longleftarrow \text{współrzędne środka odcinka}$$

czyli $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$



Przykład 4 ◀ zad. 6.10

Trójkąt o wierzchołkach $A=(-5,-1)$, $B=(1,3)$, $C=(-3,5)$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wyznaczymy współrzędne wierzchołków obrazu trójkąta ABC w tej symetrii i narysujemy obydwa trójkąty w układzie współrzędnych.



Rozwiązanie

Niech A', B', C' oznaczają odpowiednio wierzchołki obrazu trójkąta ABC w tym przekształceniu. Zatem zgodnie z podanymi wzorami mamy:

$$A'=(5,\ 1),\ B'=(-1,\ -3),\ C'=(3,\ -5)$$

Na rysunku przedstawiamy ilustrację graficzną rozwiązania.

Przykład 5 ◂ zad. 6.11

Wyznaczymy obraz prostej $k\colon y = 2x - 3$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Obrazem prostej jest prosta, zatem należy:

Krok 1: Wybrać dwa dowolne punkty A i B należące do prostej k.

Krok 2: Przekształcić punkty A i B przez symetrię środkową względem punktu $(0, 0)$, aby otrzymać punkty A' i B'.

Krok 3: Wyznaczyć równanie prostej k' przechodzącej przez punkty A' i B'.

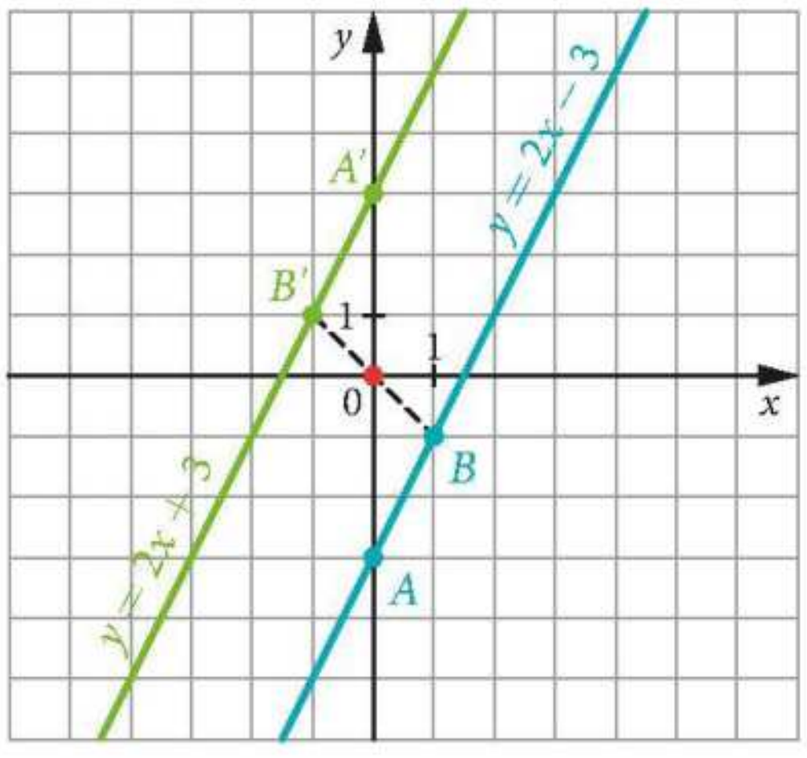
Wykonujemy kolejne kroki.

1. $A = (0, -3) \in k$ i $B = (1, -1) \in k$
2. $A' = (0, 3)$, $B' = (-1, 1)$
3. $k'\colon y = ax + b$, zatem:

$$\begin{cases} 3 = b \\ 1 = -a + b \end{cases} \longleftarrow A' = (0, 3) \in k' \text{ i } B' = (-1, 1) \in k'$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

$k'\colon y = 2x + 3$



Odp.: Obrazem prostej $k\colon y = 2x - 3$ jest prosta $k'\colon y = 2x + 3$.

Zauważmy, że obrazem prostej w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest prosta do niej równoległa.
Zapiszemy to spostrzeżenie w postaci twierdzenia, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

W symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych obrazem prostej $k\colon y = ax + b$ jest równoległa do niej prosta $k'\colon y = ax - b$.

Zadania

6.1. Narysuj dowolny trójkąt. Przekształć go przez symetrię względem środka jednego z boków. Jaką figurę tworzą oba trójkąty?

6.2. Czy prosta jest figurą środkowosymetryczną? Jeżeli tak, to ile ma środków symetrii?

6.3. Czy dana figura ma środek symetrii?

a) kąt

b) trapez prostokątny

c) suma trzech prostych równoległych

d) suma dwóch odcinków równoległych, rozłącznych i jednakowej długości

6.4. Przerysuj figurę F, a następnie uzupełnij ją jednym punktem tak, aby otrzymana figura miała środek symetrii. Ile odpowiedzi ma to zadanie?

a)



F

b)

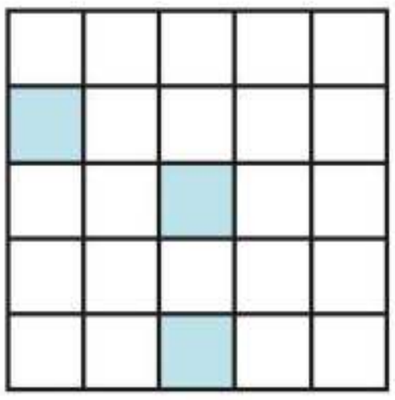
F

6.5. Trójkąt ABC przekształcono symetrycznie względem środka boku BC i otrzymano figurę, która wraz z trójkątem ABC utworzyła kwadrat. Jakim trójkątem jest trójkąt ABC?

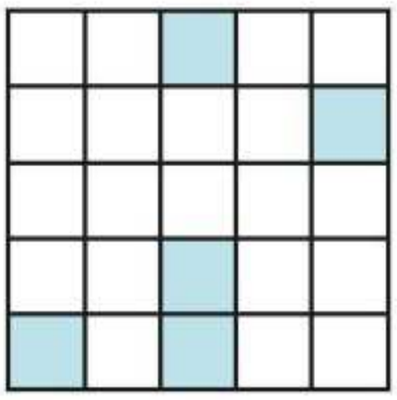
6.6. Dany jest okrąg O_1 i prosta sieczna l nieprzechodząca przez jego środek. Narysuj taki okrąg O_2, aby figura będąca sumą okręgów O_1, O_2 oraz prostej l miała środek symetrii.

6.7. Ile co najmniej kratek trzeba zamalować, żeby otrzymać figurę środkowosymetryczną?

a)



b)



6.8. Podaj współrzędne obrazów punktów:

$A = (-5, 4)$, $B = (7, -2)$, $C = \left(-\sqrt{3}, -5\right)$, $D = \left(-6, \sqrt{5}\right)$

w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

6.9. Wyznacz współrzędne środka symetrii odcinka PQ.

a) $P = (3, -2)$, $Q = (-5, 6)$

b) $P = (-3, 7)$, $Q = (3, -1)$

c) $P = \left(2\frac{1}{2}, -3\right)$, $Q = \left(5\frac{1}{2}, 9\right)$

d) $P = \left(-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Q = \left(3\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$

6.10. Trójkąt o wierzchołkach $A = (-6, -2)$, $B = (-1, -4)$, $C = (-4, 2)$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków obrazu tego trójkąta i narysuj obydwa trójkąty w układzie współrzędnych.

6.11. Napisz równanie obrazu danej prostej po przekształceniu jej przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych.

a) $y = 3x - 4$
b) $y = \sqrt{2}x + 11$
c) $y = -0{,}3x - \sqrt{7}$
d) $x - 15 = 0$
e) $8x - 3y + 5 = 0$
f) $9x + \sqrt{11}y - 3\sqrt{2} = 0$

6.12. Trójkąt, którego boki zawarte są w prostych o równaniach $2x - 5y - 6 = 0$, $3x - y + 4 = 0$ oraz $5x + 7y - 54 = 0$, przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków obrazu tego trójkąta.

6.13. Na płaszczyźnie kartezjańskiej narysuj okrąg $(x-4)^2 + (y+6)^2 = 9$, następnie przekształć go przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych i napisz równanie otrzymanego okręgu.

6.14. Okrąg o środku w punkcie S i promieniu r przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Napisz równanie otrzymanego okręgu.

a) $S = (-2, 3)$, $r = 5$
b) $S = \left(0, -\sqrt{5}\right)$, $r = 1$
c) $S = (-4, -2)$, $r = \sqrt{2}$
d) $S = (7, -8)$, $r = 3\sqrt{5}$

6.15. Napisz równanie okręgu otrzymanego w wyniku przekształcenia okręgu o podanym równaniu przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych.

a) $(x-8)^2 + (y+4)^2 = 2$
b) $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 7$
c) $(x+11)^2 + (y+0{,}1)^2 = 9$
d) $\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y+2)^2 = \sqrt{2}$

6.16. Okrąg K_1 jest obrazem okręgu K w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Napisz równanie okręgu K.

a) $K_1\colon (x+4)^2 + (y+17)^2 = 5$
b) $K_1\colon \left(x - \sqrt{7}\right)^2 + (y-7)^2 = 3$
c) $K_1\colon (x+1)^2 + (y-11)^2 = 2$
d) $K_1\colon (x-3)^2 + (y+0{,}2)^2 = 13$

6.17. Punkty $A = (-1, -4)$, $B = (5, 0)$ i $C = (2, 1)$ przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych i otrzymano odpowiednio punkty A', B', C'. Wyznacz współrzędne środka ciężkości trójkąta $A'B'C'$.

D * **6.18.** Udowodnij, że trójkąt o wierzchołkach $A = (-3, 2)$, $B = \left(3, 2\sqrt{3} + 2\right)$, $C = \left(3, 2 - 2\sqrt{3}\right)$ jest równoboczny. Napisz równanie okręgu symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu opisanego na tym trójkącie.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Trójkąt $A'B'C'$ jest obrazem trójkąta o wierzchołkach $A = (-3, -1)$, $B = (2, 6)$, $C = (-2, 4)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wskaż środek ciężkości trójkąta $A'B'C'$.

A. $\left(1, -\frac{11}{2}\right)$ **B.** $(1, -3)$ **C.** $(3, -9)$ **D.** $(0, -3)$

2. Okrąg o równaniu $(x-1)^2+(y-4)^2 = 9$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

A. $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$
B. $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$
C. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$
D. $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$

3. Okrąg o równaniu $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$ jest obrazem okręgu F w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wskaż równanie okręgu F.

A. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$
B. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$
C. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$
D. $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$

4. Figurę F tworzą: odcinek AB oraz punkty C i D nienależące do tego odcinka. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Figura F

A. ma zawsze dokładnie jeden środek symetrii.
B. ma środek symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, B, C, D są wierzchołkami równoległoboku.
C. może mieć nieskończenie wiele środków symetrii.

5. Napisz równanie obrazu prostej $2x - 4y + 5 = 0$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

6. Punkty $A = (1, -5)$, $B = (3, 1)$ i $C = (-4, 7)$ przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych i otrzymano odpowiednio punkty A', B', C'. Wyznacz współrzędne środka ciężkości trójkąta $A'B'C'$.

7. Punkt $A = (-5, 2)$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych i otrzymano punkt A_1. Punkt $B_1 = (2, 3)$ jest obrazem punktu B w tym samym przekształceniu. Podaj współrzędne punktów A_1 i B oraz oblicz pole czworokąta ABA_1B_1.

7. Symetria osiowa

Umiejętności:

- wyznaczanie osi symetrii w figurach osiowosymetrycznych
- wyznaczanie obrazu figur w symetrii osiowej na płaszczyźnie
- wyznaczanie obrazu okręgu lub wielokąta w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych
- stosowanie poznanych twierdzeń w zadaniach wieloetapowych

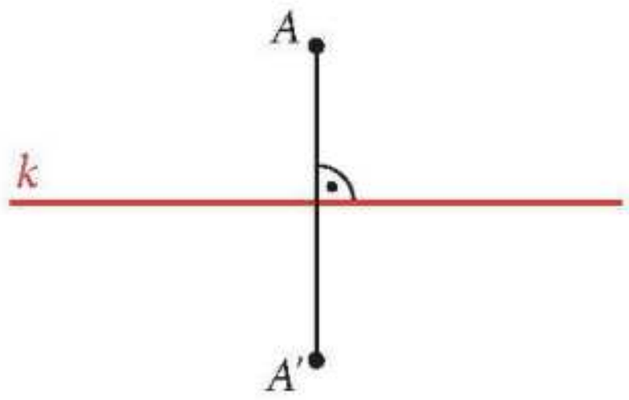
Symetria osiowa, podobnie jak symetria środkowa, była omawiana w szkole podstawowej. Powtórzymy własności tego przekształcenia, a następnie omówimy jego działanie na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Symetria osiowa na płaszczyźnie

Przypomnijmy:

Punkty A i A' są **symetryczne względem prostej** k, gdy odcinek AA' jest prostopadły do k i jego środek należy do k.

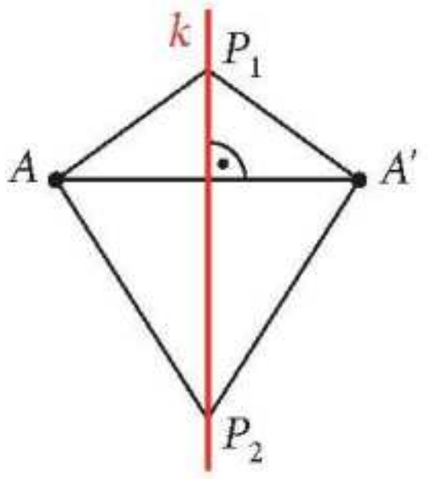
Prostą k nazywamy **osią symetrii** punktów A i A'.



Jeżeli punkt A' jest symetryczny do punktu A względem prostej k, to również punkt A jest symetryczny do punktu A' względem prostej k.

Jeżeli punkt A leży na prostej k, to $A' = A$.

Zauważmy, że oś symetrii punktów A i A' jest symetralną odcinka AA'. Jest zatem zbiorem punktów równo oddalonych od jego końców. Tę własność symetralnej wykorzystujemy do konstrukcji punktu A' symetrycznego do punktu A względem prostej k:



Krok 1: Z dowolnego punktu P_1 prostej k zataczamy okrąg o promieniu $|P_1A|$.

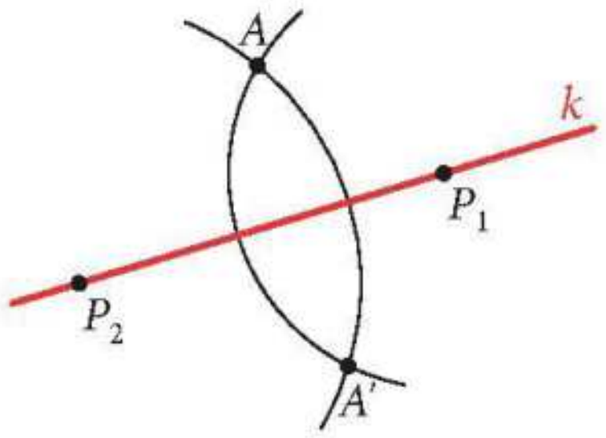
$$|P_1A| = |P_1A'|$$

Krok 2: Z dowolnego punktu P_2 $(P_2 \neq P_1)$ prostej k zataczamy okrąg o promieniu $|P_2A|$.

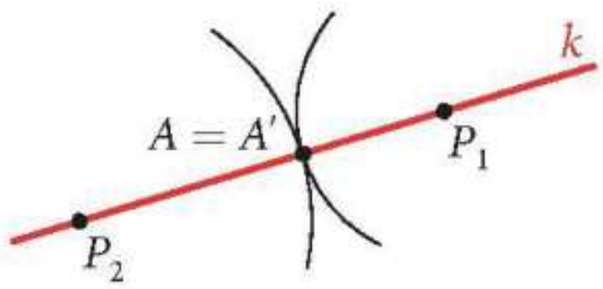
$$|P_2A| = |P_2A'|$$

Krok 3: Jeżeli punkt A nie leży na prostej k, to poprowadzone okręgi przecinają się w dwóch punktach. Jednym z nich jest punkt A, a drugim szukany punkt A' (rys. 1).

Jeżeli punkt A leży na prostej k, to $A' = A$ (rys. 2).



Rys. 1

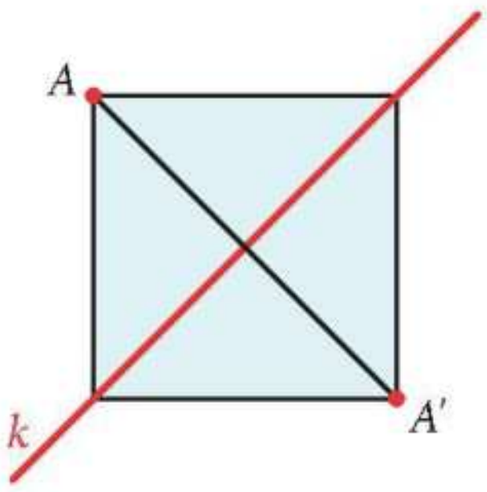


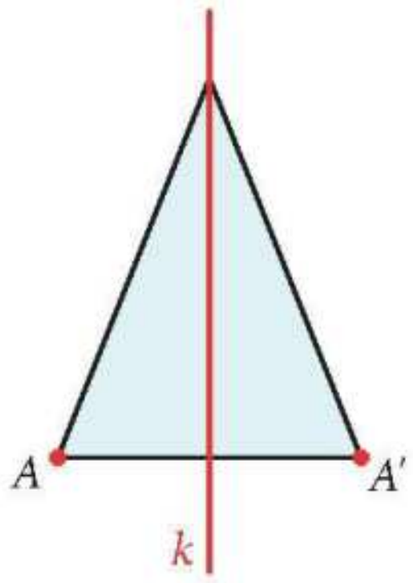
Rys. 2

Przykład 1

a) Przeciwległe wierzchołki kwadratu są symetryczne względem prostej zawierającej tę przekątną kwadratu, do której nie należą.

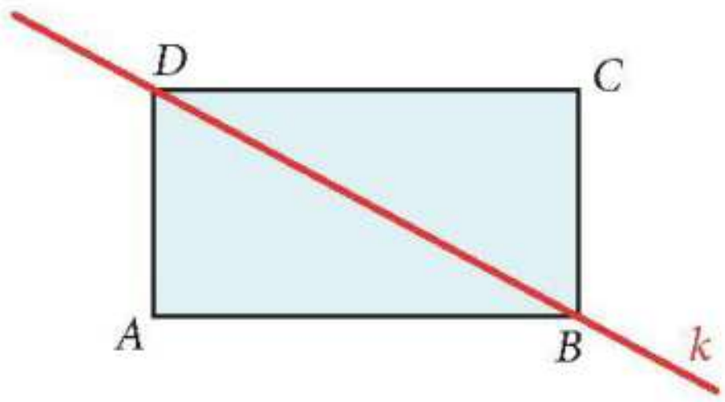
b) Końce podstawy trójkąta równoramiennego są symetryczne względem prostej zawierającej wysokość opuszczoną z trzeciego wierzchołka tego trójkąta.





Przykład 2

Wierzchołki prostokąta, który nie jest kwadratem, **nie są** symetryczne względem prostej zawierającej przekątną.



W przypadku symetrii środkowej wyróżniliśmy figury mające środek symetrii. Teraz zajmiemy się figurami mającymi oś symetrii.

Definicja

Prostą k nazywamy **osią symetrii figury** F, jeżeli dla każdego punktu A należącego do F punkt A' symetryczny do A względem k też należy do F.
Figurę F nazywamy **osiowosymetryczną**.

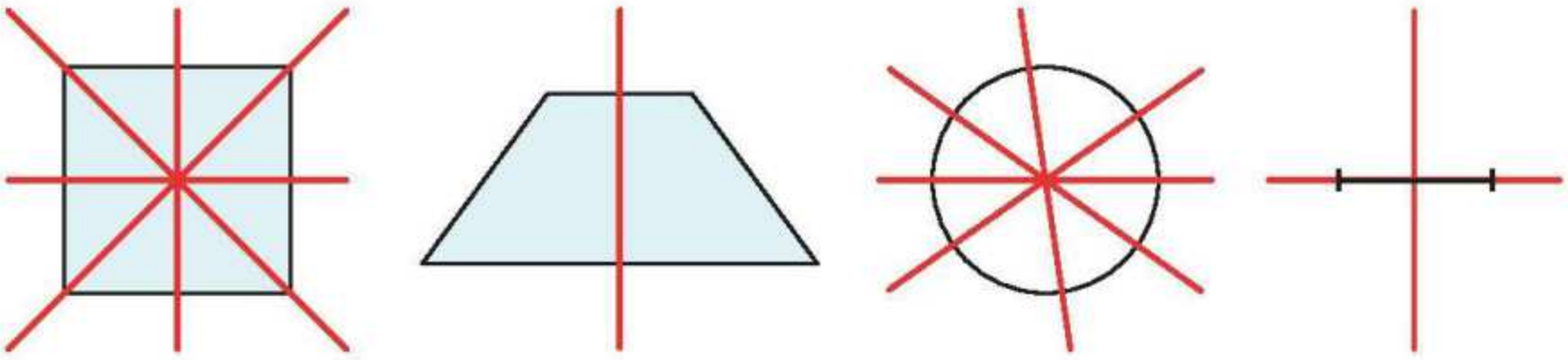
Przykład 3 ◂ zad. 7.1, 7.2

a) Kwadrat jest figurą osiowosymetryczną. Ma cztery osie symetrii.

b) Trapez równoramienny różny od równoległoboku ma jedną oś symetrii.

c) Okrąg ma nieskończenie wiele osi symetrii – jest nią każda prosta przechodząca przez jego środek.

d) Odcinek ma dwie osie symetrii. Jedną z nich jest prosta, w której ten odcinek się zawiera, a drugą – jego symetralna.

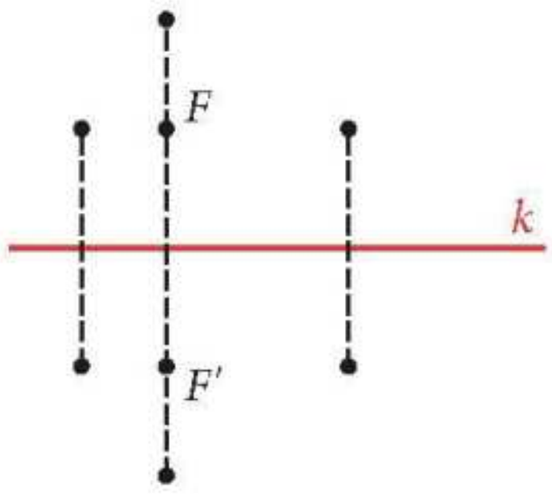


Przekształcenie płaszczyzny, które każdemu jej punktowi P przyporządkowuje punkt P' symetryczny do P względem ustalonej prostej k, nazywamy **symetrią osiową o osi** k.

Przykład 4 ◂ zad. 7.6

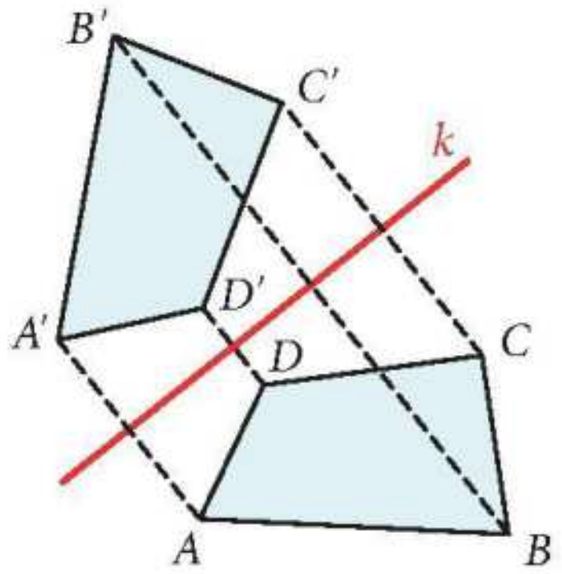
Dana jest figura F i prosta k. Wyznaczymy figurę F', która jest obrazem figury F w symetrii o osi k.

a) Figura F składa się ze skończonej liczby punktów.
Aby otrzymać figurę F', przekształcamy przez symetrię względem prostej k każdy z tych punktów.

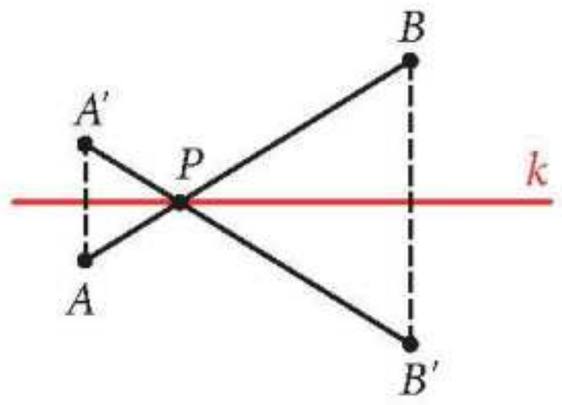


b) Figura F jest czworokątem $ABCD$.
Zauważmy, że obrazem:

- wierzchołka czworokąta $ABCD$ jest wierzchołek czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu leżącego na brzegu czworokąta $ABCD$ jest punkt należący do brzegu czworokąta $A'B'C'D'$,
- punktu wewnętrznego czworokąta $ABCD$ jest punkt wewnętrzny czworokąta $A'B'C'D'$.



c) Figura F jest odcinkiem AB przecinającym prostą k.
Obrazem odcinka AB jest odcinek $A'B'$.
Odcinki AB i $A'B'$ przecinają się w punkcie P leżącym na osi symetrii k. Jest to punkt, który w wyniku symetrii został przekształcony sam na siebie – czyli punkt stały tego przekształcenia.



Symetria osiowa względem prostej k ma nieskończenie wiele punktów stałych – każdy punkt prostej k jest punktem stałym tego przekształcenia.
Figury: F i jej obraz F' w symetrii osiowej **są przystające**. Oznacza to, że obrazem odcinka jest odcinek o tej samej długości, obrazem prostej – prosta, kąta – kąt o tej samej mierze, okręgu o promieniu r – okrąg o promieniu r, trójkąta ABC – przystający do niego trójkąt $A'B'C'$ itd.

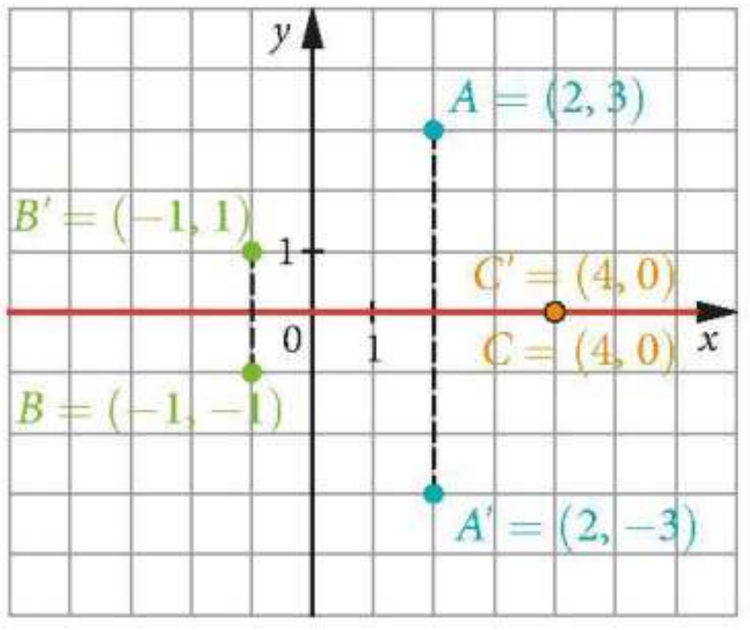
Symetria osiowa względem osi x

Płaszczyznę kartezjańską można przekształcić przez symetrię osiową względem dowolnej prostej. Ograniczymy się jednak do omówienia dwóch sytuacji, w których osią symetrii jest jedna z osi układu współrzędnych. Zaczniemy od osi x.

Przyjrzyjmy się rysunkowi.

Punkty położone symetrycznie względem osi x mają identyczne pierwsze współrzędne, natomiast ich drugie współrzędne są liczbami przeciwnymi. Wynika to wprost z własności prostokątnego układu współrzędnych. Zatem jeśli $P' = (x', y')$ oznacza obraz punktu $P = (x, y)$ w symetrii względem osi x, to:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



Przykład 5 ◀ zad. 7.10

Wyznaczymy równanie obrazu okręgu $(x+1)^2+(y-2)^2=16$ w symetrii osiowej względem osi x.

Rozwiązanie

Dany okrąg ma środek $S=(-1, 2)$ i promień $r=4$. Wiemy, że obrazem okręgu w tym przekształceniu jest figura do niego przystająca, czyli okrąg o takim samym promieniu.

Przyjmijmy, że S' oznacza środek, a r' – promień okręgu po przekształceniu.

$S'=(-1, -2)$
$r'=r=4$

Odp.: $(x+1)^2+(y+2)^2=16$

Przykład 6

Okrąg o równaniu $\left(x+\sqrt{3}\right)^2+(y-4)^2=7$ powstał w wyniku przekształcenia pewnego okręgu przez symetrię względem osi x. Jaki okrąg został przekształcony?

Rozwiązanie

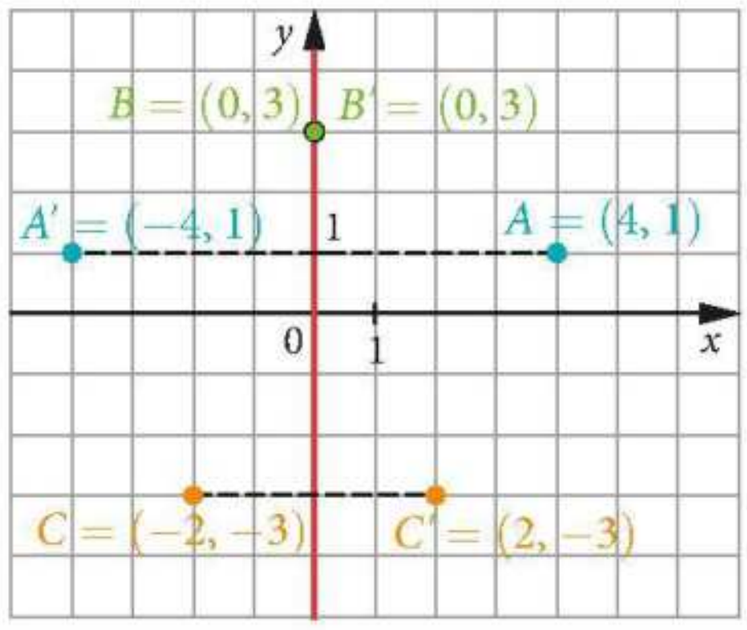
Szukany okrąg ma środek $S=(x, y)$ i promień r.
Jeśli S' oznacza środek, a r' – promień okręgu po przekształceniu, to:

$S'=\left(-\sqrt{3}, 4\right)$, zatem $S=\left(-\sqrt{3}, -4\right)$
$r'=r=\sqrt{7}$

Odp.: $\left(x+\sqrt{3}\right)^2+(y+4)^2=7$

Symetria osiowa względem osi y

Przyjrzyjmy się rysunkowi.



Punkty położone symetrycznie względem osi y mają identyczne drugie współrzędne, natomiast ich pierwsze współrzędne są liczbami przeciwnymi. Wynika to wprost z własności prostokątnego układu współrzędnych. Zatem jeśli $P'=\left(x', y'\right)$ oznacza obraz punktu $P=(x, y)$ w symetrii względem osi y, to:

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$$

Przykład 7 ◀ zad. 7.11

Wyznaczymy równanie obrazu okręgu $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ w symetrii osiowej względem osi y.

Rozwiązanie

Dany okrąg ma środek $S=(3,\ 1)$ i promień $r=2$.

Przyjmijmy, że S' oznacza środek, a r' – promień okręgu po przekształceniu.

$S'=(-3,\ 1)$

$r'=r=2$

Odp.: $(x+3)^2+(y-1)^2=4$

Zadania

7.1. Ile osi symetrii ma figura będąca sumą

a) prostej i okręgu? b) dwóch okręgów? c) dwóch prostych?

Rozważ różne możliwości.

7.2. Wskaż osie symetrii figury, która jest sumą

a) dwóch trójkątów równobocznych o wspólnym boku.

b) prostej i punktu nieleżącego na niej.

c) dwóch okręgów o różnych promieniach, stycznych zewnętrznie.

7.3. Narysuj dwa punkty: A i B. Wyznacz taki punkt C, aby figura składająca się z punktów A, B, C

a) miała jedną oś symetrii.

b) miała dwie osie symetrii.

c) nie miała osi symetrii.

7.4. Narysuj trzy niewspółliniowe punkty: A, B, C. Wyznacz taki punkt D, aby figura składająca się z punktów A, B, C, D miała oś symetrii. Przy jakim położeniu punktów A, B, C, D figura $\{A, B, C, D\}$ ma dwie osie symetrii?

7.5. Narysuj dwie proste: a i b spełniające podany warunek, a następnie dorysuj taką prostą c, aby figura będąca sumą tych trzech prostych miała oś symetrii. Ile jest takich prostych?

a) a, b są równoległe b) a, b przecinają się

7.6. Dana jest figura F i prosta k. Wyznacz obraz figury F w symetrii o osi k.

a) F – kwadrat, k – prosta zawierająca jeden z boków tego kwadratu

b) F – równoległobok, k – prosta zawierająca dłuższą przekątną tego równoległoboku

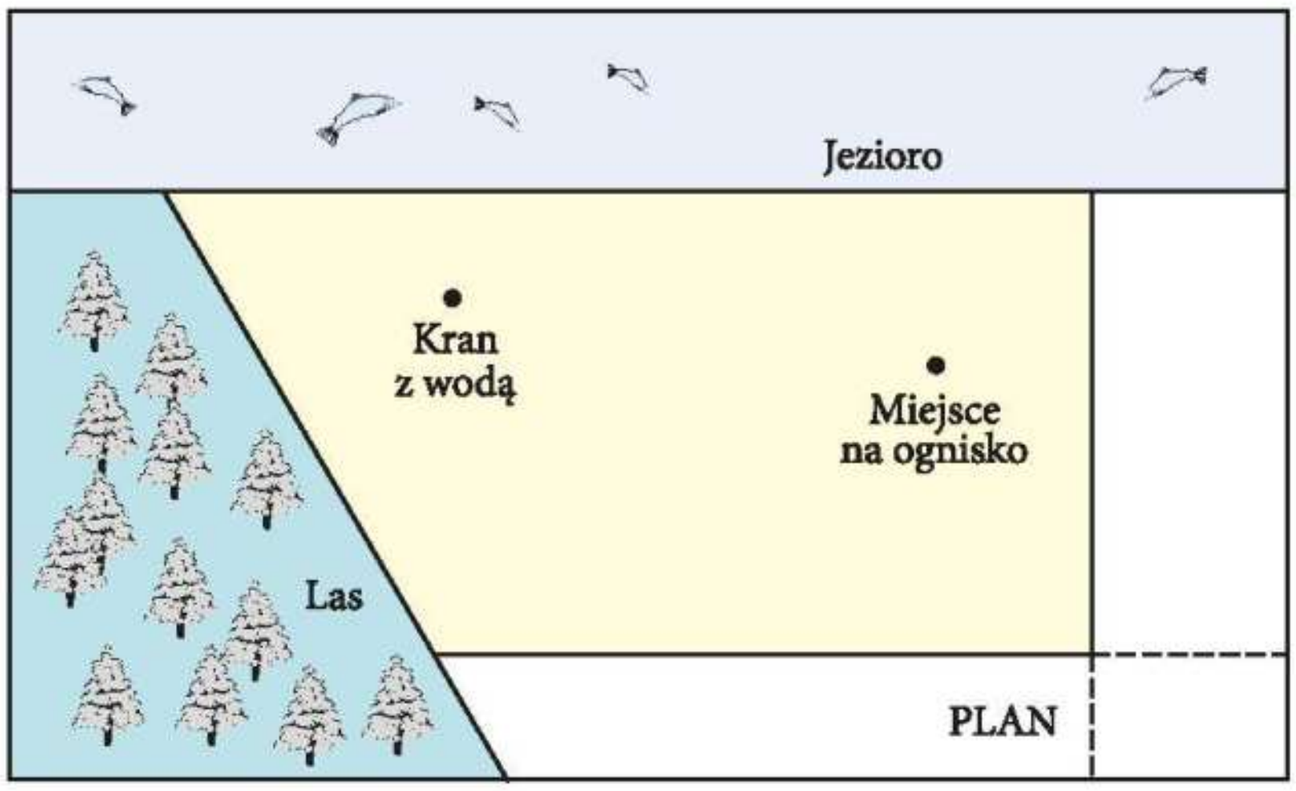
c) F – okrąg, k – prosta zawierająca cięciwę tego okręgu

d) F – suma dwóch prostych równoległych, k – prosta przecinająca te dwie proste

e) F – trapez równoramienny, k – prosta prostopadła do ramienia tego trapezu i przechodząca przez wierzchołek jego kąta rozwartego

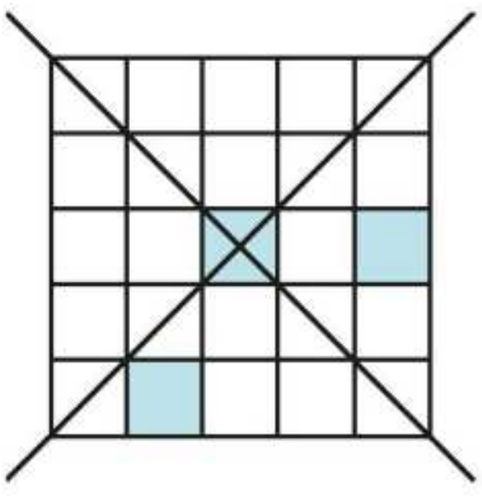
f) F – trójkąt równoramienny, k – prosta przechodząca przez środek podstawy tego trójkąta i prostopadła do jednego z jego ramion

7.7. Poniżej przedstawiony jest plan pola namiotowego na Mazurach. Michał i Bartek chcą rozbić na tym polu namiot. Michał upiera się, by namiot stał w tej samej odległości od kranu z wodą i od ogniska. Bartkowi zależy na tym, by mieć jednakowo blisko do lasu i do jeziora. Gdzie powinni rozbić namiot?

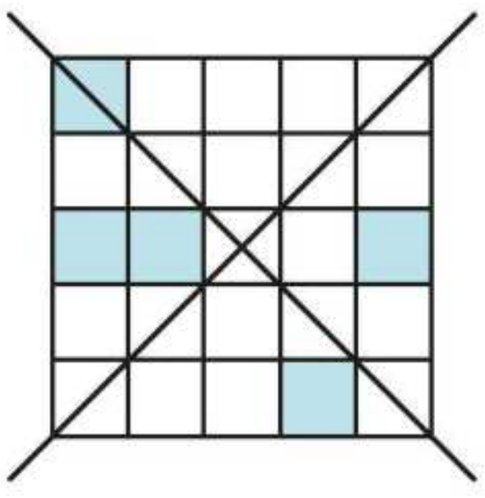


7.8. Ile co najwyżej kratek nie będzie zamalowanych, jeżeli uzupełnimy rysunek tak, aby obydwie przekątne były osiami symetrii otrzymanej figury?

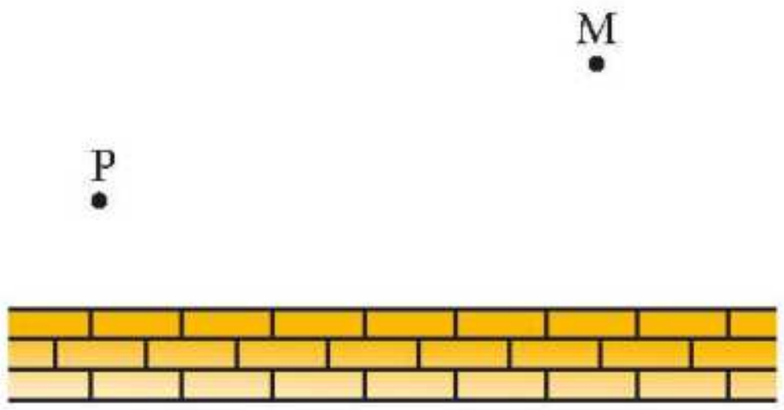
a)



b)



7.9. Paweł chce kopnąć piłkę tak, by odbiła się od muru i trafiła do Marcina. W jakim kierunku powinien ją kopnąć?



7.10. Okrąg o podanym równaniu przekształcono przez symetrię osiową względem osi x. Napisz równanie otrzymanego okręgu.

a) $(x-9)^2+(y+11)^2=1$

b) $\left(x-1+\sqrt{2}\right)^2+y^2=8$

c) $x^2+\left(y-2-\sqrt{5}\right)^2=7$

d) $x^2+\left(y+1-3\sqrt{6}\right)^2=9$

7.11. Okrąg o podanym równaniu przekształcono przez symetrię osiową względem osi y. Napisz równanie otrzymanego okręgu.

a) $(x+3)^2+(y-13)^2=12$

b) $x^2+\left(y-7+\sqrt{11}\right)^2=6$

c) $\left(x+5-\sqrt{3}\right)^2+y^2=18$

d) $(x+0{,}4)^2+\left(y-1-2\sqrt{7}\right)^2=16$

7.12. Obrazem okręgu K w symetrii f jest okrąg K_1. Napisz równanie okręgu K.

a) $K_1\colon (x-3)^2+(y+17)^2=10$, f – symetria środkowa względem początku układu współrzędnych

b) $K_1\colon (x+13)^2+(y-10)^2=15$, f – symetria osiowa względem osi x

c) $K_1\colon (x-14)^2+(y+16)^2=17$, f – symetria osiowa względem osi y

7.13. Punkty $A'=(2,4)$, $B'=(-6,6)$, $C'=(0,-8)$ są obrazami wierzchołków trójkąta ABC w symetrii osiowej względem osi x.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Punkty $P=(-3,1)$, $Q=(1,2)$, $R=(-2,-5)$ są środkami boków trójkąta ABC.

B. Środkiem ciężkości trójkąta ABC jest punkt $S=\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$.

C. Środkowa trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka A ma długość $\sqrt{17}$.

7.14. Punkty $A=(-3,6)$, $B=(3,-1)$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi x i otrzymano odpowiednio punkty A_1 i B_1. Oblicz pole czworokąta AA_1BB_1.

7.15. Okrąg o równaniu $(x-4)^2+(y+7)^2=18$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi x.

D a) Wykaż, że punkt $A=(1,4)$ leży na otrzymanym okręgu.

b) Napisz równanie stycznej do otrzymanego okręgu poprowadzonej w punkcie A.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Trójkąt $A'B'C'$ jest obrazem trójkąta o wierzchołkach $A = (3, 2)$, $B = (-3, 6)$, $C = (-6, 1)$ w symetrii osiowej względem osi y. Wskaż środek ciężkości trójkąta $A'B'C'$.

A. $(-2, 3)$ **B.** $(-2, -3)$ **C.** $(2, -3)$ **D.** $(2, 3)$

2. Okrąg o równaniu $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi x. Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

A. $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 9$
B. $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 9$
C. $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$
D. $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$

3. Okrąg o równaniu $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi y. Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

A. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$
B. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$
C. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$
D. $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 5$

4. Po przekształceniu okręgu F przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych otrzymano okrąg F'. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Figura będąca sumą okręgów F i F'
A. ma zawsze dokładnie dwie osie symetrii.
B. może mieć tylko jedną oś symetrii.
C. może mieć nieskończenie wiele osi symetrii.

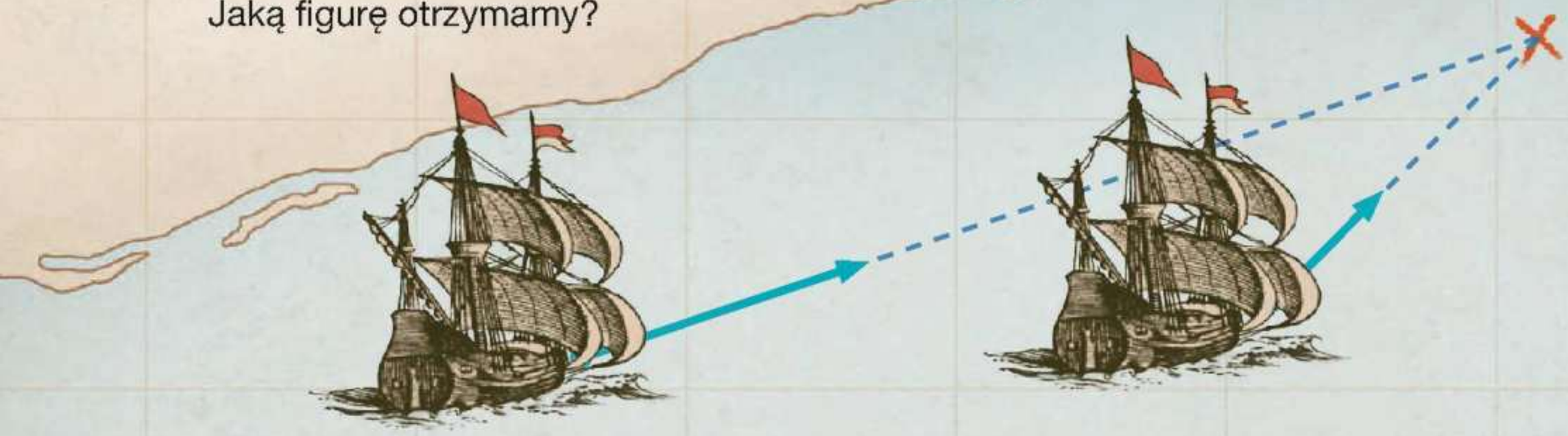
5. Punkt $A = (-4, 3)$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi x i otrzymano punkt A_1, a punkt $B = (-1, -2)$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych i otrzymano punkt B_1. Podaj współrzędne punktów A_1 i B_1 oraz oblicz pole czworokąta AA_1BB_1.

6. Trójkąt ABC ograniczony prostymi $2x - y + 6 = 0$, $x - y = 0$, $x - 2 = 0$ odbito symetrycznie względem osi y. Wyznacz współrzędne wierzchołków wielokąta będącego częścią wspólną trójkąta ABC i jego obrazu. Oblicz pole tego wielokąta.

7. Okrąg o środku $S = (2, -3)$ i promieniu $r = 4$ przekształcono symetrycznie względem osi x i otrzymano okrąg o środku S_1. Okręgi o środkach S i S_1 przecinają się w punktach A i B. Oblicz pole czworokąta SAS_1B.

Okrąg Apoloniusza

Na kartce zaznaczamy dwa różne punkty. Są to dwa statki. Oba mogą się poruszać tylko po prostej, w dowolnym kierunku, każdy z inną stałą prędkością. Szybszy statek goni wolniejszy. Naszym zadaniem jest zaznaczenie na kartce wszystkich punktów, w których statki mogą się spotkać. Jaką figurę otrzymamy?



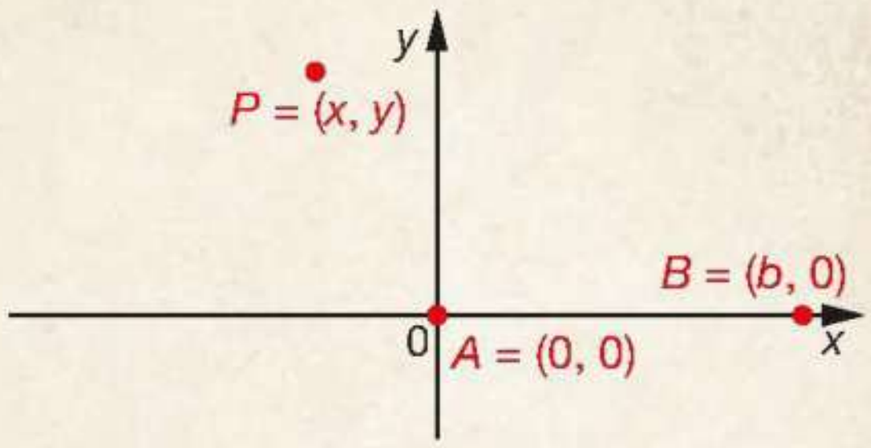
Ta zagadka przedstawia problem matematyczny rozważany przez **Apoloniusza z Pergi**:

Dane są punkty A i B na płaszczyźnie oraz dodatnia stała $k \neq 1$. Jaką figurę na płaszczyźnie tworzą punkty P, których stosunek odległości od A i B jest stały i równy k ($\frac{|AP|}{|BP|} = k$)?

Postawiony problem rozwiążemy dwoma sposobami.

Sposób I (odległość w układzie współrzędnych)

Wprowadźmy układ współrzędnych jak na rysunku. Oznaczmy $B = (b, 0)$. Szukamy punktów $P = (x, y)$ takich, że $|AP| = k \cdot |BP|$ dla danego $k > 0$, $k \neq 1$.



Mamy:

$$|AP| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2},\ |BP| = \sqrt{(x-b)^2 + (y-0)^2}$$

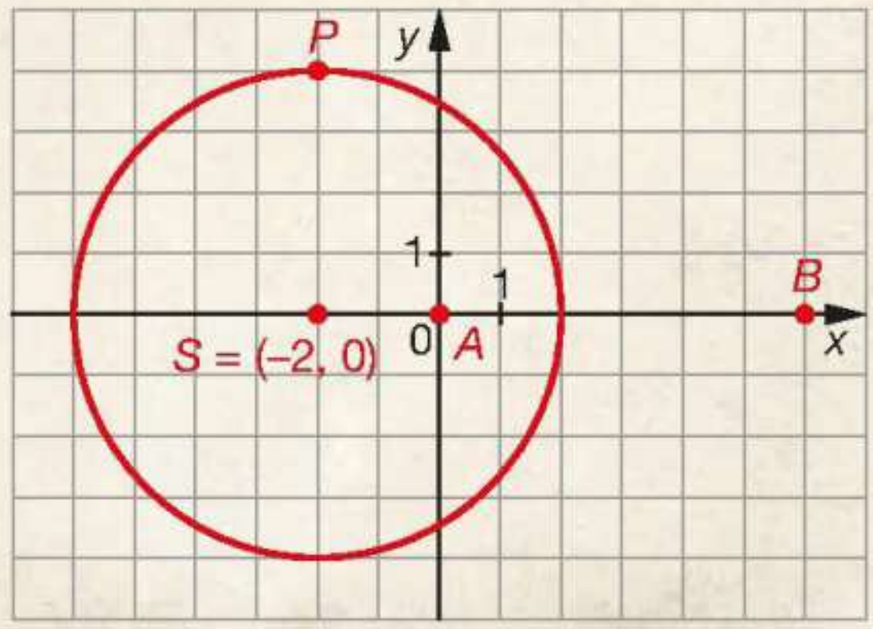
Warunek $|AP| = k \cdot |BP|$ zapisujemy w postaci:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = k \cdot \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu i wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy:

$$\left(x + \frac{bk^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2k^2}{(1-k^2)^2}$$

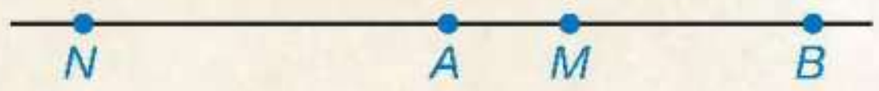
Jest to równanie okręgu o środku w punkcie $\left(-\frac{bk^2}{1-k^2}, 0\right)$ i promieniu $\left|\frac{bk}{1-k^2}\right|$. Okrąg ten tworzą punkty P spełniające warunek podany w zadaniu. Rozwiązanie dla $k = \frac{1}{2}$, $b = 6$ pokazano na rysunku obok.



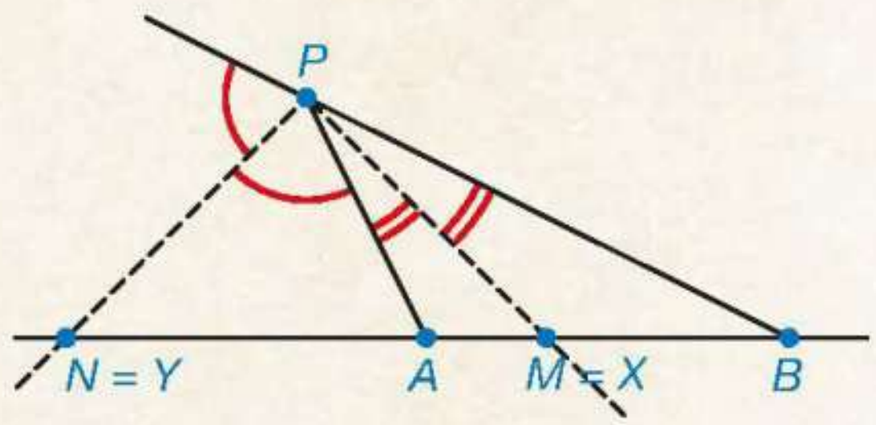
Sposób II (twierdzenie o dwusiecznej)

Zauważmy, że dwa spośród szukanych punktów leżą na prostej AB; na rysunku oznaczono je M i N. Mamy:

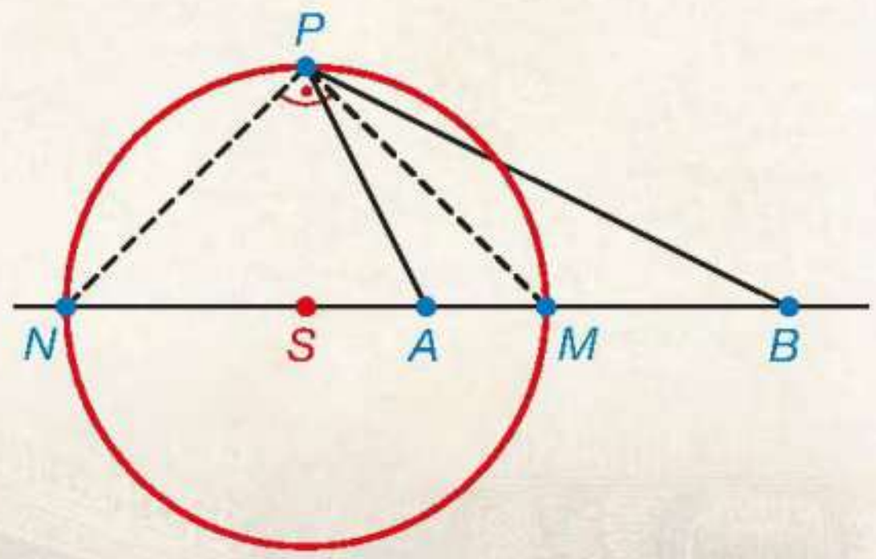
$$\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{|AN|}{|BN|} = k$$



Teraz rozważmy dowolny punkt P leżący poza prostą AB i spełniający warunek $\frac{|AP|}{|BP|} = k$. Prowadzimy dwusieczne PX i PY odpowiednio kąta APB i kąta zewnętrznego przy wierzchołku P. Z twierdzenia o dwusiecznej mamy:



1. $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AP|}{|BP|} = k$. Zatem $X = M$.
2. $\frac{|AY|}{|BY|} = \frac{|AP|}{|BP|} = k$. Zatem $Y = N$.



Oznacza to, że kąt MPN jest prosty. To z kolei oznacza, że wszystkie punkty P wraz z punktami M i N tworzą okrąg o średnicy MN.

Okrąg Apoloniusza

Okrąg będący rozwiązaniem postawionego problemu jest nazywany **okręgiem Apoloniusza**.

Dla danych punktów A i B i różnych wartości k otrzymamy różne okręgi. Żadne dwa z nich się nie przecinają.



Wróćmy do zagadki ze statkami. Zauważmy, że jeżeli każdy z nich płynie ze stałą prędkością po linii prostej, to stosunek ich prędkości jest równy stosunkowi długości przebytych przez nie dróg, czyli odpowiednich odcinków. Dlatego jako rozwiązanie otrzymamy okrąg Apoloniusza.

8. Symetrie wielokątów

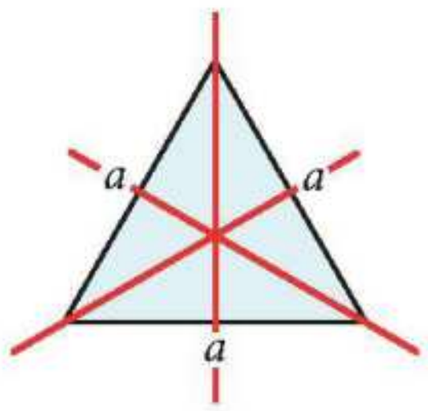
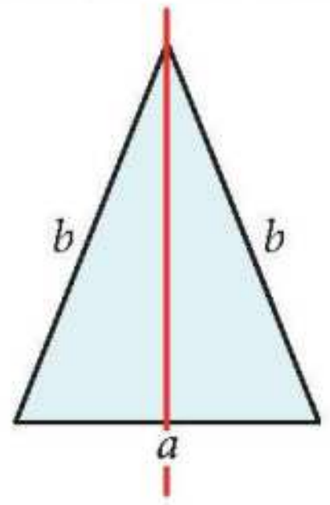
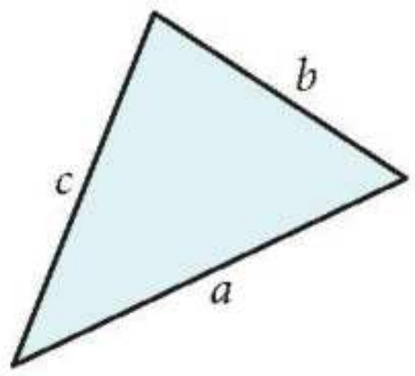
Umiejętności:

- klasyfikowanie figur ze względu na liczbę osi symetrii
- rozpoznawanie wielokątów foremnych
- stosowanie poznanych twierdzeń w zadaniach wieloetapowych

W tym temacie przypomnimy niektóre poznane wcześniej wiadomości dotyczące wielokątów. Następnie zbadamy, w jaki sposób można je wykorzystać, gdy wielokąt leży na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Osie symetrii trójkąta

Liczba osi symetrii może być wygodnym parametrem służącym do klasyfikacji figur. Podzielimy najpierw trójkąty ze względu na liczbę osi symetrii.

Liczba osi symetrii	3	1	0
Trójkąt	równoboczny 	równoramienny, ale nie równoboczny 	różnoboczny 

Nie jest możliwe, aby trójkąt miał dwie osie symetrii. Nie może też mieć więcej niż trzy osie symetrii.

Przykład 1 ◂ zad. 8.6

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (10, 4)$, $B = (-2, 3)$, $C = (2, -5)$. Wykażemy, że jest on równoramienny i napiszemy równanie jego osi symetrii.

Rozwiązanie

Obliczamy długości boków trójkąta ABC.

$$|AB| = \sqrt{12^2 + 1} = \sqrt{145}$$

$$|AC| = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$$

$$|BC| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$$

Zatem $|AB| = |AC| \neq |BC|$, czyli trójkąt ABC jest równoramienny i nie jest równoboczny. Ma więc tylko jedną oś symetrii. Jest nią prosta przechodząca przez wierzchołek A i środek podstawy BC – oznaczmy go literą M.

$$M = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{3-5}{2}\right) = (0, -1) \qquad \longleftarrow \text{współrzędne środka odcinka } BC$$

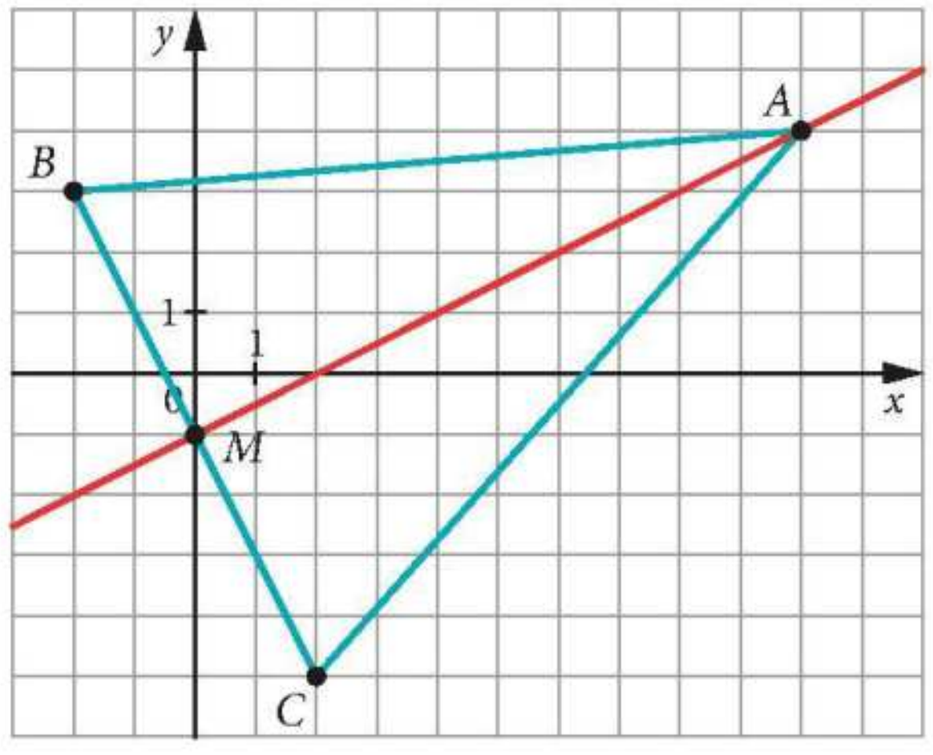
Prosta AM ma równanie kierunkowe $y = ax + b$ (punkty A i M mają różne pierwsze współrzędne) i jest szukaną osią symetrii:

$$\begin{cases} -1 = b \\ 4 = 10a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = b \\ 5 = 10a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = b \\ 0{,}5 = a \end{cases}$$

$$y = 0{,}5x - 1$$



Odp.: Trójkąt ABC jest równoramienny, a jego osią symetrii jest prosta $y = 0{,}5x - 1$.

Osie symetrii i środek symetrii czworokąta

Przejdźmy teraz do klasyfikacji czworokątów. Wygodnie jest zacząć od liczby par boków równoległych.

Czworokąty mające **dwie pary boków równoległych** – równoległoboki.

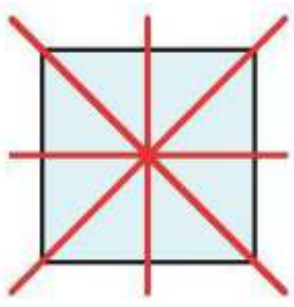
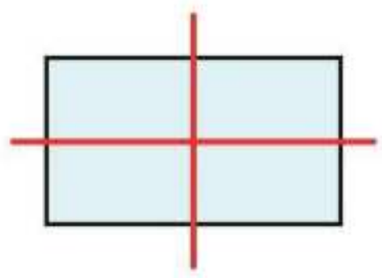
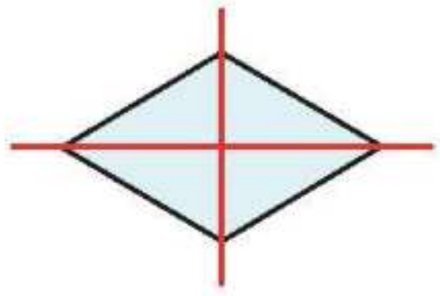
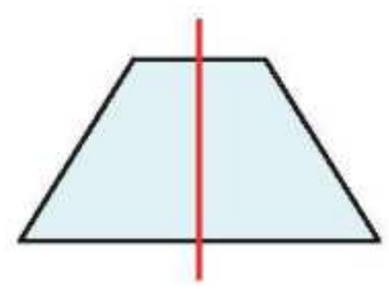
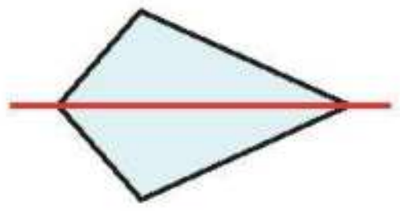
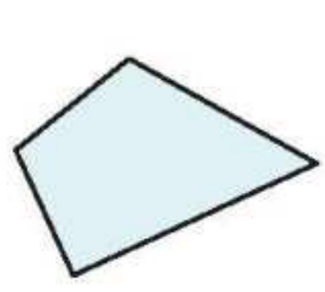
- Równoległobok nie musi mieć osi symetrii.
- Jeśli równoległobok ma **dwie** osie symetrii, to jest albo prostokątem (gdy osie symetrii przechodzą przez środki przeciwległych boków), albo rombem (gdy osie symetrii przechodzą przez wierzchołki).
- Jeśli równoległobok ma **cztery** osie symetrii, to jest kwadratem.

Czworokąty mające **co najmniej jedną parę boków równoległych** – trapezy.

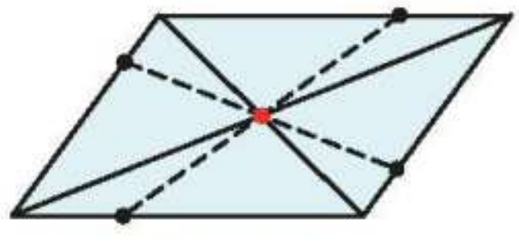
- Trapez nie musi mieć osi symetrii.
- Jeśli trapez ma **jedną** oś symetrii, to jest równoramienny.

Czworokąty niemające boków równoległych.

- Dowolny czworokąt nie ma osi symetrii.
- Jeśli czworokąt nie ma boków równoległych i ma **jedną** oś symetrii, to jest deltoidem.

Liczba osi symetrii	4	2	1	0
Czworokąt	kwadrat 	prostokąt  romb 	trapez równoramienny  deltoid 	dowolny czworokąt 

Obrazem odcinka w symetrii środkowej jest przystający do niego odcinek równoległy, więc wśród czworokątów tylko równoległoboki mają środek symetrii. Środkiem symetrii równoległoboku jest punkt przecięcia jego przekątnych.



Prawdziwe jest twierdzenie, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Czworokąt jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

Podsumujmy:

- Czworokąt może mieć: 0, 1, 2 lub 4 osie symetrii.
- Osie symetrii czworokąta przecinają się w jego środku symetrii.

D Przykład 2

Wykażemy, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach:

$A = (0, -1),\ B = (4, -3),\ C = (10, -1),\ D = (6, 1)$

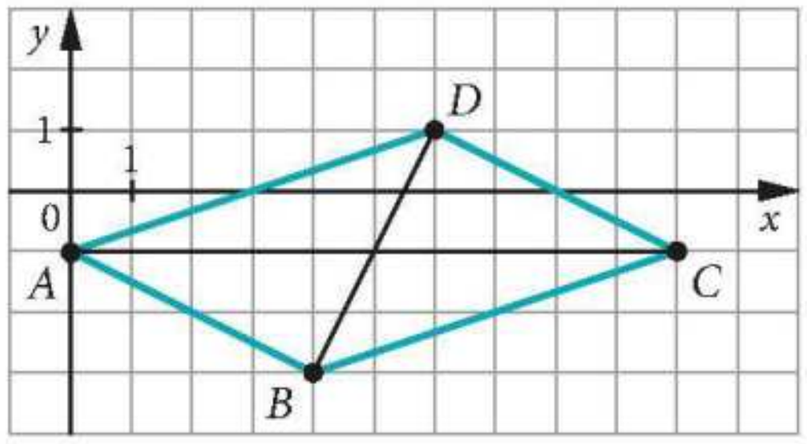
jest równoległobokiem i wyznaczymy jego środek symetrii.

Rozwiązanie

Czworokąt jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne mają wspólny środek.

Dowód

Przekątnymi czworokąta $ABCD$ są odcinki AC i BD. Wyznaczamy środki tych odcinków.



$$\left(\frac{10}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) = (5, -1) \quad \longleftarrow \text{środek odcinka } AC$$

$$\left(\frac{4+6}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (5, -1) \longleftarrow \text{środek odcinka } BD$$

Przekątne czworokąta $ABCD$ mają więc wspólny środek, czyli czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Jego środkiem symetrii jest punkt $(5, -1)$.

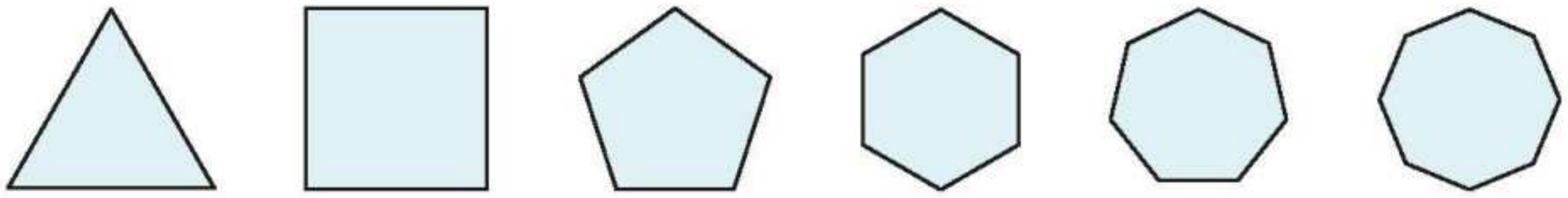
Koniec dowodu

Osie symetrii i środek symetrii wielokąta foremnego

Przypomnijmy pojęcie zdefiniowane w szkole podstawowej.

Definicja

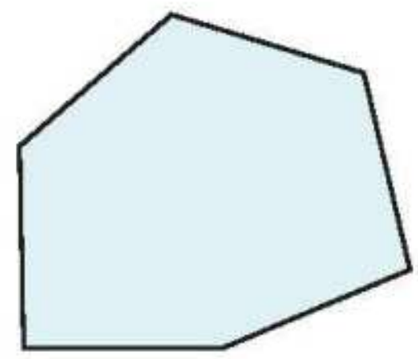
Wielokąt, którego wszystkie boki są równe i wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary, nazywamy **wielokątem foremnym**.



trójkąt równoboczny | kwadrat | pięciokąt foremny | sześciokąt foremny | siedmiokąt foremny | ośmiokąt foremny

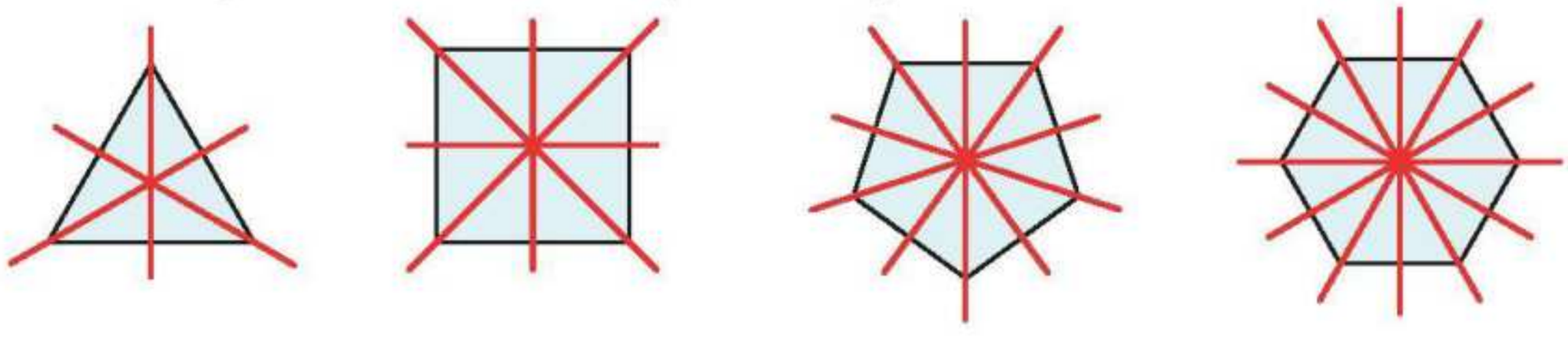
Przykład 3 ◀ zad. 8.13

Z faktu, że sześciokąt ma wszystkie boki równej długości, **nie wynika**, że jest on foremny.
Na rysunku pokazano przykład sześciokąta nieforemnego, którego boki są równej długości.



Przykład 4

Symetralna boku wielokąta foremnego jest jego osią symetrii. Dwusieczna kąta wielokąta foremnego zawiera się w osi symetrii tego wielokąta.



Zauważmy, że n-kąt foremny ($n \geqslant 3$) ma n osi symetrii.

Jeżeli wielokąt ma środek symetrii, to jego boki dają się połączyć w pary boków równoległych. Wynika stąd, że wielokąt wypukły o nieparzystej liczbie boków nie może być figurą środkowosymetryczną.

Wielokąty foremne są figurami wypukłymi.

Zatem n-kąt foremny ma środek symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą.

Przykład 5 ◀ zad. 8.15

Punkt $S = (-2, 1)$ jest środkiem symetrii sześciokąta $ABCDEF$ o danych trzech wierzchołkach: $A = (-4, -3)$, $B = (0, -2)$ i $C = (2, 3)$. Wyznaczymy pozostałe wierzchołki tego sześciokąta i obliczymy jego pole.

Rozwiązanie

Punkty D, E, F są końcami odcinków o środku S i początkach odpowiednio A, B, C.

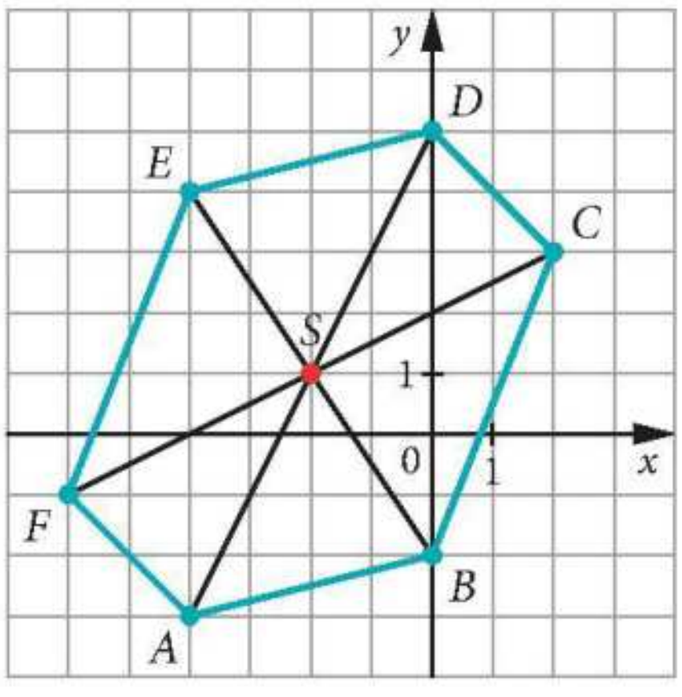
$$\begin{cases} \dfrac{x_D - 4}{2} = -2 \\ \dfrac{y_D - 3}{2} = 1 \end{cases}, \text{ stąd } D = (0, 5)$$

Podobnie wyznaczamy współrzędne wierzchołków $E = (-4, 4)$ oraz $F = (-6, -1)$.

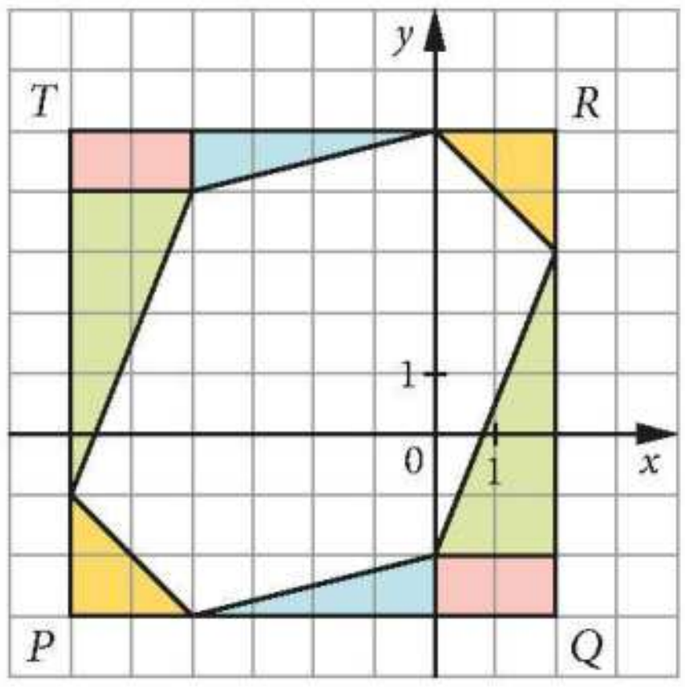
Rozwiązanie można również odczytać bezpośrednio z rysunku (rys. 1).

Pole P sześciokąta $ABCDEF$ najprościej obliczymy jako różnicę pola prostokąta $PQRT$ i sumy pól czterech prostokątów (zob. rys. 2, na którym tym samym kolorem zaznaczone są figury przystające).

$$P = 8 \cdot 8 - (2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5) = 64 - 22 = 42$$



Rys. 1



Rys. 2

Odp.: Pozostałe wierzchołki sześciokąta to: $D = (0, 5)$, $E = (-4, 4)$ i $F = (-6, -1)$, a jego pole wynosi 42.

Zadania

8.1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Przekątne równoległoboku są jego osiami symetrii.

B. Symetralne boków równoległoboku są jego osiami symetrii.

C. Środek jednej z przekątnych równoległoboku jest jego środkiem symetrii.

D. Przekątna dzieli równoległobok na dwa trójkąty przystające.

E. Symetralne boków prostokąta są jego osiami symetrii.

F. Dwusieczne kątów rombu są jego osiami symetrii.

G. Przekątne dzielą romb na cztery przystające trójkąty prostokątne.

H. Przekątna dzieli trapez równoramienny na dwa trójkąty przystające.

8.2. Nazwij równoległobok, który ma

a) tylko dwie osie symetrii przechodzące przez wierzchołki.

b) tylko dwie osie symetrii przecinające jego boki.

c) cztery osie symetrii.

8.3. Narysuj wszystkie osie symetrii danego wielokąta.

a) trapez równoramienny o podstawach długości 10 cm, 8 cm i wysokości 4 cm

b) trójkąt równoramienny o ramionach dwa razy dłuższych od podstawy

c) prostokąt, którego długości boków są w stosunku $2 : 3$

8.4. Podaj przykłady wielokątów, w których symetralna jednego z boków zawiera dwusieczną jednego z kątów wewnętrznych.

8.5. Wyznacz równania ogólne osi symetrii odcinka o końcach $A = (4, -11)$, $B = (-6, 4)$.

D **8.6.** Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (7, -5)$, $B = (10, 9)$, $C = (-6, 1)$ jest równoramienny, a następnie wyznacz równanie jego osi symetrii.

8.7. Podstawą trójkąta równoramiennego ABC jest odcinek o końcach $A = (3, 2)$ i $B = (1, 6)$. Jedno z ramion trójkąta zawiera się w prostej $x - y - 1 = 0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C oraz obwód tego trójkąta.

D **8.8.** Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (-3, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = \left(1, 4\sqrt{3}\right)$ jest równoboczny i napisz równania jego osi symetrii.

* **8.9.** Prosta o równaniu $x - 2y + 1 = 0$ zawiera jeden z boków kwadratu, którego wierzchołki leżą na okręgu o środku $S = (0, -2)$. Oblicz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.

8.10. Punkty $A = (-5, 2)$, $B = (-1, 2)$ i $C = (-3, 8)$ przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych i otrzymano odpowiednio punkty A', B', C'.

a) Wyznacz współrzędne punktów A', B', C'.

b) Czy figura będąca sumą trójkąta ABC i trójkąta $A'B'C'$ ma oś symetrii? Jeżeli tak, podaj jej równanie.

c) Czy figura będąca sumą okręgów: opisanego na trójkącie ABC i opisanego na trójkącie $A'B'C'$ ma oś symetrii? Jeżeli tak, podaj jej równanie.

8.11. Punkty $A = (-9, -1)$, $B = (-4, 11)$, $C = (3, 7)$ są kolejnymi wierzchołkami deltoidu $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D i oblicz pole tego deltoidu.

* **8.12.** Punkt $P = (-2, -3)$ jest wierzchołkiem rombu, którego jeden z boków ma równanie $x - 2y - 4 = 0$. Środkiem symetrii tego rombu jest punkt $M = (1, 1)$. Wyznacz pozostałe wierzchołki rombu i oblicz jego pole.

8.13. Narysuj sześciokąt foremny. Czy z faktu, że sześciokąt ma wszystkie kąty równe, wynika, że jest on foremny?

8.14. Narysuj ośmiokąt, który ma wszystkie boki równej długości i który ma

a) jedną oś symetrii.

b) dwie osie symetrii.

8.15. Punkt $S = (2, -3)$ jest środkiem symetrii sześciokąta $ABCDEF$ o danych trzech wierzchołkach: $A = (-1, -4)$, $C = (4, -5)$, $E = (3, 1)$. Wyznacz obwód tego sześciokąta.

8.16. Prosta o równaniu $y = 3x - 5$ jest osią symetrii trapezu równoramiennego $ABCD$ o podstawach AB i CD. Dane są dwa wierzchołki tego trapezu: $A = (-2, -1)$, $C = (9, 2)$. Wyznacz jego obwód.

8.17. Proste o równaniach $y = \frac{1}{2}x - 2$ i $y = -2x - 7$ są osiami symetrii czworokąta $ABCD$ o wierzchołku $A = (-10, -2)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków czworokąta.

D **8.18.** Wykaż, że prosta o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 2$ jest osią symetrii pięciokąta o wierzchołkach: $A = (-1, -1)$, $B = (4, -1)$, $C = (4, 4)$, $D = (0, 7)$, $E = (-3, 3)$.

* **8.19.** Punkty A, B, C, D, E, F są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego. Wiadomo, że $A = \left(0, 2\sqrt{3}\right)$, $B = (2, 0)$, a C leży na osi x. Wyznacz współrzędne wierzchołków C, D, E, F.

8.20. Wszystkie wierzchołki ośmiokąta foremnego leżą na okręgu o środku w punkcie (0, 0). Jednym z wierzchołków ośmiokąta jest punkt (4, 0). Wyznacz współrzędne dwóch sąsiednich wierzchołków.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Deltoid niebędący rombem
A. nie ma osi symetrii ani środka symetrii.
B. nie ma osi symetrii i ma środek symetrii.
C. ma jedną oś symetrii i nie ma środka symetrii.
D. ma jedną oś symetrii i ma środek symetrii.

2. Wskaż równanie prostej, która nie jest osią symetrii kwadratu o wierzchołkach $(2, 4), (-4, 2), (-2, -4), (4, -2)$.
A. $y = 2x$ **B.** $y = \frac{1}{2}x$ **C.** $y = -2x$ **D.** $y = -3x$

3. Punkt $(1, 2)$ jest środkiem symetrii sześciokąta $ABCDEF$ o danych wierzchołkach: $A = (-1, -1)$, $C = (5, 1)$ i $E = (-1, 6)$. Wskaż punkt, który nie jest wierzchołkiem tego sześciokąta.
A. $(-3, 3)$ **B.** $(3, 5)$ **C.** $(-3, 4)$ **D.** $(3, -2)$

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Środek dowolnej przekątnej sześciokąta foremnego jest jego środkiem symetrii.
B. Przekątne pięciokąta foremnego są jego osiami symetrii.
C. Jedynym czworokątem, który ma cztery osie symetrii, jest kwadrat.

5. Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-19, -24)$, $B = (38, 0)$, $C = (27, 6)$, $D = (-30, -18)$ ma środek symetrii.

6. Punkty $A = (-6, 0)$ i $B = (-5, -8)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$, a prosta o równaniu $x + 2y + 6 = 0$ jest jedną z jego osi symetrii. Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D.

7. Jedno z ramion trójkąta równoramiennego ABC jest zawarte w prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Podstawą trójkąta jest odcinek o końcach $A = (2, 1)$, $B = (5, 2)$. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

9. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–21 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Odległość między punktami $P = \left(1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right)$ i $Q = \left(-2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$ jest równa

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

2. Punkt A leży na osi x, $B = (-5, 6)$, a środek odcinka AB leży na osi y. Wskaż długość odcinka AB.

A. $2\sqrt{17}$ **B.** 8 **C.** 16 **D.** $2\sqrt{34}$

3. W kwadracie $ABCD$ punkty $P = (2, 3)$ i $Q = (7, 4)$ są odpowiednio środkami boków AB i BC. Przekątna kwadratu ma długość

A. $\sqrt{26}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $3\sqrt{26}$. **D.** $\frac{1}{2}\sqrt{26}$.

4. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-2, 3)$, $B = (6, -1)$, $C = (0, 7)$. Wskaż długość środkowej tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C.

A. $2\sqrt{10}$ **B.** $4\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{15}$ **D.** 8

5. Wskaż równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (-3, 5)$ i równoległej do prostej $y = \frac{2}{3}x - 4$.

A. $2x + 3y - 9 = 0$
B. $3x - 2y + 19 = 0$
C. $2x - 3y + 21 = 0$
D. $3x + 2y - 1 = 0$

6. W trapezie $ABCD$, którego podstawa AB jest zawarta w prostej $x - 2y + 10 = 0$, dany jest wierzchołek $D = (6, 6)$. Która prosta zawiera podstawę CD?

A. $y = -\frac{1}{2}x + 3$ **B.** $y = \frac{1}{2}x + 3$ **C.** $y = -2x + 3$ **D.** $y = 2x + 3$

7. Wskaż odległość między prostymi $y = 3x - 2$ i $y = 3x + 1$.

A. 3 **B.** $\sqrt{10}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$ **D.** $\frac{3}{\sqrt{10}}$

8. Środek okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 144$ ma współrzędne

A. $(-3, -5)$. **B.** $(3, 5)$. **C.** $(-3, 5)$. **D.** $(3, -5)$.

9. Dany jest okrąg o równaniu $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3$. Wskaż współrzędne środka i promień r tego okręgu.

A. $(3, -2)$, $r = 3$
B. $(-3, 2)$, $r = 3$
C. $(-3, -2)$, $r = \sqrt{3}$
D. $(-3, 2)$, $r = \sqrt{3}$

10. Wskaż punkt należący do okręgu o równaniu $x^2 + (y+4)^2 - 9 = 0$.

A. $(0, 4)$ **B.** $(3, -4)$ **C.** $(-3, 4)$ **D.** $(4, 0)$

11. Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x-3)^2+(y+4)^2 = 16$ z osiami układu współrzędnych jest równa

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

12. Na okręgu o promieniu 7 leży punkt $A = (0, -4)$. Równanie tego okręgu może mieć postać

A. $(x-7)^2 + y^2 = 7$.

B. $x^2 + (y+4)^2 = 49$.

C. $(x-7)^2 + (y+4)^2 = 49$.

D. $(x-4)^2 + y^2 = 7$.

13. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą nierówności $(x-3)^2 + (y+1)^2 \leqslant 8$?

A. koło o środku $(3, -1)$ i promieniu $r = 2\sqrt{2}$

B. koło o środku $(3, -1)$ i promieniu $r = 8$

C. okrąg o środku $(3, -1)$ i promieniu $r = 2\sqrt{2}$

D. półpłaszczyzna

14. Ile punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisanych za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-3)^2 \leqslant 9 \\ y - x - 2 = 0 \end{cases}$?

A. dwa **B.** jeden **C.** nieskończenie wiele **D.** zero

15. Prosta o równaniu $y = -2x - 9$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $S = (4, 3)$. Wskaż promień tego okręgu.

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $3\sqrt{5}$ **C.** $4\sqrt{5}$ **D.** $5\sqrt{5}$

16. Wskaż równanie prostej, która nie jest styczna do okręgu $(x+3)^2+(y-1)^2 = 25$.

A. $3x + 4y - 20 = 0$

B. $4x + 3y - 16 = 0$

C. $3x - 4y + 12 = 0$

D. $4x - 3y - 10 = 0$

17. Wskaż równanie okręgu, który jest styczny do osi układu współrzędnych w punktach $P = (-3, 0)$ i $Q = (0, 3)$.

A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

B. $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$

C. $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$

D. $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$

18. Punkty $A = \left(-3-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}\right)$, $B = \left(1+\sqrt{3}, 5-2\sqrt{3}\right)$, $C = \left(5+3\sqrt{3}, 7+3\sqrt{3}\right)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Środkiem symetrii tego równoległoboku jest punkt

A. $\left(-1, 2-1{,}5\sqrt{3}\right)$.

B. $\left(1+\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\right)$.

C. $\left(-3+2\sqrt{3}, 2+5\sqrt{3}\right)$.

D. $\left(3+2\sqrt{3}, 6+0{,}5\sqrt{3}\right)$.

19. Obrazem okręgu o środku $S = (-3, 5)$ i promieniu 2020 w symetrii osiowej względem osi y jest okrąg o środku S_1. Odległość między środkami tych okręgów jest równa

A. 6. **B.** 10. **C.** 2010. **D.** 2020.

20. Okrąg o równaniu $(x-7)^2 + (y+2)^2 = 11$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

A. $(x+7)^2 + (y+2)^2 = 11$
B. $(x+7)^2 + (y-2)^2 = 11$
C. $(x-7)^2 + (y-2)^2 = 11$
D. $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 11$

21. Wskaż środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (-3, -1)$, $B = (2, 6)$, $C = (-2, 4)$.

A. $\left(-1, \frac{11}{2}\right)$ **B.** $(-1, 3)$ **C.** $(-3, 9)$ **D.** $(0, 3)$

W zadaniach 22–32 oceń prawdziwość podanych zdań.

22.

A. Równanie $2x + 4y + 3 = 0$ opisuje prostą przechodzącą przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.
B. Prosta o równaniu $-3x\pi = 0$ jest równoległa do osi x.
C. Prosta o równaniu $\sqrt{7}x + \pi y = 2$ jest wykresem funkcji.

23. Dane jest koło opisane za pomocą nierówności $(x+4)^2 + (y+2)^2 \leqslant 9$.

A. Punkt $A = (-1, -1)$ należy do tego koła.
B. Punkt $B = (-7, -3)$ leży na zewnątrz tego koła.
C. Punkt $C = \left(-6, \sqrt{5} - 2\right)$ leży na zewnątrz tego koła.

24. Dany jest okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

A. Punkt $M = (3, -6)$ należy do tego okręgu.
B. Punkt $P = (3, 3)$ należy do tego okręgu.
C. Okrąg ten jest styczny do obydwu osi układu współrzędnych.

25. Okrąg o równaniu $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$ jest styczny do

A. osi x. **B.** prostej $y = 6$. **C.** prostej $x = 1$.

26. Dany jest okrąg o równaniu $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$.

A. Prosta $y - x = 0$ jest osią symetrii tego okręgu.
B. Prosta $y = x + 1$ jest styczna do tego okręgu.
C. Prosta $y = 4 - x$ przecina ten okrąg.

27. Figura opisana za pomocą układu nierówności $\begin{cases} (x+3)^2+(y+1)^2 \leqslant 25 \\ 4x+3y-10 \leqslant 0 \end{cases}$

A. ma nieskończenie wiele osi symetrii.
B. ma dokładnie jedną oś symetrii.
C. jest środkowosymetryczna.

28. Dany jest okrąg o równaniu $(x+4)^2+(y+4)^2=16$.
A. Prosta $y=-8$ jest styczna do tego okręgu.
B. Prosta $y=x$ nie ma punktów wspólnych z tym okręgiem.
C. Prosta $x=-4$ jest osią symetrii tego okręgu.

29. Dany jest zbiór F opisany za pomocą układu nierówności $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4 \\ x \leqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$.

Do zbioru F należy
A. punkt o współrzędnych $(-1, 1)$.
B. co najmniej pięć punktów o obu współrzędnych całkowitych.
C. dokładnie sześć punktów o obu współrzędnych całkowitych.

30. Punkt przecięcia prostych o równaniach $3x+2y-6=0$ i $2x-y-4=0$ należy do zbioru punktów płaszczyzny opisanego za pomocą nierówności
A. $x^2+y^2 \leqslant 3$. **B.** $x^2+y^2 \leqslant 4$. **C.** $x^2+y^2 \leqslant 5$.

31. Dany jest okrąg o równaniu $(x-3)^2+(y+7)^2=1$.
A. Prosta $7x+3y=0$ zawiera średnicę tego okręgu.
B. Prosta $y=x-10$ jest osią symetrii tego okręgu.
C. Prosta $y=2x-9$ jest styczna do tego okręgu.

32. Odległość punktu $(2, 5)$ od środka okręgu $(x-4)^2+y^2=1$ jest
A. równa 3. **B.** równa $\sqrt{21}$. **C.** liczbą wymierną.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

33. Oblicz długość odcinka AB.

a) $A=(1, 7)$, $B=(3, -3)$
b) $A=\left(-1\frac{1}{2}, 3\sqrt{3}\right)$, $B=\left(0{,}5, \sqrt{3}\right)$
c) $A=\left(-\frac{11}{100}, 5\frac{1}{2}\right)$, $B=(-0{,}11, -3)$
d) $A=\left(-\sqrt{2}, 7\right)$, $B=\left(2\sqrt{2}, -2\right)$

34. Oblicz odległość punktu A od prostej l.

a) $A=(2, -3)$, $l: x-y+5=0$
b) $A=(-1, 4)$, $l: -3x+4y+1=0$
c) $A=\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, $l: 2x+3y+10=0$
d) $A=\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $l: -x+3y+5=0$

35. Napisz równanie okręgu o środku S przechodzącego przez punkt P.

a) $S = (-2, 1),\ P = (3, 2)$

b) $S = (4, 0),\ P = (-2, 5)$

c) $S = \left(\frac{1}{3}, -3\right),\ P = \left(2\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

d) $S = (-3, 3),\ P = \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

36. Zbadaj wzajemne położenie prostej i okręgu.

a) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 20$ $\quad 2x + y - 4 = 0$

b) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ $\quad 3x - 2y - 3 = 0$

c) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 45$ $\quad x - 4y + 2 = 0$

d) $(x + 7)^2 + y^2 = 34$ $\quad x - y - 2 = 0$

37. Zbadaj wzajemne położenie okręgów o podanych równaniach.

a) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 52$ $\quad (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$

b) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ $\quad (x + 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$

c) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 16$ $\quad (x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 18$

d) $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 10$ $\quad (x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 90$

38. Dla jakich wartości m prosta o równaniu $3x + \sqrt{5}y = m$ przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych?

39. Narysuj na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór:

$A = \{(x, y):\ x \in \langle -2; 4\rangle \text{ i } y \in \langle -4; 3\rangle\}$

Jaką figurą geometryczną jest zbiór A? Ile wynosi jego pole?

40. Dla jakich wartości m prosta o równaniu $2x + y = m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem o wierzchołkach $(1, 3), (-3, 3), (-3, -2), (1, -2)$?

41. Dany jest punkt $P = (6, -4)$. Punkt Q jest obrazem punktu P w symetrii osiowej względem osi x, a punkt R – obrazem punktu P w symetrii osiowej względem osi y. Oblicz długość odcinka QR.

42. Wyznacz równanie tej spośród osi symetrii okręgu o równaniu $(x+3)^2+y^2 = 36$, która przechodzi przez punkt $A = (6, 3)$.

43. Dana jest prosta k o równaniu $y = 3x-7$. Wyznacz równanie prostej k', która jest obrazem prostej k w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

44. Punkt $B = (12, 6)$ jest wierzchołkiem równoległoboku $ABCD$. Dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych $x + 2y - 6 = 0$ i $x - y + 3 = 0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków równoległoboku i oblicz jego obwód.

45. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$, ramię BC zawiera się w prostej $y = -\frac{1}{2}x + 6$ i $A = (-6, -1)$. Pole tego trójkąta jest równe 40. Oblicz współrzędne punktu C.

46. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-2, 8)$, $B = (4, -1)$, $C = (5, 4)$. Z wierzchołka C poprowadzono wysokość CD. Wyznacz współrzędne punktu D.

47. Trójkąt ABC jest ograniczony prostymi AB: $x - 3y + 9 = 0$, BC: $x + 2y - 16 = 0$, AC: $2x - y + 8 = 0$.

a) Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.
b) Oblicz wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C.
c) Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową poprowadzoną z wierzchołka B tego trójkąta.

48. Punkty $A = (-8, -13)$, $C = (0, 3)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, którego wysokości przecinają się w punkcie $K = (2, -3)$. Oblicz współrzędne wierzchołka B.

49. W trójkącie prostokątnym kąt ABC jest prosty. Wierzchołek C leży na prostej $x - 2y + 6 = 0$ oraz $A = (-3, -4)$ i $B = (6, -1)$. Oblicz współrzędne punktu C oraz pole tego trójkąta.

50. Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A = (3, 1)$ i $B = (-1, 3)$ należy do prostej $x - y + 3 = 0$. Napisz równanie tego okręgu.

51. Oblicz długość cięciwy, którą okrąg $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ wycina z prostej $y = -x + 3$.

52. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (4, 4)$, $B = (2, 0)$, $C = (-8, 10)$.

53. Prosta $y = -x + 2$ jest styczna do okręgu o środku $A = (5, 3)$. Oblicz współrzędne punktu styczności B oraz napisz równanie tego okręgu.

54. Okrąg o środku w punkcie $S = (3, 3)$ jest styczny do obu osi współrzędnych. Prosta k jest styczna do tego okręgu w punkcie $P = (2, m)$, $m > 1$. Wyznacz równanie prostej k.

55. Wyznacz równania prostych stycznych do okręgu $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ i prostopadłych do prostej $x - 3y + 6 = 0$.

56. Do okręgu $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 25$ poprowadzono styczne z początku układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności oraz punkt przecięcia stycznych.

57. Dany jest okrąg o środku $S = (-2, 5)$. Cięciwa AB tego okręgu ma długość $9\sqrt{2}$ i jest zawarta w prostej $y = x + 4$. Napisz równanie okręgu.

58. Dane są punkty $A = (-4, -2)$, $B = (7, 9)$ i $C = (6, 2)$. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie C stycznego do prostej AB.

59. Prosta $x - y - 2 = 0$ przecina okrąg $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 18$ w punktach A i B. Napisz równania stycznych do tego okręgu w tych punktach.

* **60.** Punkty $A = (-1, -1)$, $B = (5, 1)$ leżą na okręgu $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$. Wyznacz na okręgu taki punkt C, aby trójkąt ABC był trójkątem równoramiennym o podstawie AB.

* **61.** Wierzchołki prostokąta $ABCD$ leżą na okręgu $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 13$. Ponadto punkty A i B leżą na prostej $y = 5x - 5$. Wyznacz wierzchołki tego prostokąta i oblicz jego pole.

62. Napisz równanie prostej równoległej do prostej $3x - y + 7 = 0$ i przechodzącej przez środek okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (1, -1)$, $B = (-2, -4)$, $C = (0, 0)$.

63. Punkty $A = (3, -5)$ i $B = (-7, 11)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $S = (-5, 0)$ jest środkiem boku CD. Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D.

D **64.** Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-2, -2)$, $B = (6, 2)$, $C = (2, 5)$, $D = (-4, 2)$ jest trapezem prostokątnym. Oblicz

a) obwód czworokąta.

b) pole czworokąta.

c) długości przekątnych czworokąta.

65. Punkty wspólne okręgu $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 17$ i prostej o równaniu $5x + 3y - 36 = 0$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi y. Oblicz pole czworokąta, którego wierzchołkami są te punkty i ich obrazy.

D **66.** Wykaż, że sześciokąt $ABCDEF$ o wierzchołkach $A = (-7, 2)$, $B = (-6, -3)$, $C = (1, -3)$, $D = (3, 4)$, $E = (2, 9)$, $F = (-5, 9)$ ma środek symetrii.

D **67.** Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-6, 2)$, $B = (2, -7)$, $C = (6, -4)$, $D = (6, 1)$ ma oś symetrii przechodzącą przez wierzchołek A.

68. Punkty $A = (1, -4)$ i $B = (10, -1)$ są wierzchołkami kwadratu $ABCD$, a punkt $S = (4, 2)$ jest jego środkiem symetrii. Wyznacz równania osi symetrii tego kwadratu.

Ciągi

3

1. Określenie i własności ciągu liczbowego

Umiejętności:

- wyznaczanie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym lub w wzorem rekurencyjnym
- badanie własności ciągu liczbowego

W życiu codziennym często porządkujemy jakieś zbiory według przyjętych kryteriów – ustawiamy się w kolejki, układamy kolejno książki na półce, siadamy na określonym na bilecie miejscu w teatrze, rezerwujemy numerek do lekarza itp. Takie porządkowanie elementów (ludzi, książek, krzeseł itd.) najczęściej polega na przypisaniu każdemu z nich odpowiedniego miejsca, mówiąc prościej – **ponumerowaniu** wszystkich elementów określonego zbioru. Ujmując rzecz matematycznie – określamy funkcje przyporządkowujące kolejnym liczbom naturalnym elementy takiego zbioru.



Definicja

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór dodatnich liczb naturalnych. Ciąg nazywamy **liczbowym**, gdy jego wartości są liczbami rzeczywistymi.

Jeżeli dziedzinę ciągu ograniczymy do pewnego skończonego podzbioru zbioru liczb naturalnych dodatnich, to otrzymamy **ciąg skończony**. Na przykład ciąg numerów domów przy ulicy Grodzkiej w Krakowie jest ciągiem skończonym, a ciąg kolejnych naturalnych potęg liczby 3 – **ciągiem nieskończonym**.

Dalej zajmiemy się wyłącznie ciągami liczbowymi, dlatego najczęściej będziemy pomijać określenie „liczbowy".

Przykład 1

Oto kilka przykładów ciągów:

- 2, 3, 5, 7, 11, ... – kolejne liczby pierwsze,
- 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; ... – coraz dokładniejsze przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego liczby π,

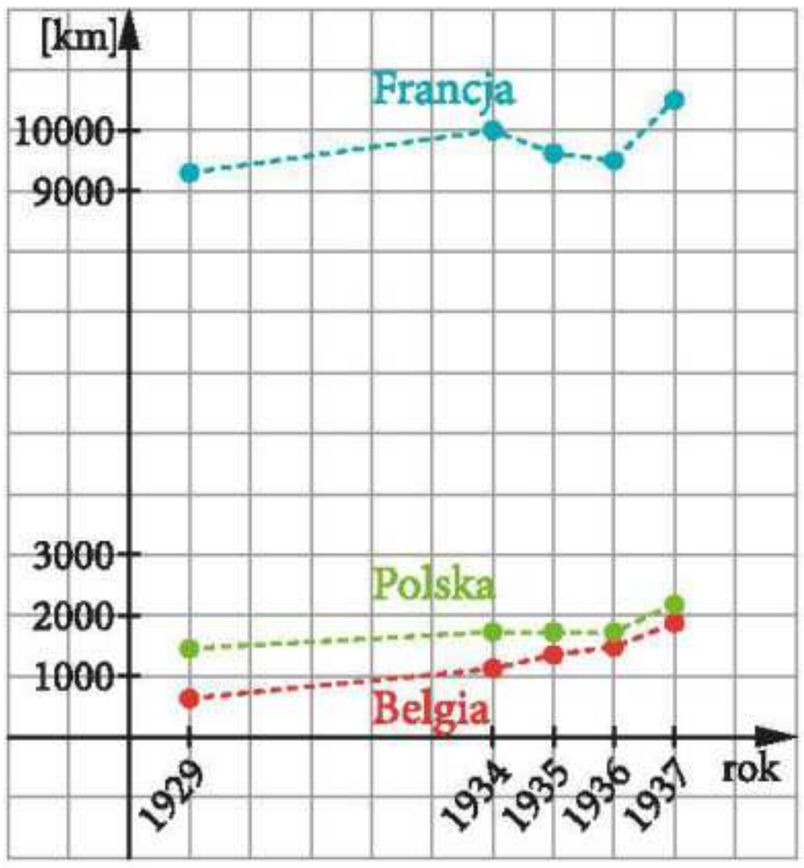
- 100, 99, 98, 97, 96, ... – liczba dni, które pozostały do matury począwszy od studniówki,
- 68,24; 82,60; 56,86; 70,85; 64,32; ... – wysokość (w zł) rachunków telefonicznych w kolejnych miesiącach.

Przykład 2

Narysujemy wykresy trzech funkcji, które są przedstawione poniżej w postaci tabeli. Dane zostały zaokrąglone do dwóch lub trzech cyfr znaczących.

Lotnictwo na liniach pasażerskich w wybranych państwach					
Państwo	Przebyta droga w tys. km				
	1929 r.	1934 r.	1935 r.	1936 r.	1937 r.
Polska	1400	1700	1700	1700	2200
Belgia	600	1100	1300	1500	1900
Francja	9400	10 000	9700	9600	10 500

Źródło: *Mały rocznik statystyczny 1938*, GUS, Warszawa



Rozwiązanie

W tym przykładzie argumentami są liczby naturalne tworzące zbiór
{1929, 1934, 1935, 1936, 1937}.
Wykres każdej z tych funkcji składa się z pięciu punktów. Przerywane linie (tzw. linie trendu) łączące te punkty służą zwiększeniu czytelności wykresu. Łatwiej wtedy zauważyć, że np. funkcja *Belgia* jest rosnąca, funkcja *Polska* niemalejąca, a *Francja* – niemonotoniczna.

Każdy ciąg jest funkcją, zatem można stosować do jego opisywania tę samą symbolikę, co przy opisywaniu innych funkcji. Jednak to, że ciągi mają tak uporządkowaną budowę, zdecydowało, że przyjęto inną terminologię i inny sposób zapisu.

- Ciągi nazywane są zwykle początkowymi lub końcowymi literami alfabetu.
- Zamiast „wartość funkcji dla argumentu n" mówimy „n-ty **wyraz ciągu**".
- Jeżeli wartość ciągu a dla argumentu 1 jest równa 5, to zamiast zapisu:
  $a(1) = 5$ stosujemy zapis $a_1 = 5$
  i czytamy: „pierwszy wyraz ciągu a jest równy 5".

Podczas wypisywania kolejnych wyrazów ciągu korzystamy z podstawowej własności zbioru liczb naturalnych – **po każdej liczbie n następuje bezpośrednio liczba $n+1$.**
Kolejne wyrazy nieskończonego ciągu możemy zatem symbolicznie zapisać:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$$

Taki ciąg będziemy oznaczać (a_n). Zapis a_n oznacza n-ty wyraz ciągu.

Czasami do dziedziny ciągu dołączona jest liczba 0 i wówczas pojawia się wyraz a_0.

O funkcji, która wszystkim argumentom przyporządkowuje tę samą wartość, mówimy – funkcja stała. Również ciąg liczbowy, którego wszystkie wyrazy są równe, nazywamy **ciągiem stałym**.

Uwaga: W każdym zadaniu polegającym na odgadnięciu reguły tworzenia kolejnych wyrazów ciągu **tylko** na podstawie kilku wyrazów danych możliwa jest więcej niż jedna odpowiedź. Reguł może być wiele, a do każdej odpowiedzi można wymyślić jakąś regułę. Zadania takie możemy więc traktować tylko jako zabawę, a „poprawna" odpowiedź to odgadnięcie, co autor zagadki miał na myśli.

Wzór ogólny ciągu liczbowego

Przykład 3

Rozważamy ciąg liczb o danych własnościach. Podamy kilka początkowych wyrazów oraz tzw. **wzór ogólny** tego ciągu (inaczej mówiąc – wzór funkcji).

a) liczby naturalne parzyste
b) liczby naturalne nieparzyste
c) naturalne potęgi liczby -1
d) liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 8 dają resztę 3

Rozwiązanie

a) Wszystkie liczby naturalne parzyste tworzą ciąg: 0, 2, 4, 6 . . . Ponadto:
$0 = 2 \cdot 0, \quad 2 = 2 \cdot 1, \quad 4 = 2 \cdot 2, \quad 6 = 2 \cdot 3$ itd.
zatem najprostszym wzorem funkcji jest $a_n = 2n$. Zauważmy, że w tym ciągu występuje wyraz a_0.

b) Ciąg: 1, 3, 5, 7, . . . Ponadto:
$1 = 2 \cdot 1 - 1, \quad 3 = 2 \cdot 2 - 1, \quad 5 = 2 \cdot 3 - 1, \quad 7 = 2 \cdot 4 - 1$ itd.
zatem wzór ogólny tego ciągu to $b_n = 2n - 1$.

c) Ciąg: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ Ponadto:
$c_1 = -1 = (-1)^1, \quad c_2 = 1 = (-1)^2, \quad c_3 = -1 = (-1)^3, \quad c_4 = 1 = (-1)^4$ itd.
zatem wzór ogólny tego ciągu to $c_n = (-1)^n$.

d) Ciąg: 3, 11, 19, 27, 35, ... Ponadto:
$d_0 = 3 = 8 \cdot 0 + 3$, $d_1 = 11 = 8 \cdot 1 + 3$, $d_2 = 19 = 8 \cdot 2 + 3$ itd.
zatem można opisać ten ciąg za pomocą wzoru $d_n = 8n + 3$.

Przykład 4

(c_n) jest ciągiem odwrotności kolejnych liczb nieparzystych:

$$c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{3},\ c_3 = \frac{1}{5},\ c_4 = \frac{1}{7}, \ldots$$

Wyznaczymy setny wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie

Jeśli chcemy odpowiedzieć na pytanie, jaką wartość ma setny wyraz tego ciągu, to musimy albo wypisać sto kolejnych wyrazów (zaczynając od c_1), albo skorzystać ze wzoru ogólnego tego ciągu.

Nie zawsze można podać wzór na n-ty wyraz ciągu. Na przykład nie ma wzoru pozwalającego obliczyć dowolny wyraz ciągu kolejnych liczb pierwszych.

n-tą liczbę nieparzystą można zapisać jako $2n - 1$, więc:

$$c_n = \frac{1}{2n - 1}$$

Jest to wzór ogólny ciągu c, więc setny wyraz tego ciągu to $c_{100} = \frac{1}{2 \cdot 100 - 1} = \frac{1}{199}$.

Przykład 5 ◀ zad. 1.2

Ciąg (d_n) określony jest wzorem ogólnym $d_n = \frac{1}{9}\left(10^n - 1\right)$. Zatem:

$$d_1 = \frac{1}{9}\left(10^1 - 1\right) = \frac{1}{9} \cdot 9 = 1, \qquad d_2 = \frac{1}{9}\left(10^2 - 1\right) = \frac{1}{9} \cdot 99 = 11,$$

$$d_3 = \frac{1}{9}\left(10^3 - 1\right) = \frac{1}{9} \cdot 999 = 111 \text{ itd.}$$

Czyli n-ty wyraz tego ciągu to liczba całkowita zapisana za pomocą dokładnie n jedynek.

Przykład 6 ◀ zad. 1.3, 1.4

Dla ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2n - 3}{n + 1}$ obliczymy a_{10}, a_{16}, a_{139} oraz a_{m+2}.

Często zamiast „ciąg określony wzorem ogólnym" mówimy „ciąg **o wyrazie ogólnym**".

Rozwiązanie

$$a_{10} = \frac{2 \cdot 10 - 3}{10 + 1} = \frac{17}{11}$$

$$a_{16} = \frac{2 \cdot 16 - 3}{16 + 1} = \frac{29}{17}$$

$$a_{139} = \frac{2 \cdot 139 - 3}{139 + 1} = \frac{275}{140} = \frac{55}{28}$$

$$a_{m+2} = \frac{2(m + 2) - 3}{(m + 2) + 1} = \frac{2m + 1}{m + 3}$$

Przykład 7

Jeżeli chcemy, aby funkcja $f(n) = \frac{1}{n-2}$ była ciągiem o dziedzinie $\mathbf{N} - \{0\}$, to możemy zapisać jej wzór w inny sposób.

Kolejne wartości tej funkcji dla $n \in \mathbf{N} - \{0, 2\}$ to: $-1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

Wystarczy przyjąć, że:

$$b_1 = -1,\ b_2 = 1,\ b_3 = \frac{1}{2},\ b_4 = \frac{1}{3},\ b_5 = \frac{1}{4}, \ldots$$

i otrzymujemy ciąg (b_n) o identycznym zbiorze wartości co funkcja f, którego dziedziną jest zbiór $\mathbf{N} - \{0\}$.

Ogólny wzór tego ciągu zapiszemy na przykład w taki sposób:

$$b_n = \begin{cases} -1 & \text{dla } n = 1 \\ 1 & \text{dla } n = 2 \\ \frac{1}{n-1} & \text{dla } n > 2 \end{cases}$$

W dalszych rozważaniach w podobnych sytuacjach nie będziemy zmieniać numeracji wyrazów ciągu – będziemy używać sformułowania typu „dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{n-2}$ i dziedzinie $\mathbf{N} - \{0, 2\}$".

Podsumujmy:

- Jeżeli ciąg jest skończony i ma k wyrazów, to możemy je ponumerować liczbami $1, 2, 3, \ldots, k$ (czyli przyjąć jako jego dziedzinę zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$).
- Jeżeli ciąg jest nieskończony, to możemy kolejne jego wyrazy numerować kolejnymi liczbami naturalnymi tak, aby jego dziedziną był zbiór $\mathbf{N} - \{0\}$.

Wzór rekurencyjny ciągu liczbowego

Do określenia ciągu może też służyć **wzór rekurencyjny** (inaczej – indukcyjny), który ma następującą postać:

- podany jest pierwszy wyraz lub kilka początkowych wyrazów,
- podana jest informacja, w jaki sposób należy wyznaczyć kolejny wyraz ciągu w zależności od wyrazów go poprzedzających.

Aby obliczyć jakiś wyraz ciągu, musimy więc wyznaczyć najpierw wszystkie wyrazy poprzednie.

Na przykład definiujemy:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = -2a_n + 1 \quad \text{dla } n \in \mathbf{N} - \{0\} \end{cases}$$

Zatem:

$$a_2 = -2a_1 + 1 = -2 \cdot (-2) + 1 = 5$$
$$a_3 = -2a_2 + 1 = -2 \cdot 5 + 1 = -9$$
$$a_4 = -2a_3 + 1 = -2 \cdot (-9) + 1 = 19 \text{ itd.}$$

Czasem w prosty sposób da się odgadnąć wzór rekurencyjny, którym można zastąpić podany wzór ogólny. Na przykład dla ciągu (d_n) określonego w przykładzie 5 za pomocą wzoru ogólnego $d_n = \frac{1}{9}\left(10^n - 1\right)$ mamy:

$$\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_{n+1} = 10d_n + 1 \quad \text{dla } n \in \mathbf{N} - \{0\} \end{cases}$$

Zastąpienie wzoru rekurencyjnego wzorem ogólnym (i na odwrót) wymaga dowodu. Przeprowadza się go metodą tzw. indukcji matematycznej, która nie wchodzi w zakres aktualnego programu szkoły średniej.

Przykład 8 ◀ zad. 1.9–1.11

Jednym z najciekawszych ciągów opisanych rekurencyjnie jest **ciąg Fibonacciego**, zdefiniowany w następujący sposób:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Kolejne wyrazy tego ciągu (poza F_0 i F_1) są sumą dwóch wyrazów poprzednich:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

Leonardo Fibonacci (ok. 1175–1250) – włoski matematyk pochodzący z Pizy, jeden z najwybitniejszych uczonych średniowiecza; wprowadził do Europy cyfry arabskie. W 1202 r. wydał słynną *Liber abaci* (*Księga rachunków*), poświęconą arytmetyce i algebrze, a w 1220 r. dzieło *Practica geometriae* o zastosowaniu algebry do geometrii.

Można też spotkać definicję ciągu, w której pominięty jest wyraz F_0 – wówczas zależność rekurencyjna jest definiowana dla $n \geqslant 3$:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Liczby naturalne tworzące taki ciąg, nazywane **liczbami Fibonacciego**, pojawiają się niezwykle często w przyrodzie – zainteresowanych odsyłamy na s. 136 oraz do bogatej literatury dostępnej np. w internecie.

Własności ciągów

Ciągi liczbowe możemy badać tak jak każdą funkcję liczbową – sprawdzać monotoniczność, miejsca zerowe itp. Możemy również rysować na płaszczyźnie kartezjańskiej ich wykresy.

Przykład 9 ◀ zad. 1.12, 1.13

Narysujemy wykres ciągu o podanym wzorze.

a) $a_n = \frac{1}{2}n - 2$ b) $b_n = \frac{n+1}{n}$

Wykres dowolnego ciągu:
1. jest zbiorem izolowanych punktów,
2. zawiera się w półpłaszczyźnie $x \geqslant 0$.

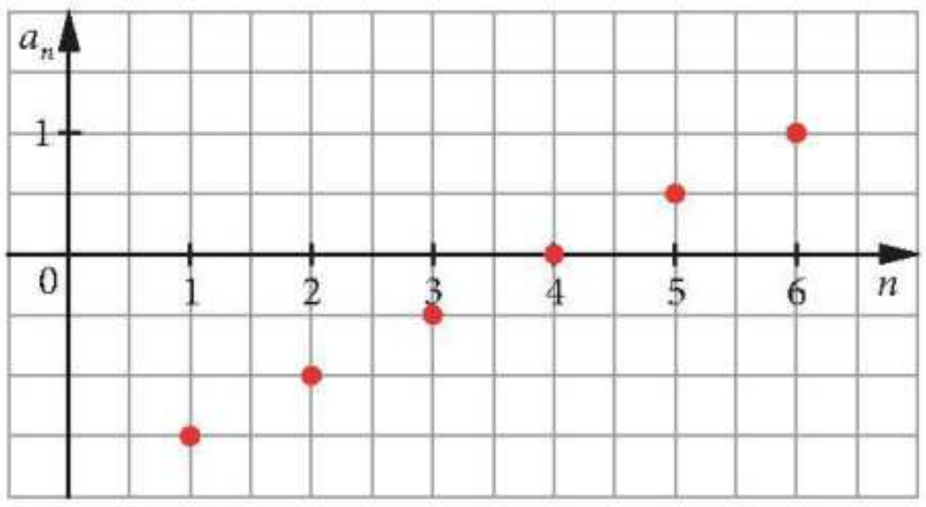
Rozwiązanie

a) Obliczymy kilka początkowych wyrazów ciągu.

$a_1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = -1$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{1}{2}$, $a_6 = 1$, ...

Kolejne wyrazy ciągu pokrywają się z wartościami funkcji

$f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ dla $x \in \mathbf{N}$ i $x > 0$.



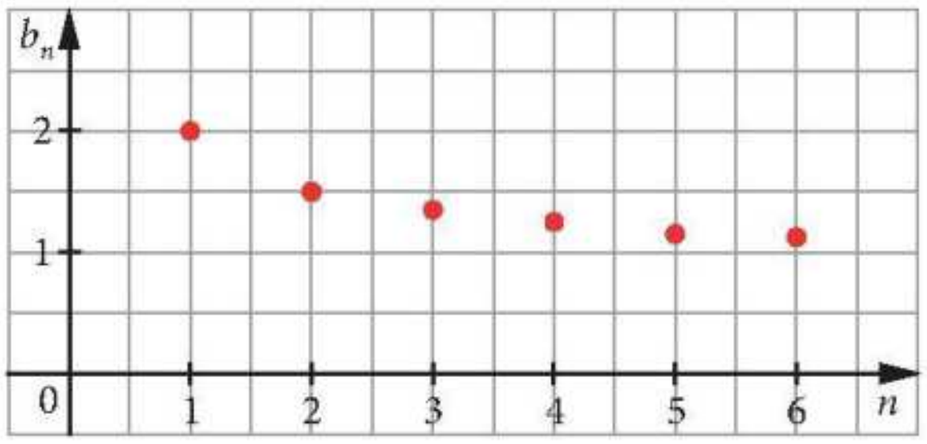
Na podstawie własności tej funkcji możemy wnioskować, że:

- ciąg ten jest rosnący,
- jego jedynym miejscem zerowym jest 4,
- tylko początkowe trzy wyrazy są ujemne,
- najmniejszą wartością jest $-\frac{3}{2}$,
- wartości największej ciąg nie przyjmuje.

b) Wzór ogólny tego ciągu można zapisać w postaci $b_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Zatem $b_1 = 2$, $b_2 = 1\frac{1}{2}$, $b_3 = 1\frac{1}{3}$,

$b_4 = 1\frac{1}{4}$, $b_5 = 1\frac{1}{5}$, $b_6 = 1\frac{1}{6}$, ...



Możemy wykazać, że:

- ciąg ten jest malejący,
- ciąg nie ma miejsc zerowych,
- wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,
- największą wartością ciągu jest 2,
- wartości najmniejszej ciąg nie przyjmuje.

Przypomnijmy, że funkcja jest rosnąca wtedy, gdy dla dowolnych dwóch argumentów większemu z nich przyporządkowuje większą wartość. Zatem twierdzenie opisujące warunki, jakie musi spełniać nieskończony ciąg liczbowy, aby był monotoniczny, możemy sformułować następująco.

Twierdzenie

Jeżeli dla dowolnego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ mamy:

- $a_{n+1} > a_n$ – to ciąg jest rosnący,
- $a_{n+1} < a_n$ – to ciąg jest malejący,
- $a_{n+1} \geqslant a_n$ – to ciąg jest niemalejący,
- $a_{n+1} \leqslant a_n$ – to ciąg jest nierosnący.

W praktyce, aby zbadać monotoniczność ciągu (a_n), najczęściej badamy znak wyrażenia $a_{n+1} - a_n$, a mianowicie, jeżeli dla dowolnego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ mamy:

- $a_{n+1} - a_n > 0$ – to ciąg jest rosnący,
- $a_{n+1} - a_n < 0$ – to ciąg jest malejący,
- $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ – to ciąg jest niemalejący,
- $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$ – to ciąg jest nierosnący.

Ciąg liczbowy, który spełnia co najmniej jeden z powyższych warunków, jest **ciągiem monotonicznym**, pozostałe ciągi liczbowe są niemonotoniczne.

Przykład 10 ◀ zad. 1.14, 1.15

Zbadamy monotoniczność podanego ciągu.

Rozwiązanie

a) $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$

$a_{n+1} = \dfrac{(n+1)+2}{(n+1)+1} = \dfrac{n+3}{n+2}$, więc

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+3}{n+2} - \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{(n+3)(n+1) - (n+2)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{-1}{(n+2)(n+1)}$

Wyrażenie $a_{n+1} - a_n$ zawsze ma wartość ujemną (dla dowolnej liczby naturalnej n mianownik tego ułamka jest dodatni, a w liczniku jest liczba ujemna).

Zatem $a_{n+1} - a_n < 0$, co jest równoważne nierówności $a_{n+1} < a_n$.

Odp.: (a_n) jest ciągiem malejącym.

b) $b_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$

Postępujemy podobnie jak wyżej.

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{2(n+1)+1}{n+1+1} - \dfrac{2n+1}{n+1} = \dfrac{2n+3}{n+2} - \dfrac{2n+1}{n+1} =$

$= \dfrac{(2n+3)(n+1) - (2n+1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)}$

Tym razem dla dowolnej liczby naturalnej n wyrażenie $b_{n+1} - b_n$ jest dodatnie.

Odp.: Ciąg (b_n) jest rosnący.

c) $c_n = n^2 - 13n + 40$

$c_{n+1} - c_n = \left[(n+1)^2 - 13(n+1) + 40\right] - \left(n^2 - 13n + 40\right) = 2n - 12 = 2(n-6)$

Dla $n < 6$ różnica ma znak ujemny, a dla $n > 6$ dodatni.

Odp.: Ciąg (c_n) jest niemonotoniczny.

d) $d_n = \begin{cases} n^2 & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \\ 4n & \text{dla } n \text{ parzystego} \end{cases}$

W tym ciągu trudniej jest opisać różnicę sąsiednich wyrazów. Przyjrzyjmy się kilku początkowym wyrazom:

$d_1 = 1,\ d_2 = 8,\ d_3 = 9,\ d_4 = 16,$
$d_5 = 25,\ d_6 = 24, \ldots$

Zatem $d_5 > d_4$ i $d_6 < d_5$.

Odp.: Ciąg (d_n) jest niemonotoniczny.

Odpowiedź można też uzasadnić, korzystając z własności wykresu ciągu (d_n). Otóż jego wyrazom o nieparzystych numerach odpowiadają punkty na paraboli $y = x^2$, natomiast wyrazom o parzystych numerach – punkty na prostej $y = 4x$. Wykres ciągu „przeskakuje" więc z paraboli na prostą i z prostej na parabolę.

Przykład 11 ◂ zad. 1.16, 1.17

Znajdziemy miejsca zerowe ciągu o wzorze ogólnym $d_n = 3n^2 - 19n + 6$.

Rozwiązanie

Z rozwiązania równania $3n^2 - 19n + 6 = 0$ dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ mamy $n = 6$ lub $n = \frac{1}{3}$.
Tylko pierwsza z tych liczb spełnia warunki zadania (druga nie jest liczbą naturalną).

Odp.: Miejscem zerowym tego ciągu jest liczba 6.

Przykład 12 ◂ zad. 1.18, 1.19

Sprawdzimy, czy któryś z wyrazów ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 8n + 11$ jest równy -1.

Rozwiązanie

$n^2 - 8n + 11 = -1$ i $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, czyli $n^2 - 8n + 12 = 0$

$n_1 = 2,\ n_2 = 6$ ⟵ obydwa pierwiastki są dodatnimi liczbami naturalnymi

W tym ciągu są więc dwa wyrazy równe -1: drugi i szósty.

Odp.: $a_2 = -1$ oraz $a_6 = -1$

Jeżeli dwa ciągi liczbowe mają tę samą dziedzinę, to możemy je, tak jak inne funkcje liczbowe, dodawać, odejmować, mnożyć, mnożyć przez liczbę oraz dzielić przy założeniu, że wyrazy dzielnika są różne od zera. W ten sposób otrzymujemy nowe ciągi. Prześledźmy to na przykładzie.

Przykład 13 ◀ zad. 1.25

Dane są dwa ciągi o wyrazach ogólnych $a_n = n + 2$ i $b_n = \frac{1}{n}$. Wówczas:

- $c_n = a_n + b_n = n + 2 + \frac{1}{n}$
- $d_n = a_n - b_n = n + 2 - \frac{1}{n}$
- $e_n = a_n \cdot b_n = (n + 2) \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{2}{n}$
- $f_n = \frac{a_n}{b_n} = (n + 2) \cdot n = n^2 + 2n$
- $g_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{(n + 2) \cdot n}$
- $h_n = -3a_n = -3(n + 2) = -3n - 6$

Zadania

1.1. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2n^2 - 4n - 1$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Drugi wyraz ciągu (a_n) równa się -1.
B. Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.
C. Istnieje wyraz ciągu (a_n) o wartości równej 0.

1.2. Wyznacz początkowe trzy wyrazy ciągu o podanym wzorze ogólnym.

a) $a_n = 2n + 1$
b) $b_n = 3^n$
c) $c_n = (2n - 1)^3$
d) $d_n = n^n$
e) $e_n = \frac{5n - 3}{n + 1}$
f) $f_n = 6 - n^2$
g) $g_n = \sqrt{2n + 6}$
h) $h_n = \sqrt{n^2 + 2n + 1}$
i) $i_n = |n + 1| - |n - 1|$

1.3. Wyznacz wyrazy $a_9, a_{11}, a_{k+1}, a_{3m}, a_{m+k}$ ciągu o podanym wzorze ogólnym.

a) $a_n = 2n^2$
b) $a_n = \frac{1}{n}$
c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
d) $a_n = \frac{4n - 3}{n + 5}$

1.4. Podaj początkowe pięć wyrazów ciągu (a_n).

a) $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n-2}$
b) $a_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$
c) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$
d) $a_n = 1^2 - 2^2 + \ldots + (-1)^{n+1} n^2$

1.5. W którym z podanych ciągów setny wyraz jest równy 1?

$a_n = (-1)^{3n+1}$ $b_n = (-1)^{2n+1}$ $c_n = (-1)^{n-2}$ $d_n = (-1)^n$

1.6. Wyznacz liczbę wyrazów ciągu (a_n) znajdujących się pomiędzy podanymi wyrazami.

a) a_3 i a_7
b) a_{13} i a_{27}
c) a_{20} i a_{35}
d) a_{n-2} i a_n
e) a_{n-1} i a_{n+5}
f) a_{n-7} i a_{n-1}
g) a_{n+2} i a_{n+15}
h) a_{n-k} i a_n
i) a_n i a_{n+k}

1.7. Dany jest ciąg (a_n) określony dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Zapisz symbolicznie
a) sumę dwóch kolejnych wyrazów ciągu.
b) średnią arytmetyczną dwóch kolejnych wyrazów ciągu.
c) iloczyn trzech kolejnych wyrazów ciągu.
d) średnią arytmetyczną wyrazu bezpośrednio poprzedzającego wyraz a_n i wyrazu następnego po wyrazie a_n.
e) średnią arytmetyczną pięciu kolejnych wyrazów ciągu, z których środkowym wyrazem jest a_n.
f) sumę trzech kolejnych wyrazów ciągu następujących po wyrazie a_{k-3}.
g) iloczyn trzech kolejnych wyrazów ciągu następujących po wyrazie a_{n-k}.

1.8. Zapisz symbolicznie kolejne trzy wyrazy ciągu (a_n) występujące bezpośrednio po podanym wyrazie.
a) a_{n+k-1} b) a_{2n} c) $a_{3(n+7)}$ d) $a_{5(n-2)}$

1.9. Wyznacz początkowe pięć wyrazów ciągu o podanym wzorze rekurencyjnym.

a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = (b_n)^{-1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = (c_n)^2 - 3c_n + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} d_1 = 2 \\ d_{n+1} = 2^{\frac{1}{2}d_n} \end{cases}$

1.10. Wyznacz początkowe sześć wyrazów ciągu o danym wzorze rekurencyjnym.

a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 5 \\ b_{n+2} = b_{n+1} - b_n \end{cases}$

c) $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 5 \\ c_{n+2} = c_n \cdot c_{n+1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} d_1 = 3 \\ d_2 = 5 \\ d_{n+2} = \dfrac{d_{n+1}}{d_n} \end{cases}$

* **1.11.** Podaj przykład wzoru rekurencyjnego ciągu na podstawie jego początkowych pięciu wyrazów.
a) $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ a_4 = 16,\ a_5 = 32,\ \ldots$
b) $b_1 = 5,\ b_2 = 9,\ b_3 = 17,\ b_4 = 33,\ b_5 = 65,\ \ldots$
c) $c_1 = 13,\ c_2 = -13,\ c_3 = 13,\ c_4 = -13,\ c_5 = 13,\ \ldots$
d) $d_1 = 1,\ d_2 = 2,\ d_3 = 6,\ d_4 = 24,\ d_5 = 120,\ \ldots$

1.12. Naszkicuj wykres ciągu o podanym wyrazie ogólnym.

a) $a_n = 3$

b) $a_n = (-1)^n$

c) $a_n = n^2$

d) $a_n = \frac{n-2}{n}$

e) $a_n = (-1)^n \cdot n$

f) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^n$

1.13. Naszkicuj wykres ciągu o podanym wyrazie ogólnym.

a) $a_n = \begin{cases} 3n-1 & \text{dla } n = 1 \\ 2n & \text{dla } 1 < n \leqslant 3 \\ n+3 & \text{dla } n > 3 \end{cases}$

b) $a_n = \begin{cases} n^2 - 4 & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant 3 \\ -2n + 11 & \text{dla } n > 3 \end{cases}$

* **1.14.** Zbadaj monotoniczność ciągu.

a) $a_n = n^2 - 1$

b) $a_n = \frac{n-3}{n+4}$

c) $a_n = \frac{n+5}{n+2}$

d) $a_n = -n^2 + 17n - 60$

e) $a_n = (-1)^n(2 - 5n)$

f) $a_n = \begin{cases} n^2 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n+3 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

D * **1.15.** Wykaż, że ciąg (a_n) jest niemonotoniczny.

a) $a_n = (-1)^n$

b) $a_n = (-1)^n \cdot n$

c) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

d) $a_n = |n - 10|$

1.16. Wyznacz miejsca zerowe ciągu.

a) $a_n = 3n - 1$

b) $a_n = n^2 - 11n + 30$

c) $a_n = 2n^2 - 6n - 8$

d) $a_n = \sqrt{n^2 + 3n - 10}$ dla $n > 1$

* **1.17.** Wyznacz miejsce zerowe ciągu (a_n) określonego podanym wzorem rekurencyjnym.

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + n - 5 \end{cases}$$

1.18. Który wyraz ciągu (a_n) jest równy x?

a) $a_n = 5n - 3$ $\quad x = 32$

b) $a_n = (-2)^n$ $\quad x = -32$

c) $a_n = n(n-4) - 20$ $\quad x = 25$

d) $a_n = \left(n^2 - 3\right)\left(n^2 - 9\right)(n+5)$ $\quad x = 0$

e) $a_n = \sqrt{2n-1}$ $\quad x = 5$

f) $a_n = n\left(n^2 - 3n + 2\right)$ $\quad x = 6$

1.19. Dany jest ciąg, którego wyrazem a_n jest liczba przekątnych w n-kącie wypukłym. Czy któryś z wyrazów tego ciągu jest równy 17?

1.20. Ile wyrazów ciągu (a_n) jest mniejszych od m?

a) $a_n = 2(n+1)(n-3)$ $\quad m = 0$

b) $a_n = -2n^2 + 3n$ $\quad m = -5$

c) $a_n = \sqrt{n}$ $\quad m = 3$

d) $a_n = \sqrt[3]{n+3}$ $\quad m = 7$

* **1.21.** Wyznacz (o ile istnieje) największy wyraz ciągu o podanym wyrazie ogólnym.

a) $a_n = 3 - 2\sqrt{n}$ $\quad$ b) $a_n = 11 - n$ $\quad$ c) $a_n = \dfrac{3n-1}{3n+1}$ $\quad$ d) $a_n = \dfrac{2n-1}{4n^2-1}$

1.22. Wyznacz największy oraz najmniejszy wyraz skończonego ciągu (a_n).

a) $a_n = \dfrac{2^n}{n}$, $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ $\quad$ c) $a_n = n^2 - 3n$, $n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$

b) $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ $\quad$ d) $a_n = -n^2 + 10n - 24$, $n \in \{1, 2, \ldots, 20\}$

1.23. Naszkicuj wykres ciągu o podanym wyrazie ogólnym.

$$a_n = \begin{cases} n+1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n-1 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

Podaj największy lub najmniejszy wyraz ciągu (o ile istnieje). Czy ten ciąg jest monotoniczny?

1.24. Naszkicuj wykres ciągu (a_n), w którym wyraz a_n jest n-tą cyfrą rozwinięcia dziesiętnego liczby p, tzn. a_1 to pierwsza cyfra po przecinku, a_2 – druga itd.

a) $p = \dfrac{10}{13}$ $\quad$ b) $p = \dfrac{2}{9}$ $\quad$ c) $p = \dfrac{7}{8}$

* **1.25.** Zbadaj monotoniczność każdego z ciągów: $a_n = \dfrac{3n-1}{n}$, $b_n = \dfrac{1-n}{n}$. Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu (c_n) i zbadaj monotoniczność tego ciągu.

a) $c_n = a_n + b_n$ $\quad$ b) $c_n = a_n - b_n$ $\quad$ c) $c_n = \dfrac{b_n}{a_n}$ $\quad$ d) $c_n = a_n \cdot b_n$

* **1.26.** Ciąg (a_n) jest rosnący. Określ monotoniczność ciągu (b_n).

a) $b_n = a_n + 1$

b) $b_n = 3a_n$

c) $b_n = a_n^2 + 3$ i zakładamy, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie

d) $b_n = \dfrac{-2}{a_n}$ i zakładamy, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są ujemne

* **1.27.** Zbadaj monotoniczność ciągu (c_n), o którym wiadomo, że

a) $c_n = a_n + b_n$ oraz ciągi (a_n) i (b_n) są rosnące.

b) $c_n = a_n - b_n$ oraz (a_n) jest rosnący i (b_n) jest malejący.

c) $c_n = a_n - b_n$ oraz (a_n) jest malejący i (b_n) jest rosnący.

✱ **1.28.** Podaj przykład takich dwóch nieskończonych ciągów rosnących (a_n) i (b_n), aby ciąg $(a_n \cdot b_n)$ był

a) rosnący. b) malejący. c) niemonotoniczny.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Liczba ujemnych wyrazów ciągu określonego wzorem $a_n = (2n - 7)(n + 7)$ dla $n \geqslant 1$ jest równa

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

2. Który z podanych ciągów ma wyraz równy 5?

A. $a_n = 3n - 6$

B. $a_n = 4 - n$

C. $a_n = n^2 - 6n + 5$

D. $a_n = \frac{2n - 5}{n + 1}$

3. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, gdzie $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Zatem

A. $a_2 = 4$. **B.** $a_3 = 14$. **C.** $a_5 = 25$. **D.** $a_7 = 49$.

4. Dany jest ciąg (a_n), w którym $a_3 = 2\frac{1}{2}$ oraz $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $a_2 = \frac{2}{3}$ **B.** Wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie. **C.** $a_4 = \frac{7}{5}$

5. Oblicz, ile wyrazów ciągu o wzorze ogólnym $a_n = 2n^2 - 1$, gdzie $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, jest mniejszych od 99.

6. Wyznacz czwarty wyraz ciągu o podanym wzorze rekurencyjnym.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{a_n + 2} \end{cases}$$

D **7.** Dany jest ciąg kolejnych dodatnich liczb nieparzystych (a_n) oraz ciągi (b_n) i (c_n) określone następująco:

$b_n = a_n + a_{n+1}$, $c_n = b_{n+1} - b_n$.

Wykaż, że (c_n) jest ciągiem stałym.

Ciąg Fibonacciego

Leonardo z Pizy (ok. 1180 – ok. 1250), zwany Fibonaccim, to włoski matematyk, jeden z najwybitniejszych uczonych średniowiecza, który do europejskiej matematyki wprowadził cyfry arabskie. W dziele *Liber abaci* (*Księga rachunków*) z 1202 r. wyjaśnił, jak za ich pomocą zapisywać liczby i wykonywać obliczenia.

Jako prosty sposób przetestowania wprowadzonego przez siebie systemu liczbowego zamieścił w *Księdze* m.in. zadanie dotyczące wzrostu populacji królików:

Ile par będzie liczyła po upływie roku hodowla wywodząca się od jednej pary dorosłych królików, przy założeniu, że każda para co miesiąc wydaje na świat nową parę, a króliki mają potomstwo po dwóch miesiącach od własnych narodzin?

Rozwiązanie prowadzi do tzw. **ciągu Fibonacciego**, którego pierwsze dwa wyrazy są równe 1, a każdy następny jest sumą dwóch poprzednich:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

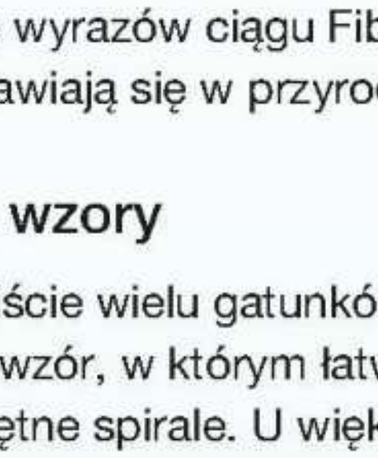
Zauważmy, że przy rozwiązywaniu zadania opuszcza się pierwszy wyraz tego ciągu. Zatem po roku hodowla będzie liczyła 377 par królików.

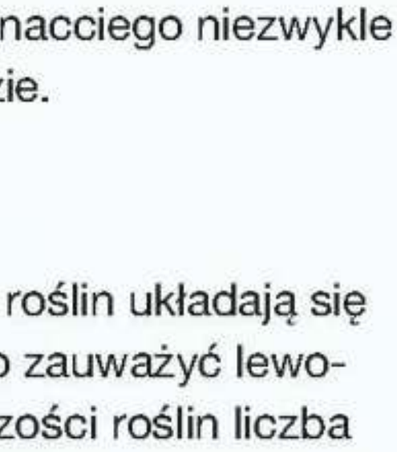
Sekwencje wyrazów ciągu Fibonacciego niezwykle często pojawiają się w przyrodzie.

Spiralne wzory

Nasiona i liście wielu gatunków roślin układają się w spiralny wzór, w którym łatwo zauważyć lewo- i prawoskrętne spirale. U większości roślin liczba tych spiral jest równa dwóm kolejnym wyrazom ciągu Fibonacciego, np. łuski sosnowej szyszki tworzą 8 i 13 spiral, a nasiona słonecznika – 21 i 34, 34 i 55 lub 55 i 89 spiral.



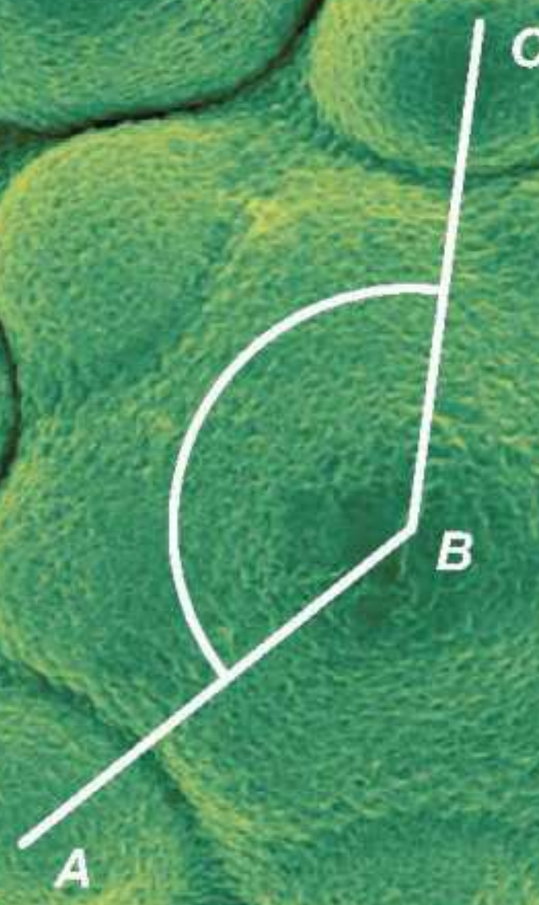




W ananasie, który ma sześciokątne łuski, można dostrzec aż trzy rodzaje spiral. Jest ich zwykle 5, 8 i 13 lub 8, 13 i 21.



Na zdjęciu pokazano merystem kalafiora wraz z tworzącymi się zawiązkami. Środek merystemu oznaczono literą *B*.
Złoty kąt między zawiązkami *A* i *C* pozwala wywnioskować, że te dwa zawiązki powstawały jeden po drugim.



Merystemy a złota liczba i ciąg Fibonacciego

Rozwój rośliny jest skutkiem nieustannego dzielenia się tzw. merystemów wierzchołkowych, czyli grup komórek znajdujących się na szczytach pędów i korzeni. W miarę przybywania komórek te najbardziej oddalone od środka merystemu tracą zdolność podziału i zaczynają się różnicować w tkanki i organy, a z niektórych, tzw. komórek inicjalnych, powstają zawiązki liści i kwiatów. Okazuje się, że dwa kolejne zawiązki wraz ze środkiem merystemu wyznaczają złoty kąt.

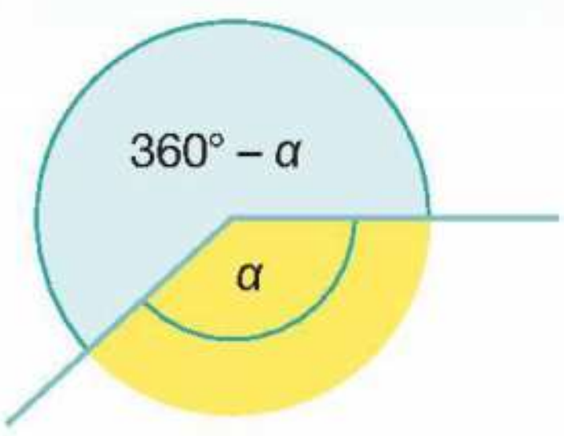
Związek złotego kąta ze złotą liczbą rozwiązuje zagadkę popularności ciągu Fibonacciego w przyrodzie. Ilorazy dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu są bowiem coraz bliższe złotej liczby:

Złotym kątem nazywamy kąt α, który dzieli kąt pełny w takim stosunku, że:

$$\frac{360^\circ}{360^\circ - \alpha} = \frac{360^\circ - \alpha}{\alpha} = \varphi$$

gdzie φ jest **złotą liczbą**:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618033...$$



Złoty kąt jest w przybliżeniu równy 137,5°.

$$\frac{1}{1} = 1,\quad \frac{2}{1} = 2,\quad \frac{3}{2} = 1{,}5,\quad \frac{5}{3} = 1{,}(6),\quad \frac{8}{5} = 1{,}6,\quad \frac{13}{8} = 1{,}625,\quad \frac{21}{13} = 1{,}(615384),\ ...$$

2. Ciąg arytmetyczny

Umiejętności:

- rozpoznawanie, czy dany ciąg jest arytmetyczny
- stosowanie wzoru na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego

Przedstawimy teraz ciągi, w których kolejne wyrazy powstają przez dodanie do wyrazu poprzedniego pewnej liczby, stałej dla danego ciągu. Na przykład:

- $2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}, 11\frac{1}{2}, 14\frac{1}{2}, \ldots$
- $10, 7, 4, 1, -2, \ldots$
- $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \ldots$

W każdym z nich określiliśmy podobną regułę wyznaczania następnych wyrazów. W pierwszym różnica między dwoma kolejnymi wyrazami jest równa 3, czyli następnymi wyrazami są $17\frac{1}{2}, 20\frac{1}{2}, 23\frac{1}{2}$ itd. W drugim od każdego wyrazu trzeba odejmować 3 (albo dodawać do niego -3), w trzecim przykładzie – do każdego wyrazu dodawać liczbę $\frac{1}{3}$.

Definicja

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy wyraz, oprócz pierwszego, powstaje w wyniku dodania do wyrazu poprzedniego stałej liczby r nazywanej **różnicą** ciągu.

Zatem w nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) o danym wyrazie a_1 i ustalonej liczbie $r \in \mathbf{R}$ mamy następującą zależność rekurencyjną:

$$a_{n+1} = a_n + r \text{ dla każdego } n \in \mathbf{N} - \{0\}$$

Przykład 1

Weźmy dowolną funkcję liniową, np. $f(x) = -4x + 7$, i ograniczmy jej dziedzinę tylko do liczb naturalnych dodatnich. Powstanie wówczas ciąg o wzorze ogólnym:

$$a_n = -4n + 7$$

Obliczmy jego początkowe wyrazy.

$$a_1 = 3, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -5, \quad a_4 = -9, \quad a_5 = -13$$

Różnica między wypisanymi kolejnymi wyrazami ciągu jest stała, równa −4. Sprawdzimy, czy tak jest dla dowolnych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu.
Jeżeli $a_n = -4n + 7$, to $a_{n+1} = -4(n + 1) + 7 = -4n + 3$
oraz $a_{n+1} - a_n = -4n + 3 - (-4n + 7) = -4$.
Niezależnie od tego, które kolejne dwa wyrazy weźmiemy, różnica między nimi jest stała, równa −4. Zatem (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = -4$.

Przykład 2 ◀ zad. 2.1

Sprawdzimy, czy ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n^2 + 1$ jest arytmetyczny.

Rozwiązanie

Badamy różnicę sąsiednich wyrazów ciągu.

$$a_{n+1} - a_n = \left((n + 1)^2 + 1\right) - \left(n^2 + 1\right) =$$
$$= n^2 + 2n + 2 - n^2 - 1 = 2n + 1$$

Różnica między sąsiednimi wyrazami nie jest stała (zależy od zmiennej n), więc badany ciąg nie jest arytmetyczny.

Można szybciej wykazać, że ciąg (a_n) **nie jest** arytmetyczny:
znajdujemy jego trzy kolejne wyrazy, np. $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 10$,
i zauważamy, że $5 - 2 \neq 10 - 5$.

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego

Przykład 3 ◀ zad. 2.5

O ciągu arytmetycznym (a_n) wiemy, że: $a_1 = 11$, $r = 6$. Zatem:

$a_2 = a_1 + r = 17$
$a_3 = a_2 + r = 23$
$a_4 = a_3 + r = 29$ itd.

Ile wynosi a_{50}?

Rozwiązanie

Przyjrzyjmy się, jak powstają kolejne wyrazy dowolnego ciągu arytmetycznego.

$a_1 = a_1$
$a_2 = a_1 + r$
$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$
$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$
$a_5 = a_4 + r = (a_1 + 3r) + r = a_1 + 4r$ itd.

Pięćdziesiąty wyraz tego ciągu powstaje więc przez dodanie do liczby 11 czterdziestu dziewięciu szóstek, czyli:

$a_{50} = 11 + 49 \cdot 6 = 305$

Odp.: $a_{50} = 305$

Rozumowanie z przykładu uogólnimy i zapiszemy w postaci twierdzenia, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r ma postać:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Na przykład w ciągu arytmetycznym, w którym $a_1 = -4$ i $r = \frac{1}{4}$, trzydziesty wyraz jest równy:

$$a_{30} = a_1 + 29r = -4 + 29 \cdot \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$$

Przykład 4

Wyznaczymy sto dwudziestą siódmą liczbę w ciągu arytmetycznym:

3, 7, 11, 15, 19, ...

Rozwiązanie

Oznaczmy ten ciąg (b_n). Jest to ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $b_1 = 3$ i różnicy $r = 4$. Szukaną liczbę wyznaczamy więc za pomocą wzoru ogólnego ciągu:

$$b_{127} = 3 + 126 \cdot 4 = 507$$

Odp.: $b_{127} = 507$

Przykład 5

Sprawdzimy, czy w ciągu arytmetycznym (c_n), w którym $c_1 = 1$ i $r = 7$, występuje liczba 232, a jeśli tak, to na którym miejscu.

Rozwiązanie

Sprawdzamy, czy istnieje taka naturalna liczba n, dla której $c_n = 232$.

$232 = 1 + (n-1) \cdot 7$ $\longleftarrow c_n = c_1 + (n-1) \cdot r$

$7n = 238$

$n = 34$

Zatem $c_{34} = 232$.

Odp.: Liczba 232 występuje w tym ciągu na trzydziestym czwartym miejscu.

Przykład 6 ◀ zad. 2.10

Wyznaczymy ciąg arytmetyczny (a_n), w którym suma wyrazów trzeciego i jedenastego jest równa 128, a suma wyrazów czwartego i ósmego jest równa 106.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} a_3 + a_{11} = 128 \\ a_4 + a_8 = 106 \end{cases} \longleftarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$\begin{cases} a_1 + 2r + a_1 + 10r = 128 \\ a_1 + 3r + a_1 + 7r = 106 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ r = 11 \end{cases}$$

Odp.: $a_1 = -2$ oraz $r = 11$

Wyznaczenie ciągu arytmetycznego polega na ogół na podaniu jego pierwszego wyrazu i różnicy.

Własności ciągu arytmetycznego

Przyjrzyjmy się wyrazom pewnego ciągu arytmetycznego.

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, ...

Jeżeli weźmiemy jego dowolne trzy kolejne wyrazy, np. 11, 14, 17, i obliczymy średnią arytmetyczną wyrazów skrajnych $\left(\frac{11+17}{2} = \frac{28}{2} = 14\right)$, to otrzymamy wyraz środkowy. Tę samą prawidłowość zaobserwujemy dla innych trzech kolejnych wyrazów, np. 8, 11, 14 lub 20, 23, 26. Taką własność ma dowolny ciąg arytmetyczny.

Twierdzenie

Ciąg (a_n) o co najmniej trzech wyrazach jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego wyraz, począwszy od drugiego, jest średnią arytmetyczną wyrazów z nim sąsiadujących: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Założenie I

(a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Teza I

Dla każdego $n > 1$ prawdziwa jest równość: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Dowód I

Niech r – różnica ciągu arytmetycznego (a_n). Wówczas trzy kolejne wyrazy ciągu:

$a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1}$

możemy zapisać również w postaci: $a_n - r,\ a_n,\ a_n + r$.

Średnia arytmetyczna wyrazów a_{n-1} i a_{n+1} jest równa:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - r + a_n + r}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

Założenie II

Dla każdego $n > 1$ prawdziwa jest równość: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Teza II

(a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Dowód II

$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, ⟵ z założenia

czyli $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$.

To oznacza, że dla każdego $n > 1$ różnica między kolejnymi wyrazami ciągu jest stała. Oznaczmy ją r. Zatem dla $n > 1$ mamy $a_n = a_{n-1} + r$, czyli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Koniec dowodu

Przykład 7 ◂ zad. 2.19, 2.20

Dla jakiej wartości x liczby $x + 4,\ 4x,\ x^2 + 8$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

Rozwiązanie

Wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów skrajnych. Otrzymujemy równanie:

$$\frac{(x+4) + \left(x^2 + 8\right)}{2} = 4x$$

Zatem:

$x + 4 + x^2 + 8 = 8x$

$x_1 = 4,\ x_2 = 3$

Zadanie ma dwa rozwiązania, a odpowiadające im ciągi to: 8, 16, 24 oraz 7, 12, 17.

Odp.: $x = 4$ lub $x = 3$

Zauważmy, że jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r, to wyrazy:

$$\ldots, a_{n-3}, \quad a_{n-2}, \quad a_{n-1}, \quad a_n, \quad a_{n+1}, \quad a_{n+2}, \quad a_{n+3}, \ldots$$

możemy inaczej zapisać:

$$\ldots, a_n - 3r, a_n - 2r, a_n - r, a_n, a_n + r, a_n + 2r, a_n + 3r, \ldots$$

Gdy obliczymy średnie arytmetyczne dwóch wyrazów tak samo oddalonych od a_n, otrzymamy wyraz a_n, np.:

$$\frac{(a_n - r) + (a_n + r)}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

$$\frac{(a_n - 2r) + (a_n + 2r)}{2} = a_n$$

i ogólnie:

$$\frac{(a_n - kr) + (a_n + kr)}{2} = a_n$$

Wniosek

W ciągu arytmetycznym (a_n) zachodzi zależność:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

dla wszystkich $k < n$ i $k, n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

Przykład 8

Obliczymy wyrazy x, y i z ciągu arytmetycznego: $215, x, y, z, -11$.

Rozwiązanie

$$y = \frac{215 - 11}{2} = 102$$

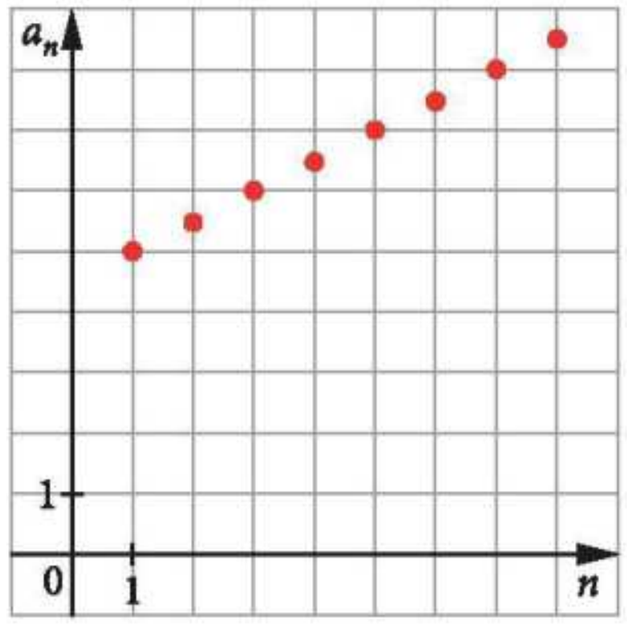
$$x = \frac{215 + y}{2} = \frac{215 + 102}{2} = 158\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{y - 11}{2} = \frac{102 - 11}{2} = 45\frac{1}{2}$$

Odp.: $x = 158\frac{1}{2}$, $y = 102$, $z = 45\frac{1}{2}$

Przykład 9 ◂ zad. 2.23

Sporządzimy wykres ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_1 = 5,\ r = \frac{1}{2}$.



Rozwiązanie

$$a_1 = 5,\ a_2 = 5\frac{1}{2},\ a_3 = 6,\ a_4 = 6\frac{1}{2},\ a_5 = 7 \text{ itd.}$$

Punkty wykresu układają się wzdłuż prostej – wykresu pewnej funkcji liniowej. Aby znaleźć jej równanie, popatrzmy na wzór ogólny ciągu:

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot \frac{1}{2}$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$a_n = \frac{1}{2}n + 4\frac{1}{2}$$

Punkty wykresu ciągu (a_n) należą zatem do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$.

Powtórzmy rozumowanie z przykładu 9 na ogólnych danych.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$a_n = a_1 + n \cdot r - r$$
$$a_n = r \cdot n + (a_1 - r)$$

Po zamianie oznaczeń otrzymujemy wzór funkcji liniowej $f(x) = r \cdot x + (a_1 - r)$ ze współczynnikami r oraz $a_1 - r$. Jak widać, ciąg arytmetyczny jest ściśle związany z funkcją liniową. Każdy ciąg arytmetyczny jest zatem monotoniczny.

Wniosek

Ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 + (n-1)r$ jest:

- rosnący dla $r > 0$,
- malejący dla $r < 0$,
- stały dla $r = 0$.

Zadania

2.1. Które z ciągów o podanych wzorach ogólnych to ciągi arytmetyczne?

$$a_n = \frac{3n+2}{5}, \quad b_n = \frac{n-5}{7-n}, \quad c_n = (1-2n)^2 + 4\left(1-n^2\right), \quad d_n = (2-3n)^2 + 2(2+n^2)$$

2.2. Które z podanych ciągów są ciągami arytmetycznymi?

(a_n): 6, 10, 14, 18, 22

(b_n): 1, 2, 4, 7, 11, 16

(c_n): 1, −2, 1, −2, 1

(d_n): π, π, π, π, π

2.3. Dane są początkowe dwa wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz trzy kolejne wyrazy tego ciągu.

a) 1, 5

b) 2, −3

c) 4, $2\frac{1}{2}$

d) 7, 7

2.4. Jakie liczby należy wstawić w miejsca ?, aby otrzymany ciąg był arytmetyczny?

a) 3, 5, ?, 9, ?, ?

b) $\frac{1}{2}$, ?, $1\frac{1}{2}$, ?, $2\frac{1}{2}$, ?, $3\frac{1}{2}$

c) 2,1; 2,6; ?; ?; 4,1; ?

d) −5, ?, ?, ?, 3, 5

2.5. Dane są: pierwszy wyraz a_1 i różnica r ciągu arytmetycznego (a_n). Wyznacz a_n.

a) $a_1 = 30,\ r = -3,\ n = 25$

b) $a_1 = \frac{2}{3},\ r = \frac{5}{3},\ n = 11$

c) $a_1 = 2,\ r = \sqrt{2} - 1,\ n = 8$

d) $a_1 = \frac{1}{2},\ r = 1\frac{1}{2},\ n = 5$

e) $a_1 = 0{,}4,\ r = 0{,}1,\ n = 11$

f) $a_1 = \sqrt{5},\ r = \sqrt{5},\ n = 6$

2.6. Podaj liczbę wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego.

a) −1, 6, …, 69

b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, 5$

c) $1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{2}, \ldots, 3\frac{1}{2}$

d) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1+3\sqrt{2}}{2}, \ldots, \frac{1+15\sqrt{2}}{2}$

2.7. Sprawdź, czy dla podanej funkcji $y = f(x)$ ciąg wartości $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ jest ciągiem arytmetycznym.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 + 1$

2.8. Podaj przykład ciągu arytmetycznego

a) nieskończonego o wszystkich wyrazach niewymiernych.

b) czterowyrazowego, którego wyrazy są liczbami pierwszymi.

2.9. Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 13, a jego dziesiąty wyraz jest równy 25. Wyznacz piętnasty wyraz tego ciągu.

2.10. Wyznacz ciąg arytmetyczny, w którym suma wyrazów trzeciego i siódmego jest równa −10, a suma wyrazów czwartego i dziewiątego jest równa −22.

2.11. Suma wyrazów szóstego i ósmego pewnego ciągu arytmetycznego jest równa 40, a iloczyn wyrazów drugiego i trzeciego też jest równy 40. Wyznacz ten ciąg.

2.12. Ostatni wyraz 10-wyrazowego rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 37. Różnica wyrazów piątego i czwartego jest równa 4. Oblicz $a_4 + a_5$.

2.13. Suma początkowych trzech wyrazów 8-elementowego ciągu arytmetycznego jest równa 18, a ostatnich trzech jest równa 78. Oblicz sumę dwóch środkowych wyrazów tego ciągu.

2.14. W skończonym ciągu arytmetycznym pierwszy wyraz jest równy 3, a ostatni jest od niego sześć razy większy. Różnica ciągu wynosi 3. Ile wyrazów ma ten ciąg?

2.15. Suma pierwszego i piątego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 2, a iloraz szóstego i pierwszego jest równy -2. Wyznacz ten ciąg.

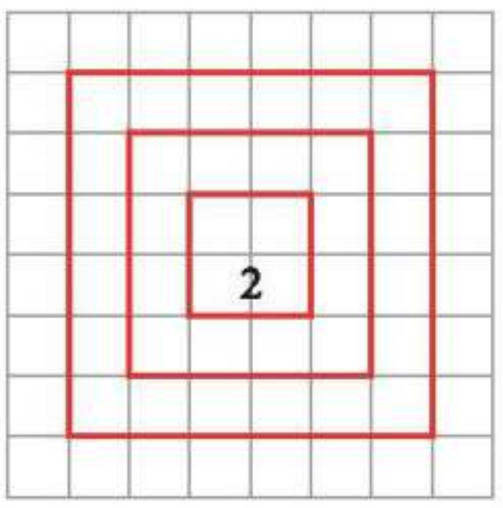


2.16. Rysiek miał ogromne zaległości w czytaniu lektur z języka polskiego. Przyrzekł więc sobie, że w klasie maturalnej każdego dnia poświęci trochę czasu literaturze. Zaczął od pół godziny 1 września i postanowił każdego następnego dnia czytać o 10 minut dłużej niż poprzedniego. Do ilu minut czytania dziennie doszedłby w tym systemie po 3 miesiącach?

2.17. Serial *Myślenie szkodzi* emitowany jest sześć razy w tygodniu. Pan Ferdynand Koliberek może oglądać go tylko w soboty. Obejrzał odcinek pięćdziesiąty siódmy. Czy obejrzy odcinek setny?

2.18. Na rysunku przedstawione są kwadraty o bokach, których długości tworzą ciąg arytmetyczny.

a) Czy obwody narysowanych kwadratów tworzą ciąg arytmetyczny?
b) Czy pola tych kwadratów tworzą ciąg arytmetyczny?



2.19. Wyznacz taką liczbę x, aby ciąg 23, x, 33 był ciągiem arytmetycznym.

2.20. Wyznacz takie x, aby liczby: $4x^2 - 1$, $6x + 1$, $x^2 + 7$ były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

2.21. Długości boków trójkąta prostokątnego są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego i spełniają podany warunek. Oblicz długości boków tego trójkąta.

a) obwód trójkąta jest równy 48
b) różnica długości przyprostokątnych jest równa 3

2.22. Pan Ignacy handluje używanym sprzętem elektronicznym. Co miesiąc obniża cenę jednego z modeli komputera o a zł. Jeżeli sprzęt nie znajdzie nabywcy w ciągu 10 miesięcy, jest oddawany bezpłatnie fundacji charytatywnej. Cenę początkową komputera ustalono na 1800 zł. W ostatnim miesiącu pan Ignacy chciałby sprzedać go za 450 zł.



a) Jaka powinna być wielkość a?
b) Za ile można ten komputer kupić w trzecim miesiącu oferty?
c) W którym miesiącu cena komputera jest niższa o 50% od ceny początkowej?

2.23. Podaj równanie prostej zawierającej wykres ciągu arytmetycznego (a_n)
a) o wyrazie $a_1 = 1$ i różnicy $r = -3$.
b) o wyrazach $a_3 = 4$ i $a_5 = 10$.

2.24. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = (2-n)^2$. Czy ciąg $c_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem arytmetycznym?

* **2.25.** Wiadomo, że (a_n) i (b_n) są ciągami arytmetycznymi. Zbadaj, czy ciąg o wyrazie ogólnym c_n jest ciągiem arytmetycznym.
a) $c_n = a_n + b_n$ b) $c_n = a_n - b_n$ c) $c_n = a_n \cdot b_n$

* **2.26.** Sprawdź, czy ciąg o wyrazie ogólnym $c_n = a_n + b_n$ jest ciągiem arytmetycznym.
a) $a_n = (n+1)^2$ $b_n = 1 - n^2$
b) $a_n = n^2 + 3n - 1$ $b_n = (1-n)(2+n)$
c) $a_n = (n+2)^2$ $b_n = n^2 - 2$
d) $a_n = 2 + (n+3)^2$ $b_n = 2 - (n+3)^2$

* **2.27.** W ciągu arytmetycznym (a_n) mamy: $a_m = m^2$ oraz $a_k = k^2$ dla pewnych liczb k i m $(m \neq k)$. Oblicz różnicę r tego ciągu.

* **2.28.** W ciągu arytmetycznym (a_n) mamy: $a_m = k$ oraz $a_k = m$ dla pewnych liczb k i m $(m \neq k)$. Oblicz różnicę r tego ciągu oraz wyraz a_p.

2.29. W trójwyrazowym ciągu arytmetycznym środkowy wyraz jest równy 0. Ile wynosi suma wszystkich wyrazów tego ciągu?

* **2.30.** Wypisz wszystkie skończone ciągi arytmetyczne o wyrazach całkowitych, których pierwszym wyrazem jest liczba 5, a ostatnim liczba 17.

D **2.31.** Czy nieskończony ciąg arytmetyczny może mieć
a) dokładnie sto wyrazów dodatnich? b) dokładnie sto wyrazów równych zero?
Odpowiedź uzasadnij.

D **2.32.** Ciąg (a_n) jest nieskończonym ciągiem arytmetycznym rosnącym, którego wyrazy są liczbami naturalnymi. Wykaż, że zachodzi nierówność $a_{100} + a_{200} \geqslant 298$.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Który z podanych ciągów nie jest ciągiem arytmetycznym?

A. 15, 18, 21, 24

B. $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3$

C. $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}$

D. $0, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$

2. Szósty wyraz pewnego ciągu arytmetycznego jest równy 17, a dziesiąty jest równy 29. Wskaż drugi wyraz tego ciągu.

A. 6 **B.** -3 **C.** 5 **D.** 2

3. Piąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy m, a jedenasty n. Jaką postać ma ósmy wyraz tego ciągu?

A. $\frac{n-m}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}(m+n)$ **C.** $\frac{1}{3}(m+n)$ **D.** $\frac{m-n}{3}$

4. Dany jest nieskończony ciąg arytmetyczny (a_n).
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Zachodzi równość $2a_{30} = a_{20} + a_{40}$.

B. Ciąg (b_n) o wzorze ogólnym $b_n = a_n^2$ jest arytmetyczny.

C. Ciąg (c_n) o wzorze ogólnym $c_n = \sqrt{2}a_n - \sqrt{7}$ jest arytmetyczny.

5. Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 12, a siódmy wyraz jest równy 32. Wyznacz piąty wyraz tego ciągu.

6. Wyznacz taką wartość x, aby liczby 84, x, 138 były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

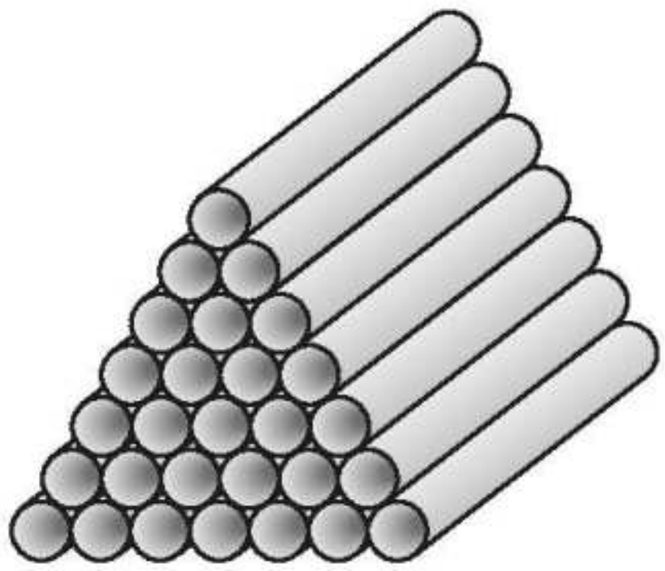
7. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) o wyrazach całkowitych pierwszy wyraz $a_1 = 4$, a jeden z wyrazów ciągu jest równy 16. Ile jest ciągów o takich własnościach?

3. Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Umiejętności:

- stosowanie wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Wyobraźmy sobie, że na placu budowy składowane są rury kanalizacyjne w piramidach, jak na rysunku. Osoba planująca pracę powinna wiedzieć, ile rur liczy jedna taka piramida. Nietrudno zauważyć, że każde wyższe piętro piramidy ma o jedną rurę mniej niż to, na którym jest oparte, a na szczycie leży jedna rura. Ile jest wszystkich rur w jednej piramidzie?
Obliczmy: $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$.



Umiejętność sumowania wyrazów ciągu jest potrzebna w różnych zadaniach, także praktycznych.

Oznaczmy sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n):

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Zatem:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \text{ itd.}$$

Twierdzenie

Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Założenie

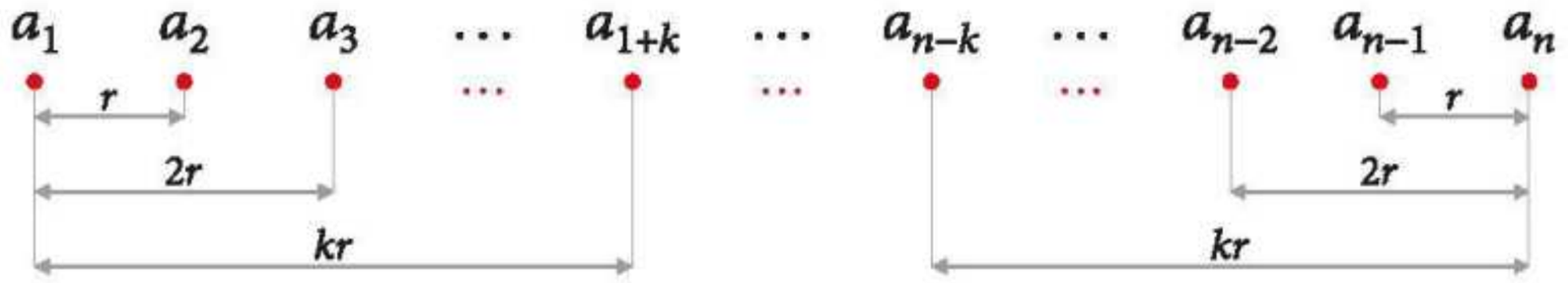
(a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r oraz $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.

Teza

Dla każdego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ prawdziwa jest równość: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Dowód

W ciągu arytmetycznym $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ o różnicy r mamy:



$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + r) + (a_n - r) = a_1 + a_n$$
$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2r) + (a_n - 2r) = a_1 + a_n$$

Ogólnie – dla $k \in \mathbf{N}$ i $1 < k < n$ mamy:

$$a_{1+k} + a_{n-k} = (a_1 + kr) + (a_n - kr) = a_1 + a_n$$

czyli suma wyrazów jednakowo oddalonych od wyrazu pierwszego i ostatniego jest stała i równa się sumie wyrazu pierwszego i ostatniego.

Zapiszmy na dwa sposoby sumę n wyrazów:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \end{cases}$$

Dodajemy stronami obie równości i otrzymujemy:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Po prawej stronie mamy n składników, z których każdy jest równy $a_1 + a_n$.

Stąd:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Koniec dowodu

Liczbę rur w piramidzie można było zatem wyznaczyć dużo prościej:

$$\frac{7+1}{2} \cdot 7 = 28$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego można zapisać w innej postaci. Korzystamy ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + (a_1 + (n-1)r)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

i otrzymujemy:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Przykład 1

Obliczymy sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100.

Rozwiązanie

Liczby naturalne od 1 do 100 tworzą ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_1 = 1$, różnica $r = 1$ oraz $a_{100} = 100$. Zatem:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = 5050$$

Odp.: Szukana suma jest równa 5050.

Przykład 2 ◀ zad. 3.2

Wyznaczymy sumę trzydziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_1 = 17$ i różnica $r = -\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Obliczamy trzydziesty wyraz ciągu:

$$a_{30} = a_1 + 29r = 17 + 29 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}$$

$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30$, więc:

$$S_{30} = \frac{17 + 2\frac{1}{2}}{2} \cdot 30 = 19\frac{1}{2} \cdot 15 = 292\frac{1}{2}$$

Odp.: $S_{30} = 292\frac{1}{2}$

Przykład 3 ◀ zad. 3.4, 3.5

Obliczymy sumę wyrazów $a_7 + a_8 + \ldots + a_{19} + a_{20}$ ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_1 = 14$ i różnica $r = -3$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że:

$$a_7 + a_8 + \ldots + a_{19} + a_{20} = S_{20} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_6) = S_{20} - S_6$$

Mamy:

$$a_{20} = 14 + 19 \cdot (-3) = -43, \quad a_6 = 14 + 5 \cdot (-3) = -1$$

Zatem:

$$S_{20} = \frac{14 - 43}{2} \cdot 20 = -290, \quad S_6 = \frac{14 - 1}{2} \cdot 6 = 39$$

$$a_7 + a_8 + \ldots + a_{19} + a_{20} = S_{20} - S_6 = -290 - 39 = -329$$

Odp.: Szukana suma jest równa -329.

Przykład 4

Wypożyczalnia rowerów jest czynna od 9^{00} do 20^{00}. Wypożyczenie roweru na godzinę kosztuje 3 zł, a każda następna godzina jest tańsza o 20 gr od poprzedniej. Ile kosztuje wypożyczenie roweru na jeden dzień?



Rozwiązanie

Od 9^{00} do 20^{00} jest 11 godzin. Mamy więc obliczyć sumę jedenastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_1 = 3$ i różnica $r = -0{,}2$.

Najpierw wyznaczamy ostatni składnik sumy.

$$a_{11} = a_1 + 10r = 3 + 10 \cdot (-0{,}2) = 1$$

Oznacza to, że za jedenastą godzinę wypożyczenia roweru płacimy złotówkę.

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{3 + 1}{2} \cdot 11 = 22$$

Odp.: Za cały dzień musimy zapłacić 22 zł.

Przykład 5 ◀ zad. 3.13

Lewa strona równania $(2x + 3) + (4x + 3) + \ldots + (30x + 3) = 105$, $x \neq 0$, jest sumą wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego. Rozwiążemy to równanie.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że $a_1 = 2x + 3$, $a_2 = 4x + 3$.

$r = (4x + 3) - (2x + 3) = 2x$ ⟵ różnica $r = a_2 - a_1$

Należy teraz obliczyć, którym wyrazem rozpatrywanego ciągu jest ostatni składnik sumy.

$30x + 3 = 2x + 3 + (n - 1) \cdot 2x$ ⟵ $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$30x = 2x + n \cdot 2x - 2x$ ⟵ $x \neq 0$

$n = 15$

Lewa strona równania jest sumą piętnastu wyrazów ciągu arytmetycznego.

$S_{15} = 105$

$\frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = 105$

$\frac{(2x + 3) + (30x + 3)}{2} \cdot 15 = 105$, stąd $x = \frac{1}{4}$

Odp.: Rozwiązaniem tego równania jest liczba $\frac{1}{4}$.

Przykład 6 ◀ zad. 3.14, 3.15

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = 2$ i różnicy $r = 3$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby przekroczyć 100?

Rozwiązanie

Szukamy odpowiedzi na pytanie, dla jakiej najmniejszej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $S_n > 100$.

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n > 100$$

Ponieważ $a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 1$, otrzymujemy:

$$\frac{3n + 1}{2} \cdot n > 100$$

$$3n^2 + n - 200 > 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 200 = 2401, \ \sqrt{\Delta} = 49$$

$$n_1 = \frac{-1 - 49}{6} = -\frac{25}{3}, \ n_2 = \frac{-1 + 49}{6} = 8$$

Zatem $3n^2 + n - 200 > 0$ dla $n \in \left(-\infty; -\frac{25}{3}\right) \cup (8; \infty)$.

Ponieważ $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, otrzymujemy rozwiązanie: $n \in \{9, 10, 11, \ldots\}$.

Odp.: Trzeba dodać co najmniej 9 wyrazów.

Zauważmy, że przekształcenie wzoru $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ do postaci $\frac{S_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2}$ prowadzi do poniższego wniosku.

Wniosek

Średnia arytmetyczna wszystkich wyrazów skończonego n-wyrazowego ciągu arytmetycznego jest równa średniej arytmetycznej wyrazów: pierwszego i ostatniego.

Zadania

3.1. Wiadomo, że dla pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) suma $S_{30} = 252$, a suma $S_{31} = 296$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $a_{31} = 44$

B. Średnia arytmetyczna początkowych trzydziestu wyrazów tego ciągu wynosi 126.

C. Ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

3.2. Wyznacz sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r.

a) $a_1 = 3$ $r = 2$ $n = 8$
b) $a_1 = -10$ $r = 3$ $n = 20$
c) $a_1 = 50$ $r = -\frac{1}{2}$ $n = 17$
d) $a_1 = 4{,}35$ $r = 0$ $n = 100$
e) $a_1 = 35$ $r = -2$ $n = 7$
f) $a_1 = \sqrt{2}$ $r = 2\sqrt{2}$ $n = 5$
g) $a_1 = 3\frac{1}{2}$ $r = -\frac{1}{4}$ $n = 8$
h) $a_1 = 0{,}2$ $r = 0{,}1$ $n = 12$

3.3. Oblicz sumę wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego.

a) 6, 9, 12, ..., 138
b) 2, 6, 10, ..., 202
c) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, \ldots, -18\frac{1}{2}$
d) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \ldots, 22\sqrt{3}$

3.4. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz $a_1 = -5$ i różnica $r = 4$. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu od jedenastego do trzydziestego włącznie.

3.5. Dla ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie $a_1 = 3$ i różnicy $r = 1$ oblicz
a) sumę początkowych pięćdziesięciu wyrazów.
b) sumę wyrazów od a_{20} do a_{40}.

3.6. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych
a) trzycyfrowych.
b) mniejszych od 100 i podzielnych przez 9.
c) dwucyfrowych podzielnych przez 4.

3.7. Oblicz średnią arytmetyczną liczb 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

3.8. Oblicz średnią arytmetyczną wszystkich nieparzystych liczb dwucyfrowych.

3.9. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz $a_1 = 3$ i różnica $r = 8$. Oblicz sumę tych dwunastu spośród początkowych wyrazów tego ciągu, których numery są liczbami nieparzystymi.

3.10. Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r, w którym
a) $S_n = -5{,}5$, $a_1 = -3$, $a_n = 2$.
b) $S_n = 585$, $a_1 = 57$, $a_n = 33$.
c) $S_n = 126$, $a_1 = 31$, $r = -4$.
d) $S_n = -228$, $a_1 = -18$, $r = -3$.

3.11. W ciągu arytmetycznym (a_n) piąty wyraz jest równy 17, a wyraz dwudziesty czwarty jest od niego $4\frac{6}{17}$ razy większy. Oblicz sumę wyrazów stojących między tymi wyrazami.

3.12. Ciąg arytmetyczny (a_n) ma 10 wyrazów. Suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 25, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 15. Wyznacz ten ciąg.

3.13. Lewa strona równania jest sumą wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego. Rozwiąż to równanie.

a) $x + (x + 2) + (x + 4) + \ldots + (x + 24) = 143$

b) $0{,}5 + (0{,}5 + x) + \ldots + (0{,}5 + 19x) = -180$

c) $7 + 9 + 11 + \ldots + x = 432$

d) $x + (x + 3) + \ldots + (x + 54) = 570$

e) $-7 + 1 + 9 + \ldots + (x + 1) = 119$

3.14. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_1 = -10$ i różnica $r = 3$. Zbadaj, czy istnieje liczba naturalna n spełniająca podany warunek. Jeśli tak, to ją podaj.

a) $S_n = 279$ b) $S_n = 510$

3.15. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz $a_1 = 5$ i różnica $r = 2$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać 192?

3.16. Między liczby 38 i 26 wstaw pięć liczb tak, aby razem z danymi tworzyły ciąg arytmetyczny. Oblicz sumę wszystkich siedmiu liczb.

3.17. Ile liczb trzeba wstawić między 6 i −20, aby otrzymać ciąg arytmetyczny, dla którego suma wszystkich wyrazów jest równa −140?

3.18. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 3, a suma kwadratów liczb skrajnych jest równa 20. Wyznacz te liczby.

* **3.19.** Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy $r = 4$ jest równa 78, a suma początkowych $n + 4$ wyrazów tego ciągu jest równa 210. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu oraz n.

* **3.20.** W malejącym pięciowyrazowym ciągu arytmetycznym iloczyn wyrazów skrajnych jest równy 260, a suma pozostałych wyrazów wynosi 54. Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu.

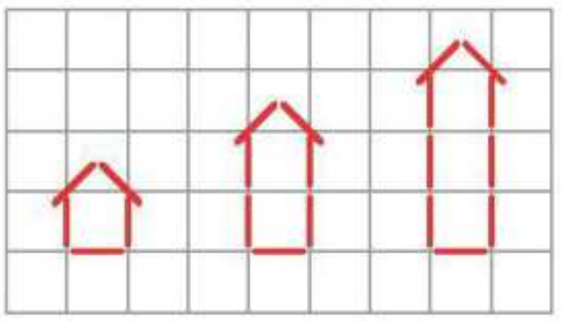
3.21. W oblężonym Zbarażu było 1000 beczek prochu. Pierwszego dnia zużyto ich 100, ale każdego następnego zużywano o 5 beczek mniej. Po ilu dniach zapas prochu się skończył?



3.22. Tomek ma pomalować 36 m^2 ściany. Przez pierwsze 15 minut pomalował 4 m^2, a potem w czasie każdego kolejnego kwadransa malował o 0,2 m^2 mniej niż przez poprzedni kwadrans. Czy zdąży skończyć pracę w ciągu 3 godzin?

3.23. Mateusz uczył się słówek z języka obcego. Zaczął od 40 i każdego następnego dnia zmniejszał liczbę słówek o 2. Czy w ten sposób opanował 330 słówek? Jeśli tak, to po ilu dniach?

3.24. Ola układa z patyczków domki tak, jak na rysunku. Ile patyczków potrzebuje na ułożenie ciągu dziesięciu domków? Ile domków tworzących taki ciąg można ułożyć z 400 patyczków?



3.25. W poniedziałek kioskarz wziął do sprzedaży 20 egzemplarzy nowego dziennika. Każdego następnego dnia (poza niedzielą) zwiększał liczbę egzemplarzy o 5. Po pewnym czasie rozliczył się z siecią kolportażu za pobrane 1470 egzemplarzy gazety. Po ilu dniach od rozpoczęcia sprzedaży nastąpiło rozliczenie?

3.26. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r. Jakimi liczbami należy zastąpić ?, aby otrzymać prawdziwe zależności?

	a_1	r	n	a_n	S_n
a)	7	−5	10	?	?
b)	?	5	7	27	?
c)	?	?	13	25	91
d)	−5	4	?	451	?
e)	2	−2	?	?	−70

D **3.27.** Wykaż, że suma $k+1$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2n-1$ jest równa $(k+1)^2$.

3.28. Dopisz trzy następne wyrazy ciągu arytmetycznego i oblicz sumę S_5.

a) $\sqrt{12}+1,\ \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{18},\ \frac{2}{\sqrt{2}-1}$

c) $|1-2\sqrt{5}|,\ \frac{5}{\sqrt{5}}$

d) $|2-\sqrt{27}|,\ \frac{11}{2\sqrt{3}+1}$

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż wartość sumy $21 + 22 + 23 + \ldots + 49$.

A. 115 **B.** 980 **C.** 1015 **D.** 1050

2. Suma pierwszych siedmiu wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 35. Wynika z tego, że

A. $a_1 = 5$. **B.** $a_3 = 5$. **C.** $a_4 = 5$. **D.** $a_7 = 5$.

3. Wskaż sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n).

A. $\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot n$ **B.** $\frac{a_{n-1} + a_n}{2} \cdot n$ **C.** $\frac{a_2 + a_{n-2}}{2} \cdot n$ **D.** $\frac{a_2 + a_{n-1}}{2} \cdot n$

4. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, w którym $a_1 = \frac{1}{3}$ i suma $S_{17} = 51$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Różnicą tego ciągu jest $r = \frac{1}{3}$.

B. Średnia arytmetyczna początkowych siedemnastu wyrazów tego ciągu jest liczbą pierwszą.

C. $a_{17} = \frac{17}{3}$

5. W ciągu arytmetycznym (a_n) pierwszy wyraz $a_1 = 2$ i różnica $r = \frac{1}{2}$. Oblicz sumę dziewięciu kolejnych wyrazów tego ciągu, z których pierwszym jest wyraz a_3.

6. Sklep meblowy oferuje zakup mebli na raty za 8400 zł (w tę kwotę wliczono już odsetki). Spłaty rat można dokonać na dwa sposoby:

- wariant A: pierwsza rata będzie równa 1120 zł, a każda następna będzie o 20 zł niższa od poprzedniej,
- wariant B: wszystkie raty będą równe i wyniosą $8\frac{1}{3}\%$ ceny 8400 zł.

Ile będzie rat w przypadku wariantu A i ile wyniesie najmniejsza rata? Ile będzie równa rata i ile rat trzeba będzie spłacić w przypadku wariantu B?

D **7.** Wykaż, że ciąg (a_n), którego suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem $S_n = n^2 + 3n$ dla każdego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, jest ciągiem arytmetycznym. Podaj jego pierwszy wyraz a_1 i różnicę r.

4. Ciąg geometryczny

Umiejętności:

- rozpoznawanie, czy dany ciąg jest geometryczny
- stosowanie wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego

Kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego powstają przez dodanie do wyrazu poprzedniego pewnej stałej wartości. Jeśli dodawanie zastąpimy mnożeniem, to otrzymamy drugi charakterystyczny rodzaj ciągu – ciąg geometryczny. W tym ciągu zamiast stałej różnicy między wyrazami mamy stały iloraz kolejnych wyrazów.

Definicja

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg liczbowy o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy wyraz, oprócz pierwszego, powstaje w wyniku pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę q nazywaną **ilorazem** ciągu.

Jeżeli (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o danym wyrazie a_1 i ustalonej liczbie $q \in \mathbf{R}$, to prawdziwa jest następująca zależność rekurencyjna:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \text{ dla każdego } n \in \mathbf{N} - \{0\}$$

Szczególnym przypadkiem ciągu geometrycznego jest ciąg postaci $(a, 0, 0, 0, \ldots)$, czyli taki, w którym iloraz $q = 0$ (a również może być równe 0). W dalszych rozważaniach będziemy się zajmowali przede wszystkim takimi ciągami geometrycznymi, w których wszystkie wyrazy są różne od zera.

Przykład 1 ◂ zad. 4.3

Wypiszemy sześć kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o danym pierwszym wyrazie i ilorazie q.

Rozwiązanie

a) $a_1 = -7,\ q = 1$ $\quad -7, -7, -7, -7, -7, -7$

b) $a_1 = 2,\ q = -3$ $\quad 2, -6, 18, -54, 162, -486$

c) $a_1 = 1,\ q = 2$ $\quad 1, 2, 4, 8, 16, 32$

d) $a_1 = 80,\ q = \frac{1}{2}$ $\quad 80, 40, 20, 10, 5, \frac{5}{2}$

e) $a_1 = -1,\ q = \frac{1}{3}$ $\quad -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, -\frac{1}{243}$

Przykład 2

W pewnym doświadczeniu bakterie podwajają swoją liczebność co 3 godziny. Jeśli na początku było ich k, to po kolejnych trzygodzinnych okresach ich liczebność będzie równa:

$$2k,\ 4k,\ 8k,\ 16k,\ 32k,\ 64k,\ 128k,\ 256k,\ \ldots$$

Są to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego.

Przykład 3

Jeżeli ograniczmy dziedzinę funkcji wykładniczej $f(x) = 2^{x-3}$ do zbioru liczb naturalnych dodatnich, to otrzymamy ciąg o wzorze ogólnym:

$$a_n = 2^{n-3}$$

Obliczmy jego początkowe wyrazy.

$$a_1 = \frac{1}{4},\quad a_2 = \frac{1}{2},\quad a_3 = 1,\quad a_4 = 2,\quad a_5 = 4$$

Jest to ciąg geometryczny, którego iloraz jest równy 2.

Wzór ogólny ciągu geometrycznego

Wzór ogólny ciągu geometrycznego można uzyskać podobnie jak w przypadku ciągu arytmetycznego.

W ciągu arytmetycznym:

$$a_n = a_1 + \underbrace{r + r + r + \ldots + r}_{(n-1)\text{ składników}} = a_1 + (n-1)r$$

W ciągu geometrycznym:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$\ldots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{(n-1)\text{ czynników}} = a_1 q^{n-1}$$

Twierdzenie

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Na przykład w ciągu geometrycznym:

- (a_n), w którym $a_1 = 3$ i iloraz $q = 4$:
  $a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 3 \cdot 4^9 = 786\,432$
- (b_n), w którym $b_1 = 10$ i iloraz $q = -0{,}3$:
  $b_{12} = b_1 q^{11} = 10 \cdot (-0{,}3)^{11} = -0{,}0000177147$
- (c_n), w którym $c_1 = -\frac{1}{2}$ i iloraz $q = 2$:
  $c_{11} = c_1 q^{10} = -\frac{1}{2} \cdot 2^{10} = -512.$

Przykład 4 ◀ zad. 4.5, 4.6

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy $a_2 = -3$ oraz $a_5 = -\frac{3}{8}$. Wyznaczymy wzór ogólny tego ciągu.

Rozwiązanie

$a_2 = a_1 \cdot q = -3$

$a_5 = a_1 \cdot q^4 = -\frac{3}{8}$

Z powyższych równości wynika, że $a_1 \cdot q \neq 0$. Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} a_1 \cdot q = -3 \\ a_1 \cdot q^4 = -\frac{3}{8} \end{cases}$$ ⟵ dzielimy stronami pierwsze równanie przez drugie

$\frac{1}{q^3} = 8$, stąd $q = \frac{1}{2}$, zatem $a_1 = -6$.

$a_n = a_1 q^{n-1} = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{6}{2^{n-1}}$

Odp.: $a_n = -\frac{6}{2^{n-1}}$

Przykład 5

Pewien wirus komputerowy przenosi się za pośrednictwem poczty elektronicznej. Jeśli przyjmiemy, że każdy, kto dostał zainfekowaną wiadomość, prześle ją swoim trzem znajomym posiadającym niezainfekowane komputery, to liczba nowych zarażonych komputerów po kolejnych krokach jest równa odpowiednio 3, 9, 27, 81, ... Są to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 1$ i iloraz $q = 3$. Obliczymy dwudziesty wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie

$a_{20} = a_1 q^{19} = 1 \cdot 3^{19} \approx 1{,}162 \cdot 10^9$

Po dwudziestu krokach jeden komputer mógłby więc zarazić ponad miliard innych!

Liczby otrzymane w wyniku takich obliczeń mogą być zaskakująco duże. W takich sytuacjach często mówi się, że jakieś zjawisko szerzy się w **postępie geometrycznym**. Nazwa ta wzięła się od używanego dawniej określenia ciągu – „postęp".

Przykład 6

Każdy z nas ma 1 ojca, 2 dziadków, 4 pradziadków, 8 prapradziadków itd. Zatem liczba naszych męskich przodków $n + 1$ pokoleń wstecz powinna być równa 2^n (ciąg geometryczny). Jeśli przyjmiemy około 25 lat na jedno pokolenie, otrzymamy liczbę około 2^{40} naszych męskich przodków żyjących w czasach Bolesława Chrobrego (1000 lat = 40 · 25 lat).



Problem w tym, że $2^{40} \approx 1100$ miliardów, czyli ponad sto razy tyle, ile liczy obecna ludność Ziemi. A przecież nie uwzględniliśmy żadnych przodków żeńskich! Wyjaśnienie nie jest trudne. W rzeczywistości naszych przodków nie było aż tylu. Gałęzie drzewa genealogicznego każdego z nas bardzo często zrastają się ze sobą. Wielu przodków liczyliśmy kilka razy, raz np. jako praprapra. . . dziadka ze strony matki, raz jako praprapra. . . dziadka ze strony ojca.

Przykład 7

Sporządzimy wykres ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = 9$ i iloraz $q = \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie

$$a_2 = 3,\ a_3 = 1,\ a_4 = \frac{1}{3},\ a_5 = \frac{1}{9} \text{ itd.}$$

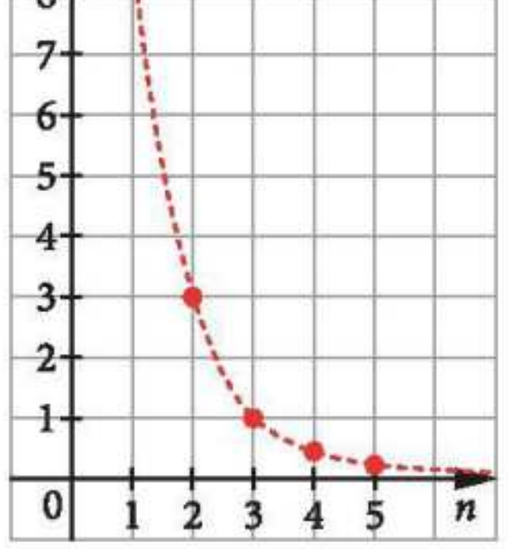
Punkty wykresu układają się wzdłuż charakterystycznej krzywej – wykresu pewnej funkcji wykładniczej. Aby znaleźć jej równanie, popatrzmy na wzór ogólny ciągu:

$$a_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$$

Ciąg geometryczny jest związany z funkcją wykładniczą, podobnie jak ciąg arytmetyczny z funkcją liniową.



Własności ciągu geometrycznego

Zastanówmy się, kiedy ciąg geometryczny (a_n) o wszystkich wyrazach różnych od zera jest monotoniczny. Badanie znaku różnicy:

$$a_{n+1} - a_n = a_1 q^n - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1}(q-1)$$

prowadzi do następującego wniosku.

Ciąg liczbowy, który ma na zmianę wyrazy dodatnie i ujemne, nazywamy **ciągiem naprzemiennym**.

Wniosek

Dany jest ciąg geometryczny o wzorze ogólnym $a_n = a_1 q^{n-1}$ taki, że $a_1 \cdot q \neq 0$.

- Jeżeli $q > 1$, to ciąg (a_n) jest malejący dla $a_1 < 0$, rosnący dla $a_1 > 0$.
- Jeżeli $0 < q < 1$, to ciąg (a_n) jest rosnący dla $a_1 < 0$, malejący dla $a_1 > 0$.
- Jeżeli $q = 1$, to (a_n) jest ciągiem stałym, czyli monotonicznym.
- Jeżeli $q < 0$, to sąsiednie wyrazy ciągu mają różne znaki i taki ciąg jest niemonotoniczny.

W ciągu arytmetycznym każdy wyraz jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich. Charakterystyczną własność mają również wyrazy ciągu geometrycznego. Jeżeli wszystkie wyrazy geometrycznego ciągu (a_n) są różne od zera, to dla dowolnego $n > 1$ (poza numerem ostatniego wyrazu w ciągu skończonym) prawdziwe są równości:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ oraz } \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Zatem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

czyli:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Powyższa równość jest prawdziwa również w sytuacji, gdy (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wszystkich (lub o wszystkich poza pierwszym) wyrazach równych 0.

Twierdzenie

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), $n > 1$, prawdziwa jest zależność:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Jeśli wyrazy ciągu geometrycznego są dodatnie, to każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest średnią geometryczną wyrazów z nim sąsiadujących, czyli $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$.

Średnią geometryczną dwóch liczb nieujemnych a i b nazywamy liczbę $\sqrt{ab}$.

Powyższy wniosek można uogólnić, postępując podobnie jak w wypadku średniej arytmetycznej w ciągu arytmetycznym. Jeżeli wyrazy geometrycznego ciągu (a_n) są dodatnie, to $a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$ dla wszystkich $k < n$ i $k, n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

Bezpośrednio z definicji wynika również, że jeżeli w zbiorze trzech różnych od 0 liczb $\{a, b, c\}$ kwadrat jednej z nich jest równy iloczynowi dwóch pozostałych, to liczby te tworzą ciąg geometryczny, np.:

- jeżeli $a^2 = b \cdot c$, to geometryczne są ciągi b, a, c oraz c, a, b,
- jeżeli $b^2 = a \cdot c$, to geometryczne są ciągi a, b, c oraz c, b, a itd.

Jeśli w ciągu geometrycznym (a_n) wszystkie wyrazy są różne od 0 oraz jeśli $k < l$, to:

$$\frac{a_l}{a_k} = q^{l-k}$$

Aby udowodnić tę zależność, można skorzystać ze wzoru ogólnego ciągu geometrycznego.

Przykład 8 ◀ zad. 4.9, 4.10

Jaką liczbę należy wstawić pomiędzy 3 i 9, aby otrzymać trójwyrazowy ciąg geometryczny?

Rozwiązanie

Oznaczmy szukaną liczbę x. Ciąg $3, x, 9$ jest geometryczny, gdy:

$$x^2 = 3 \cdot 9$$

Zatem $x = 3\sqrt{3}$ lub $x = -3\sqrt{3}$.

Odp.: $3\sqrt{3}$ lub $-3\sqrt{3}$

Przykład 9 ◀ zad. 4.19

Między liczby -5 i 45 wstawimy takie dwie liczby x, y, aby ciąg $-5, x, y$ był ciągiem arytmetycznym, a ciąg $x, y, 45$ – ciągiem geometrycznym.

Rozwiązanie

Ciąg $-5, x, y$ jest ciągiem arytmetycznym, gdy $x = \frac{-5 + y}{2}$.

Ciąg $x, y, 45$ jest ciągiem geometrycznym, gdy $y^2 = 45x$.

Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5+y}{2} \\ y^2 = 45x \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = \dfrac{-5+y}{2} \\ y^2 = 45 \cdot \dfrac{-5+y}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5+y}{2} \\ 2y^2 - 45y + 225 = 0 \end{cases} \qquad \longleftarrow \Delta = 225$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5+y}{2} \\ y_1 = \dfrac{15}{2}, \quad y_2 = 15 \end{cases}$$

Zadanie ma więc dwa rozwiązania.

Odp.: $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{15}{2}$ lub $x = 5$, $y = 15$

Przykład 10

Wyznaczymy wyrazy ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich: 3, x, y, z, 12. Ile wynosi iloraz tego ciągu?

Rozwiązanie

Najpierw obliczamy wyraz y.

$$y = \sqrt{3 \cdot 12} = 6 \qquad \longleftarrow a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$$

Teraz możemy wyznaczyć wyrazy x oraz z.

$$x = \sqrt{3y} = \sqrt{3 \cdot 6} = 3\sqrt{2}$$
$$z = \sqrt{y \cdot 12} = \sqrt{6 \cdot 12} = 6\sqrt{2}$$

Iloraz tego ciągu jest równy $\frac{x}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$.

Odp.: wyrazy ciągu: 3, $3\sqrt{2}$, 6, $6\sqrt{2}$, 12, iloraz ciągu: $\sqrt{2}$

Zadania

4.1. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_1 \neq 0$ i iloraz $q < 0$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Dla każdego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} \cdot a_n < 0$.

B. Jeżeli $q < -1$, to ciąg (a_n) jest malejący.

C. Co najmniej dwa wyrazy tego ciągu są dodatnie.

4.2. Które z podanych ciągów są ciągami geometrycznymi?

(a_n): 1, 2, −4, −8, 16

(b_n): 1, −2, 4, −8, 16, −32

(c_n): $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$

(d_n): $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$

4.3. Dane są początkowe dwa wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz trzy kolejne wyrazy tego ciągu.

a) 2, 6 b) $5\sqrt{5}$, 5 c) 4, −2 d) $-\frac{27}{16}, -\frac{9}{8}$

4.4. Jakie liczby należy wstawić w miejsca ?, aby otrzymany ciąg był geometryczny?

a) 2, 4, ?, 16, 32, ?, 128

b) $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, ?, $13\frac{1}{2}$, ?, $121\frac{1}{2}$

c) $\sqrt{5}$, ?, $4\sqrt{5}$, ?, $16\sqrt{5}$, $32\sqrt{5}$

d) $\sqrt{7}$, 7, ?, ?, $49\sqrt{7}$

4.5. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: wyraz a_1, iloraz q i liczba wyrazów n. Oblicz a_n.

a) $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $q = -\sqrt{2}$ $n = 6$

b) $a_1 = 2\sqrt{3}$ $q = \frac{1}{2}$ $n = 4$

c) $a_1 = -100$ $q = 0{,}1$ $n = 3$

d) $a_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $q = 2\sqrt{5}$ $n = 6$

4.6. Dane są dwa wyrazy ciągu geometrycznego (a_n). Podaj wzór ogólny tego ciągu.

a) $a_1 = 3$ $a_6 = 96$

b) $a_2 = 1$ $a_4 = \frac{1}{4}$

c) $a_3 = 3$ $a_5 = 27$

d) $a_4 = -\frac{1}{2}$ $a_6 = -\frac{1}{8}$

4.7. Sprawdź, czy ciąg (a_n) o podanym wzorze ogólnym jest geometryczny.

a) $a_n = \frac{1}{2}n + 1$ b) $a_n = 2^n$ c) $a_n = \left(\sqrt{3}\right)^n$ d) $a_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$

D **4.8.** Wykaż, że liczby $3 + 2\sqrt{2}$, $-1 - \sqrt{2}$, 1 tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz iloraz q tego ciągu.

4.9. Wstaw między liczby a i b taką dodatnią liczbę x, aby ciąg a, x, b był geometryczny.

a) $a = 5$, $b = 75$ b) $a = -3$, $b = -12$ c) $a = \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$

4.10. Wstaw między liczby a i b taką liczbę x, aby ciąg a, x, b był geometryczny.

a) $a = 3$, $b = 27$ b) $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{12}$ c) $a = \sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{3}$

4.11. Wstaw między liczby 16 i 1024 takie liczby x i y, aby ciąg 16, x, y, 1024 był ciągiem geometrycznym.

4.12. Trzeci wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 6, a siódmy 96. Wyznacz wyraz a_1 i iloraz q tego ciągu.

4.13. Piąty wyraz ciągu geometrycznego jest równy 5, natomiast wyrazy szósty i siódmy są równe. Oblicz dziewiąty wyraz tego ciągu.

4.14. Duży arkusz papieru o grubości 0,1 mm został złożony na pół, potem jeszcze raz na pół, ponownie na pół itd. Oblicz hipotetyczną grubość złożonego papieru po 30 złożeniach.

4.15. W salonie samochodowym nowe auto kosztuje 72 342 zł. Od chwili, gdy samochód po zakupie wyjeżdża z salonu, jego wartość systematycznie maleje. Po każdym roku eksploatacji cena spada przeciętnie do 80% ceny poprzedniej. Po ilu latach cena tego samochodu spadnie o ponad 30 000 zł?



4.16. Ile jest liczb trzycyfrowych, których cyfry tworzą ciąg geometryczny? Ile jest liczb czterocyfrowych o tej własności? Jaka jest odpowiedź na takie pytanie dla liczb n-cyfrowych, gdy $n > 4$?

* **4.17.** Wyznacz wszystkie trójwyrazowe ciągi geometryczne o wyrazach naturalnych, których suma wyrazów jest równa 91.

4.18. Trzy liczby są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Suma pierwszej i trzeciej z nich jest równa 20, a kwadrat drugiej jest równy 36. Wyznacz te liczby.

4.19. Dany jest ciąg 2, x, 18, y. Wyznacz x i y tak, aby liczby 2, x, 18 w podanej kolejności tworzyły ciąg geometryczny, a liczby x, 18, y – ciąg arytmetyczny.

* **4.20.** Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 24. Jeżeli pierwszą z nich zmniejszymy o 1, trzecią zwiększymy o 5, a drugą pozostawimy bez zmian, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

* **4.21.** Ciąg składa się z pięciu liczb dodatnich, których suma jest równa 33. Początkowe trzy wyrazy tworzą ciąg arytmetyczny, trzy środkowe tworzą ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny. Drugą liczbą jest 4. Wyznacz wyrazy tego ciągu.

4.22. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q $(q \neq 1)$. Sprawdź, czy ciąg o wzorze ogólnym $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest geometryczny, jeżeli tak – wyznacz jego iloraz.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Dany jest dziewięciowyrazowy ciąg geometryczny o dodatnich wyrazach, w którym pierwszy wyraz jest równy 2, a ostatni wyraz jest równy 162. Szósty wyraz tego ciągu jest równy

A. 36. **B.** $18\sqrt{3}$. **C.** 54. **D.** $36\sqrt{3}$.

2. Która liczba nie jest wyrazem ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 6$ i ilorazie $q = -2$?

A. -3 **B.** 24 **C.** 96 **D.** -192

3. Która para liczb wyznacza malejący ciąg geometryczny (a_n)?

A. $a_1 = \sqrt{2} - 1,\ q = 2$ **C.** $a_1 = \sqrt{2} - 1,\ q = -2$

B. $a_1 = 1 - \sqrt{2},\ q = 2$ **D.** $a_1 = 1 - \sqrt{2},\ q = -2$

4. Dany jest ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_1 \neq 0$ oraz iloraz $q \neq 0$ i $q \neq 1$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Szósty wyraz tego ciągu jest równy $a_4 q^2$.

B. Dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy $a_4 q^5$.

C. Drugi wyraz tego ciągu jest równy $\frac{a_1 a_{11}}{a_{10}}$.

5. Drugi wyraz ciągu geometrycznego jest równy -4, a jego piąty wyraz jest równy $-\frac{1}{2}$. Oblicz ósmy wyraz tego ciągu.

6. Trzy liczby, których suma jest równa 39, są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Jeżeli pierwszą z nich zwiększymy trzykrotnie, drugą zwiększymy dwukrotnie, a trzecią pozostawimy bez zmian, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.

D **7.** Wykaż, że jeżeli dodatnie liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to liczby $\log a,\ \log b,\ \log c$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

5. Suma *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Umiejętności:

- stosowanie wzoru na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego
- stosowanie wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Wyprowadzimy teraz wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. Ponownie korzystamy z oznaczenia sumy n początkowych wyrazów ciągu (a_n):

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q wyraża się wzorem:

- $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ dla $q \neq 1$
- $S_n = n \cdot a_1$ dla $q = 1$

Założenie

(a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q oraz $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.

Teza

Dla każdego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ prawdziwa jest równość: $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ dla $q \neq 1$ oraz $S_n = n \cdot a_1$ dla $q = 1$.

Dowód

- Jeżeli $q = 1$, to (a_n) jest ciągiem geometrycznym stałym. Wówczas wszystkie wyrazy ciągu są równe a_1 i oczywiście $S_n = n \cdot a_1$.
- Jeżeli $q \neq 1$, to sumy kolejnych wyrazów ciągu (a_n) możemy (korzystając ze wzoru na *n*-ty wyraz) zapisać w postaci:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_1 q$$
$$S_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2$$
$$\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \qquad (1)$$

Obie strony ostatniej równości mnożymy przez q:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \qquad (2)$$

Po odjęciu stronami równości (2) od równości (1) otrzymamy:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$$
$$S_n(1-q) = a_1\left(1-q^n\right)$$

Założyliśmy, że $q \neq 1$, więc:

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

Koniec dowodu

Na przykład suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = 6$ i iloraz $q = -3$, wynosi:

$$S_5 = a_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 6 \cdot \frac{1-(-3)^5}{1-(-3)} = 6 \cdot \frac{1+243}{4} = 366$$

Z kolei suma $5 + 5^2 + 5^3 \ldots + 5^{10}$, czyli suma 10 początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = 5$ i iloraz $q = 5$, jest równa:

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} = 5 \cdot \frac{5^{10}-1}{5-1} = 12\,207\,030$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

Przykład 1 ◀ zad. 5.2, 5.3

W ciągu geometrycznym (a_n) o ilorazie $q = \frac{1}{3}$ wyraz $a_1 = -2$, a suma n początkowych wyrazów $S_n = -\frac{80}{27}$. Obliczymy n.

Rozwiązanie

Podstawiamy dane do wzoru $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

$$-\frac{80}{27} = -2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}, \text{ stąd } \frac{40}{27} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{40}{27} \cdot \frac{2}{3} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{80}{81}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{81}$$

Odp.: $n = 4$

Przykład 2

Dwaj bracia otworzyli butelkę wody mineralnej. Starszy nalał do kubka połowę zawartości butelki i ją wypił, potem młodszy połowę tego, co zostało, starszy znów połowę tego, co zostało itd. Kiedy młodszy brat po raz piąty dostał butelkę, wypił już wszystko. Jaką część wody wypił każdy z nich?

Rozwiązanie

Obliczmy, jaką część wody wypił kolejno każdy z braci:

- starszy $\frac{1}{2}$ wody, która była w butelce,
- młodszy $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$,
- starszy $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$,
- młodszy $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ itd.

Starszy brat wypił więc:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 \text{ zawartości butelki}$$

Jest to suma 5 początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = \frac{1}{2}$ i iloraz $q = \frac{1}{4}$. Zatem:

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1023}{1024} = \frac{341}{512}$$

Ponieważ $\frac{341}{512} \approx 66{,}6\%$, dla młodszego pozostało ok. 33,4% zawartości butelki.

Odp.: Starszy brat wypił ok. 66,6% zawartości butelki, a młodszy resztę, czyli ok. 33,4% zawartości.

Przykład 3

Zgodnie z legendą bramin, który wynalazł szachy, zażądał od szacha perskiego tyle ziaren pszenicy, ile znajdzie się na szachownicy, jeśli zostanie pokryta zgodnie z zasadą: na pierwszym polu jedno ziarno, na drugim dwa, na trzecim cztery itd., czyli na każdym następnym dwa razy więcej niż na poprzednim. Szachownica liczy 64 pola, więc liczba ziaren jest sumą 64 wyrazów ciągu geometrycznego, w którym pierwszy wyraz jest równy 1, a iloraz $q = 2$.



Zatem:

$$S_{64} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 18 \cdot 10^{18}$$

Przyjmijmy, że jedno ziarno ma masę ok. 0,03 g. Zgromadzona pszenica ważyłaby więc:

$$0{,}03 \cdot 18 \cdot 10^{18}\ \text{g} = 5{,}4 \cdot 10^{11}\ \text{t} = 540 \text{ miliardów ton}$$

Na świecie zbiera się obecnie co roku ok. 700 milionów ton pszenicy. Na szachownicy powinno się w takim razie zmieścić ponad 700 razy więcej.

Zadania

5.1. Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wyraża się wzorem $S_n = 3 \cdot \frac{1 - 5^n}{4}$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 3.

B. Iloraz tego ciągu jest równy 5.

C. Ten ciąg jest rosnący.

5.2. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o danym pierwszym wyrazie i ilorazie q.

a) $a_1 = 5$ $\quad q = 2$ $\quad n = 6$

b) $a_1 = -27$ $\quad q = \frac{1}{3}$ $\quad n = 5$

c) $a_1 = 8$ $\quad q = 1$ $\quad n = 10$

d) $a_1 = \frac{1}{2}$ $\quad q = -1$ $\quad n = 100$

e) $a_1 = -64$ $\quad q = -2$ $\quad n = 6$

f) $a_1 = \sqrt{2}$ $\quad q = \sqrt{2}$ $\quad n = 8$

g) $a_1 = -2$ $\quad q = 1 - \sqrt{2}$ $\quad n = 3$

h) $a_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ $\quad q = \sqrt{2} - 1$ $\quad n = 4$

5.3. Oblicz sumę wyrazów skończonego ciągu geometrycznego.

a) $3, 3^2, \ldots, 3^6$

b) $6, 3, \ldots, \frac{3}{16}$

c) $\sqrt{3}, 3, \ldots, 27$

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, 8$

e) $3\sqrt{5}, 15, \ldots, 375$

f) $\pi, 2\pi, \ldots, 32\pi$

5.4. Oblicz sumę wszystkich dodatnich dzielników liczby 1024.

5.5. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Wyznacz n.

a) $a_2 = 3\sqrt{3}$ $\quad q = \sqrt{3}$ $\quad S_n = 3\left(40 + 13\sqrt{3}\right)$

b) $a_3 = \frac{4}{3}$ $\quad q = \frac{1}{3}$ $\quad a_n = \frac{4}{243}$

c) $a_1 = 6$ $\quad q = \sqrt{2}$ $\quad a_n = 24$

d) $a_1 = \frac{1}{2}$ $\quad a_3 = 4$ $\quad a_n = 32$

5.6. W ciągu geometrycznym (a_n) o ilorazie q dane są trzy spośród wielkości: a_1, q, k, S_k. Oblicz czwartą z nich.

a) $a_1 = -3, \quad q = \frac{1}{2}, \quad k = 5$

b) $a_1 = 10, \quad q = -2, \quad S_k = 430$

c) $a_1 = -1, \quad k = 4, \quad S_4 = -\frac{40}{27}$

d) $q = 3, \quad k = 5, \quad S_5 = \frac{121}{2}$

5.7. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu geometrycznego, którego suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem $S_n = 4(2^n - 1)$.

5.8. Samochód rozpoczął hamowanie. W ciągu pierwszej sekundy przejechał 20 m, a w ciągu każdej następnej przejeżdżał $\frac{3}{4}$ odległości przebytej w poprzedniej sekundzie. Jaką drogę przebył po 10 sekundach?

5.9. Promienie sześciu rozłącznych kół tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 2. Promień największego z nich jest równy 32 cm. Ile jest równa suma pól tych kół?

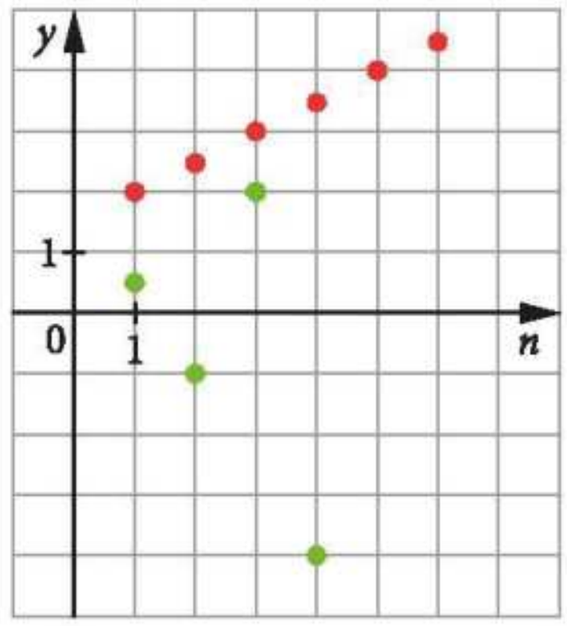


5.10. W ciągu pięciu dni rolnik zaorał 38,75 ha ziemi. Każdego dnia orał kawałek o 50% mniejszy niż powierzchnia zaorana poprzedniego dnia. Jaką powierzchnię zaorał pierwszego dnia?

5.11. W każdym z 8 wielkich pudełek jest 8 dużych pudełek. W każdym dużym pudełku jest 8 średnich pudełek. W każdym średnim pudełku jest 8 małych pudełek, a w każdym małym pudełku jest 8 malutkich pudełek. Ile jest wszystkich pudełek?

5.12. Szef firmy postanowił przyznać premie pięciu najlepszym pracownikom. Wysokość nagród była zróżnicowana w taki sposób, że każda z nich, poczynając od drugiej, była równa 80% poprzedniej. Jaka była wysokość każdej z premii, jeżeli okazało się, że kwota przeznaczona na wszystkie wyniosła 18 909 zł?

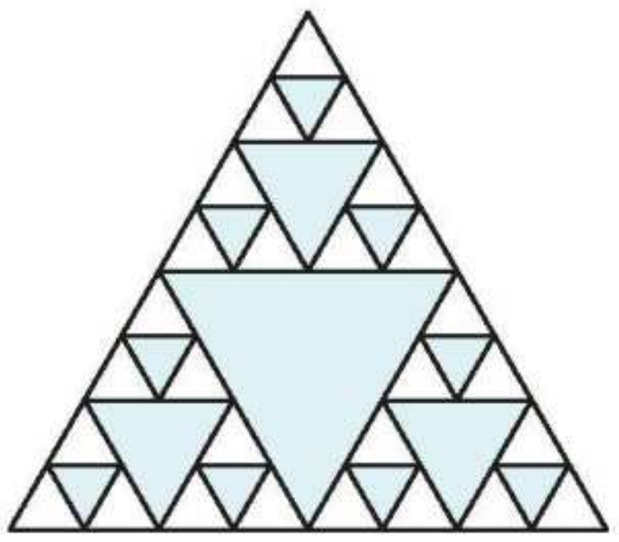
5.13. W równaniu $x + 3x + 9x + \ldots + 3^{n-1}x = 120$ kolejne współczynniki przy niewiadomej x tworzą ciąg geometryczny. Pierwiastkiem równania jest 3. Wyznacz n.



5.14. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów dwóch ciągów: arytmetycznego i geometrycznego. Podaj wzory na wyraz ogólny i sumę n wyrazów S_n każdego z tych ciągów. Czy któreś wyrazy obydwu ciągów są równe?

5.15. W redakcji gazety pracuje równocześnie kilka drukarek. Najmniej wydajna z nich drukuje 13 stron w ciągu 10 minut, a najbardziej wydajna drukuje w tym samym czasie 351 stron. Wszystkie razem wydrukowały 520 stron przez 10 minut. Ile drukarek pracowało i ile stron każda z nich wydrukowała, jeżeli okazało się, że liczby stron wydrukowanych przez poszczególne drukarki utworzyły ciąg geometryczny?

5.16. Dany jest trójkąt równoboczny o boku 1. Połączono środki jego boków i otrzymano cztery trójkąty równoboczne. Środkowy z nich został zamalowany, a każdy z trzech pozostałych znów podzielono na cztery trójkąty. Z każdej czwórki zamalowano środkowy i powtórzono podział pozostałych trójkątów. Całą operację powtórzono 6 razy. Na rysunku przedstawiona jest figura otrzymana z trójkątów zamalowanych w trzech krokach.



a) Wyznacz długość boku trójkąta zamalowanego w szóstym kroku.
b) Oblicz pole zamalowanej figury otrzymanej po sześciu krokach.

5.17. Lewa strona równania jest sumą kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego. Rozwiąż to równanie.

a) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + x = 3\frac{31}{32}$
b) $\frac{1}{2} + 1 + \ldots + x = 127{,}5$
c) $3 - 6 + \ldots - x = -63$
d) $2 + 2\sqrt{2} + \ldots + x = 62 + 30\sqrt{2}$

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Która liczba jest sumą piętnastu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 3$ i $q = -1$?

A. -45 **B.** -3 **C.** 0 **D.** 3

2. W czasie pierwszego festynu na cele charytatywne zebrano 300 zł. W czasie każdego następnego festynu zbierano dwukrotnie więcej niż w czasie poprzedniego. Ile pieniędzy zebrano łącznie podczas pierwszych pięciu festynów?

A. 4500 zł **B.** 4800 zł **C.** 9300 zł **D.** 9900 zł

3. Która liczba jest sumą dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$ i ilorazie $q = -\sqrt{2}$?

A. $93\left(\sqrt{2}+1\right)$ **B.** $93\left(\sqrt{2}-1\right)$ **C.** $93\left(-\sqrt{2}+1\right)$ **D.** $93\left(-\sqrt{2}-1\right)$

4. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 155.

B. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $5 \cdot 2^9$.

C. Suma stu początkowych wyrazów tego ciągu jest podzielna przez 5.

5. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = \frac{1}{2}$ i ilorazie $q = -2$.
Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu geometrycznego.

6. Zamieszczenie całostronicowej reklamy w lokalnym tygodniku kosztuje 125 zł. Za powtórzenie jej w następnym numerze płaci się 80% stawki obowiązującej w poprzednim numerze. Ile łącznie kosztuje zamieszczenie takiej reklamy w pięciu kolejnych numerach?

7. Iloraz ciągu geometrycznego jest równy 3, a suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu wynosi $6\frac{2}{3}$. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu.

6. Oszczędzanie i kredyty w bankach

Umiejętności:

- obliczanie procentu składanego
- obliczanie podatku
- obliczanie zysku z lokat
- obliczanie wysokości rat oraz kosztu kredytu

Procent składany

Z wprowadzonym w poprzednich tematach ciągiem geometrycznym ściśle wiąże się pojęcie procentu składanego, zgodnie z którym obliczane jest oprocentowanie lokat i kredytów w bankach. Przeanalizujemy jego działanie na przykładzie.

Przykład 1

Pewien bank po każdym roku oszczędzania dopisuje odsetki w wysokości 8%*, obliczane od aktualnego na koniec roku stanu konta (tzw. roczna kapitalizacja). Adela wpłaciła 10 000 zł na konto w tym banku. Po pierwszym roku oszczędzania bank dopisał jej 8% z tej kwoty, czyli 800 zł. Po następnym – doliczono kolejne 8%, liczone już od kwoty 10 800 zł, czyli $8\% \cdot 10\,800 = 864$ [zł]. Po dwóch latach Adela miała więc na koncie 11 664 zł. Bank co roku mnoży jej oszczędności przez 1,08.

Zatem dla wpłaconych 10 000 zł będą to w kolejnych latach kwoty:

- po pierwszym roku: $10\,000 \cdot 1{,}08 = 10\,800$ [zł],
- po drugim roku: $10\,800 \cdot 1{,}08 = 10\,000 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}08 = 10\,000 \cdot 1{,}08^2 = 11\,664$ [zł],
- po trzecim roku: $11\,664 \cdot 1{,}08 = 10\,000 \cdot 1{,}08^2 \cdot 1{,}08 = 10\,000 \cdot 1{,}08^3 = 12\,597{,}12$ [zł] itd.

Zauważmy, że:
$a + 8\%a = a + 0{,}08a = 1{,}08a$

Sposób obliczania kapitału po każdym roku powoduje, że kolejne liczby tworzą ciąg geometryczny. Łatwo więc możemy zapisać zależność między liczbą lat a stanem konta Adeli. Otóż po n latach oszczędzania będzie to kwota w wysokości $10\,000 \cdot 1{,}08^n$ zł. Ten system naliczania odsetek nazywamy **procentem składanym**.

---

* Wszystkie dane użyte w przykładach oraz zadaniach dotyczące wysokości stóp procentowych itp. są fikcyjne i służą wyłącznie do ćwiczeń.

Banki muszą obliczać odsetki za pomocą procentu składanego. Gdyby zamiast tego proponowały stałą wielkość (np. 10% wpłaconej kwoty) dopisywaną do oszczędności po każdym roku, tylko najbardziej leniwi lub niedouczeni klienci nie ruszaliby swoich oszczędności. Myślący klient podejmowałby kapitał z odsetkami zaraz po ich naliczeniu, od razu wpłacał powiększoną o odsetki kwotę na konto i tym samym wymuszał na banku procent składany! Bankom przybyłoby tylko dużo kosztownej pracy.

Przykład 2 ◀ zad. 6.8

Liczebność populacji pewnego gatunku owadów zmniejsza się co roku o 5%. Obecnie populacja ta liczy około 500 000 osobników. Obliczymy, ile owadów tego gatunku będzie za 100 lat. Zakładamy, że tendencja spadkowa w tym okresie utrzyma się na takim samym poziomie.

Rozwiązanie

Zmniejszenie pewnej wielkości o 5% oznacza pomnożenie jej przez 0,95. Zatem:

$$500\,000 \cdot 0{,}95^{100} \approx 2960$$

Zauważmy, że:
$a - 5\%a = a - 0{,}05a = 0{,}95a$

Przy podanym tempie spadku liczebności po 100 latach gatunek tych owadów praktycznie zaniknie.

Przykład 3

Gdyby Mieszko I, z myślą o potomkach swoich poddanych, założył fundację „Polska 2000", przeznaczył na ten cel 1 grosz i złożył go w banku oferującym 10% rocznie, to wartość takiej lokaty po 1000 latach byłaby równa:

$$1 \cdot 1{,}1^{1000} \approx 2{,}47 \cdot 10^{41}\ [\text{gr}]$$

Każdy z 36 milionów Polaków otrzymałby około $6{,}86 \cdot 10^{31}$ zł. Taka kwota wypłacona w banknotach stuzłotowych nie zmieściłaby się w sześciennej paczce o krawędzi 100 000 km.

Aby obliczyć np. $1{,}1^{1000}$, trzeba zastosować logarytmy albo użyć kalkulatora naukowego lub komputera. Mniejsze potęgi, np. $1{,}08^{10}$, można oczywiście wyznaczyć za pomocą najprostszego kalkulatora, używając kilkakrotnie mnożenia. W większości modeli da się wykonać taką operację, korzystając wielokrotnie z klawisza „=".

Na przykład łatwo można obliczyć tym sposobem, że $1{,}1^{25} \approx 10{,}8$ i oszacować, że:

$$1{,}1^{1000} = \left(1{,}1^{25}\right)^{40} \approx 10{,}8^{40} > 10^{40}$$

Oszczędzanie w bankach

Klient banku spotyka się z takimi pojęciami jak: stopa procentowa, oprocentowanie stałe lub zmienne, oprocentowanie kredytów, lokat – w skali roku lub miesiąca. Wiemy już, że oprocentowanie kont i lokat jest w bankach obliczane zgodnie z zasadami procentu składanego. Na wysokość oprocentowania, inaczej mówiąc – stopy procentowej, mają wpływ różne czynniki, np.: sytuacja gospodarcza kraju, poziom inflacji, stopień zadłużenia państwa. Ponadto od uzyskanych dochodów (czyli doliczonych do kapitału odsetek) musimy zwykle zapłacić podatek. W roku 2020 wynosił on 19%.

Przykład 4

W styczniu 2012 r. Wanda ulokowała 3000 zł na okres jednego roku w banku, w którym oprocentowanie takiej lokaty wynosiło 2%. Od dopisanych odsetek trzeba było zapłacić 19% podatku. Obliczymy, ile pieniędzy miała Wanda z tej lokaty po upływie roku.

Rozwiązanie

Odsetki dopisano jej w wysokości:

$$2\% \cdot 3000 = 60 \text{ [zł]}$$

Podatek od dochodu (najczęściej od razu odprowadzany do urzędu skarbowego przez bank) był równy:

$$19\% \cdot 60 = 11{,}40 \text{ [zł]}$$

Zatem po upływie roku Wanda podjęła z banku kwotę w wysokości:

$$3000 + 60 - 11{,}40 = 3048{,}60 \text{ [zł]}$$

Odp.: 3048,60 zł

Obciążenie zysków z lokat podatkiem 19-procentowym oznacza w praktyce, że tylko 81% odsetek trafia do kieszeni podatnika. Aby zatem obliczyć zyski w 2020 r., trzeba było wszystkie stopy procentowe mnożyć przez współczynnik 0,81. W dalszych rozważaniach pominiemy zupełnie ten współczynnik – na sposób obliczania kapitału nie ma on żadnego wpływu. Ponadto przyjmiemy zasadę zaokrąglania końcowego wyniku z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku zgodnie z obowiązującymi w matematyce regułami.

Czas, po którym doliczane są odsetki, nosi nazwę **okresu rozrachunkowego** lub **okresu kapitalizacji**. W przykładzie 4 okres ten był równy jeden rok. W praktyce często bywa krótszy.

Przykład 5

Porównajmy trzy rodzaje oszczędzania. Zakładamy w trzech różnych bankach konto – w każdym z kwotą początkową 1000 zł. Interesuje nas zysk po roku oszczędzania. W tabeli podajemy dane dotyczące poszczególnych banków.

	I bank	II bank	III bank
Okres kapitalizacji	jeden rok	pół roku	jeden kwartał
Stopa procentowa	8%	4%	2%
Stan konta po roku (w zł)	$1000 \cdot 1{,}08 = 1080$	$1000 \cdot 1{,}04^2 = 1081{,}60$	$1000 \cdot 1{,}02^4 \approx 1082{,}43$
Zysk (w zł)	80,00	81,60	82,43

Banki, chcąc zachęcić klientów, oferują różne okresy kapitalizacji. Często oprocentowanie podawane jest w stosunku rocznym z dodatkową informacją o okresie kapitalizacji. Jeżeli np. stopa procentowa (w stosunku rocznym) jest równa 10% i okres kapitalizacji wynosi 1 kwartał, to bank co kwartał doliczy do oszczędności 2,5% stanu konta. Trzy warianty z przykładu 5 można więc traktować jako trzy sposoby naliczania odsetek przy stopie procentowej 8% w skali roku i trzech różnych okresach kapitalizacji (rocznej, półrocznej i kwartalnej). Jak widać, przy niskiej stopie procentowej różnice nie są duże.

Przykład 6 ◀ zad. 6.12

Ewa wpłaciła do banku 5000 zł. Obliczymy, ile będzie mieć pieniędzy na koncie po trzech latach, przy rocznej stopie procentowej 2% i kapitalizacji kwartalnej (oczywiście, przy założeniu, że nie dokona w tym czasie żadnych wypłat ani wpłat).

Rozwiązanie

Co kwartał zyski wyniosą:

$$\frac{1}{4} \cdot 2\% = 0{,}5\% \text{ wartości kapitału}$$

Trzy lata to dwanaście kwartałów, więc stan konta po tym okresie będzie równy:

$$5000 \cdot 1{,}005^{12} \approx 5308{,}39 \text{ [zł]}$$

Odp.: 5308,39 zł

W powyższych przykładach założyliśmy, że bank oferuje **oprocentowanie stałe**. W praktyce taka sytuacja zachodzi rzadko. Banki zmieniają wysokość oprocentowania (**oprocentowanie zmienne**) w zależności od wielu czynników – najogólniej mówiąc – w zależności od stanu gospodarki i kondycji państwa. Najczęściej podstawą do określenia wysokości oprocentowania są stopy procentowe ogłaszane przez Radę Polityki Pieniężnej.

Przykład 7 ◂ zad. 6.17

Grzegorz wpłacił na roczną lokatę 4000 zł. Początkowo oprocentowanie lokaty wynosiło 2% w skali roku, ale po dziewięciu miesiącach wzrosło do 2,5% w skali roku. Jaką kwotę miał Grzegorz na swojej lokacie po upływie roku?

Rozwiązanie

Po początkowych dziewięciu miesiącach, czyli $\frac{9}{12}$ roku, odsetki wynosiły:

$$\frac{9}{12} \cdot 2\% \cdot 4000 = 60 \text{ [zł]}$$

Po kolejnych trzech miesiącach odsetki wynosiły:

$$\frac{3}{12} \cdot 2{,}5\% \cdot 4000 = 25 \text{ [zł]}$$

Zatem Grzegorz miał łącznie $4000 + 60 + 25 = 4085$ [zł].

Odp.: 4085 zł

Zazwyczaj klienci banków zakładają konta, na które mogą na bieżąco wpłacać pieniądze i w każdej chwili je wypłacać. Przy takich rachunkach – płatnych na każde żądanie (tzw. rachunki a vista) – odsetki naliczane są za każdy dzień oszczędzania, licząc od następnego dnia po dokonaniu wpłaty do dnia poprzedzającego wypłatę. Oprocentowanie takich rachunków jest z reguły bardzo niskie albo zerowe.

Przykład 8

Obliczymy, jaki zysk przyniesie kwota 1000 zł umieszczona przez 20 dni na rachunku a vista oprocentowanym 0,5% w skali roku.

Rozwiązanie

20 dni to $\frac{20}{360}$, czyli $\frac{1}{18}$ roku bankowego

Rok bankowy ma 360 dni.

Zysk będzie więc równy:

$$0{,}5\% \cdot 1000 \cdot \frac{1}{18} \approx 0{,}28 \text{ [zł]}, \text{ czyli } 28 \text{ gr}$$

Odp.: 28 gr

Lokaty w bankach są z reguły oprocentowane niezbyt wysoko. Można również oszczędzać np. w otwartym funduszu emerytalnym. Fundusze takie inwestują powierzone pieniądze i dlatego zyski z wpłaconych pieniędzy mogą (ale nie muszą!) być dość wysokie. Zgromadzony kapitał powinien być wypłacany klientowi po osiągnięciu wieku emerytalnego w postaci comiesięcznej emerytury. Jej wysokość zależy

od wielu czynników – zgromadzonej kwoty, czasu oszczędzania itp., ale i sytuacji gospodarczej kraju. Zatem może się również zdarzyć, że zamiast spodziewanego zysku klient poniesie stratę – warto sobie z tego zdawać sprawę.

Oczywiście trudno jest planować zyski funduszu na wiele lat do przodu, ale przed zawarciem umowy klientowi najczęściej prezentuje się (przy określonych założeniach początkowych) rachunek symulacyjny.

Przykład 9 ◀ zad. 6.19

Jeżeli założymy, że pewien fundusz osiąga zysk w wysokości 5% rocznie, a klient będzie wpłacał 100 zł miesięcznie przez 25 lat, to – przyjmując roczną kapitalizację – zgromadzi on na rachunku kwotę (w zł):

po pierwszym roku: $1200 \cdot 1{,}05$

po drugim roku: $(1200 \cdot 1{,}05 + 1200) \cdot 1{,}05 =$
$= 1200 \cdot 1{,}05^2 + 1200 \cdot 1{,}05$

po trzecim roku: $\left(1200 \cdot 1{,}05^2 + 1200 \cdot 1{,}05 + 1200\right) \cdot 1{,}05 =$
$= 1200 \cdot 1{,}05^3 + 1200 \cdot 1{,}05^2 + 1200 \cdot 1{,}05$

po czwartym roku: $\left(1200 \cdot 1{,}05^3 + 1200 \cdot 1{,}05^2 + 1200 \cdot 1{,}05 + 1200\right) \cdot 1{,}05 =$
$= 1200 \cdot 1{,}05^4 + 1200 \cdot 1{,}05^3 + 1200 \cdot 1{,}05^2 + 1200 \cdot 1{,}05$ itd.

Po 25 latach klient zgromadzi na swoim koncie kwotę (w zł) równą:

$$1200 \cdot 1{,}05^{25} + 1200 \cdot 1{,}05^{24} + \ldots + 1200 \cdot 1{,}05^2 + 1200 \cdot 1{,}05$$

co inaczej możemy zapisać w postaci:

$$1200 \cdot \left(1{,}05^{25} + 1{,}05^{24} + \ldots + 1{,}05^2 + 1{,}05\right) = 1200 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1 - 1{,}05^{25}}{1 - 1{,}05} \approx 60\,136{,}14 \ \text{[zł]}$$

Suma ta wystarczy do wypłacania emerytury np. w wysokości 1000 zł przez 60 miesięcy, czyli 5 lat (pomijamy fakt, że podczas tego okresu do kwoty pozostającej na koncie funduszu nadal będą dopisywane odsetki).

Inwestując w fundusze towarzystwa funduszy inwestycyjnych, klient kupuje w biurze maklerskim tzw. jednostki udziałowe. Są to umowne „cegiełki", służące do rozliczeń z funduszem. Podobnie jak w banku, klient otrzymuje (na ogół raz w miesiącu) informację o stanie konta, ale na wyciągu podane jest saldo jednostek uczestnictwa, a nie kwota pieniężna. Cena jednostki zmienia się w zależności od wielu czynników: sytuacji gospodarczej kraju, sytuacji na giełdzie, kondycji finansowej przedsiębiorstw, w które się zainwestowało, umiejętności osób zarządzających funduszem itd.

Oto przykład niektórych pozycji na wydruku stanu konta założonego w funduszu inwestycyjnym:

Data	Transakcja	Kwota [zł]	Cena [zł]	Liczba jednostek
2007–02–11	nabycie	50,00	106,56	0,469
2007–03–11	nabycie	100,00	106,99	0,935
2007–07–11	nabycie	50,00	119,47	0,419
2007–08–12	nabycie	50,00	125,42	0,399
			STAN KONTA	2,222

11 lutego 2007 r. cena jednostki była równa 106,56 zł, więc za 50 zł klient kupił 0,469 jednostki, a np. 12 sierpnia cena jednostki była wyższa, więc za taką samą kwotę 50 zł klient nabył już tylko 0,399 jednostki.
Jeżeli klient chce wycofać z funduszu inwestycyjnego pieniądze, wydaje w biurze maklerskim dyspozycję tzw. umorzenia jednostek. Inaczej mówiąc, odsprzedaje funduszowi jednostki zgromadzone na koncie (wszystkie albo jakąś ich część), ale po cenie obowiązującej w dniu umorzenia. Fundusz inwestycyjny ma na zrealizowanie takiej transakcji kilka (lub kilkanaście) dni, dlatego klient nie zna ceny jednostki w chwili składania dyspozycji.

Przykład 10

Feliks zainwestował w fundusze TFI „Zysk do kwadratu" – nabył 200 jednostek udziałowych funduszu inwestycyjnego agresywnego w cenie 117,30 zł za jednostkę. Zatem zapłacił za nie 23 460 zł. Przez rok nie wykonał żadnych operacji, a po roku umorzył swoje jednostki. Obliczymy wysokość jego kapitału po umorzeniu. Cena jednostki w dniu umorzenia była równa

a) 129,52 zł. b) 103,05 zł.

Rozwiązanie

a) $200 \cdot 129{,}52 = 25\,904$ [zł]

b) W tym wypadku Feliks stracił na każdej jednostce 14,25 zł, a kapitał, jakim dysponował po roku, wynosił $200 \cdot 103{,}05 = 20\,610$ [zł].

Odp.: a) 25 904 zł b) 20 610 zł

Oprocentowanie kredytów

Banki stosują bardzo różne sposoby oprocentowania kredytów. Omówimy na przykładach najczęściej spotykane metody.
Jeżeli kwota kredytu jest nieduża, a okres kredytowania niedługi, bank może zastosować uproszczony sposób spłaty kredytu.

Przykład 11 ◂ zad. 6.20

Bank przyznał klientowi kredyt w wysokości 10 000 zł na jeden rok. Oprocentowanie w wysokości 5% pobierane jest od razu przy udzieleniu kredytu. Bank pobrał zatem od razu:

$$5\% \cdot 10\,000 = 500 \text{ [zł]}$$

Kredyt ma być spłacony w 12 miesięcznych równych ratach. Klient będzie zatem spłacał go w ratach równych:

$$\frac{1}{12} \cdot 10\,000 \approx 833{,}33 \text{ [zł]}$$

Jeżeli okres kredytowania jest dłuższy niż w przykładzie, to oprocentowanie może być wyższe, ale górną granicę określa ustawa**.

Zazwyczaj sposób spłaty kredytu jest znacznie bardziej skomplikowany. Banki doliczają odsetki zgodnie z zasadą procentu składanego. Oprocentowaniu takiemu podlega każda niespłacona część kredytu. Zdarza się, że klient chce spłacać pożyczkę **w równych ratach kapitałowych**. Jak zatem obliczyć wysokość takiej raty?

Prześledźmy proces spłaty kredytu na prostym przykładzie, w którym wszystko można wyliczyć „na piechotę". Później postaramy się nasze rozumowanie uogólnić.

Przykład 12 ◂ zad. 6.21

Karolina zaciągnęła kredyt w wysokości 2000 zł, oprocentowany na 6% w skali roku z miesięczną kapitalizacją. Wyznaczymy wysokość jednej raty i obliczymy kwotę, jaką Karolina odda bankowi, jeżeli spłaci kredyt

a) w pięciu miesięcznych równych ratach.
b) w dziesięciu miesięcznych równych ratach.

Rozwiązanie

a) Gdyby kredyt nie był oprocentowany, to comiesięczna rata równałaby się 400 zł. Bank jednak dolicza odsetki w wysokości 6% w skali roku z miesięczną kapitalizacją. Co miesiąc niespłacona kwota kredytu zwiększa się o 0,5%, jest więc mnożona przez $1 + 0{,}005 = 1{,}005$. Proces naliczania odsetek zaczyna się z chwilą otrzymania kredytu.

W momencie, gdy Karolina dostała do ręki 2000 zł, do spłacenia miała kwotę:

$$2000 \cdot 1{,}005 \text{ [zł]}$$

Przypomnijmy, że wartość w zwiększona o $p\%$ jest równa $w + \frac{p}{100} \cdot w = w\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

** W Polsce obowiązuje tzw. ustawa antylichwiarska, która uzależnia wysokość oprocentowania kredytu od wysokości stóp procentowych NBP.

Po upływie miesiąca Karolina spłaciła pierwszą ratę, oznaczmy ją R. Do zwrotu pozostało jeszcze $(2000 \cdot 1{,}005 - R)$ [zł]. Do tej kwoty bank znów doliczył odsetki w wysokości 0,5%, zatem dług do zwrotu po spłacie pierwszej raty był równy:

$$(2000 \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005$$

Po następnym miesiącu sytuacja się powtórzyła. Karolina płaciła kolejne raty, a bank doliczał odsetki do reszty długu.

$$((2000 \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 \quad \longleftarrow \text{po spłacie 2. raty}$$
$$(((2000 \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 \quad \longleftarrow \text{po spłacie 3. raty}$$
$$((((2000 \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 \quad \longleftarrow \text{po spłacie 4. raty}$$

Po zapłaceniu 5. raty dług Karoliny był równy 0.

$$((((2000 \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R) \cdot 1{,}005 - R = 0$$

Z powyższego równania wyznaczymy wysokość raty R.
Po wykonaniu kolejnych działań otrzymujemy:

$$2000 \cdot 1{,}005^5 - R \cdot 1{,}005^4 - R \cdot 1{,}005^3 - R \cdot 1{,}005^2 - R \cdot 1{,}005 - R = 0 \qquad (1)$$

$$2000 \cdot 1{,}005^5 = R \cdot \left(1{,}005^4 + 1{,}005^3 + 1{,}005^2 + 1{,}005 + 1\right) \qquad (2)$$

$$2000 \cdot 1{,}005^5 = R \cdot \frac{1{,}005^5 - 1}{1{,}005 - 1} \quad \longleftarrow S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},\ n = 5,\ a_1 = 1,\ q = 1{,}005$$

Zatem:

$$R = \frac{2000 \cdot 0{,}005 \cdot 1{,}005^5}{1{,}005^5 - 1} \approx 406{,}02 \text{ [zł]}$$

Karolina odda bankowi $5 \cdot 406{,}02 = 2030{,}10$ [zł].

Odp.: 2030,10 zł

b) Jeśli zwrot kredytu rozłożono na 10 równych rat, zasada postępowania jest identyczna, więc w odpowiedniku równania (1) niewiadoma R pojawi się 10 razy. Równanie (2) będzie teraz miało postać:

$$2000 \cdot 1{,}005^{10} = R \cdot \left(1{,}005^9 + 1{,}005^8 + \ldots + 1{,}005^2 + 1{,}005 + 1\right)$$

a wyznaczona z niego rata wynosi:

$$R = \frac{2000 \cdot 0{,}005 \cdot 1{,}005^{10}}{1{,}005^{10} - 1} \approx 205{,}54 \text{ [zł]}$$

Pełna kwota spłacona wtedy bankowi to 2055,40 zł.

Odp.: 2055,40 zł

Uogólnienie przykładów zapiszemy w postaci wzoru, którego pełne wyprowadzenie pominiemy.

Jeżeli kredyt w wysokości K złotych ma być spłacany w n równych miesięcznych ratach, z oprocentowaniem (w systemie procentu składanego) z miesięczną stopą procentową $p\%$, to jedna rata jest równa:

$$R = \frac{K \cdot \frac{p}{100} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}$$

Jeżeli okres kredytowania jest bardzo długi, to suma, którą trzeba spłacić, może stanowić nawet wielokrotność kwoty pożyczki.

Przykład 13 ◂ zad. 6.22

Sabina wzięła z banku kredyt mieszkaniowy w wysokości 100 000 zł oprocentowany na 7,5% w skali roku (w systemie procentu składanego). Będzie go spłacać w równych ratach przez 25 lat. Obliczymy wysokość comiesięcznej raty oraz łączną kwotę, jaką Sabina wpłaci do banku przez 25 lat.

Rozwiązanie

Miesięczna stopa procentowa wynosi:

$$\frac{1}{12} \cdot 7{,}5\% = 0{,}625\%$$

a liczba wszystkich rat:

$$n = 25 \cdot 12 = 300$$

Wysokość comiesięcznej raty jest zatem równa:

$$R = 100\,000 \cdot \frac{0{,}625}{100} \cdot \frac{1{,}00625^{300}}{1{,}00625^{300} - 1} \approx 739{,}00 \text{ [zł]}$$

Przez 25 lat Sabina wpłaci do banku $300 \cdot 739 = 221\,700$ [zł], czyli ponad 2 razy więcej niż wynosi kwota otrzymanego kredytu.

Odp.: 739 zł, 221 700 zł

Jeszcze inną metodą spłacania kredytu są tzw. **raty malejące**.

Przykład 14 ◂ zad. 6.23

Jeżeli kredyt w wysokości 15 000 zł, zaciągnięty na 4 lata przy oprocentowaniu 13,13% w skali roku, będziemy spłacali w równych ratach miesięcznych, to wysokość jednej raty wyniesie ok. 403 zł. Oddamy zatem bankowi $48 \cdot 403 = 19\,344$ zł.
Inaczej będzie przy ratach malejących. Oto jak oblicza się ich wysokość.

1. Dzieląc kwotę kredytu przez liczbę rat, otrzymujemy „bazę" każdej raty:

$$\frac{15\,000}{48} = 312{,}50 \text{ [zł]}$$

2. Obliczamy miesięczną stopę procentową:

$$\frac{13{,}13\%}{12} \approx 1{,}094\%$$

Stała wysokość odsetek od „bazy" jest więc równa:

$$1{,}094\% \cdot 312{,}50 \approx 3{,}42 \text{ [zł]}$$

3. Ustalamy wysokości kolejnych rat, mnożąc miesięczne odsetki przez liczbę niespłaconych rat i dodając tę kwotę do bazy:

$3{,}42 \cdot 48 + 312{,}50 = 164{,}16 + 312{,}50 = 476{,}66$ [zł] ⟵ pierwsza rata
$3{,}42 \cdot 47 + 312{,}50 = 160{,}74 + 312{,}50 = 473{,}24$ [zł] ⟵ druga rata
$3{,}42 \cdot 46 + 312{,}50 = 157{,}32 + 312{,}50 = 469{,}82$ [zł] ⟵ trzecia rata
...
$3{,}42 \cdot 2 + 312{,}50 = 6{,}84 + 312{,}50 = 319{,}34$ [zł] ⟵ przedostatnia rata
$3{,}42 \cdot 1 + 312{,}50 = 315{,}92$ [zł] ⟵ ostatnia rata

Obliczmy kwotę wpłaconą do banku w tym systemie.
Średnia miesięczna dopłata do bazy jest równa

$$\frac{3{,}42 \cdot 48 + 3{,}42 \cdot 47 + 3{,}42 \cdot 46 + \ldots + 3{,}42 \cdot 2 + 3{,}42 \cdot 1}{48} = \frac{3{,}42 \cdot (48 + 47 + \ldots + 2 + 1)}{48} =$$

$$= \frac{3{,}42 \cdot \frac{1+48}{2} \cdot 48}{48} = 83{,}79 \text{ [zł]} \quad \longleftarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad n = 48,\ a_1 = 1,\ a_{48} = 48$$

Średnia miesięczna rata wynosi

$$312{,}50 + 83{,}79 = 396{,}29 \text{ [zł]}$$

i jest niższa niż rata (403 zł) płacona w systemie rat równych. W systemie rat malejących oddamy bankowi w sumie ok. 19 021 zł.

System rat malejących jest (w ostatecznym rachunku) korzystniejszy dla klienta, pod warunkiem, że może on sobie pozwolić na – niekiedy dużo wyższe niż przy ratach równych – raty początkowe.

Nie omówiliśmy wszystkich metod, jakie stosują banki przy spłacaniu kredytów. Podane przykłady powinny zachęcić przyszłych kredytobiorców do wnikliwego analizowania warunków umowy z bankiem przed jej podpisaniem oraz do wybrania najkorzystniejszej oferty.

Banki są ustawowo zobowiązane do podawania oprocentowania realnego (RRSO – rzeczywista roczna stopa oprocentowania). Na jego wysokość składają się (oprócz oprocentowania nominalnego) różne opłaty, np.: opłata za rozpatrzenie wniosku, za obsługę kredytu, ubezpieczenie czy prowizja. Jeżeli bank nie dopełni tego obowiązku i w umowie nie będzie wymaganych informacji, to klient jest zwolniony od płacenia wszelkich dodatkowych odsetek i prowizji.

Zadania

Uwaga: W odpowiedziach do zadań nie uwzględniamy podatku od odsetek. Wszystkie kwoty są zaokrąglane zgodnie z regułami matematyki.

6.1. Monika wpłaciła do banku 1500 zł. Kapitalizacja odsetek następuje co kwartał z oprocentowaniem 4% w skali roku. Przez dwa lata Monika nie dokonywała żadnych wpłat ani wypłat. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Po roku Monika miała na koncie 1560,91 zł.

B. Po półtora roku Monika miała na koncie 1592,28 zł.

C. Po dwóch latach Monika miała na koncie 1624,29 zł.

6.2. Liczbę 5 zwiększono o 20%. Otrzymaną liczbę ponownie zwiększono o 20% itd. Operację tę wykonano czterokrotnie. Jaką liczbę otrzymano?

6.3. Wpłacamy x zł na lokatę oprocentowaną p% miesięcznie, z miesięczną kapitalizacją odsetek. Jaka kwota będzie na tej lokacie po upływie roku?

a) $x = 100,\ p = 10$

b) $x = 100,\ p = 5$

c) $x = 200,\ p = 5$

d) $x = 300,\ p = 2$

6.4. Składamy 1000 zł w banku oferującym 4% rocznie z roczną kapitalizacją. Po ilu latach kwota oszczędności przekroczy 2000 zł?

6.5. W pewnym mieście żyje 25 000 mieszkańców. Po ilu latach liczba mieszkańców przekroczy 27 000, jeżeli roczny przyrost będzie przez kilka lat równy 2,1%?

6.6. Po zastosowaniu szczepionki na pewien rodzaj wirusa atakującego drób liczba zachorowań wśród kurcząt zmalała o 72% rocznie. O ile procent zmaleje zachorowalność po czterech latach, jeśli spadek zachorowalności się nie zmieni?

6.7. Liczba klientów supermarketu maleje co kwartał o 5%, ale średnia kwota wydawana przez klienta w tym supermarkecie wzrasta co kwartał o 10%. O ile procent wzrosną wpływy supermarketu po upływie roku?

6.8. Działka leśna zawiera 7000 m^3 masy drzewnej. Z obserwacji wynika, że roczny przyrost masy drzewnej jest równy przeciętnie 2%. Ile m^3 masy drzewnej będzie zawierała ta działka po upływie 10 lat?

6.9. W serialu *Alternatywy 4* kierownik elektrociepłowni otrzymuje informację, że podczas ogrzewania odległego osiedla traci się 50% ciepła przy spalaniu węgla, kolejne 50% przy przesyłaniu go nieszczelnymi rurami i wreszcie 50% z powodu niezamieszkałych lokali. Jak wylicza, straty wynoszą 150% ciepła, więc szybko wyłącza ogrzewanie! Załóżmy, że oszacowanie strat każdego rodzaju jest poprawne. Oblicz, ile procent wynoszą rzeczywiste straty ciepła.

6.10. Adam wpłacił 2000 zł na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości 1,2% w skali roku i z roczną kapitalizacją odsetek. Jaki będzie stan jego konta po roku?

6.11. Bogumił wpłacił 4000 zł na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości 1,6% w skali roku i z roczną kapitalizacją odsetek. Oblicz stan jego konta

a) po roku. b) po dwóch latach. c) po pięciu latach.

6.12. Cezary wpłacił do banku 3000 zł. Oprocentowanie wynosi 1,2% rocznie, a kapitalizacja odsetek następuje co kwartał. Ile pieniędzy będzie miał Cezary po roku oszczędzania?

6.13. Jaką kwotę otrzymamy po pół roku, jeżeli wpłacimy 8000 zł na lokatę półroczną, której oprocentowanie wynosi 1,4% w skali roku? O ile procent zwiększy się kwota wpłacona na początku?

6.14. Danka założyła lokatę w wysokości 4000 zł ze zmiennym oprocentowaniem. Przez pierwsze dwa lata oprocentowanie lokaty było równe 1,8%, w trzecim roku 1,6%, a w czwartym 1,5%, z roczną kapitalizacją odsetek. Ile pieniędzy miała Danka na tej lokacie po czterech latach?

6.15. Porównaj wysokości odsetek, jakie otrzyma Edward od kwoty 8000 zł z oprocentowaniem 1,8% w skali roku i kapitalizacją:

I. raz na miesiąc, II. raz na kwartał, III. raz na rok.

6.16. Filip wpłaca co miesiąc 200 zł na tzw. lokatę systematycznego oszczędzania. Oprocentowanie lokaty jest równe 1,3% w skali roku, z roczną kapitalizacją odsetek. Jaką kwotą będzie dysponował Filip

a) po roku?
b) po dwóch latach?
c) po dwóch latach i czterech miesiącach?

6.17. Grażyna wpłaciła na roczną lokatę 5000 zł. Początkowo oprocentowanie lokaty wynosiło 1,8% w skali roku, ale po czterech miesiącach zostało zmienione na 1,7% w skali roku. Kapitalizacja odsetek wynosiła jeden rok. Jaką kwotę miała Grażyna na swojej lokacie po upływie roku?

6.18. Zaraz po studiach Janusz podpisał umowę z funduszem emerytalnym na wpłacanie kwoty a zł miesięcznie. Fundusz przewiduje, że jego coroczny zysk wyniesie p%. Zakładamy, że Janusz będzie systematycznie oszczędzał przez 40 lat do osiągnięcia wieku emerytalnego. Oblicz, jaką kwotę zgromadzi (przy kapitalizacji rocznej), gdy
a) $a = 200$, $p = 3$. b) $a = 100$, $p = 6$. c) $a = 50$, $p = 5$.

6.19. Fundusz emerytalny przewiduje coroczny zysk w wysokości 4% z kapitalizacją roczną. Ile oszczędności zgromadzimy po 38 latach, jeśli będziemy wpłacać 120 zł miesięcznie? Przez ile lat można z tych pieniędzy wypłacać miesięcznie kwotę 1000 zł? (Pomijamy fakt, że podczas tego okresu do kwoty na koncie funduszu nadal będą dopisywane odsetki.)

6.20. W pewnym banku zasady udzielania kredytów są następujące:
- oprocentowanie w wysokości 5,4% kwoty kredytu pobierane jest od razu,
- kwotę kredytu spłaca się w równych ratach miesięcznych.

Oblicz, ile pieniędzy wypłaci bank oraz jakiej wysokości będzie każda rata, jeżeli zaciągniemy w tym banku kredyt w wysokości
a) 6000 zł na okres 1 roku.
b) 8200 zł na okres 2 lat.
c) 11 760 zł na okres 2 lat i 4 miesięcy.

6.21. Kredyt na mieszkanie w wysokości 178 000 zł ma być spłacany w równych ratach miesięcznych przez 15 lat z oprocentowaniem 4,8% w skali roku w systemie procentu składanego. Oblicz wysokość jednej raty.

6.22. Leon uzyskał kredyt mieszkaniowy w wysokości 150 000 zł oprocentowany na 6% w skali roku w systemie procentu składanego. Będzie go spłacał w równych ratach kwartalnych przez 30 lat. Oblicz wysokość kwartalnej raty i całą sumę, jaką Leon odda po trzydziestu latach.

6.23. Robert będzie spłacać przez 2 lata kredyt w wysokości 10 000 zł w miesięcznych ratach malejących. Jeżeli pierwsza rata wyniosła 526 zł, to jakie jest oprocentowanie kredytu w skali roku?

6.24. Paweł był klientem banku, w którym kredyt można wziąć z oprocentowaniem 9,5% w skali roku i spłacać go w równych ratach miesięcznych w systemie procentu składanego. Bank Piotra zaproponował kredyt z oprocentowaniem 10% w skali roku ze spłatą w systemie miesięcznych rat malejących. Obaj panowie wzięli kredyty w wysokości 100 000 zł na 4 lata. Który z nich poniósł większe koszty kredytu? Ile wynosiła różnica? Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 zł.

6.25. Patrycja wzięła kredyt w wysokości 16 000 zł i spłaca go w miesięcznych ratach malejących. Na ile lat została rozłożona spłata tego kredytu, jeżeli wiemy, że oprocentowanie w skali roku jest równe 10,5%, a ostatnia rata wynosi 538 zł?

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Cenę telewizora równą 1200 zł obniżono dwukrotnie, za każdym razem o 10%. Ile obecnie kosztuje telewizor?

A. 960 zł **B.** 972 zł **C.** 990 zł **D.** 1180 zł

2. Wpłacamy do banku 1500 zł. Kapitalizacja odsetek następuje co kwartał, przy oprocentowaniu 4% w skali roku. Przez trzy lata nie dokonujemy żadnych wpłat ani wypłat. Ile złotych będziemy mieli po trzech latach?

A. $1500 \cdot 1{,}04^3$ **B.** $1500 \cdot 1{,}04^{14}$ **C.** $1500 \cdot 1{,}01^4$ **D.** $1500 \cdot 1{,}01^{12}$

3. Przez kilka lat produkcja pewnego przedsiębiorstwa systematycznie rosła o 7% w skali roku. Ile wyniósł procentowy wzrost produkcji po trzech latach?

A. 21% **B.** 20,5% **C.** 22,5% **D.** 24%

4. Zakładamy, że liczba mieszkańców pewnego miasta co roku wzrasta o 5%. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Po trzech latach liczba mieszkańców wzrośnie o 15%.

B. Po dziewięciu latach liczba mieszkańców wzrośnie o ponad połowę.

C. Po piętnastu latach liczba mieszkańców się podwoi.

5. Liczbę 8 zwiększono o 12%. Otrzymaną liczbę ponownie zwiększono o 12%. Operację tę wykonano pięciokrotnie. Jaką liczbę otrzymano?

6. Komputer taniał trzykrotnie o 10% i obecnie kosztuje 1749,60 zł.

a) Jaka była początkowa cena komputera?

b) O ile procent łącznie staniał ten komputer?

7. Agnieszka zaciągnęła kredyt w wysokości 10 000 zł. Będzie go spłacała w równych ratach miesięcznych przez 1,5 roku. Oprocentowanie kredytu wynosi 7,2% w skali roku (w systemie procentu składanego). Oblicz wysokość jednej raty.

7. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–24 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Dany jest ciąg (a_n), w którym $a_n = \frac{15-2n}{3n}$ dla $n \geqslant 1$. Liczba wszystkich nieujemnych wyrazów tego ciągu jest równa

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

2. Dany jest ciąg (a_n), w którym $a_n = (-1)^n \cdot (11-n)$ dla $n \geqslant 1$. W tym ciągu

A. $a_{11} = -1$. **B.** $a_{11} > 0$. **C.** $a_{11} = 0$. **D.** $a_{11} < -1$.

3. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-8}{n^2+1}$ dla $n \geqslant 1$. Wyraz a_3 tego ciągu jest równy

A. $-\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

4. Czwarty wyraz ciągu (a_n), określonego za pomocą układu warunków: $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \frac{1}{3+a_n}$ dla $n \geqslant 1$, jest równy

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{13}{43}$. **C.** $\frac{4}{13}$. **D.** $\frac{43}{13}$.

5. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+3}$ dla $n \geqslant 1$. W tym ciągu wyraz a_7 jest równy

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Wskaż różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 3n-2$ określonego dla $n \geqslant 1$.

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 1

7. Dane są wyrazy: $a_1 = 8$ i $a_2 = 13$ ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geqslant 1$. W tym ciągu

A. $a_{14} = 88$. **B.** $a_{15} = 88$. **C.** $a_{16} = 88$. **D.** $a_{17} = 88$.

8. W ciągu arytmetycznym (a_n) o różnicy $\frac{5}{6}$, określonym dla $n \geqslant 1$, szesnasty wyraz jest równy 13. Dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy

A. 3. **B.** $4\frac{2}{3}$. **C.** 8. **D.** $9\frac{2}{3}$.

9. Liczby 5, −2, −9 są pierwszymi trzema wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geqslant 1$. Wzór ogólny tego ciągu ma postać

A. $a_n = -7n + 12$. **B.** $a_n = -2n + 7$. **C.** $a_n = 7n - 12$. **D.** $a_n = 2n - 7$.

10. Drugi wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geqslant 1$ jest równy −13, a ósmy 5. Pierwszym wyrazem tego ciągu jest

A. 10. **B.** −10. **C.** 16. **D.** −16.

11. Która z liczb jest równa sumie wszystkich dodatnich parzystych liczb dwucyfrowych?

A. 2430 **B.** 2340 **C.** 2432 **D.** 2452

12. W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geqslant 1$ prawdziwa jest równość $a_2 + a_5 + a_8 = 18\sqrt{2}$. Wynika stąd, że

A. $a_5 = \frac{8}{\sqrt{2}}$. **B.** $a_5 = \frac{12}{\sqrt{2}}$. **C.** $a_5 = 5\sqrt{2}$. **D.** $a_5 = 7\sqrt{2}$.

13. Wskaż zależność prawdziwą dla każdego ciągu arytmetycznego.

A. $a_4 + a_7 = a_{11}$ **C.** $a_2 + a_7 = 2a_9$

B. $a_4 + a_8 = a_5 + a_6$ **D.** $a_6 + a_{10} = a_2 + a_{14}$

14. W pięciokącie miary kątów tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 30°. Największy kąt tego pięciokąta ma miarę

A. 168°. **B.** 160°. **C.** 138°. **D.** 170°.

15. Dane są dwa wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geqslant 1$: $a_2 = 9$ i $a_5 = 0$. Suma pierwszych pięciu wyrazów tego ciągu jest równa

A. 29. **B.** 30. **C.** 12. **D.** 15.

16. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 2$ i $a_6 = -64$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. 2. **B.** 5. **C.** −5. **D.** −2.

17. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich, w którym $a_1 = 3$ i $a_5 = \frac{1}{27}$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** 9.

18. Dany jest ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_1 = \sqrt{3}$, $a_3 = 3\sqrt{3}$. Dziewiąty wyraz tego ciągu jest równy

A. $9\sqrt{3}$. **B.** -27. **C.** -243. **D.** $81\sqrt{3}$.

19. Dany jest sześciowyrazowy ciąg geometryczny o ujemnym ilorazie. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy $\sqrt{3}$, a ostatni jest równy -27. Trzecim wyrazem tego ciągu jest

A. $-3\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** -9. **D.** 9.

20. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geqslant 1$, w którym $a_1 = \sqrt{5}$, $a_2 = 5\sqrt{5}$. Wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać

A. $a_n = \frac{\left(\sqrt{5}\right)^n}{5}$. **B.** $a_n = \frac{5^n}{\sqrt{5}}$. **C.** $a_n = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^n$. **D.** $a_n = \left(\sqrt{5}\right)^n$.

21. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich, w którym $a_5 = 5a_3$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** 5. **D.** $\frac{1}{5}$.

22. Liczby 2, $x-3$, $\frac{1}{2}$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny o wyrazach dodatnich. Wskaż wartość x.

A. 4 **B.** -4 **C.** 3 **D.** -1

23. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{2(n+2)}{3}$ dla $n \geqslant 1$. Ciąg ten jest

A. arytmetyczny i jego różnica wynosi $r = \frac{3}{2}$.

B. arytmetyczny i jego różnica wynosi $r = \frac{2}{3}$.

C. geometryczny i jego iloraz wynosi $q = \frac{1}{3}$.

D. geometryczny i jego iloraz wynosi $q = \frac{4}{3}$.

24. Monika wpłaciła do banku 1500 zł. Kapitalizacja odsetek następuje co kwartał, a oprocentowanie wynosi 4% w skali roku. Jaka kwota będzie na koncie Moniki po dwóch latach?

A. 1624,29 zł **B.** 1662,59 zł **C.** 1650 zł **D.** 1524,30 zł

W zadaniach 25–42 oceń prawdziwość podanych zdań.

25. Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = 3n - 1$. W tym ciągu
A. $a_{n-2} = 3n - 2$. **B.** $a_{n+2} = 3n + 5$. **C.** $a_{n-1} = 3n - 4$.

26. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^2 - 10n + 18$. Wynika stąd, że
A. (a_n) ma dokładnie pięć wyrazów ujemnych.
B. $a_3 = a_7$ oraz $a_4 = a_6$.
C. (a_n) przyjmuje wartość najmniejszą.

27. Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = 2n^2 - 9$. W tym ciągu
A. wszystkie wyrazy są dodatnie.
B. są tylko dwa wyrazy ujemne.
C. wszystkie wyrazy są liczbami nieparzystymi.

28. Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = n^2 - 3n + 2$. Wynika stąd, że
A. $a_{10} = 72$.
B. (a_n) jest ciągiem rosnącym.
C. (a_n) jest ciągiem monotonicznym.

29. Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$. W tym ciągu
A. $a_4 = 28$. **B.** $a_9 = a_8 + 81$. **C.** $a_6 = 90$.

30. Liczba r jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n). Zatem
A. $a_8 = a_4 + 4r$. **B.** $a_{12} = a_6 + 6r$. **C.** $a_{n+3} = a_5 + (n - 2)r$.

31. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny. Wynika stąd, że
A. $a_{10} - a_8 = a_4 - a_2$. **B.** $\frac{a_1 + a_2 + a_4 + a_5}{4} = a_3$. **C.** $a_5 - a_2 = \frac{1}{2}(a_6 - a_2)$.

32. Suma wszystkich liczb nieparzystych od 1 do 99 włącznie jest
A. parzysta.
B. podzielna przez 5.
C. kwadratem pewnej liczby naturalnej.

33. Dane są trzy kolejne wyrazy pewnego ciągu liczbowego: $5p - 1$, $p^2 + 2p - 3$, $2p^2 - p - 5$.
A. Dla pewnego $p \in \mathbf{R}$ wyrazy te tworzą ciąg arytmetyczny.
B. Dla każdego $p \in \mathbf{R}$ wyrazy te tworzą ciąg arytmetyczny.
C. Wyrazy te tworzą ciąg arytmetyczny tylko dla $p = 2$.

34. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach różnych od 0 i ilorazie $q \neq 1$.

A. Dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy $a_5 q^5$.

B. Trzynasty wyraz tego ciągu jest równy $a_5 q^7$.

C. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy $\frac{a_1 a_{100}}{a_{98}}$.

35. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_1 = 8$, $a_2 = 32$. W tym ciągu

A. $a_n = 8 \cdot 4^{n-1}$. **B.** $a_n = 2^{2n+1}$. **C.** $a_n = 2 \cdot 4^n$.

36. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach różnych od 0 i ilorazie $q \neq 1$. W tym ciągu

A. $\frac{a_7}{a_5} = \frac{a_{13}}{a_{11}}$. **B.** $a_7 - a_5 = a_{13} - a_{11}$. **C.** $a_4^2 = a_3 \cdot a_5$.

37. Liczby $x + 1$, $4x + 1$, $10x + 7$, gdzie $x \in \mathbf{N}$, tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Wynika stąd, że

A. x jest liczbą pierwszą.

B. co najmniej dwie liczby x spełniają warunek zadania.

C. x jest liczbą parzystą.

38. Liczby $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ są kolejnymi wyrazami ciągu

A. arytmetycznego. **B.** geometrycznego. **C.** monotonicznego.

39. Ciąg liczbowy (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} \end{cases}$.

W tym ciągu

A. $a_3 = \frac{11}{14}$. **B.** $a_3 = 4$. **C.** $a_4 > 1$.

40. Liczby $\log a$, $\log b$, $\log c$, gdzie a, b i c są różnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, tworzą (w podanej kolejności) ciąg arytmetyczny. Zatem liczby a, b i c tworzą (w podanej kolejności)

A. ciąg arytmetyczny. **B.** ciąg geometryczny. **C.** ciąg monotoniczny.

41. Liczby $\log_2 4$, $\log_2 16$, $\log_2 256$ są

A. kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

B. kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

C. wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

42. Michał podjął pracę wakacyjną na następujących warunkach: 300 zł za pierwszy tydzień i podwyżka 5% po każdym przepracowanym tygodniu.
A. Wynagrodzenie Michała za trzeci tydzień pracy wynosiło 330,75 zł.
B. Wynagrodzenie Michała za czwarty tydzień pracy wynosiło ponad 350 zł.
C. Po 5 tygodniach pracy Michał zarobił w sumie 1657,69 zł.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

43. Podaj przykład wzoru ogólnego skończonego ciągu (a_n) o danych kolejnych wyrazach.

a) 2, 3, 4, 5, 6, 7
b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$
c) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{11}{10}$
d) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$
e) 2, 4, 6, 8, 10
f) −3, −4, −5, −6, −7
g) 1, 2, 4, 8, 16
h) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}$

44. Ogólny wyraz ciągu dany jest wzorem $a_n = \frac{2n-10}{n+1}$.

a) Ile wyrazów ujemnych ma ten ciąg?
b) Który wyraz ciągu jest równy $1\frac{1}{4}$?
c) Dla jakich wartości n wyrazy ciągu są większe od 1?

45. Ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = 4 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Oblicz, ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 3,98.

46. Zbadaj monotoniczność ciągu o podanym wzorze ogólnym.

a) $a_n = 3n - 100$
b) $a_n = \frac{3n-1}{n}$
c) $a_n = (-2)^n \cdot n^2$
d) $a_n = 2 + 4n - n^2$
e) $a_n = 2^{-n}$
f) $a_n = 2 + \frac{1}{n+1}$

47. Sporządź wykres ciągu (a_n).

a) $a_n = 2n - 3$
b) $a_n = \frac{3-n}{n}$
c) $a_n = n^2 - 6n + 7$
d) $a_n = \frac{n^2-1}{n+1}$

48. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n \geqslant 1$, w którym $a_{13} = 19$ oraz $a_{28} = 64$. Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r tego ciągu.

49. W pewnym ciągu arytmetycznym wyrazy a_1, a_3, a_5 są odpowiednio równe liczbom $2x - 19$, $3x - 6$, $2x + 33$. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę r tego ciągu.

50. W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geqslant 1$ dane są $a_1 = 5$ i $S_6 = 60$. Oblicz różnicę $a_{22} - a_{12}$.

51. Liczba 3 jest pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego, a piątym jego wyrazem jest 23. Oblicz sumę S_{10} tego ciągu.

52. Skorzystaj z definicji i sprawdź, czy ciąg określony danym wzorem ogólnym jest ciągiem geometrycznym. Jeśli tak – podaj jego wyraz a_1 i iloraz q.

a) $a_n = 3 \cdot 4^n$ b) $a_n = n^4$ c) $a_n = -\pi$ d) $a_n = \frac{3}{(-2)^n}$

D **53.** Wykaż, że liczby $a_1 = 3 - 2\sqrt{2}$, $a_2 = 10 - 7\sqrt{2}$, $a_3 = 34 - 24\sqrt{2}$ tworzą ciąg geometryczny. Oblicz jego iloraz q.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

54. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{5n - 2}{n + 4}$ dla $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu spełniające warunek $2 < a_n < 3$.

D **55.** Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ dla $n \geqslant 1$. Wykaż, że suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

56. Suma drugiego i szóstego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 8, a wyraz ósmy jest kwadratem wyrazu czwartego. Wyznacz ten ciąg.

57. Czwarty wyraz pewnego ciągu arytmetycznego jest równy -2, a dziesiąty -26. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu od wyrazu czwartego do dziesiątego włącznie.

58. W dwudziestowyrazowym ciągu arytmetycznym (a_n) iloczyn wyrazów skrajnych równa się $23\frac{1}{4}$, a suma dwóch środkowych jest równa $10\frac{3}{4}$. Wyznacz ten ciąg.

59. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_1 = 4$ i $a_6 = 19$. Wyznacz wszystkie wartości n, dla których wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od 200.

60. Różnicą ciągu arytmetycznego jest liczba $r = 3$, a średnia arytmetyczna wyrazów $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ jest równa 10. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu oraz liczbę k, dla której $a_k = 28$.

61. W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geqslant 1$ siódmy wyraz jest równy 63, a suma jedenastu początkowych wyrazów ciągu jest równa 308. Oblicz a_1.

62. Liczby x, 6, y są w podanej kolejności pierwszymi trzema wyrazami ciągu arytmetycznego i $y - x = 18$. Oblicz sumę S_8 tego ciągu.

63. Za przejazd taksówką firmy Supertaxi płaci się 8 zł opłaty początkowej oraz 1,80 zł za każdy przejechany kilometr. W firmie Extrataxi opłata początkowa wynosi 6 zł, a koszt jednego kilometra to 2,20 zł.
a) W której firmie zapłacimy mniej za przejazd trasą długości 6 km?
b) Przy jakiej liczbie kilometrów w obu firmach zapłacimy tyle samo?

64. Iloczyn pierwszego i trzeciego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 16, zaś iloczyn drugiego i czwartego wyrazu jest równy 55. Oblicz sumę dwunastu początkowych wyrazów tego ciągu.

65. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 81, a suma n+4 początkowych wyrazów tego ciągu równa się 124. Różnicą ciągu jest liczba $\frac{1}{2}$. Wyznacz pierwszy wyraz i wartość n.

66. Suma pierwszego i drugiego wyrazu ciągu geometrycznego wynosi 3, a suma drugiego i trzeciego wyrazu jest równa −6. Wyznacz ten ciąg. Sprawdź, czy jest on monotoniczny.

67. Liczby 12, x, y w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, a liczby 12, y, x w podanej kolejności – ciąg geometryczny. Wyznacz x i y.

68. Dla jakich wartości m liczby postaci: $2m - 1$, $3m$, $m^2 + 1$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny?

69. Dla jakich wartości m liczby postaci: $m + 1$, $1 - 3m$, $5m + 1$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny?

70. Która oferta jest korzystniejsza: otrzymać pierwszego dnia 20 gr i przez następnych 5 dni codziennie 3 razy więcej niż poprzedniego dnia czy otrzymać pierwszego dnia 20 gr i przez następnych 19 dni codziennie o 30 gr więcej niż poprzedniego dnia?

71. Liczba miłośników twórczości Euzebiusza Pajączka zwiększa się średnio o połowę co trzy lata. Ile razy zwiększy się przez najbliższych 15 lat?

72. Za trzy książki, których ceny tworzą ciąg geometryczny, zapłacono 76 zł. Najdroższa z tych książek kosztowała o 4 zł mniej niż dwie pozostałe razem. Ile kosztowała każda książka?

73. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n \geqslant 1$, w którym $a_5 = 9$, $a_9 = 1$.

a) Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r ciągu (a_n).

D b) Wykaż, że ciąg o wyrazach a_5, a_8, a_9 jest ciągiem geometrycznym, i oblicz jego iloraz q.

c) Wyznacz n, dla którego suma S_n ciągu arytmetycznego (a_n) ma największą wartość.

74. Ciąg o wyrazach dodatnich a, $4b$, 11 jest arytmetyczny, a ciąg o wyrazach b, 8, $6a + b$, c jest geometryczny. Oblicz a, b i c.

75. Liczby a, b, c są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem rosnącego ciągu geometrycznego. Suma tych liczb jest równa 52. Ciąg o wyrazach $a+2$, b, $c-18$ jest arytmetyczny. Wyznacz liczby a, b, c.

76. Składamy w banku 3000 zł na lokatę ze stałym oprocentowaniem 5% w stosunku rocznym i roczną kapitalizacją odsetek. Ile pieniędzy będziemy mieć po trzech latach?

77. Oprocentowanie lokaty trzymiesięcznej wynosi 1,6% w skali roku. Ile zyska pani Anna, która wpłaciła na taką lokatę 5000 zł?

78. Marta wpłaca co miesiąc 100 zł na lokatę systematycznego oszczędzania. Oprocentowanie lokaty wynosi 8% w skali roku. Kapitalizacja odsetek następuje po każdym roku od momentu otworzenia lokaty. Jaką kwotę Marta zgromadzi na koncie po upływie

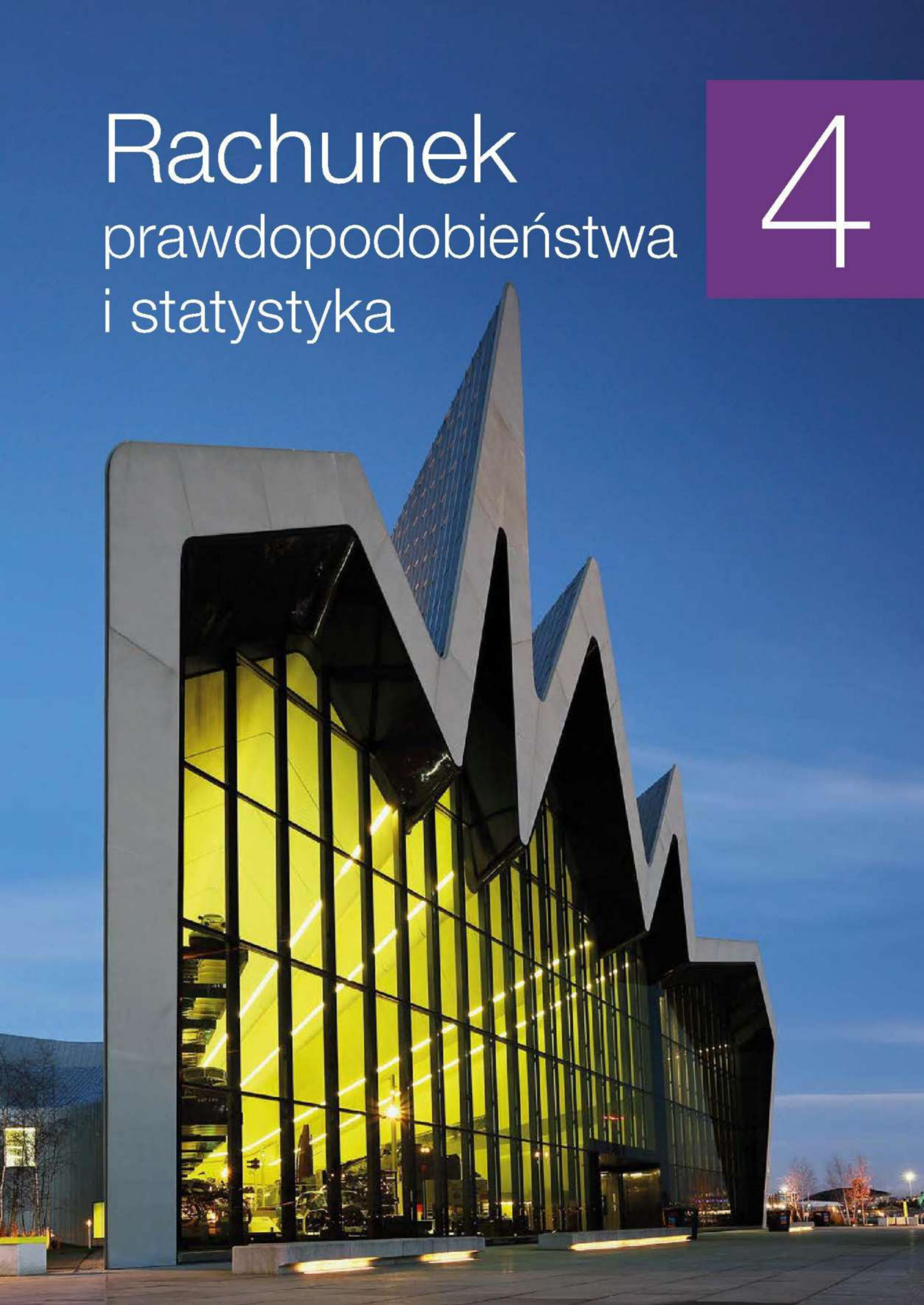
a) roku? b) trzech lat? c) dziesięciu lat?

79. Pan Kowalski planuje wyjazd na wakacje letnie w następnym roku, więc postanowił założyć lokatę w wysokości 2000 zł na okres jednego roku. Ma do wyboru trzy rodzaje lokat: lokata A – oprocentowanie w stosunku rocznym 5%, kapitalizacja odsetek po roku, lokata B – oprocentowanie w stosunku rocznym 4,8%, kapitalizacja odsetek co pół roku, lokata C – oprocentowanie w stosunku rocznym 4,6%, kapitalizacja odsetek co kwartał. Wykonaj odpowiednie obliczenia i oceń, która z tych lokat jest najkorzystniejsza dla pana Kowalskiego.

80. W pewnym banku oprocentowanie kredytów w skali roku wynosi 7%, a ich spłata odbywa się w miesięcznych ratach malejących. Antoni wziął w tym banku kredyt w wysokości 18 000 zł i chce go spłacić w ciągu dwóch lat. Oblicz wysokość pierwszych trzech rat spłaty. Ile wynosi średnia wszystkich rat wpłaconych do banku przez Antoniego?

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

4



1. Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa

Prawdopodobne jest to, co się zwykle zdarza.
Arystoteles

Logika klasyczna, nazywana od nazwiska jej twórcy arystotelesowską, zajmuje się tylko takimi zdaniami, którym można przypisać dokładnie jedną z dwóch wartości – prawdę albo fałsz. Teorie matematyczne przez wiele wieków opierały się na takiej właśnie dwuwartościowej logice. Również obecnie ta metoda rozumowania jest bardzo użyteczna. W pewnym momencie zaistniała jednak potrzeba wymyślenia czegoś, co uwzględniałoby bardziej skomplikowane przypadki. W życiu codziennym spotykamy się bowiem z pytaniami, na które rzadko można udzielić jednoznacznej odpowiedzi. Na przykład:

- Czy wybierać kierunek studiów zgodnie z zainteresowaniami, czy raczej kierować się potrzebami rynku pracy?
- Czy dostanę się na wymarzoną uczelnię?
- Jaką mam szansę na pomyślne zdanie egzaminu?

W życiu mamy na ogół do czynienia ze zdaniami, które nie są ani w pełni prawdziwe, ani w pełni fałszywe. Do poruszania się w takim świecie bardzo przydatna jest **logika probabilistyczna** (łac. *probabilis* – prawdopodobny). Pozwala ona ocenić, na ile dane zdanie jest wiarygodne. Prawdopodobieństwo zajścia jakiegoś zdarzenia logika ta ocenia wartościami z nieskończonego zbioru liczb leżących pomiędzy 0 a 1 (lub w procentach – między 0% a 100%). Można się spotkać np. ze stwierdzeniami typu:

Określenie „prawdopodobny" możemy rozumieć jako „podobny do prawdy".

- Ten pacjent ma ok. 50-procentową szansę na przeżycie operacji.
- Jeżeli będę dzisiaj pytany z matematyki, to na 99% dostanę jedynkę.
- Szansę otrzymania czwórki z egzaminu oceniam na 30%.
- Prawdopodobieństwo zdobycia głównej nagrody w lotto, czyli trafienia „szóstki", wynosi około 1 : 14 000 000.
- Jeżeli założymy na domu piorunochron, to prawdopodobieństwo pożaru od uderzenia pioruna zmaleje do 0,001.

W dalszych tematach pokażemy, w jaki sposób można w pewnych sytuacjach owo „podobieństwo do prawdy" dobrze oszacować. Posłużymy się modelami matema-

tycznymi zjawisk losowych, chociaż oczywiście będą się one odnosiły (jak każdy model) do sytuacji wyidealizowanych. Nie istnieje idealnie jednorodna kostka do gry, ale nietrudno sobie wyobrazić, że właśnie z taką kostką mamy do czynienia. Podobnie zresztą postępowaliśmy np. w geometrii. Cała teoria została wyprowadzona na bazie obiektów w rzeczywistości nieistniejących. Nie da się przecież wykreślić prostej, która nie miałaby grubości, nie narysujemy czegoś takiego jak punkt itd. Mimo to praktyczne zastosowania twierdzeń geometrycznych są kolosalne i trudno sobie wyobrazić dzisiejszą cywilizację bez rozwijania tej dyscypliny nauki. Z bardzo podobną sytuacją mamy do czynienia również w fizyce. Wyjaśnienie jej praw na ogół też wymaga jakichś nierealnych założeń, ale takie doskonałe zjawiska są po prostu dobrymi przybliżeniami rzeczywistych zjawisk fizycznych.

W dalszym ciągu naszych rozważań będziemy więc zakładać, że mamy do czynienia:

- z idealnymi symetrycznymi monetami, które po podrzuceniu i opadnięciu nie ustawią się na krawędzi,
- z idealnie jednorodnymi kostkami do gry,
- z ponumerowanymi kulkami o identycznej wielkości i masie, różniącymi się co najwyżej kolorem itp.

Ponadto przyjmiemy, że wyniki naszych doświadczeń będą zależały wyłącznie od przypadku i nie wpłyną na nie żadne czynniki zewnętrzne czy wewnętrzne. Na przykład podczas losowania karty z talii nie będziemy podglądać albo nie oznaczymy celowo kart. Jeżeli każde takie losowanie będzie można również wielokrotnie powtórzyć, to nazywać je będziemy **doświadczeniem losowym**.

Przykład 1

W księgarni na półce stoi sześć egzemplarzy powieści. Jeżeli sprzedawca losowo sięgnie po jeden, to może wybrać każdy ze stojących tomów. O takiej sytuacji powiemy, że doświadczeniem losowym jest wybieranie jednego egzemplarza. Wynik tego doświadczenia to wybór konkretnej książki. Wszystkich możliwych wyników jest 6.

Przykład 2

Jaś wytrząsa jedną monetę ze zgromadzonego w skarbonce bilonu. Doświadczeniem losowym jest wypadnięcie monety, wynikiem – otrzymanie konkretnej monety. Wszystkich wyników jest tyle, ile monet w skarbonce.

Przykład 3

Z kolekcji liczącej 113 egzemplarzy Bożenka wyciąga na chybił trafił jedną płytę. Doświadczeniem losowym jest losowanie płyty, wynikiem – otrzymanie konkretnego krążka. Liczba wszystkich wyników jest równa 113.

Przykład 4

Jaś i Zosia umówili się, że po obiedzie zmywa naczynia ta osoba, która wylosuje starszą kartę z talii liczącej 52 karty. Jeżeli obydwoje wylosują karty tej samej wartości (np. dwie dziesiątki), zmywa tata, który po namyśle wyraził zgodę na takie rozwiązanie. Doświadczeniem losowym jest więc losowanie dwóch kart, wynikiem – otrzymanie konkretnej pary kart. Wszystkich możliwych wyników jest 2652, czyli tyle, ile można utworzyć par kart z talii. Sposób wyznaczenia liczby takich par zaprezentujemy w dalszych tematach podręcznika.

Przykład 5

Zjawiskiem losowym jest wybór drogi, którą wędruje tornado. Tu jednak mamy do czynienia z nieskończoną liczbą możliwych wyników. Ponadto jedne z nich są bardziej, a inne mniej prawdopodobne.

Matematyczna teoria prawdopodobieństwa, nazywana również probabilistyką, narodziła się we Francji niewiele ponad 350 lat temu. Jej początek dały rozważania kawalera de Méré na temat gier hazardowych, a ściślej – nierównych szans gracza i bankiera. Problem został rozwinięty przez matematyków: Pascala i Fermata. Jedną z pierwszych prac naukowych dotyczących teorii prawdopodobieństwa napisał holenderski uczony Christiaan Huygens. Została ona opublikowana w 1657 r. Do rozwoju tej dyscypliny naukowej przyczyniły się powstanie i wzrost znaczenia towarzystw ubezpieczeniowych, zajmujących się początkowo ubezpieczaniem statków, co wymagało m.in. poprawnego ustalenia wysokości składki.



Przykład dawnej tablicy do gry w kości

2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Umiejętności:

- obliczanie prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa

Doświadczenia losowe i zdarzenia elementarne

Będziemy się zajmować bardzo niewielkim fragmentem rachunku prawdopodobieństwa. W rozpatrywanych w podręczniku przykładach ograniczymy się do takich doświadczeń losowych, które spełniają równocześnie dwa warunki:

- mają **skończoną liczbę** wyników,
- każdy wynik ma **identyczną szansę** (identyczne prawdopodobieństwo) zajścia.

Pojedyncze, wykluczające się wyniki doświadczenia losowego zostały nazwane **zdarzeniami elementarnymi**.

Jeżeli w doświadczeniu losowym możemy uzyskać n różnych wyników i zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo (szansa) zajścia każdego z nich wynosi $\frac{1}{n}$.

Na przykład w rzucie monetą możliwe są tylko dwa zdarzenia elementarne – wypadnięcie orła albo wypadnięcie reszki, a szansa uzyskania każdego z nich jest równa $\frac{1}{2}$.

Podobnie w rzucie sześcienną kostką do gry – każde z sześciu możliwych zdarzeń elementarnych (czyli wypadnięcie jedynki, dwójki, trójki, czwórki, piątki albo szóstki) ma szansę zajścia równą $\frac{1}{6}$.

W prostych przykładach bez trudu umiemy ocenić szansę uzyskania jakiegoś wyniku w doświadczeniu losowym.

Przykład 1 ◂ zad. 2.1

W doświadczeniu polegającym na losowaniu jednej karty z talii mamy 52 zdarzenia elementarne. Prawdopodobieństwo zajścia każdego z nich (np. wylosowania waleta pik) wynosi $\frac{1}{52}$.

Przykład 2 ◂ zad. 2.3

Wśród 13 piłek tenisowych jedna jest uszkodzona. Jeżeli losujemy jedną piłkę, mamy szansę równą $\frac{1}{13}$ trafienia na tę złą i $\frac{12}{13}$ wybrania piłki dobrej.

Przykład 3 ◂ zad. 2.6

Losujemy jedną kartę z talii. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągniemy asa?

Rozwiązanie

W talii 52 kart są 4 asy. Zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{4}{52}$.

Aby wyraźniej pokazać, skąd wziął się wynik, czasem nie będziemy skracać otrzymanych ułamków.

W tym samym doświadczeniu prawdopodobieństwo wylosowania trefla jest równe $\frac{13}{52}$, a karty starszej od dziewiątki $\frac{20}{52}$.

Przykład 4 ◂ zad. 2.7

Izydor Muszka uzależnia od całkowitego przypadku podjęcie decyzji, jak spędzić popołudnie. Jeżeli w rzucie kostką wypadnie jedno oczko – idzie na mecz, jeżeli parzysta liczba oczek – spotyka się z koleżanką Jolką, w pozostałych przypadkach – zabiera się do nauki. Ocenimy prawdopodobieństwo, z jakim Izydor zabierze się do nauki.

Rozwiązanie

W rzucie kostką jest sześć możliwych wyników, a tylko jeden sprzyja podjęciu decyzji o pójściu na mecz, więc takie zdarzenie zajdzie z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$.

Inaczej jest w dwóch następnych sytuacjach, którym sprzyja większa liczba zdarzeń elementarnych. Parzysta liczba oczek to wypadnięcie dwójki, czwórki lub szóstki, więc szansę na spotkanie z Jolką Izydor ma aż w trzech na sześć możliwych przypadków. Prawdopodobieństwo jest w tym wypadku równe $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Pozostały jeszcze dwa zdarzenia elementarne – wypadnięcie trzech albo pięciu oczek. Zatem Izydor weźmie się do nauki z prawdopodobieństwem $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Odp.: Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{3}$.

Do powyższego przykładu wprowadzimy symboliczny opis. Będziemy z niego korzystać również w dalszych zadaniach. Oto on:

- Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia przyjęło się oznaczać dużą grecką literą Ω (omega).
- Zapis $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ jest jedną z form krótkiego zapisu faktu, że zdarzeniami elementarnymi w doświadczeniu z przykładu 4 są: 1, czyli wypadnięcie jednego oczka, 2 – wypadnięcie dwóch oczek itd.
- Zdarzenie polegające na wypadnięciu jednego oczka zapisujemy krótko: $A = \{1\}$.

- Zapis $B = \{2, 4, 6\}$ oznacza zdarzenie polegające na wypadnięciu parzystej liczby oczek. Powiemy, że zajściu tego zdarzenia **sprzyjają** trzy zdarzenia elementarne.
- Ostatniemu z opisywanych zdarzeń sprzyjają dwa wyniki: $C = \{3, 5\}$.
- Zdarzenie A jest elementarne, natomiast zdarzenia B i C nie są elementarne.
- Zdanie „prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B jest równe $\frac{1}{2}$" zapisujemy w postaci: $P(B) = \frac{1}{2}$.
- Liczbę zdarzeń elementarnych w zbiorze Ω oznaczamy symbolicznie: $\overline{\overline{\Omega}}$.
- Liczbę zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia A oznaczamy podobnie: $\overline{\overline{A}}$.

Definicja prawdopodobieństwa

Definicja

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Zakładamy, że w danym doświadczeniu losowym Ω jest skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych.

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w tym doświadczeniu jest równe stosunkowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

Każdy wynik elementarny sprzyja zajściu zdarzenia $A = \Omega$ i $P(\Omega) = 1$, dlatego zdarzenie Ω nazywamy **zdarzeniem pewnym**.

Na przykład w rzucie sześcienną kostką wyrzucenie liczby oczek mniejszej od 7 jest zdarzeniem pewnym.

Wygodnie jest wprowadzić pojęcie **zdarzenia niemożliwego**, czyli takiego, któremu nie sprzyja żaden wynik elementarny (inaczej mówiąc – zdarzenie takie nigdy w danym doświadczeniu losowym nie zajdzie). Na przykład w rzucie sześcienną kostką wyrzucenie liczby oczek równej 8 jest zdarzeniem niemożliwym. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia niemożliwego jest więc równe 0. Zdarzenie niemożliwe oznaczamy symbolem zbioru pustego $\emptyset$ i $P(\emptyset) = 0$.



We wszystkich rozpatrywanych w podręczniku zadaniach zdarzenia elementarne opisywanych doświadczeń losowych są jednakowo prawdopodobne, dlatego nie będziemy powtarzać tej uwagi za każdym razem przed zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

Zauważmy, że liczby $\overline{\overline{\Omega}}$, $\overline{\overline{A}}$ są liczbami naturalnymi. Ponadto, zawsze prawdziwy jest układ nierówności $0 \leqslant \overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{\Omega}}$. Jeżeli obie strony każdej z nierówności podzielimy przez $\overline{\overline{\Omega}}$, to otrzymamy $0 \leqslant \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} \leqslant 1$.

Wniosek

Jeżeli A jest zdarzeniem w jakimś doświadczeniu losowym, to $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Przykład 5

◀ zad. 2.12

W skrzynce są cztery kule białe, dwie zielone, pięć czerwonych i trzy czarne. Ile wynosi prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana kula będzie zielona?

Rozwiązanie

Doświadczeniem jest losowanie jednej kuli ze skrzynki zawierającej 14 kul. Zdarzeniem elementarnym jest wybór konkretnej kuli. Zatem zbiór zdarzeń elementarnych ma 14 elementów:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 14$$

Interesujące nas zdarzenie A polega na wylosowaniu zielonej kuli. Ponieważ są dwie takie kule, liczba zdarzeń sprzyjających jego zajściu jest równa 2:

$$\overline{\overline{A}} = 2$$

Zatem $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$.

Odp.: Zieloną kulę wylosujemy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{7}$.

Opis rozwiązania tak prostego jak powyższe zadanie wydaje się trochę sztuczny. Odpowiedź jesteśmy przecież w stanie podać od razu – z pamięci. Chcemy jednak pokazać, jak można takie rozwiązanie zapisać. Przyda się to do dalszych, już nie tak banalnych zadań.

Przykład 6

W pudełku są cztery klocki: dwa czerwone i dwa zielone. Jaś wyjmuje dwa klocki na chybił trafił. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyjmie klocki różnego koloru?

Rozwiązanie

Dwa klocki czerwone oznaczmy c_1, c_2, a zielone – z_1, z_2.

Zdarzeniem elementarnym jest wyciągnięcie przez Jasia dwóch klocków.

Na przykład zdarzenie polegające na wyciągnięciu klocka c_1 z klockiem c_2 zapiszemy w postaci $\{c_1, c_2\}$. Zauważmy, że kolejność zapisu c_1 i c_2 jest w tej sytuacji nieistotna, ponieważ Jaś wyjmuje obydwa klocki równocześnie. Zatem zapisy $\{c_1, c_2\}$ i $\{c_2, c_1\}$ oznaczają to samo zdarzenie elementarne w tym doświadczeniu.

Wszystkie możliwe wyniki losowania Jasia to:

$$\Omega = \{\{c_1, c_2\}, \{c_1, z_1\}, \{c_1, z_2\}, \{c_2, z_1\}, \{c_2, z_2\}, \{z_1, z_2\}\}$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6$$

Jeżeli A oznacza zdarzenie polegające na tym, że Jaś wyjął dwa klocki różnego koloru, to:

$$A = \{\{c_1, z_1\}, \{c_1, z_2\}, \{c_2, z_1\}, \{c_2, z_2\}\}$$

$$\overline{\overline{A}} = 4$$

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Jeżeli w doświadczeniu losujemy więcej niż jeden element i gdy:

- ważna jest kolejność losowanych elementów, to do opisu zdarzeń elementarnych stosujemy nawiasy **okrągłe** (lub nie stosujemy żadnych nawiasów),
- nie uwzględniamy kolejności losowanych elementów, to stosujemy nawiasy **klamrowe**.

Odp.: Prawdopodobieństwo tego, że klocki będą różnego koloru, wynosi $\frac{2}{3}$.

Zadania

2.1. Podaj możliwe wyniki opisanego doświadczenia losowego. Ile jest tych wyników? Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania każdego z nich?

a) W szkolnym sklepiku jest 17 identycznych butelek wody mineralnej. Sabina bierze jedną z nich.

b) W pudełku jest 5 kredek czerwonych, 3 zielone, 2 żółte, pomarańczowa i niebieska. Piotrek wyjmuje na chybił trafił jedną kredkę.

c) W urnie jest 13 losów pustych i 2 pełne. Wyciągamy jeden los.

d) Z klasy liczącej 18 dziewcząt i 18 chłopców losujemy jednego ucznia.

e) W przedszkolu Mateusz sięga po omacku do skrzynki, w której jest 25 piłek i wyciąga jedną z nich.

f) Sprzedawca wyciąga losowo z szuflady jedną z piętnastu 60-watowych żarówek.

2.2. Doświadczenie losowe polega na rzucie sześcienną kostką.
a) Zapisz zbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A – wypadła parzysta liczba oczek lub pięć oczek na kostce.
b) Oblicz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A.

2.3. W loterii fantowej jest 100 losów, w tym 13 wygrywających. Wyciągamy jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu
a) pustego.
b) wygrywającego.

2.4. W pojemniku jest 57 bułek świeżych i 10 czerstwych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wyciągnięta bułka jest
a) świeża.
b) czerstwa.

2.5. Monika kupiła jeden los na loterii książkowej. Wśród wszystkich 100 losów jest 65 pustych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Monika otrzyma książkę.

2.6. Z talii 52 kart Robert wyjmuje jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wyciągnie
a) siódemkę.
b) figurę, tzn. asa, króla, damę lub waleta.
c) kartę pik.
d) kartę koloru czerwonego, tzn. karo lub kier.
e) kartę młodszą od dziesiątki.
f) kartę różną od damy i króla.

2.7. Rzucamy sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo każdego ze zdarzeń:
A – wypadnie szóstka,
B – wypadnie nieparzysta liczba oczek,
C – wypadnie liczba oczek będąca liczbą pierwszą,
D – wypadną co najmniej 3 oczka,
E – wypadną co najwyżej 2 oczka,
F – nie wypadnie dwójka,
G – wypadnie czwórka lub szóstka,
H – nie wypadnie liczba pierwsza.

2.8. Ze zbioru dwucyfrowych liczb naturalnych wylosowano jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba jest
a) parzysta.
b) mniejsza od 50.
c) podzielna przez 7.
d) niepodzielna przez 5.
e) złożona.
f) pierwsza.
g) kwadratem liczby naturalnej.
h) sześcianem liczby naturalnej.

2.9. W urnie jest 100 losów ponumerowanych od 1 do 100. Monika wylosowała jeden los. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że wyciągnęła los z liczbą

a) mniejszą od 10.
b) parzystą.
c) większą od 55.
d) podzielną przez 3.
e) podzielną przez 10.
f) pierwszą mniejszą od 50.

2.10. W trzypiętrowym domu wczasowym na każdym piętrze jest 15 wolnych dwuosobowych pokoi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rodzice Bartka, którzy zarezerwowali sobie miejsca w tym domu, otrzymają pokój na drugim piętrze? Zakładamy, że wybór pokoju jest losowy, a na parterze wszystkie pokoje są zajęte.

2.11. W hotelu jest 17 wolnych pokoi jednoosobowych o kolejnych numerach od 1 do 17. Oblicz, z jakim prawdopodobieństwem pierwszemu gościowi przydzielony zostanie pokój o numerze

a) parzystym.
b) będącym liczbą pierwszą.
c) różnym od 7 i od 13.
d) nie większym od 11.
e) równym co najmniej 8.

2.12. Biuro turystyczne ma w ofercie wycieczki do następujących miast: Ankary, Aten, Limy, Lizbony, Londynu, Paryża, Rio de Janeiro, Sydney i Toronto. Jedną z tych wycieczek biuro przeznaczyło w ramach promocji na nagrodę dla zwycięzcy konkursu „Matematyka bez granic". Zwycięzca będzie losować cel podróży. Wyznacz prawdopodobieństwo, z jakim uda się do

a) Ameryki Północnej.
b) Ameryki Południowej.
c) kraju Unii Europejskiej.
d) stolicy jakiegoś państwa.

2.13. Pan Alojzy Mrówka ma w portfelu jeden banknot stuzłotowy, dwa pięćdziesięciozłotowe, cztery dwudziestozłotowe i siedem dziesięciozłotowych. Wyciąga losowo jeden banknot. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to kwota mniejsza od 50 zł?

2.14. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany miesiąc ma nazwę (w języku polskim) złożoną przynajmniej z ośmiu liter?

2.15. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana dwucyfrowa liczba naturalna jest podzielna przez 14?

2.16. W pudełku są klocki czerwone i 6 brązowych. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania klocka czerwonego jest równe $\frac{6}{7}$. Ile czerwonych klocków jest w tym pudełku?

2.17. Ania i Małgosia grają w wojnę. Każda z nich otrzymała 26 kart z talii. Małgosia odkryła swoją pierwszą kartę. Był to as kier. Teraz swoją kartę odkrywa Ania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to as pik?

2.18. W pojemniku są zielone i niebieskie kulki. Kulek zielonych jest dwa razy więcej niż niebieskich. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wyciągnięta kulka jest
a) zielona. b) niebieska.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Rzucamy sześcienną kostką. Wskaż prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby pierwszej.

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 3

2. W torebce są cukierki owocowe i czekoladowe. Cukierków owocowych jest dwa razy więcej niż czekoladowych. Wyjmujemy losowo cukierek z torebki. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że będzie to cukierek czekoladowy.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{1}{4}$

3. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy jedną liczbę. Wskaż prawdopodobieństwo wylosowania liczby x, która spełnia nierówność $1 - x \leqslant 0$.

A. 0 **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{5}{6}$ **D.** 1

4. Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych nieparzystych mniejszych od 30 losujemy jedną. Oceń prawdziwość podanych zdań.
Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej

A. przez 3 jest równe $\frac{1}{3}$. **B.** przez 5 jest równe $\frac{1}{5}$. **C.** przez 7 jest równe $\frac{1}{7}$.

5. W pudełku znajduje się 40 zapałek, w tym 6 wypalonych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięta losowo zapałka nie będzie wypalona?

6. Ze zbioru wszystkich krawędzi ostrosłupa wybieramy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to krawędź podstawy?

7. W klasie 3b jest 12 dziewcząt. Nauczyciel wywołuje do odpowiedzi jedną wylosowaną osobę. Ilu uczniów jest w tej klasie, jeżeli prawdopodobieństwo wylosowania chłopca wynosi $\frac{3}{5}$?

3. Reguła mnożenia

Umiejętności:

- zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, stosowanie reguły mnożenia oraz reguły dodawania

Jeżeli chcemy odpowiedzieć na pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo zaistnienia konkretnego zdarzenia w danym doświadczeniu losowym, powinniśmy obliczyć:

- liczbę wszystkich możliwych wyników,
- liczbę wyników sprzyjających.

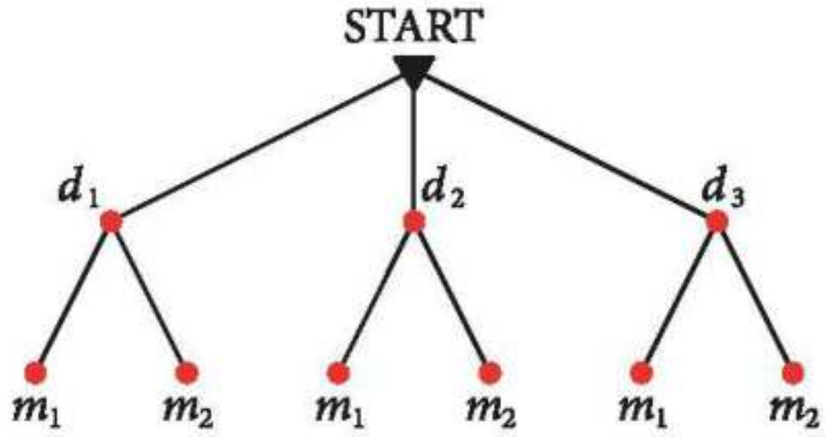
Zaczniemy od wyznaczania liczby wszystkich możliwych wyników uzyskanych w konkretnym doświadczeniu losowym.

Przykład 1

Bagaż do samolotu można spakować w jedną małą walizkę podręczną i duże walizki, które trzeba nadać oddzielnie. Franek chce wziąć jedną dużą i jedną małą walizkę. W domu ma trzy duże i dwie małe walizki. Ile różnych zestawów może uzyskać?

Rozwiązanie

W rozwiązaniu tego zadania pomożemy sobie rysunkiem.



Oznaczmy walizki:
duże – d_1, d_2, d_3,
małe – m_1, m_2.

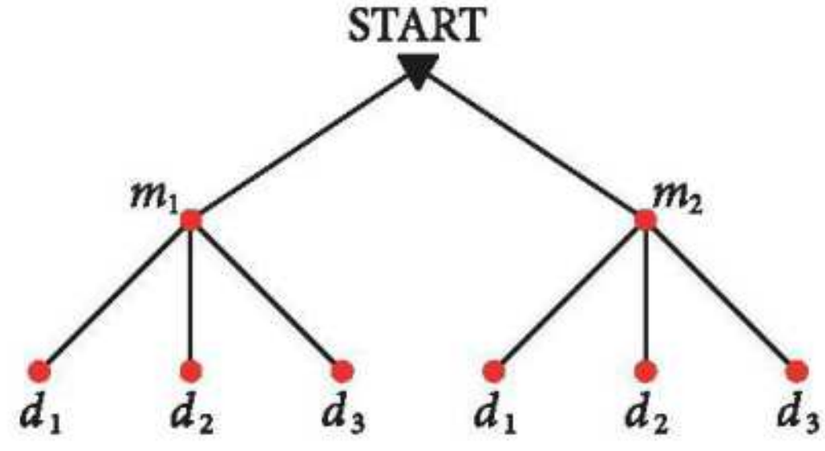
Jeśli Franek sięgnie najpierw po dużą walizkę, ma trzy możliwości wyboru. Na rysunku zaznaczono je w postaci trzech odcinków (tzw. gałęzi) wychodzących z punktu startu. Do każdej z wybranych dużych walizek może dołożyć jedną z dwóch małych – w ten sposób tworzy się sześć zestawów „duża i mała".

Możemy je wypisać, przesuwając się od punktu START wzdłuż gałęzi:

$d_1m_1,\ d_1m_2,\ d_2m_1,\ d_2m_2,\ d_3m_1,\ d_3m_2$

Zatem Franek może uzyskać $3 \cdot 2 = 6$ różnych par walizek.

Zauważmy, że nie ma znaczenia kolejność wybieranych elementów. Jeżeli Franek zacznie wybierać najpierw małą walizkę i do niej dobierać dużą, rysunek będzie wyglądał inaczej, inaczej też zapiszemy uzyskane wyniki:



$m_1d_1,\ m_1d_2,\ m_1d_3,\ m_2d_1,\ m_2d_2,\ m_2d_3$

ale liczba możliwości się nie zmieni: $2 \cdot 3 = 6$.

Odp.: 6

Rysunek ilustrujący wyniki takiego doświadczenia losowego nazywamy drzewkiem, a liczba wszystkich możliwych wyników równa jest liczbie gałęzi w ostatnim wierszu.

Twierdzenie

Reguła mnożenia

Jeśli zbiór A ma m elementów, a zbiór B ma n elementów, to liczba par (x, y) takich, że $x \in A$ i $y \in B$, jest równa $m \cdot n$.

Regułę mnożenia można uogólnić na n ($n \in \mathbf{N}$, $n > 1$) zbiorów, z których każdy ma skończoną liczbę elementów. Pokażemy to na przykładach.

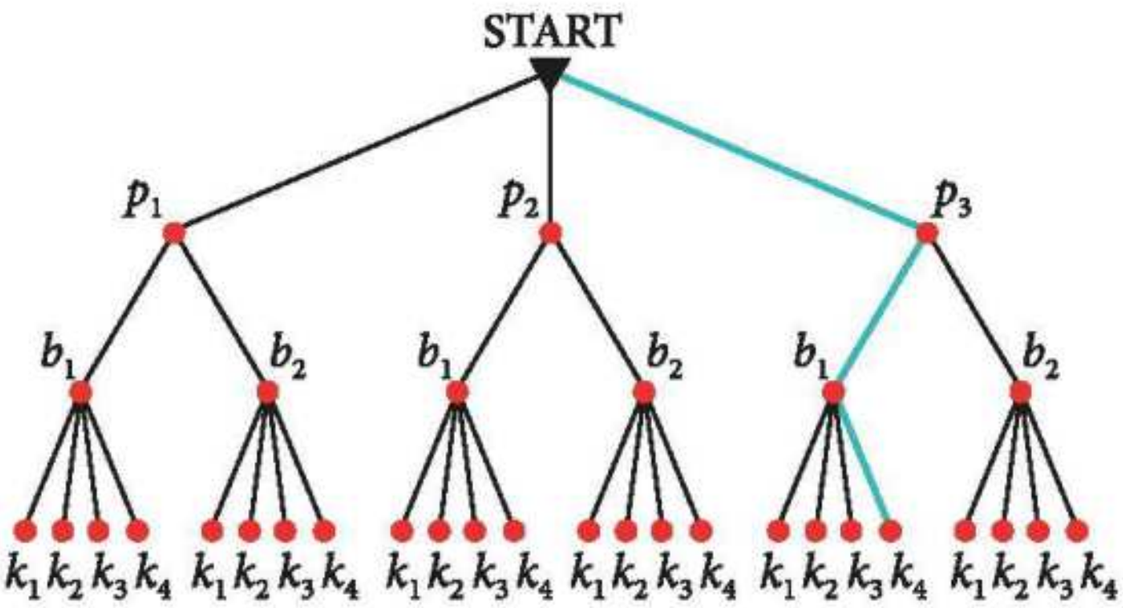
Przykład 2

◀ zad. 3.1, 3.2

Ania odłożyła na półkę trzy powieści, dwie biografie i cztery kryminały. Są to książki, spośród których zamierza wybrać zestaw do przeczytania podczas urlopu. Ile różnych zestawów może uzyskać, jeżeli z każdej kategorii wybierze po jednym egzemplarzu?

Rozwiązanie

Oznaczmy książki stojące na półce:
powieści – p_1, p_2, p_3,
biografie – b_1, b_2,
kryminały – k_1, k_2, k_3, k_4.
Kiedy Ania sięga na półkę po jedną powieść, ma trzy możliwości do wyboru. Na rysunku zaznaczono je w postaci trzech gałęzi wychodzących z punktu startu.



Do każdej z powieści może dołożyć jedną z dwóch biografii – w ten sposób tworzy się sześć zestawów „powieść i biografia". Do każdego z nich można dołożyć jeden z czterech kryminałów. Zatem Ania zabierze na urlop jeden z $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ możliwych zestawów. Ostatni wiersz drzewka ma 24 gałęzie, a przykładowo zaznaczona ścieżka wskazuje zestaw $p_3 b_1 k_4$.

Odp.: 24

Przykład 3 ◀ zad. 3.3

W trzech urnach umieszczone są ponumerowane kule. W pierwszej urnie jest siedem kul, w drugiej – cztery, a w trzeciej – pięć. Z każdej urny losujemy jedną kulę. Liczba wszystkich możliwych zestawów trzech kul, czyli wyników tego doświadczenia, wynosi $7 \cdot 4 \cdot 5 = 140$.

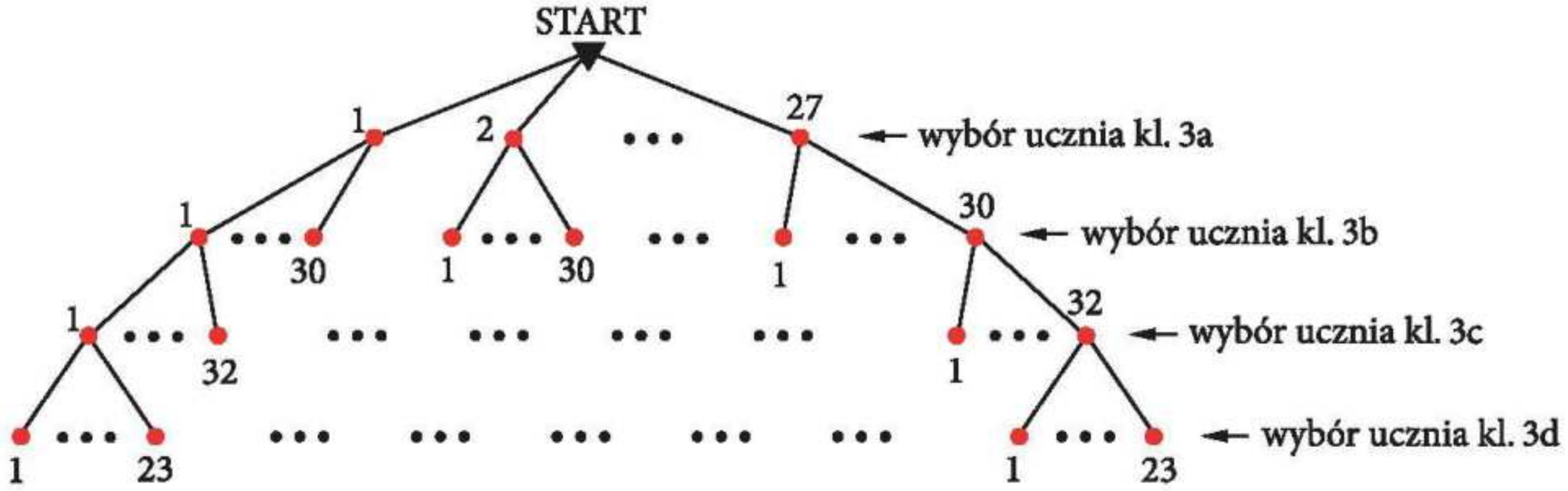
Przykład 4

Z czterech klas trzecich wybrano losowo po jednym uczniu do reprezentowania szkoły. W klasie 3a jest 27 uczniów, w 3b – 30 uczniów, w 3c – 32 uczniów, a w 3d – 23 uczniów. Obliczymy, ile jest wszystkich możliwych reprezentacji i zilustrujemy wyniki losowania za pomocą drzewka.

Rozwiązanie

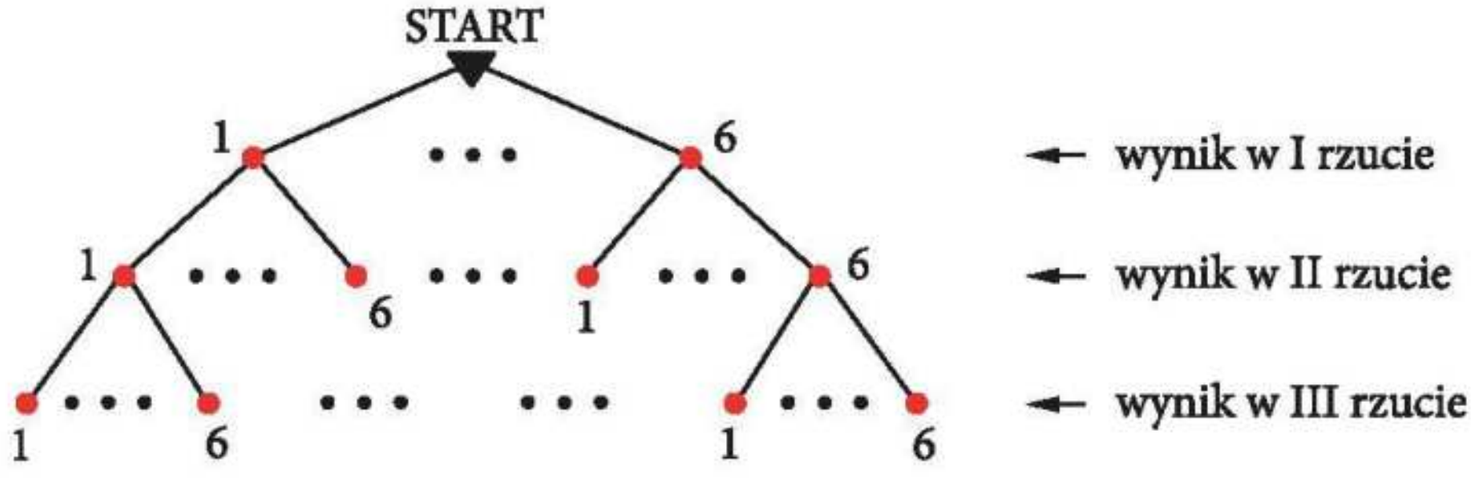
Wszystkich możliwych reprezentacji jest $27 \cdot 30 \cdot 32 \cdot 23 = 596\,160$.

Drzewko ilustrujące wszystkie wyniki tego losowania jest bardzo rozbudowane. Dlatego uprościliśmy rysunek – poszczególne liczby zamarkowaliśmy kropkami.



Przykład 5 ◀ zad. 3.5

Rzucamy trzy razy kostką. Wynikiem tego doświadczenia jest trójka liczb, np. 1, 6, 6.



Liczba wszystkich możliwych wyników wynosi $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Przykład 6 ◂ zad. 3.7

Na ile sposobów można rozmieścić trzy różne książki w dwóch pudełkach, jeżeli w każdym pudełku jest miejsce na trzy książki?

Rozwiązanie

Dla każdej z książek mamy dwa pudełka do wyboru. Mamy zatem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ możliwości umieszczenia trzech książek w dwóch pudełkach.

Odp.: 8

Przykład 7

W pierwszej skrzynce znajdują się 4 modele starych samochodów osobowych przeznaczone na wystawę. W drugiej skrzynce jest 5 modeli współczesnych samochodów wyścigowych. Dekorator ma ponadto do dyspozycji 3 modele motocykli. Na wystawie salonu można ustawić po jednym modelu samochodu i motocykla. Wyznaczymy liczbę możliwych zestawów.

Rozwiązanie

Jeżeli dekorator zdecyduje się na ustawienie starego samochodu, to ma $4 \cdot 3 = 12$ możliwych zestawów, a jeżeli na auto wyścigowe, to $5 \cdot 3 = 15$ różnych możliwości. Dekorator postanowił wybrać samochód losowo.

W tym celu włożył wszystkie modele samochodów do jednej skrzynki i poprosił pracownika salonu o wylosowanie jednego samochodu. W ten sposób mógł otrzymać jeden z $(4 + 5) \cdot 3 = 27$ możliwych zestawów.

W ostatnim przykładzie, poza regułą mnożenia, skorzystaliśmy z tzw. reguły dodawania.

Twierdzenie

Reguła dodawania

Jeżeli zbiory A i B są rozłączne, zbiór A ma m elementów i zbiór B ma n elementów, to liczba wszystkich elementów x takich, że $x \in A$ lub $x \in B$, jest równa $m + n$.

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}, \text{ gdy } A \cap B = \emptyset$$

Warunek, że zbiory A i B są rozłączne lub inaczej – nie mają wspólnych elementów – zapisujemy często w postaci równości $A \cap B = \emptyset$.

Przykład 8 ◂ zad. 3.8

Pan Teodor Motylek ma zamiar wyjechać na tygodniowe wczasy. Spakował do walizki 7 koszul, 10 krawatów i 8 par skarpetek.

a) Ile różnych zestawów może stworzyć z wymienionych części garderoby?

b) Po namyśle pan Teodor dołożył do walizki 2 koszule i 3 pary skarpetek. O ile zwiększyła się liczba zestawów?

Rozwiązanie

a) $7 \cdot 10 \cdot 8 = 560$

b) $9 \cdot 10 \cdot 11 - 7 \cdot 10 \cdot 8 = 430$

Odp.: a) 560 b) o 430

Przykład 9 ◂ zad. 3.9

Klasa Izydora Muszki wybiera się na wycieczkę. Cała grupa liczy 36 uczniów i 3 opiekunów. W autokarze jest 25 foteli dwuosobowych. Wychowawca postanowił przydzielić miejsca losowo. Zastanówmy się, jak może przeprowadzić losowanie i ile jest różnych wyników w takim doświadczeniu.



Rozwiązanie

W urnie powinno być 50 losów z numerami miejsc. Uczestnicy wycieczki w kolejności alfabetycznej losują po jednym losie, a następnie udają się na swoje miejsce do autokaru. Oczywiście wyjętego numeru nie wrzucają z powrotem do urny. Zatem pierwsza losująca osoba ma 50 losów w urnie, druga 49, trzecia 48 itd.

Obliczmy, ile losów zostanie dla ostatniej osoby. Przed nią było 38 losujących, więc w urnie zostanie $50 - 38 = 12$ losów.

Różnych wyników losowania jest więc tyle, ile wynosi iloczyn trzydziestu dziewięciu czynników:

$$50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$$

Jest to ogromna liczba, równa w przybliżeniu $7 \cdot 10^{56}$.

Odp.: $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$

Przykład 10

Zastanówmy się, jak można przeprowadzić losowanie z poprzedniego przykładu, aby spełnić ukryte marzenie Izydora Muszki i posadzić obok niego Jolkę. Na ile różnych sposobów możemy wówczas rozlokować uczestników wycieczki?

Rozwiązanie

Najprościej liczbę wszystkich możliwości opiszemy, jeśli tym razem zaczniemy losowanie od Izydora. Ma on do wyboru jedno z 50 miejsc (w urnie jest 50 losów), ale po odczytaniu wyniku wiadomo już, które miejsce powinniśmy zarezerwować dla koleżanki. Wybieramy los z tym numerem, wręczamy go Jolce (która nie bierze udziału w losowaniu) i kontynuujemy losowanie. Następny uczestnik ma więc do wyboru 48 możliwości, kolejny – 47 itd.

Aby lepiej zilustrować przebieg losowania, warto zapisać wynik jako iloczyn 39 czynników, z tym że na drugim miejscu wpisać 1, jako liczbę losów dla Jolki: $50 \cdot 1 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$.

Liczba wszystkich możliwości jest iloczynem 38 czynników $50 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$.

Odp.: $50 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$

Za pomocą urny i ponumerowanych kul można symulować wiele doświadczeń losowych. Na przykład:

- rzut sześcienną kostką do gry można zastąpić losowaniem jednej z sześciu kul ponumerowanych 1, 2, 3, 4, 5, 6,
- rzut monetą można zastąpić losowaniem jednej z dwóch kul,
- rzut dwiema kostkami można zastąpić dwukrotnym losowaniem jednej z sześciu kul itp.



Można wielokrotnie powtarzać czynność wyjmowania kuli z urny. Rozróżnimy tu dwa sposoby losowania – obydwa uwzględniające kolejność losowanych numerów.

1. Przed każdym podejściem stan urny jest taki sam. Inaczej mówiąc, po wylosowaniu (i zanotowaniu wyniku) wyciągnięta kula wrzucana jest z powrotem do urny. Taki sposób losowania nazywamy **losowaniem ze zwracaniem**.
2. Raz wyjęta kula nie wraca do urny. Taki sposób losowania nazywamy **losowaniem bez zwracania**.

Przykład 11 ◂ zad. 3.13

Z cyfr 4, 7, 8 układamy czterocyfrowe kody. Ile takich kodów możemy uzyskać?

Rozwiązanie

Przykładem takiego kodu jest ciąg 7448. Cyfry muszą się oczywiście powtarzać. Jeżeli chcemy to doświadczenie przeprowadzić za pomocą losowania kul z urny, to:

- w urnie muszą być trzy kule ponumerowane odpowiednio cyframi 4, 7 i 8,
- losujemy ze zwracaniem z tej urny cztery razy po jednej kuli.

Przy każdym losowaniu mamy zatem trzy możliwości do wyboru, więc wszystkich wyników (kodów) jest $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$.

Odp.: 81

Przykład 12

Pięcioro pacjentów ustawia się losowo w kolejkę (inaczej mówiąc – losuje numerek do lekarza). Na ile sposobów mogą to zrobić?

Rozwiązanie

Teraz w urnie mamy pięć kul ponumerowanych od 1 do 5, a losowanie odbywa się bez zwracania. Pierwsza osoba ma pięć możliwości wyboru, druga – cztery itd. Wszystkich wyników losowania jest zatem $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Odp.: 120

Przykład 13 ◂ zad. 3.21

Obliczymy, ile można utworzyć siedmiocyfrowych numerów telefonicznych, jeżeli

a) układ cyfr może być dowolny.

b) numer nie może zaczynać się od zera.

Rozwiązanie

a) Na każdym miejscu takiego numeru możemy wpisać jedną z dziesięciu cyfr. Takich dowolnie tworzonych numerów siedmiocyfrowych jest zatem $10^7 = 10\,000\,000$, czyli 10 milionów.

b) Jeżeli numer telefonu nie może zaczynać się od zera, to na pierwszym miejscu możemy wpisać jedną z dziewięciu cyfr, a na każdym z pozostałych sześciu – jedną z dziesięciu. Liczba wszystkich możliwych wyników takiego losowania jest więc równa $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^6$, czyli 9 milionów.

Odp.: a) 10^7 b) $9 \cdot 10^6$

Zadania

3.1. W karcie dań jest 5 zup, 12 drugich dań i 3 desery. Na ile sposobów można wybrać zestaw obiadowy składający się z zupy, drugiego dania i deseru?

3.2. Nauczyciel matematyki układa sprawdzian powtórzeniowy zawierający po jednym zadaniu z działów: funkcja liniowa, funkcja kwadratowa, ciągi, funkcja wykładnicza. Ile zestawów może ułożyć, jeżeli dysponuje pięcioma zadaniami o funkcji liniowej, dziesięcioma – o funkcji kwadratowej, sześcioma – o ciągach i trzema – o funkcji wykładniczej?

3.3. Rysiek pisze kartki świąteczne według wzoru:

Wesołych Radosnych Pogodnych Rodzinnych Spokojnych	Świąt,	udanego szalonego niezapomnianego wystrzałowego	Sylwestra i dużo	zdrowia pomyślności szczęścia sukcesów	w Nowym Roku życzy Rysiek.

Ile różnych kartek może napisać?

3.4. W klasie jest 32 uczniów. Nauczyciel matematyki nie stawia za pracę klasową ocen z plusami lub minusami. Ile jest możliwych wyników jednej klasówki, którą pisali wszyscy uczniowie?

3.5. Ile możemy otrzymać wyników doświadczenia polegającego na rzucie
a) pięć razy kostką do gry?
b) siedem razy monetą?
c) dwiema kostkami do gry?
d) pięcioma monetami?
e) kostką i monetą?
f) dwa razy kostką i trzy razy monetą?

3.6. W 30-osobowej klasie odbył się sprawdzian z matematyki. Ile mogło być różnych wyników sprawdzianu, jeżeli wiadomo, że nauczyciel wystawiał tylko „plus" albo „minus"?

3.7. Na ile sposobów można rozmieścić n kredek różnych kolorów w k pudełkach dla danych n i k? Zakładamy, że kolejność kredek w pudełku nie jest istotna oraz że w każdym pudełku zmieszczą się wszystkie kredki.
a) $n = 2, \quad k = 3$
b) $n = 1, \quad k = 6$
c) $n = 12, \quad k = 1$
d) $n = 10, \quad k = 3$

3.8. W trzech urnach rozmieszczone są kolorowe ponumerowane kule. W pierwszej urnie jest 12 kul żółtych, w drugiej 6 czerwonych, a w trzeciej 5 fioletowych.
a) Losujemy po jednej kuli z każdej urny. Ile zestawów kul otrzymamy?
b) Do drugiej urny dołożono 4 czerwone kule. Losujemy po jednej kuli z każdej urny. O ile więcej otrzymamy zestawów kul niż w wyniku losowania przed dołożeniem kul?

3.9. Do pustej sali kinowej weszły 4 osoby. Na ile sposobów mogą zająć miejsca? Wszystkich foteli w tym kinie jest 180.

3.10. Z urny zawierającej sześć kartek z numerami 0, 1, 2, 4, 6, 8 losujemy ze zwracaniem cztery razy po jednej kartce. Wylosowane numery zapisujemy kolejno i w ten sposób otrzymujemy liczbę. Oblicz, ile możemy otrzymać liczb czterocyfrowych
a) parzystych.
b) nieparzystych.
c) podzielnych przez 10.
d) w których zapisie nie wystąpi cyfra 0.

3.11. Hasło, za pomocą którego można się zalogować w sieci, składa się z 6 znaków. Każdy znak jest jedną z 24 liter (system odróżnia litery małe i duże) lub 10 cyfr. Ile istnieje takich haseł? Ile czasu zajęłoby sprawdzenie wszystkich możliwości przy założeniu, że w ciągu sekundy można sprawdzić jedno hasło?

3.12. Pan Teodor Motylek zabrał na tygodniowe wczasy 10 krawatów. Ile ma możliwości zaprezentowania swej kolekcji, jeżeli każdego dnia będzie chodził w innym krawacie?

3.13. Dwanaście ponumerowanych kul rozmieszczono w pięciu pojemnikach oznaczonych literami A, B, C, D, E. Ile jest różnych rozmieszczeń tych kul?

3.14. Lokujemy n pasażerów w k wagonach tak, aby każdy z nich był w innym wagonie. Na ile sposobów możemy to zrobić dla danych n i k?
a) $n = 3,\ k = 7$
b) $n = 7,\ k = 5$
c) $n = 6,\ k = 6$
d) $n = 3,\ k = 11$

3.15. Ze zbioru $\{a, b, c, d, e, f\}$ losujemy kolejno bez zwracania k elementów. Ile jest możliwych wyników tego doświadczenia dla danego k?
a) $k = 1$
b) $k = 2$
c) $k = 3$
d) $k = 4$
e) $k = 5$
f) $k = 6$

3.16. Ile słów pięcioliterowych (mających sens lub nie) można ułożyć z pięciu liter wybranych ze słowa KOMPUTER?

3.17. Ile jest czterocyfrowych liczb, w których żadna cyfra się nie powtarza, zaczynających się od 1, 3 lub 7?

3.18. Ile jest trzycyfrowych liczb, do których zapisania możemy użyć podanych cyfr? Cyfry w liczbach nie mogą się powtarzać.
a) 2, 6, 8, 9 b) 1, 3, 5, 7, 9 c) 2, 3, 5 d) 0, 7, 8, 9

3.19. Ile jest podzielnych przez 5 liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach?

3.20. W urnie są kule ponumerowane kolejnymi liczbami dwucyfrowymi od 10 do 99. Losujemy trzy razy kolejno bez zwracania po jednej kuli. Z wylosowanych numerów kul tworzymy sześciocyfrowe liczby (zapisywane zgodnie z kolejnością losowania). Ile możemy otrzymać liczb
a) podzielnych przez 10? b) podzielnych przez 100?

3.21. Ela chciała zatelefonować do Ali, ale pamiętała tylko pierwsze cztery cyfry siedmiocyfrowego numeru. Jaką największą liczbę numerów musiałaby wypróbować, aby połączyć się z koleżanką?

3.22. Krzyś dostał na urodziny kolejkę elektryczną składającą się z elektrowozu i siedmiu różnych wagoników. Na ile sposobów może zbudować pociąg, który ma elektrowóz na początku składu i cztery wagoniki?

3.23. W klasie 5c jest 18 dziewcząt i 12 chłopców. Na ile sposobów można wybrać w tej klasie samorząd złożony z przewodniczącego, zastępcy i skarbnika, jeżeli funkcję przewodniczącego ma objąć dziewczynka, a zastępcą ma być chłopiec?

3.24. Marta ma trzy różne klucze. Tylko dwa z nich pasują do zamków w skrytce bankowej, którą można otworzyć jednoczesnym przekręceniem obydwu kluczy. Klucze nie różnią się, niestety, wielkością. Ile prób otwarcia podjęła Marta, jeżeli dopiero przy ostatnim z możliwych wariantów (a jest mądrą dziewczyną i nie sprawdzała kilka razy tego samego układu) drzwi się otworzyły?

3.25. W konkursie „Kangur Matematyczny" jest 30 pytań, a do każdego z nich 5 wariantów odpowiedzi (z których dokładnie jedna jest poprawna). Na ile sposobów uczestnik konkursu może wypełnić kartę odpowiedzi, jeżeli
a) odpowie na wszystkie pytania?
* b) na niektóre (a nawet na wszystkie) pytania może nie udzielić odpowiedzi?

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Ile jest liczb trzycyfrowych, których wszystkie cyfry są różnymi liczbami parzystymi?

A. 48 **B.** 60 **C.** 100 **D.** 125

2. W kawiarni można zamówić 8 rodzajów ciastek, 4 rodzaje deserów lodowych i 7 rodzajów kawy. Na ile sposobów możemy zamówić zestaw składający się z kawy i czegoś słodkiego (ciastka lub deseru lodowego)?

A. 19 **B.** 36 **C.** 84 **D.** 224

3. Na ile sposobów możemy rozdzielić pomiędzy pięciu uczniów cztery różne tematy referatów do napisania tak, aby każdy dostał co najwyżej jeden temat?

A. $5 \cdot 4$ **B.** $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ **C.** 5^4 **D.** 4^5

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.
Liczba wszystkich liczb sześciocyfrowych, które są utworzone z cyfr 1, 2, 3 oraz są

A. parzyste, jest równa 243.
B. nieparzyste, jest równa 64.
C. podzielne przez 4, jest równa 81.

5. Nauczyciel wychowania fizycznego zamawia stroje dla szkolnej drużyny piłki nożnej. Do wyboru ma 6 kolorów koszulek, 4 kolory spodenek i 3 kolory getrów. Ile różnych zestawów może wybrać?

6. Autobusy w Pyrkach mają specjalną rejestrację, na którą składają się najpierw dwie litery, a następnie dwie cyfry. Ile maksymalnie autobusów można w taki sposób zarejestrować, jeżeli do dyspozycji mamy 24 litery alfabetu?

7. Przesuwamy się po bokach i przekątnych wypukłego pięciokąta $ABCDE$. Na ile sposobów możemy dojść z punktu A do punktu E, przechodząc przez wszystkie pozostałe wierzchołki pięciokąta i przez każdy z nich tylko raz?

4. Obliczanie prawdopodobieństwa

Umiejętności:

- obliczanie prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa

Przypomnijmy, że jeżeli w danym doświadczeniu losowym wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to **prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia** A jest równe:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

gdzie $\overline{\overline{A}}$ oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A, a $\overline{\overline{\Omega}}$ – liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

Przykład 1

Rzucamy dwa razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wypadną różne wyniki?

Rozwiązanie

W pierwszym rzucie może wypaść orzeł (oznaczamy to O) lub reszka (oznaczamy R), w drugim rzucie podobnie – wynik to O lub R. Przyjmujemy następującą konwencję – zapis OR oznacza taki wynik doświadczenia, w którym w pierwszym rzucie wypadł orzeł i w drugim wypadła reszka. Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych zapiszemy w postaci:

$$\Omega = \{OO, OR, RO, RR\}$$

Niech A oznacza zdarzenie: wypadną różne wyniki.

$$A = \{OR, RO\}$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Zamiast monety możemy wykorzystać urnę z dwiema ponumerowanymi kulami i losować kolejno ze zwracaniem.

Odp.: $\frac{1}{2}$

Gdybyśmy nie uwzględnili kolejności wyników rzutów, to otrzymalibyśmy 3 zdarzenia elementarne: „różne wyniki", „dwa orły" i „dwie reszki", ale wówczas zdarzenia te nie byłyby jednakowo prawdopodobne (co zauważy nawet początkujący gracz).

Przykład 2 ◂ zad. 4.1

Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczba reszek będzie większa od liczby orłów?

Doświadczenia „k razy rzut monetą (kostką)" i „rzut k rozróżnialnymi monetami (kostkami)" możemy dokładnie tak samo zinterpretować i opisać. Identyczne są zatem zbiory zdarzeń elementarnych takich doświadczeń.

Rozwiązanie

Doświadczeniem jest trzykrotny rzut monetą. Wyznaczmy zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{OOO,\ OOR,\ ORO,\ ROO,\ RRO,\ ROR,\ ORR,\ RRR\}$$

Zatem zbiór zdarzeń elementarnych ma $2^3 = 8$ elementów.

$$\overline{\overline{\Omega}} = 8$$

Interesujące nas zdarzenie A polega na wylosowaniu większej liczby reszek niż orłów, czyli:

$$A = \{RRR,\ RRO,\ ROR,\ ORR\}$$

$$\overline{\overline{A}} = 4$$

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Zauważmy, że jeżeli wykonujemy nieparzystą liczbę rzutów monetą, to nie ma możliwości otrzymania takiej samej liczby reszek i orłów. W połowie wszystkich możliwych wyników więcej jest reszek, a w połowie – orłów. Odpowiedzi można było udzielić od razu, bez wypisywania elementów zbioru A.

Odp.: $\frac{1}{2}$

Przykład 3

Zapisujemy czterocyfrowe liczby w następujący sposób: rzucamy 4 razy monetą – jeżeli wypadnie orzeł, to zapisujemy 1, a jeśli reszka – to 2. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest:

A – parzysta, B – podzielna przez 3, C – podzielna przez 4?

Rozwiązanie

Zbiór zdarzeń elementarnych ma $2^4 = 16$ elementów.

$$\overline{\overline{\Omega}} = 16$$

W zapisie otrzymanych liczb występują tylko cyfry 1 i 2. Połowa tych liczb kończy się jedynką, a połowa – dwójką, zatem:

$$\overline{\overline{A}} = 8, \quad P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Zauważmy, że do wybrania zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A niepotrzebne były informacje o cyfrach uzyskanych w pierwszych trzech losowaniach. Szukane prawdopodobieństwo można zatem wyznaczyć prościej – wystarczy wziąć pod uwagę tylko ostatnie losowanie. Skoro na dwie możliwości jedna jest dobra, to $P(A) = \frac{1}{2}$.

Zdarzenie B zajdzie wtedy, gdy suma cyfr będzie podzielna przez 3 – w naszym losowaniu oznacza to wyłącznie liczbę, której suma cyfr jest równa 6 (najmniejszą z możliwych sum jest 4, a największą – 8). Zatem dobrymi wynikami są tylko liczby zapisane z użyciem dwóch dwójek i dwóch jedynek: 1122, 1212, 1221, 2121, 2112, 2211.

$$\overline{\overline{B}} = 6, \quad P(B) = \frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Zdarzenie C zajdzie wtedy, gdy na końcu liczby pojawi się układ cyfr 12 (zgodnie z cechą podzielności przez 4), czyli dobrymi wynikami są tylko liczby: 1112, 1212, 2112, 2212.

$$\overline{\overline{C}} = 4, \quad P(C) = \frac{\overline{\overline{C}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Podobnie jak przy zdarzeniu A, do obliczenia szukanego prawdopodobieństwa niepotrzebna jest informacja o wynikach pierwszych dwóch losowań. Zadanie można uprościć – wystarczy obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania liczby dwucyfrowej podzielnej przez 4, w której występują tylko cyfry 1 i 2. Sprzyjający układ 12 wystąpi raz na cztery możliwości (11, 12, 21, 22), więc $P(C) = \frac{1}{4}$.

Odp.: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{8}$, $P(C) = \frac{1}{4}$

Przykład 4 ◂ zad. 4.7

Rzucamy dwa razy kostką. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że:
A – suma oczek jest większa od 10,
B – za drugim razem wypadła liczba oczek o 2 większa niż za pierwszym razem,
C – obydwa wyniki są nieparzyste,
D – wyniki w obydwu rzutach są różne.

Rozwiązanie

W tym doświadczeniu losowym:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$$

A – suma oczek jest większa od 10:

$$A = \{56,\ 65,\ 66\}$$

$$\overline{\overline{A}} = 3, \quad P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16,$$
$$21, 22, 23, 24, 25, 26,$$
$$31, 32, 33, 34, 35, 36,$$
$$41, 42, 43, 44, 45, 46,$$
$$51, 52, 53, 54, 55, 56,$$
$$61, 62, 63, 64, 65, 66\}$$

B – za drugim razem wypadła liczba oczek o 2 większa niż za pierwszym razem:

$$B = \{13,\ 24,\ 35,\ 46\}$$

$$\overline{\overline{B}} = 4$$

$$P(B) = \frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

C – obydwa wyniki są nieparzyste:

$$\overline{\overline{C}} = 3^2 = 9$$

$$P(C) = \frac{\overline{\overline{C}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

D – wyniki w obydwu rzutach są różne:

$$\overline{\overline{D}} = 6 \cdot 5$$

$$P(D) = \frac{\overline{\overline{D}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6 \cdot 5}{36} = \frac{5}{6}$$

Odp.: $P(A) = \frac{1}{12}$, $P(B) = \frac{1}{9}$, $P(C) = \frac{1}{4}$, $P(D) = \frac{5}{6}$

Poszczególne zdarzenia w tym doświadczeniu można też zliczać na rysunku. Każdemu z 36 zdarzeń elementarnych odpowiada jedna komórka w tabeli. Zaznaczymy na przykład zdarzenia sprzyjające zdarzeniu B.

1. rzut / 2. rzut	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3	×					
4		×				
5			×			
6				×		

Przykład 5

Rzucamy trzy razy kostką. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie otrzymamy tyle oczek, ile jest równa suma oczek w drugim i trzecim rzucie.

Rozwiązanie

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6^3$$

Niech A oznacza zdarzenie: w pierwszym rzucie otrzymamy tyle oczek, ile jest równa suma oczek z drugiego i trzeciego rzutu.

$$A = \{615,\ 624,\ 633,\ 642,\ 651,\ 514,\ 523,\ 532,\ 541,\ 413,\ 422,\ 431,\ 312,\ 321,\ 211\}$$

$$\overline{\overline{A}} = 15, \quad P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}$$

Odp.: $\frac{5}{72}$

Przykład 6

Krzyś opiekuje się szczeniakami – dwiema suczkami i dwoma pieskami. Podaje je losowo weterynarzowi do szczepienia. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suczki i pieski będą szczepione na zmianę?

Rozwiązanie

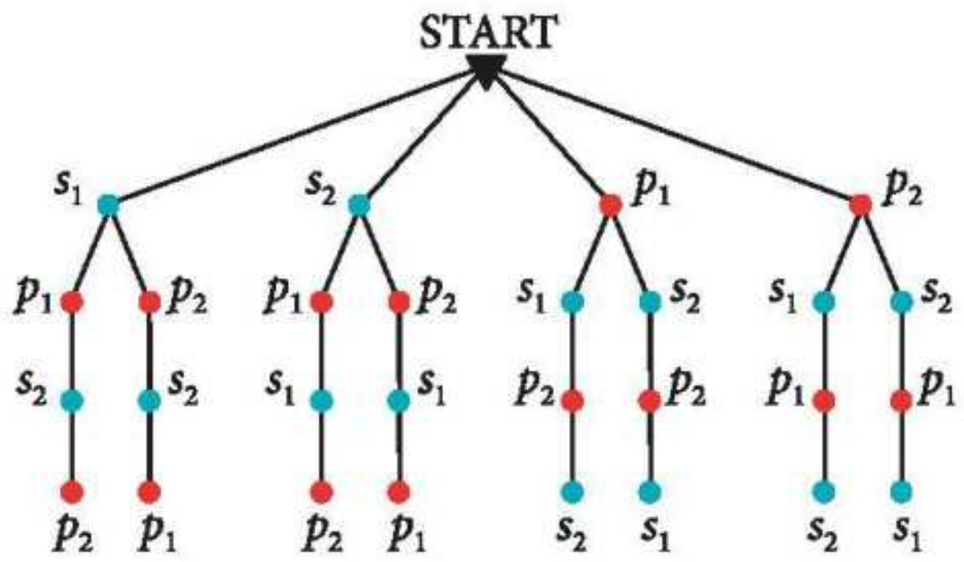
Cztery szczeniaki są podawane kolejno, zatem:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Liczba zdarzeń sprzyjających jest równa:

$$\overline{\overline{A}} = 4 \cdot 2$$

co wyjaśniamy na rysunku drzewka (s_1, s_2 oznacza suczkę, p_1, p_2 – pieska).



$$P(A) = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{3}$$

Odp.: $\frac{1}{3}$

Przykład 7 ◂ zad. 4.8

Tata Ali codziennie śpiewa córeczce jedną z siedmiu kołysanek, które zna. Z jakim prawdopodobieństwem nie powtórzy w ciągu tygodnia ani jednej, jeżeli kołysanki wybiera w sposób losowy?

Rozwiązanie

Jeżeli ponumerujemy kołysanki 1, 2, …, 7, to każdą możemy utożsamić z kulą o odpowiadającym jej numerze. Tata Ali losuje jedną dziennie (z całego zbioru, czyli ze zwracaniem), więc ma zawsze 7 możliwości wyboru. Zatem:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 7^7$$

Jeżeli przyjmiemy, że A jest zdarzeniem polegającym na wyborze różnych piosenek w ciągu tygodnia, to zdarzenia sprzyjające otrzymamy, gdy będziemy losować 7 razy bez zwracania, czyli:

$$\overline{\overline{A}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P(A) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7^7} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7^6} = \frac{720}{117649} \approx \frac{1}{163}$$

Odp.: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7^6}$

Przykład 8 ◂ zad. 4.10

Klara i Leon wybierają losowo przedziały spośród 7 kolejnych wolnych przedziałów w wagonie. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że nie będą jechali

a) w tym samym przedziale.

b) ani w tym samym przedziale, ani w sąsiednich przedziałach.

Rozwiązanie

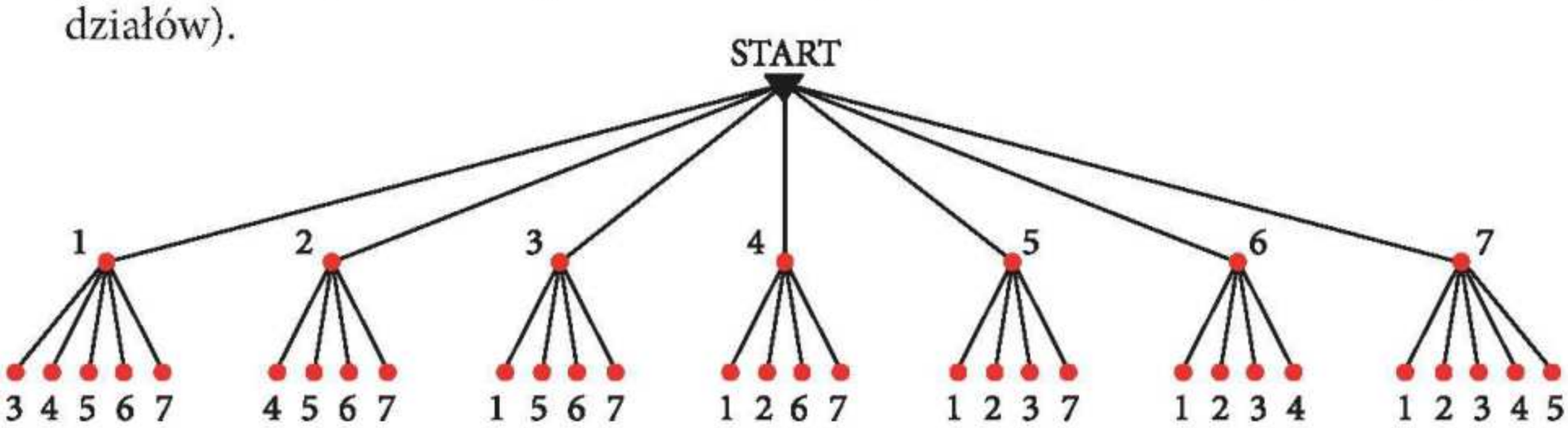
Klara i Leon mają po 7 możliwości wyboru, zatem $\overline{\overline{\Omega}} = 7 \cdot 7$.

a) Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że nie wylosują tego samego przedziału. Pierwsza osoba wybierająca przedział ma 7 możliwości, natomiast druga już tylko 6. Liczba wszystkich sprzyjających układów jest więc równa $7 \cdot 6$.

$$\overline{\overline{A}} = 7 \cdot 6$$

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{7 \cdot 6}{7 \cdot 7} = \frac{6}{7}$$

b) Niech B oznacza zdarzenie polegające na tym, że Klara i Leon nie wylosują ani tego samego przedziału, ani sąsiednich przedziałów. Do wyznaczenia liczby wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu B posłużymy się rysunkiem. Przyjmijmy, że jako pierwsza przedział wybiera Klara (cyfry na rysunku oznaczają numery przedziałów).



Zauważmy, że:

- jeżeli Klara trafi do pierwszego przedziału, to Leon może jechać w każdym z przedziałów o numerach 3, 4, 5, 6 oraz 7 – daje to 5 możliwości (podobna sytuacja zaistnieje wówczas, gdy Klara wylosuje ostatni przedział),
- jeżeli Klara trafi do któregoś ze środkowych przedziałów, to Leon ma do wyboru jeden z czterech przedziałów.

Wszystkich sprzyjających zdarzeń elementarnych jest tyle, ile gałęzi w ostatnim wierszu drzewka.

$$\overline{\overline{B}} = 1 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 30$$

$$P(B) = \frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{30}{7 \cdot 7} = \frac{30}{49}$$

Odp.: a) $\frac{6}{7}$ b) $\frac{30}{49}$

Przykład 9 ◂ zad. 4.14

Autobus wiozący pięciu pasażerów jedzie trasą, wzdłuż której jest 8 przystanków. Zakładamy, że wszystkie rozkłady wysiadania pasażerów na przystankach są jednakowo prawdopodobne. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia, że każdy pasażer wysiądzie na innym przystanku.

Rozwiązanie

Każdy z pasażerów ma do wyboru dowolny z ośmiu przystanków (ośmiu ponumerowanych kul). Wyobraźmy sobie, że losowanie odbywa się przed wejściem pasażera do autobusu. Pierwszy pasażer losuje jedną kulę z ośmiu, wrzuca ją z powrotem do urny, aby drugi pasażer miał do dyspozycji 8 przystanków itd.

$$\overline{\overline{\Omega}} = 8^5$$

Niech A oznacza zdarzenie, że każdy pasażer wysiądzie na innym przystanku. Wyniki sprzyjające uzyskamy wówczas, gdy żadna cyfra się nie powtórzy. Zatem:

$$\overline{\overline{A}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

$$P(A) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8^5} = \frac{105}{512}$$

Odp.: $\frac{105}{512}$

Przykład 10 ◂ zad. 4.23

W urnie znajduje się pięć kul podpisanych cyframi 2, 3, 4, 6, 8. Losujemy jedną kulę, zapisujemy wynik i wrzucamy wylosowaną kulę z powrotem do urny. Następnie losujemy drugi raz i dopisujemy wynik do pierwszej cyfry (po jej prawej stronie). W ten sposób wylosowane cyfry tworzą liczbę dwucyfrową. Z jakim prawdopodobieństwem otrzymamy liczbę większą od 44?

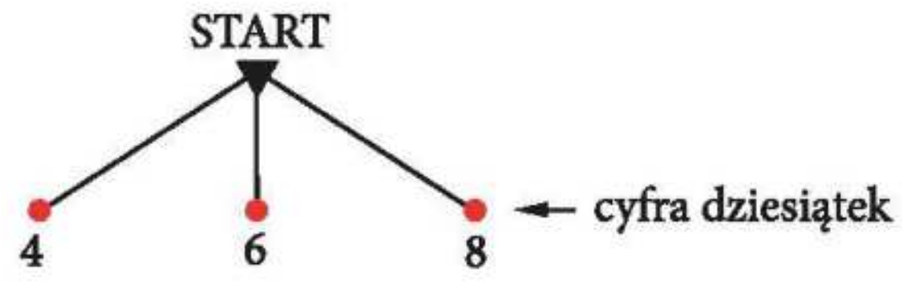
Rozwiązanie

W urnie mamy pięć kul i losowanie powtarzamy dwukrotnie. Liczba wszystkich możliwych wyników jest więc równa 25.

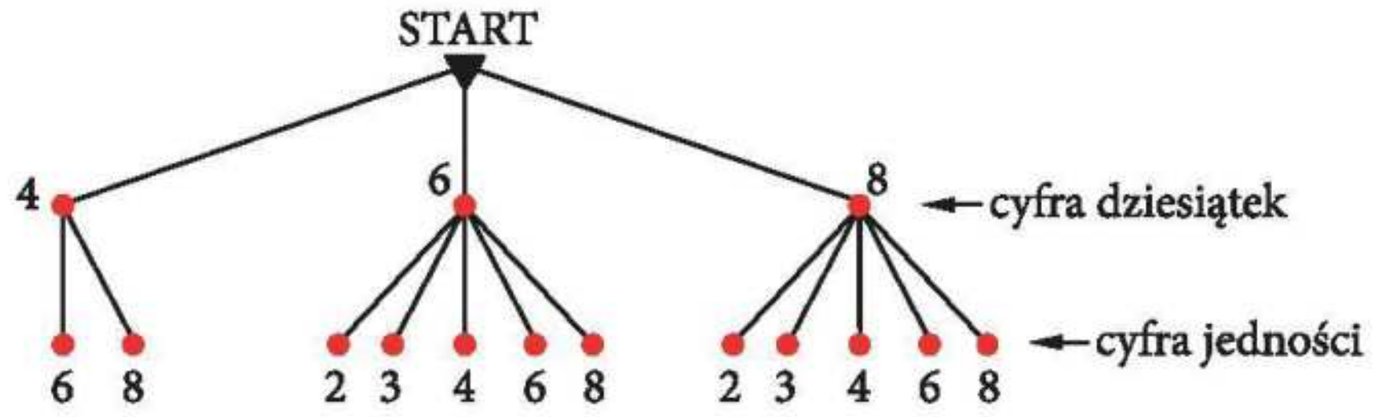
$$\overline{\overline{\Omega}} = 25$$

Oznaczmy literą A interesujące nas zdarzenie – wylosowanie liczby większej od 44. Przykładami sprzyjających zdarzeń elementarnych są wyniki: 66, 48, 63 itd. Natomiast niepożądane liczby to np. 23, 44.

Zastanówmy się, jak zliczyć wyłącznie sprzyjające układy cyfr. Pierwsza wylosowana cyfra będzie cyfrą dziesiątek tworzonej liczby, więc nie może być mniejsza od 4. W pierwszym losowaniu interesują nas zatem tylko kule oznaczone 4, 6 albo 8.



Jeżeli pierwszą wylosowaną cyfrą jest 6 lub 8, to nie jest ważne, jaka będzie następna – każdy układ jest dobry. Inaczej rzecz się ma z wylosowaną jako pierwszą cyfrą 4. Liczba 46 jest dobra, a 43 nie. W tym wypadku w drugim losowaniu mogą pojawić się tylko dwie kule – z numerem 6 oraz 8. Ostatecznie drzewko wszystkich sprzyjających układów wygląda następująco:



Liczba wszystkich możliwych zakończeń gałęzi, czyli dwucyfrowych liczb większych od 44, jest więc równa $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 12$, czyli:

$$\overline{\overline{A}} = 12, \quad P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{12}{25}$$

Odp.: $\frac{12}{25}$

Zadania

4.1. Rzucamy czterema monetami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na trzech spośród tych monet wypadnie reszka?

4.2. Rzucamy pięć razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w żadnych dwóch kolejnych rzutach nie powtórzy się ten sam wynik.

4.3. Rzucamy monetą i sześcienną kostką do gry. Wypisz zbiór zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia losowego, a następnie oblicz prawdopodobieństwo każdego z następujących zdarzeń:
A – wypadnie reszka i parzysta liczba oczek,
B – wypadnie orzeł i liczba oczek podzielna przez 3,
C – wypadnie nieparzysta liczba oczek,
D – wypadnie orzeł,
E – wypadnie reszka i liczba oczek podzielna przez 7,
F – wypadnie szóstka.

4.4. Pan Krzysztof ma w lewej kieszeni jeden cienkopis czarny i jeden niebieski, a w prawej – jeden zielony, jeden czerwony i jeden fioletowy. Wyjmuje losowo po jednym cienkopisie z każdej kieszeni. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wyjmie cienkopisy czarny i czerwony.

4.5. Z talii 52 kart losujemy kolejno dwie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwszą wylosowaną kartą będzie as, a drugą dama.

4.6. Z pudełka, w którym są 3 kule białe i 2 czarne, losujemy bez zwracania dwie kule. Co jest bardziej prawdopodobne: wylosowanie dwóch kul białych czy wylosowanie najpierw kuli czarnej, a potem białej?

4.7. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) na obu kostkach wypadną identyczne wyniki.
b) na obu kostkach wypadną parzyste liczby oczek.
c) liczba oczek na pierwszej kostce będzie większa.
d) liczba oczek na pierwszej kostce będzie wielokrotnością liczby oczek z drugiej kostki.

4.8. Ze zbioru {4, 6, 7, 8} losujemy cztery razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Otrzymane wyniki zapisujemy i tworzymy w ten sposób czterocyfrowe liczby – ostatnia wylosowana liczba jest cyfrą jedności. Oblicz z jakim prawdopodobieństwem otrzymamy liczbę
a) o różnych cyfrach.
b) nieparzystą.

4.9. Tworzymy liczbę trzycyfrową w następujący sposób: spośród cyfr 1, 2, ..., 9 losujemy najpierw cyfrę setek, potem z pozostałych ośmiu cyfrę dziesiątek, a następnie z pozostałych siedmiu – cyfrę jedności. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby parzystej.

4.10. Patryk i Martyna jadą na wakacje tym samym pociągiem. Komputer przydzielił im losowo miejsca w tym samym sześcioosobowym przedziale. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zajmą miejsca
a) naprzeciwko siebie.
b) obok siebie.

4.11. W wagonie jest jedenaście przedziałów po osiem miejsc w każdym. Kupujemy (losową) miejscówkę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy miejsce przy oknie.

4.12. W teleturnieju prowadzący zadaje dziesięć pytań. Do każdego z nich podane są cztery odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że osoba nieznająca odpowiedzi na żadne pytanie odpowie na wszystkie poprawnie.

4.13. Ambroży, Baltazar, Cezary i Dionizy losują kolejność, w jakiej będą skakać do basenu z trampoliny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) Ambroży będzie skakał na końcu.
b) panowie skoczą w alfabetycznej kolejności ich imion.
c) Cezary i Dionizy będą skakali jeden za drugim (Cezary za Dionizym lub odwrotnie).
d) Baltazar będzie skakał wcześniej niż Dionizy.

4.14. Sześciu pasażerów wsiada na przystanku do tramwaju złożonego z trzech wagonów. Zakładamy, że każdy pasażer może z tym samym prawdopodobieństwem wsiąść do dowolnego wagonu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że

a) wszyscy pasażerowie wsiądą do jednego wagonu.

b) do jednego z wagonów nie wsiądzie żaden pasażer.



4.15. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch białych kul z urny zawierającej 3 kule białe i 2 czarne w doświadczeniu, które polega na losowaniu kolejno dwóch kul

a) bez zwracania.

b) ze zwracaniem.

4.16. W urnie są cztery kule, na każdej z nich napisana jest cyfra. Losujemy dwa razy po jednej kuli bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na drugiej z wylosowanych kul jest większa cyfra niż na pierwszej, jeżeli kule w urnie mają cyfry

a) 1, 2, 3, 4.

b) 1, 1, 2, 3.

4.17. Z cyfr 0, 1, 2, 3, 4 układamy wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana jedna z tych liczb ma dwie cyfry parzyste i jedną nieparzystą.

4.18. Ze zbioru wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 2, 3, 4, 5 i 6, wybieramy losowo jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy liczbę

a) o różnych cyfrach.

b) o jednakowych cyfrach.

c) parzystą.

d) większą od 500.

4.19. Gracz rzuca dwa razy kostką. Jeżeli wyniki są identyczne, to do sumy wyrzuconych oczek dolicza mu się 5 punktów, jeżeli wyniki są różne i wśród nich jest jedynka, to dolicza się 3 punkty. W pozostałych przypadkach grający traci tyle punktów, ile wynosi suma wyrzuconych oczek. Oblicz prawdopodobieństwo, z jakim w jednej grze gracz

a) zdobędzie maksymalną liczbę punktów.

b) zdobędzie 6 punktów.

c) zdobędzie 9 punktów.

d) straci punkty.

4.20. Pięcioletni Tomek pomaga tacie w robieniu porządków. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ustawi czterotomową encyklopedię i zachowa kolejność tomów (Tomek nie umie jeszcze czytać i książki ustawia losowo).

4.21. Bliźniaki Antek i Bartek ustanowili następującą zasadę wynoszenia śmieci. Rzucają kostką i monetą. Jeżeli na kostce wypadnie mniej niż pięć oczek i na monecie orzeł, to przez tydzień śmieci wynosi Antek, a jeżeli na kostce wypadną więcej niż dwa oczka i na monecie reszka, to Bartek. W pozostałych przypadkach śmieci ma wynosić ich młodszy brat Czarek. Czy ustalone warunki są sprawiedliwe?

4.22. Rzucamy trzy razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma liczby oczek wyrzuconych w pierwszym i drugim rzucie jest mniejsza od liczby oczek wyrzuconych w trzecim rzucie.

4.23. W pudełku jest 10 kul oznaczonych cyframi 0, 1, …, 8, 9. Wyjmujemy losowo jedną kulę, zapisujemy jej numer i wrzucamy z powrotem do pudełka. Czynność tę powtarzamy trzy razy. W ten sposób tworzymy ciągi trzyelementowe (a, b, c), dla których budujemy wyrażenia $100a+10b+c$. Oblicz prawdopodobieństwo, że wartość tego wyrażenia jest

a) liczbą dwucyfrową.
b) liczbą większą od 653 i mniejszą od 921.
c) wielokrotnością liczby 10.

* **4.24.** Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że urodziny sześciu losowo wybranych osób wypadają w dwóch miesiącach? Prawdopodobieństwo urodzenia w każdym miesiącu przyjmujemy za jednakowe.

4.25. Pomalowany klocek sześcienny pocięto na 1000 jednakowych sześcianików. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia sześcianika

a) pomalowanego na jednej ścianie.
b) pomalowanego na dwóch ścianach.
c) pomalowanego na trzech ścianach.
d) pomalowanego na jednej lub dwóch ścianach.
e) niepomalowanego.

4.26. Ankieta składa się z czterech pytań, na które można odpowiedzieć „tak” lub „nie”. Jarek i Kasia wypełnili swoje ankiety na chybił trafił. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypełnili je tak samo.

* **4.27.** Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy ze zwracaniem trzy razy po jednym elemencie. Wylosowane liczby ustawiamy w ciąg w kolejności losowania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowane liczby utworzą

a) ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$ lub 3.
b) ciąg arytmetyczny.

4.28. Ze zbioru wszystkich liczb całkowitych czterocyfrowych wybieramy losowo jedną. Oznaczmy ją n. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że 1 jest ostatnią cyfrą liczby
a) n^2. b) n^4.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch orłów w trzech rzutach monetą.

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{3}{8}$

2. Kazik zapomniał czterocyfrowego kodu do domofonu w swoim bloku. Wybrał więc losowo liczby na klawiaturze. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że drzwi się otworzą.

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{40}$ **C.** $\frac{1}{10^4}$ **D.** $\frac{1}{4^{10}}$

3. Rzucamy trzema kostkami i czterema monetami. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że wypadną tylko szóstki i reszki.

A. $\frac{1}{3 \cdot 6 + 4 \cdot 2}$ **B.** $\frac{1}{3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}$ **C.** $\frac{1}{6^3 \cdot 2^4}$ **D.** $\frac{1}{3^6 \cdot 4^2}$

4. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 układamy wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Oceń prawdziwość podanych zdań.
Prawdopodobieństwo tego, że jedna z tych liczb wybrana losowo jest

A. równa 125, wynosi $\frac{1}{125}$.

B. mniejsza od 300, wynosi $\frac{2}{5}$.

C. parzysta, wynosi $\frac{3}{5}$.

5. Rzucamy dwa razy kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn oczek uzyskanych w obu rzutach będzie liczbą podzielną przez 3.

6. Z pudełka, w którym są 2 kule białe i 3 czarne, losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że obie wylosowane kule będą tego samego koloru.

7. Trzech profesorów przyszło na konferencję z podobnymi parasolami. Po zakończeniu konferencji zabrali parasole losowo. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każdy wrócił do domu z własnym parasolem.

5. Własności prawdopodobieństwa

Umiejętności:

- obliczanie prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa
- zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosowanie reguły mnożenia i reguły dodawania

Zdarzenia wykluczające się i zdarzenia przeciwne

Określimy pewne relacje, które mogą zajść między zdarzeniami A i B w doświadczeniu losowym o zbiorze zdarzeń elementarnych Ω.

- Mówimy, że zdarzenia A i B **wykluczają się**, jeżeli nie mogą zajść jednocześnie. Nie istnieje zatem zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$, które sprzyjałoby zarówno zdarzeniu A, jak i zdarzeniu B.
- **Zdarzeniem przeciwnym** do A nazywamy zdarzenie polegające na tym, że zdarzenie A nie zajdzie. Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A oznaczamy A'. Każde zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A nie sprzyja zdarzeniu A' i na odwrót. Inaczej mówiąc, każde zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ albo sprzyja zdarzeniu A, albo sprzyja zdarzeniu A'.

Przykład 1 ◂ zad. 5.1–5.3

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie monetą. Zbiór zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu:

$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ROO, RRO, ROR, ORR, RRR\}$

Przyjmijmy, że A jest zdarzeniem polegającym na tym, że wypadną co najmniej 2 orły:

$A = \{OOO, OOR, ORO, ROO\}$

B jest z zdarzeniem polegającym na tym, że wypadną dokładnie 2 reszki:

$B = \{ORR, ROR, RRO\}$

C jest zdarzeniem polegającym na tym, że wypadną co najmniej 2 reszki:

$C = \{ORR, ROR, RRO, RRR\}$

Wówczas:

- zdarzenia A i B się wykluczają,
- zdarzenia A i C się wykluczają,
- zdarzenia A i C są przeciwne (możemy ten fakt zapisać $C = A'$ lub $C' = A$).

Przykład 2 ◂ zad. 5.5

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie kostką. W tabeli przedstawiamy kilka par zdarzeń przeciwnych w tym doświadczeniu.

Zdarzenie	Zdarzenie przeciwne
A – suma liczb oczek jest równa 10	A' – suma liczb oczek jest różna od 10
B – wypadły parzyste liczby oczek	B' – co najmniej raz wypadła nieparzysta liczba oczek
C – co najmniej raz wypadła szóstka	C' – szóstka nie wypadła ani razu

Przykład 3

Obserwujemy pewien zbiór graczy w lotto. Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia „losowo wybrana osoba wygrała przynajmniej raz jakąkolwiek kwotę" jest zdarzenie „losowo wybrana osoba nigdy nie wygrała".

Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego

Niech A oznacza zdarzenie w doświadczeniu losowym, którego zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór Ω. Przyjmijmy, że $\overline{\Omega} = n$. Jeżeli oznaczymy $\overline{A} = k$, to zgodnie z określeniem zdarzenia przeciwnego $\overline{\overline{A'}} = n - k$. Zatem:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

$$P\left(A'\right) = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n} = 1 - P(A)$$

Powyższą równość zapiszemy w postaci następującego wzoru:

$$\boldsymbol{P\left(A'\right) + P(A) = 1}$$

Przykład 4 ◂ zad. 5.8, 5.9

Rzucamy dwa razy kostką do gry. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że przynajmniej raz wypadła szóstka.

Rozwiązanie

Dla dwukrotnego rzutu kostką wypisywaliśmy już cały zbiór zdarzeń elementarnych, wiemy więc, że:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6^2$$

Zwrot „w dwóch rzutach przynajmniej raz wypadła szóstka" oznacza, że szóstka wypadła raz lub dwa razy.

Zdarzenie A' polega na tym, że w wykonanych rzutach szóstka nie wypadła ani razu.

$\overline{\overline{A'}} = 5^2$ ⟵ odpowiednie pary są utworzone przez 5 elementów

$P(A') = \frac{\overline{\overline{A'}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{36}$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$ ⟵ $P(A) + P(A') = 1$

Odp.: Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{11}{36}$.

Przykład 5 ◂ zad. 5.11

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 13\}$ losujemy ze zwracaniem trzy razy po jednej liczbie. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie

Zbiór liczy 8 elementów, losujemy ze zwracaniem, zatem: $\overline{\overline{\Omega}} = 8^3$.

Iloczyn trzech liczb jest liczbą parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z nich jest parzysta. Zajściu zdarzenia A będą sprzyjały np. takie układy liczb: (3, 4, 7), (11, 8, 8). Prościej jest obliczyć prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przeciwnego A', które polega na tym, że iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą nieparzystą. Zajdzie ono bowiem wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie trzy wylosowane liczby są nieparzyste.

$\overline{\overline{A'}} = 6^3$ ⟵ trójki są utworzone z elementów zbioru $\{1, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$P(A') = \frac{\overline{\overline{A'}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6^3}{8^3} = \frac{27}{64}$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$ ⟵ $P(A) + P(A') = 1$

Odp.: Szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{37}{64}$.

Działania na zdarzeniach

Wykonamy teraz kilka prostych operacji na zdarzeniach.

Przykład 6 ◂ zad. 5.14

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie kostką.

a) Zdarzenie A – iloczyn liczb oczek otrzymanych w obu rzutach jest równy 6:
$A = \{16, 23, 32, 61\}$

Zdarzenie B – przynajmniej raz wypadła szóstka:

$B = \{16, 26, 36, 46, 56, 66, 61, 62, 63, 64, 65\}$

Zdarzenie C – iloczyn liczb oczek jest równy 6 **lub** przynajmniej raz wypadła szóstka, czyli zaszło zdarzenie A **lub** zdarzenie B:

$C = \{16, 23, 26, 32, 36, 46, 56, 66, 61, 62, 63, 64, 65\} = A \cup B$

b) Zdarzenie D – suma liczb oczek otrzymanych w obu rzutach jest mniejsza od 6:

$D = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 31, 32, 41\}$

Zdarzenie E – wyniki obydwu rzutów są liczbami parzystymi:

$E = \{22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66\}$

Zdarzenie F – suma liczb oczek jest mniejsza od 6 **i** wyniki obydwu rzutów są parzyste, czyli zaszło zdarzenie D **i** zdarzenie E:

$F = \{22\} = D \cap E$

c) Zdarzenie G – iloczyn liczb oczek otrzymanych w obu rzutach jest równy 10:

$G = \{25, 52\}$

Zdarzenie H – za drugim razem wypadły o 3 oczka więcej niż za pierwszym razem:

$H = \{14, 25, 36\}$

Zdarzenie K – iloczyn liczb oczek jest równy 10 **lub** za drugim razem wypadły o 3 oczka więcej, czyli zaszło zdarzenie G **lub** zdarzenie H:

$K = \{14, 25, 36, 52\} = G \cup H$

Zdarzenie L – iloczyn liczb oczek jest równy 10 **i** za drugim razem wypadły o 3 oczka więcej, czyli zaszło zdarzenie G **i** zdarzenie H:

$L = \{25\} = G \cap H$

Przykład 7 ◀ zad. 5.15

Z talii 52 kart losujemy jedną. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowana karta jest treflem lub figurą.

Rozwiązanie

Doświadczenie losowe polega na losowaniu jednej karty z talii.

Zbiór zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem wszystkich możliwych wyników, czyli:

$\Omega = \{2_\clubsuit, 3_\clubsuit, 4_\clubsuit, \ldots, 10_\clubsuit, W_\clubsuit, D_\clubsuit, K_\clubsuit, A_\clubsuit, 2_\diamondsuit, 3_\diamondsuit, \ldots, K_\diamondsuit, A_\diamondsuit,$
$2_\heartsuit, \ldots, A_\heartsuit, 2_\spadesuit, \ldots, A_\spadesuit\}$

$\overline{\overline{\Omega}} = 52$

Wprowadzamy oznaczenia.

T – zdarzenie polegające na wylosowaniu trefla:

$T = \{2_\clubsuit, 3_\clubsuit, 4_\clubsuit, 5_\clubsuit, 6_\clubsuit, 7_\clubsuit, 8_\clubsuit, 9_\clubsuit, 10_\clubsuit, W_\clubsuit, D_\clubsuit, K_\clubsuit, A_\clubsuit\}$

$\overline{\overline{T}} = 13$

F – zdarzenie polegające na wylosowaniu figury:

$$F = \{W_{\clubsuit}, D_{\clubsuit}, K_{\clubsuit}, A_{\clubsuit}, W_{\diamondsuit}, D_{\diamondsuit}, K_{\diamondsuit}, A_{\diamondsuit}, W_{\heartsuit}, D_{\heartsuit}, K_{\heartsuit}, A_{\heartsuit}, W_{\spadesuit}, D_{\spadesuit}, K_{\spadesuit}, A_{\spadesuit}\}$$

$$\overline{\overline{F}} = 16$$

A – zdarzenie polegające na wylosowaniu trefla lub figury:

$$A = \{2_{\clubsuit}, 3_{\clubsuit}, 4_{\clubsuit}, 5_{\clubsuit}, 6_{\clubsuit}, 7_{\clubsuit}, 8_{\clubsuit}, 9_{\clubsuit}, 10_{\clubsuit}, W_{\clubsuit}, D_{\clubsuit}, K_{\clubsuit}, A_{\clubsuit}, W_{\diamondsuit}, D_{\diamondsuit}, K_{\diamondsuit}, A_{\diamondsuit}, W_{\heartsuit}, D_{\heartsuit}, K_{\heartsuit}, A_{\heartsuit}, W_{\spadesuit}, D_{\spadesuit}, K_{\spadesuit}, A_{\spadesuit}\}$$

Zauważmy, że $\overline{\overline{A}}$ nie jest równe sumie liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu T i liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu F. Musimy bowiem odjąć liczbę zdarzeń sprzyjających zajściu obu tych zdarzeń, czyli 4 (liczbę figur treflowych). Zatem:

$$\overline{\overline{A}} = 13 + 16 - 4 = 25$$

$$P(A) = \frac{25}{52}$$

Odp.: Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{25}{52}$.

Podsumujmy:

Aby wyznaczyć liczbę zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia A lub B, dodajemy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A do liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu B i odejmujemy liczbę zdarzeń sprzyjających obu tym zdarzeniom jednocześnie.

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A \cap B}}$$

Przykład 8

Losujemy jedną liczbę spośród 1, 2, …, 99, 100. Obliczymy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia

a) A – wylosowana liczba jest podzielna przez 2 lub przez 3.

b) B – wylosowana liczba jest podzielna przez 11 lub przez 13.

Rozwiązanie

$$\overline{\overline{\Omega}} = 100$$

a) W rozpatrywanym zbiorze mamy:

50 liczb podzielnych przez 2 ⟵ $100 = 50 \cdot 2$

33 liczby podzielne przez 3 ⟵ $100 = 33 \cdot 3 + 1$

16 liczb podzielnych przez 2 i przez 3, czyli przez 6 ⟵ $100 = 16 \cdot 6 + 4$

Zatem:

$\overline{\overline{A}} = 50 + 33 - 16 = 67$

$P(A) = \frac{67}{100}$

b) W rozpatrywanym zbiorze mamy:

9 liczb podzielnych przez 11 $\longleftarrow 100 = 9 \cdot 11 + 1$

7 liczb podzielnych przez 13 $\longleftarrow 100 = 7 \cdot 13 + 9$

W rozpatrywanym zbiorze nie ma liczb podzielnych przez 11 i przez 13 (czyli przez 143), dlatego w tym wypadku nie musimy nic odejmować. Zatem:

$\overline{\overline{B}} = 9 + 7 = 16$

$P(B) = \frac{16}{100}$

Odp.: a) $P(A) = \frac{67}{100}$ b) $P(B) = \frac{16}{100}$

Zadania

5.1. Losujemy jedną kartę z talii liczącej 52 karty. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na wylosowaniu karty koloru czarnego, B – kiera, C – figury. Czy wśród zdarzeń A, B, C są takie, które się wykluczają?

5.2. Rzucamy kostką i monetą. A oznacza zdarzenie – wypadła nieparzysta liczba oczek i reszka, B – wypadł orzeł, C – wypadła parzysta liczba oczek, D – wypadła szóstka. Które ze zdarzeń A, B, C, D się wykluczają?

5.3. Rzucono 6 razy monetą. Niech A oznacza zdarzenie – otrzymana liczba orłów jest nieparzysta, B – otrzymana liczba reszek jest mniejsza od liczby orłów, C – otrzymana liczba orłów jest 2 razy mniejsza od liczby reszek. Które ze zdarzeń A, B, C się wykluczają?

5.4. Rzucamy trzy razy monetą. Na czym polega zdarzenie przeciwne do zdarzenia A – co najmniej raz wypadł orzeł?

5.5. Rzucamy trzema kostkami. Określ zdarzenie przeciwne do zdarzenia A – na co najmniej jednej kostce wypadły dwa oczka.

5.6. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Określamy następujące zdarzenia:

A – wylosowano karo, C – wylosowano kartę koloru czerwonego,

B – wylosowano asa, D – wylosowano figurę.

Czy wśród zdarzeń A, B, C, D jest para zdarzeń wykluczających się?

5.7. Czy zdarzenia losowe A i B się wykluczają? Odpowiedź uzasadnij.

a) doświadczenie – rzut dwiema monetami
   A – wypadnięcie orła na pierwszej monecie
   B – wypadnięcie reszki na drugiej monecie
b) doświadczenie – rzut dwiema monetami
   A – wypadnięcie orła na pierwszej monecie
   B – wypadnięcie dwóch reszek
c) doświadczenie – rzut kostką i monetą
   A – wypadnięcie orła
   B – wypadnięcie reszki
d) doświadczenie – rzut kostką i monetą
   A – wypadnięcie orła i parzystej liczby oczek
   B – wypadnięcie reszki
e) doświadczenie – rzut kostką i monetą
   A – wypadnięcie orła lub parzystej liczby oczek
   B – wypadnięcie reszki lub nieparzystej liczby oczek

5.8. Rzucamy dwa razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wypadnie orzeł.

5.9. Rzucamy trzy razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wypadnie reszka.

5.10. Z liczb należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tworzymy wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe (cyfry mogą się powtarzać). Następnie z tak powstałego zbioru liczb losujemy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w wylosowanej liczbie przynajmniej jedna cyfra jest parzysta?

5.11. Rzucamy 3 razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich rzutach będzie mniejszy od 200.

5.12. Losujemy jedną liczbę spośród wszystkich należących do zbioru $\{1, 2, \ldots, 1000\}$. Wyznacz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5 i przez 9 oraz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5 lub przez 9.

5.13. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za każdym razem wypadnie liczba oczek, która jest parzysta lub większa od czterech.

5.14. Ze zbioru liczb $\{20, 22, 30, 33, 40, 44, 50, 55, 60, 66, 70, 77, 80, 88, 90, 99\}$ losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy liczbę podzielną przez 3 lub przez 6.

5.15. Z talii liczącej 52 karty wyciągnięto jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest to figura lub karta w kolorze czerwonym?

5.16. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dwa razy wypadnie ta sama liczba oczek lub dwa razy liczba oczek będzie mniejsza od 4.

5.17. W klasie jest 18 dziewcząt. Siedem z nich trenuje koszykówkę, a trzy tenis. Wśród nich jest jedna, która uprawia obydwie wymienione dyscypliny sportowe. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana dziewczyna z tej klasy nie trenuje ani tenisa, ani koszykówki.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż liczbę dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 10 lub przez 15.

A. 12 **B.** 13 **C.** 15 **D.** 16

2. Z talii 52 kart losujemy jedną. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że jest ona królem lub kierem.

A. $\frac{14}{52}$ **B.** $\frac{15}{52}$ **C.** $\frac{16}{52}$ **D.** $\frac{17}{52}$

3. Rzucamy pięcioma monetami. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że wypadnie co najmniej jedna reszka.

A. $\frac{4}{5}$ **B.** $\frac{5}{6}$ **C.** $\frac{9}{10}$ **D.** $\frac{31}{32}$

4. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Oznaczmy zdarzenia:

A – iloczyn liczb oczek jest nieparzysty, C – suma liczb oczek jest nieparzysta,

B – iloczyn liczb oczek jest parzysty, D – suma liczb oczek jest parzysta.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Zdarzenia

A. A i B się wykluczają. **B.** A i D się wykluczają. **C.** B i C się wykluczają.

5. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia pary liczb, których iloczyn jest mniejszy od 30.

6. Z talii liczącej 52 karty losujemy kolejno ze zwracaniem dwie karty. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za pierwszym lub za drugim razem wylosujemy asa.

7. Ze zbioru wszystkich liczb trzycyfrowych losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy liczbę, w której zapisie występuje co najmniej jedno zero.

6. Wartość oczekiwana w prostych grach losowych

Umiejętności:

- obliczanie wartości oczekiwanej w prostych grach losowych

Na koniec wrócimy do zagadnień, które zapoczątkowały powstanie i rozwój rachunku prawdopodobieństwa, czyli do gier losowych. Przeanalizujemy najpierw kilka przykładów.

Przykład 1

Rysiek gra z kolegą w rzut monetą. Jeżeli wypadnie orzeł, Rysiek wygrywa 5 zł, jeżeli reszka – przegrywa i musi zapłacić 5 zł koledze.

Rysiek wygra z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ i z takim samym prawdopodobieństwem przegra.

Przykład 2

Teodor Motylek gra w kasynie w rzut trzema monetami. Jeżeli wypadną identyczne wyniki na monetach, Teodor wygrywa 200 zł, w pozostałych przypadkach przegrywa i wpłaca krupierowi 70 zł.

Zbiór zdarzeń elementarnych w rzucie trzema monetami to:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ROO, RRO, ROR, ORR, RRR\}$$

Panu Motylkowi sprzyjają wyniki {OOO, RRR}, zatem wygra 200 zł z prawdopodobieństwem $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, a przegra z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$.

Przykład 3

Gra polega na rzucie dwa razy kostką do gry. Zenobia wygrywa 1000 zł, gdy przynajmniej raz w tych dwóch rzutach wypadnie szóstka. W pozostałych przypadkach przegrywa i wpłaca krupierowi 200 zł.

W przykładzie 4 w poprzednim temacie (s. 235) obliczyliśmy prawdopodobieństwo otrzymania przynamniej jednej szóstki w dwóch rzutach kostką. Zatem możemy napisać, że Zenobia wygra 1000 zł z prawdopodobieństwem $\frac{11}{36}$, a straci 200 zł z prawdopodobieństwem $\frac{25}{36}$.

Naturalne pytania, jakie może postawić każdy uczestnik gry losowej, to:

- Czy opłaca mi się w nią zagrać?
- Czy ta gra jest sprawiedliwa?

Na obydwa pytania od razu można odpowiedzieć Ryśkowi z przykładu 1. Przy tak ustalonych zasadach gra w monetę jest sprawiedliwa – co należy rozumieć w taki sposób, że jeśli Rysiek zagra bardzo wiele razy, to wyjdzie na zero, czyli ani nie zyska, ani nie straci.

Zastanówmy się, jak wygląda sytuacja Teodora z przykładu 2. Obliczymy **średnią wygraną** w jednej grze.

Wynik	OOO	OOR	ORO	ROO	RRO	ROR	ORR	RRR
„Wygrana" Teodora [zł]	200	−70	−70	−70	−70	−70	−70	200

Średnia wygrana wynosi:

$$\frac{2 \cdot 200 + 6 \cdot (-70)}{8} = -2{,}50 \text{ [zł]}$$

Zapiszmy średnią wygraną w nieco innej postaci:

$$\frac{2 \cdot 200 + 6 \cdot (-70)}{8} = 200 \cdot \frac{2}{8} + (-70) \cdot \frac{6}{8} = 200 \cdot 0{,}25 + (-70) \cdot 0{,}75$$

Zestawmy możliwe wartości wygranej z ich prawdopodobieństwami.

„Wygrana" Teodora [zł]	200	−70
Prawdopodobieństwo	0,25	0,75

Jak widać, średnią wygraną możemy na podstawie powyższej tabeli obliczyć następująco:

$$200 \cdot 0{,}25 - 70 \cdot 0{,}75 = -2{,}5 \text{ [zł]}$$

Zatem w grze z przykładu 2 przeważa prawdopodobieństwo przegranej – Teodor Motylek może oczywiście wygrać nawet w pierwszym podejściu 200 zł, może również za drugim razem wygrać, bo gra jest losowa – ale należy się spodziewać, że przy większej liczbie powtórzeń wygranym okaże się kasyno.

Jak wygląda sytuacja pani Zenobii z przykładu 3?

„Wygrana" Zenobii [zł]	1000	−200
Prawdopodobieństwo	$\frac{11}{36}$	$\frac{25}{36}$

W tej grze średnia wygrana dla gracza w jednym rozdaniu wynosi:

$$1000 \cdot \frac{11}{36} - 200 \cdot \frac{25}{36} = \frac{1}{36}(11\,000 - 5000) \approx 166{,}67 \text{ [zł]}$$

Zatem tu przeważa prawdopodobieństwo wygranej – pani Zenobia może oczywiście przegrać nawet dużą kwotę, ale należy się spodziewać, że przy większej liczbie powtórzeń powinna wygrać.

Natomiast w przykładzie 1 średnia wygrana wynosi $1 \cdot 0{,}5 - 1 \cdot 0{,}5 = 0$ [zł].

O grach, w których średnia wygrana jest różna od 0, czyli takich jak opisane w przykładach 2 i 3, mówimy, że nie są sprawiedliwe.

Omawiamy w tym temacie szczególny przypadek doświadczeń losowych, dlatego dostosowaliśmy do niego język. I tak:

- zamiast mówić o zdarzeniu losowym, używamy tu określenia **gra losowa**,
- zbiór zdarzeń sprzyjających to wygrana **stawka**,
- prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia to **prawdopodobieństwo wygranej**, itp.

Wprowadzimy jeszcze nazwę obliczanej wyżej średniej.

Definicja

Jeżeli w grze losowej wyniki gracza X przyjmują wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ odpowiednio z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, \ldots, p_n$, gdzie $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, to wartością oczekiwaną EX tej gry nazywamy liczbę:

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$$

Zatem wartość oczekiwana gry Ryśka $ER = 0$, w grze Teodora $ET = -2{,}5$, a w grze Zenobii $EZ \approx 166{,}67$.

- Wartość oczekiwana dawniej nazywana była „nadzieją matematyczną” i stąd pochodzi jej oznaczenie: E – od francuskiego słowa *espérance* (nadzieja).
- Wyrażenia „wartość oczekiwana gry” oraz „wartość oczekiwana wygranej gracza” znaczą to samo.

Wartość oczekiwana jest tylko rodzajem średniej, ale jej wysokość może być cenną wskazówką. Grę losową nazywamy **grą sprawiedliwą**, jeśli jej wartość oczekiwana jest równa zero.

Przykład 4 ◀ zad. 6.1

Z talii 52 kart Karol losuje jedną kartę. Jeżeli wylosowana karta jest treflem lub figurą, wygrywa 20 zł, w przeciwnym razie przegrywa 10 zł. Obliczymy wartość oczekiwaną tej gry.

Rozwiązanie

W przykładzie 7 w poprzednim temacie obliczyliśmy prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowana karta jest treflem lub figurą.

Zatem:

$$P(A) = \frac{25}{52} \qquad P\left(A'\right) = 1 - \frac{25}{52} = \frac{27}{52}$$

x_i	20	−10
p_i	$\frac{25}{52}$	$\frac{27}{52}$

Wartość oczekiwana gry Karola wynosi:

$$EK = 20 \cdot \frac{25}{52} - 10 \cdot \frac{27}{52} = \frac{10}{52}(50 - 27) = \frac{230}{52} \approx 4{,}42 \text{ [zł]}$$

Odp.: Wartość oczekiwana tej gry $EK \approx 4{,}42$ zł.

Przykład 5 ◂ zad. 6.5

Tarcza koła ruletki jest podzielona na 37 równych sektorów, ponumerowanych od 0 do 36. Gracz stawia na wybrany przez siebie numer 1 zł, a następnie krupier puszcza na obracającą się tarczę kulkę. Jeżeli kulka zatrzyma się w sektorze o numerze obstawionym przez gracza, to gracz otrzymuje 36 zł, w przeciwnym razie traci swoją stawkę. Sprawdzimy, czy ta gra jest sprawiedliwa.

Rozwiązanie

W tej grze losowej gracz X może uzyskać dwa wyniki:

35 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{37}$ ⟵ gdy wygra (wcześniej wpłacił 1 zł)

−1 z prawdopodobieństwem $\frac{36}{37}$ ⟵ gdy przegra

x_i	35	−1
p_i	$\frac{1}{37}$	$\frac{36}{37}$

$$EX = 35 \cdot \frac{1}{37} - \frac{36}{37} = \frac{1}{37} \cdot (35 - 36) = -\frac{1}{37}$$

Odp.: Podana gra nie jest sprawiedliwa.

Zadania

6.1. Losujemy jedną kartę z talii liczącej 52 karty. Jeżeli wylosujemy asa, wygrywamy 20 zł, jeżeli inną figurę – wygrywamy 10 zł, w każdym innym przypadku tracimy 5 zł. Oblicz wartość oczekiwaną gry.

6.2. Losujemy jedną kartę z talii liczącej 52 karty. Jeżeli wylosujemy asa pik, wygrywamy 100 zł, jeżeli figurę kier, wygrywamy 50 zł, w każdym innym przypadku tracimy 10 zł. Oblicz wartość oczekiwaną gry.

6.3. Jolka rzuca monetą i sześcienną kostką do gry. Jeżeli wypadnie orzeł i liczba oczek podzielna przez 3, wygrywa 20 zł. W przeciwnym wypadku przegrywa 4 zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

6.4. Waldemar rzuca dwiema sześciennymi kostkami do gry. Jeżeli otrzyma takie same wyniki na obu kostkach, to wygrywa stawkę będącą iloczynem tych wyników. W przeciwnym wypadku przegrywa 3 zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

D **6.5.** Rzucamy trzy razy monetą. Jeżeli dokładnie raz wypadnie reszka, wygrywamy 50 zł, w przeciwnym razie przegrywamy 30 zł. Wykaż, że gra jest sprawiedliwa.

6.6. Gracz wpłaca krupierowi 10 zł, a następnie rzuca 5 razy monetą. Jeżeli w żadnych dwóch kolejnych rzutach nie powtórzy się ten sam wynik, wygrywa 100 zł, w przeciwnym razie traci swoją stawkę. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej gracza.

6.7. W wesołym miasteczku za 5 zł można rzucić do obracającej się tarczy składającej się z 16 pól jednakowej wielkości – jak na rysunku. Za trafienie w pole czerwone wygrywamy 20 zł, za trafienie w pole żółte wygrywamy 10 zł, za trafienie w pole niebieskie wygrywamy 5 zł. Trafienie w pole czarne nie daje wygranej. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.



6.8. Losujemy jedną kartę z talii 52 kart. Za wylosowanie asa trefl dostajemy 8 punktów, króla trefl – 7 punktów, damy trefl – 6 punktów, a waleta trefl – 5 punktów. Stawki za wylosowanie figury w pozostałych kolorach są wyższe niż w treflach – odpowiednio: w karach – dwukrotnie wyższe, w kierach – trzykrotnie wyższe, a w pikach – czterokrotnie wyższe. Wylosowanie karty niebędącej figurą oznacza utratę 7 punktów. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

* **6.9.** Rzucamy trzema sześciennymi kostkami do gry. Jeśli na wszystkich kostkach wypadną parzyste liczby oczek, to wygrywamy stawkę będącą iloczynem tych liczb. W przeciwnym wypadku przegrywamy 8 zł. Sprawdź, czy ta gra jest sprawiedliwa.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Gra losowa przyjmuje wartości 10 oraz −3 z prawdopodobieństwami odpowiednio 0,2 i 0,8. Wskaż wartość oczekiwaną tej gry.

A. −0,4 **B.** 6,4 **C.** −0,2 **D.** 0,4

2. Wpłacamy krupierowi 40 zł i rzucamy kostką. Wygrywamy kwotę równą dziesięciokrotności liczby wyrzuconych oczek. Wskaż wartość oczekiwaną tej gry.

A. −0,50 zł **B.** −5 zł **C.** 0,50 zł **D.** 5 zł

3. Wpłacamy krupierowi s zł i rzucamy dwiema monetami. W przypadku wyrzucenia dwóch orłów wygrywamy 20 zł, w przypadku wyrzucenia orła i reszki wygrywamy 2 zł, w przypadku wyrzucenia dwóch reszek nie wygrywamy nic. Wskaż taką wartość s, dla której gra jest sprawiedliwa.

A. 6 zł **B.** 7 zł **C.** 8 zł **D.** żadna z wymienionych

4. Gracz przegrał w pięciu kolejnych losowaniach gry losowej, w której wartość oczekiwana jego wygranej jest dodatnia. Oceń prawdziwość podanych zdań.
W szóstym losowaniu prawdopodobieństwo wygranej tego gracza

A. zwiększyło się.

B. jest takie samo jak w pięciu poprzednich losowaniach.

C. zmniejszyło się.

5. Losujemy jedną kartę z talii liczącej 52 karty. Jeżeli wylosujemy asa kier, wygrywamy 100 zł, jeżeli inną figurę – wygrywamy 10 zł, w każdym innym przypadku tracimy 10 zł. Oblicz wartość oczekiwaną gry.

6. Płacimy krupierowi 50 zł i z talii liczącej 52 karty losujemy kolejno ze zwracaniem dwie karty. Jeżeli za pierwszym lub za drugim razem wylosujemy asa, to wygrywamy 300 zł. W przeciwnym wypadku nie wygrywamy nic. Oblicz wartość oczekiwaną gry.

D **7.** Dwaj bracia grają ze sobą na punkty. Każdy z nich na zmianę rzuca dwa razy kostką. Jeśli w każdym z tych dwóch rzutów wypadnie parzysta liczba oczek lub liczba oczek większa od czterech, rzucający dopisuje sobie 25 punktów. W przeciwnym razie 20 punktów dopisuje sobie przeciwnik. Wykaż, że ta gra jest sprawiedliwa.

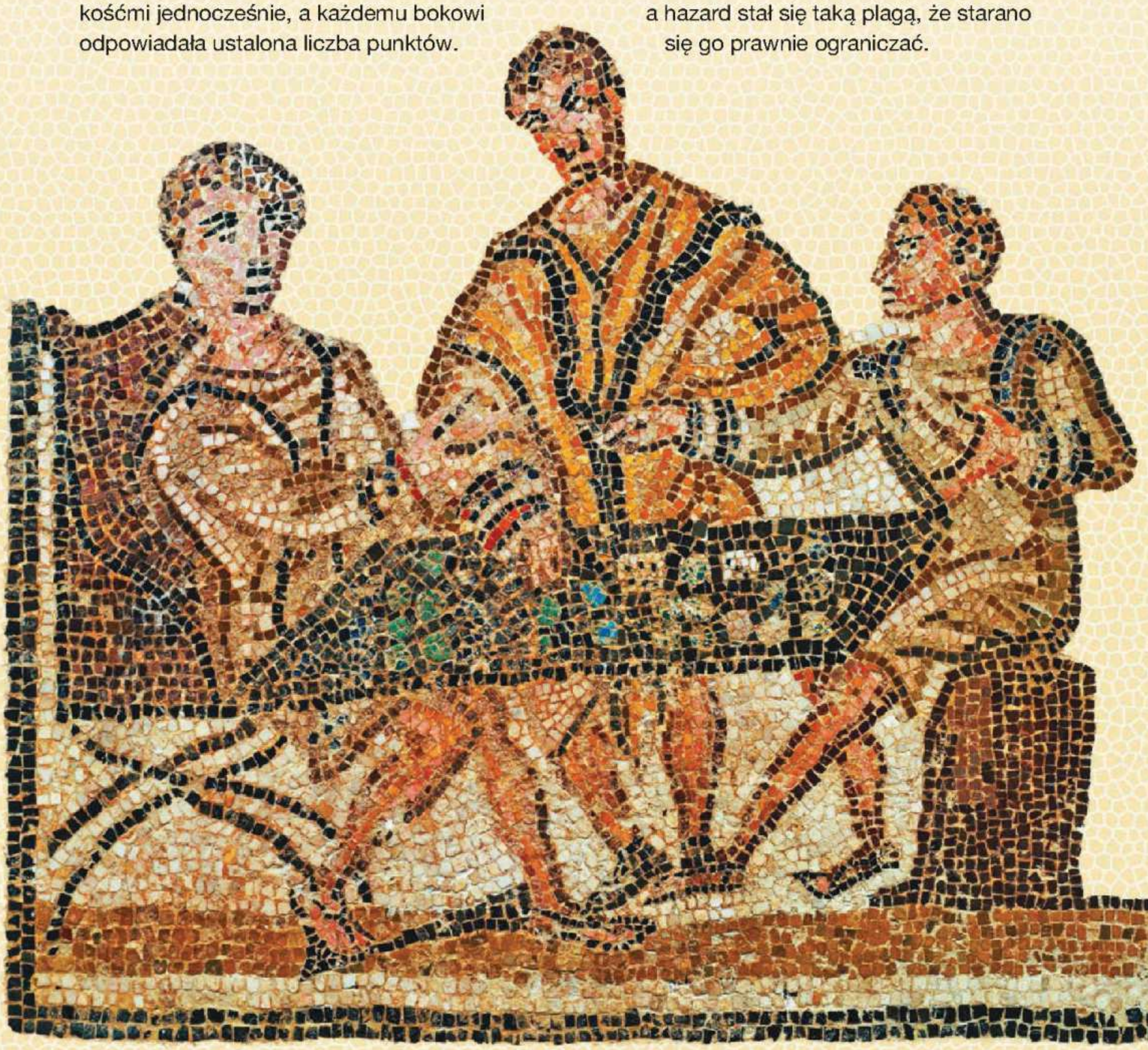
Co wynikło z gry w kości

Rachunek prawdopodobieństwa jest stosunkowo młodym działem matematyki. Jego początki są ściśle związane z grą w kości.

Gra w kości

Gra w kości znana była już w świecie starożytnym. Przed wynalezieniem dzisiejszych sześciennych kości używano m.in. drobnych kości zwierzęcych, zwanych astragalusami. Po rzucie upadały na jeden z czterech asymetrycznych boków. Rzucano czterema kośćmi jednocześnie, a każdemu bokowi odpowiadała ustalona liczba punktów.

W starożytnym Rzymie gry były ulubioną formą rozrywki, a gra w kości cieszyła się szczególną popularnością. Świadczą o tym chociażby słowa przypisywane Juliuszowi Cezarowi: „Alea iacta est", czyli „Kości zostały rzucone". Grano najczęściej o pieniądze, a hazard stał się taką plagą, że starano się go prawnie ograniczać.



Grający w kości, mozaika z czasów cesarstwa rzymskiego, III w.,
Muzeum Narodowe w Tunisie

Słynna korespondencja

Wydaje się, że dopiero w XVI w. zaczęto matematycznie rozważać szanse wyrzucenia różnych układów oczek. Prawdziwy przełom przyniósł jednak rok 1654 za sprawą Francuza, Antoine'a Gombaulda, kawalera de Méré. Był on zagorzałym hazardzistą, a przy tym człowiekiem o dużych zdolnościach matematycznych. Obstawiał takie układy kości, które według własnych obserwacji uznał za pojawiające się częściej niż inne. Kiedy jednak zaczął grać w nową grę, jego metoda przestała działać. Zamiast uznać to za odwrócenie koła fortuny, zaczął szukać matematycznego wytłumaczenia tego niepowodzenia. Zwrócił się o pomoc do swojego przyjaciela, Blaise'a Pascala, wybitnego matematyka i filozofa. Ten z kolei listownie włączył w dyskusję innego wielkiego francuskiego matematyka, Pierre'a de Fermata. I tak powstała słynna wymiana listów, która zapoczątkowała nowy dział matematyki – **rachunek prawdopodobieństwa**.



Blaise Pascal (1623–1662), francuski filozof, matematyk i fizyk



Pierre de Fermat (1601 lub 1607 – 1665), francuski matematyk i prawnik

Co się bardziej opłaca?

Rozpatrzmy dwa spośród problemów rozwiązanych w tej korespondencji. Pierwszy z nich polegał na ocenieniu szansy wyrzucenia **co najmniej jednej szóstki** przy **czterokrotnym rzucie kością** (zdarzenie A), drugi – na ustaleniu, jaka jest szansa wyrzucenia **co najmniej raz dwóch szóstek jednocześnie** przy **24-krotnym rzucie dwiema kośćmi** (zdarzenie B). Dziś wiemy, że w rozwiązaniu problemu warto wykorzystać zdarzenia przeciwne:

1. $P(A') = \frac{5^4}{6^4}$ – w 4 rzutach kością ani razu nie wypadnie szóstka

$P(A) = 1 - P(A') \approx 0{,}52$

Oznacza to, że jeżeli powtórzymy czterokrotny rzut kością 100 razy, średnio 52 razy wypadnie co najmniej jedna szóstka.

2. $P(B') = \frac{35^{24}}{36^{24}}$ – w 24 rzutach dwiema kośćmi ani razu nie wypadną dwie szóstki jednocześnie

$P(B) = 1 - P(B') \approx 0{,}49$

Oznacza to, że jeżeli powtórzymy 100 razy serię 24 rzutów dwiema kośćmi, średnio w 49 seriach co najmniej raz wypadną dwie szóstki jednocześnie.

Tymczasem kawaler de Méré był przekonany, że szansa zajścia każdego z tych zdarzeń jest większa od 0,5. W przypadku zdarzenia A miał rację, mimo że źle wyliczył prawdopodobieństwo, ale w przypadku zdarzenia B się pomylił. Stąd obstawiane wyniki nie pojawiały się z przewidywaną przez niego częstością.



Achilles i Ajas grający w kości, scena z greckiej amfory, ok. 540–530 p.n.e., Muzea Watykańskie

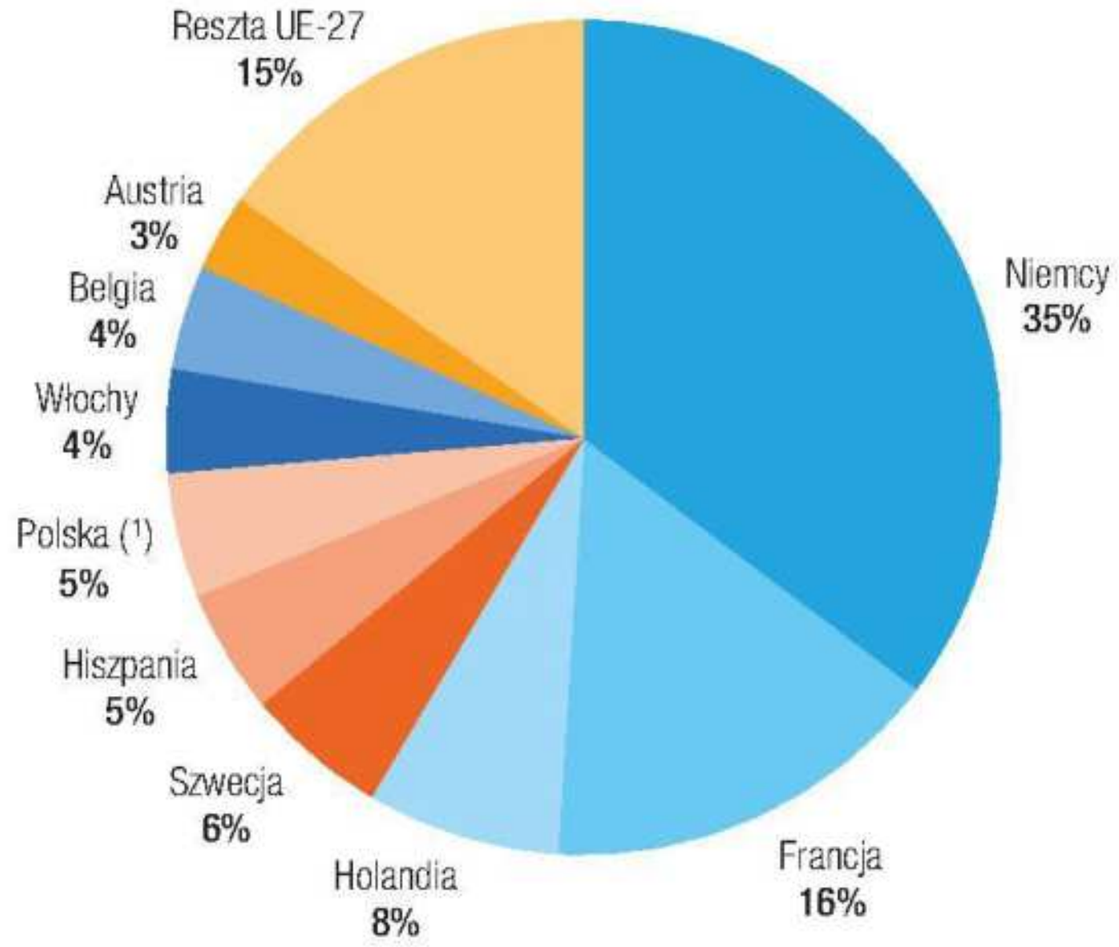
7. Wstęp do statystyki

Myślenie statystyczne stanie się pewnego dnia
równie niezbędnym elementem wychowania
obywatelskiego, jak umiejętność czytania i pisania.
H. G. Wells

Trudno wyobrazić sobie dzisiejszy świat bez statystyki. GUS – Główny Urząd Statystyczny – zbiera, przetwarza i prezentuje olbrzymią liczbę danych. Co roku wydawany jest rocznik statystyczny, dokument wagi państwowej. Na mniejszą skalę ze statystyką mamy do czynienia na co dzień – media publikują wyniki najrozmaitszych badań opinii publicznej, nauczyciel jest zobowiązany do robienia statystyki ocen i frekwencji uczniów, kibic śledzi wyniki rozgrywek piłkarskich itd. Wyniki badań statystycznych pojawiają się wszędzie (najczęściej w postaci różnych tabel, diagramów, wykresów itp.).

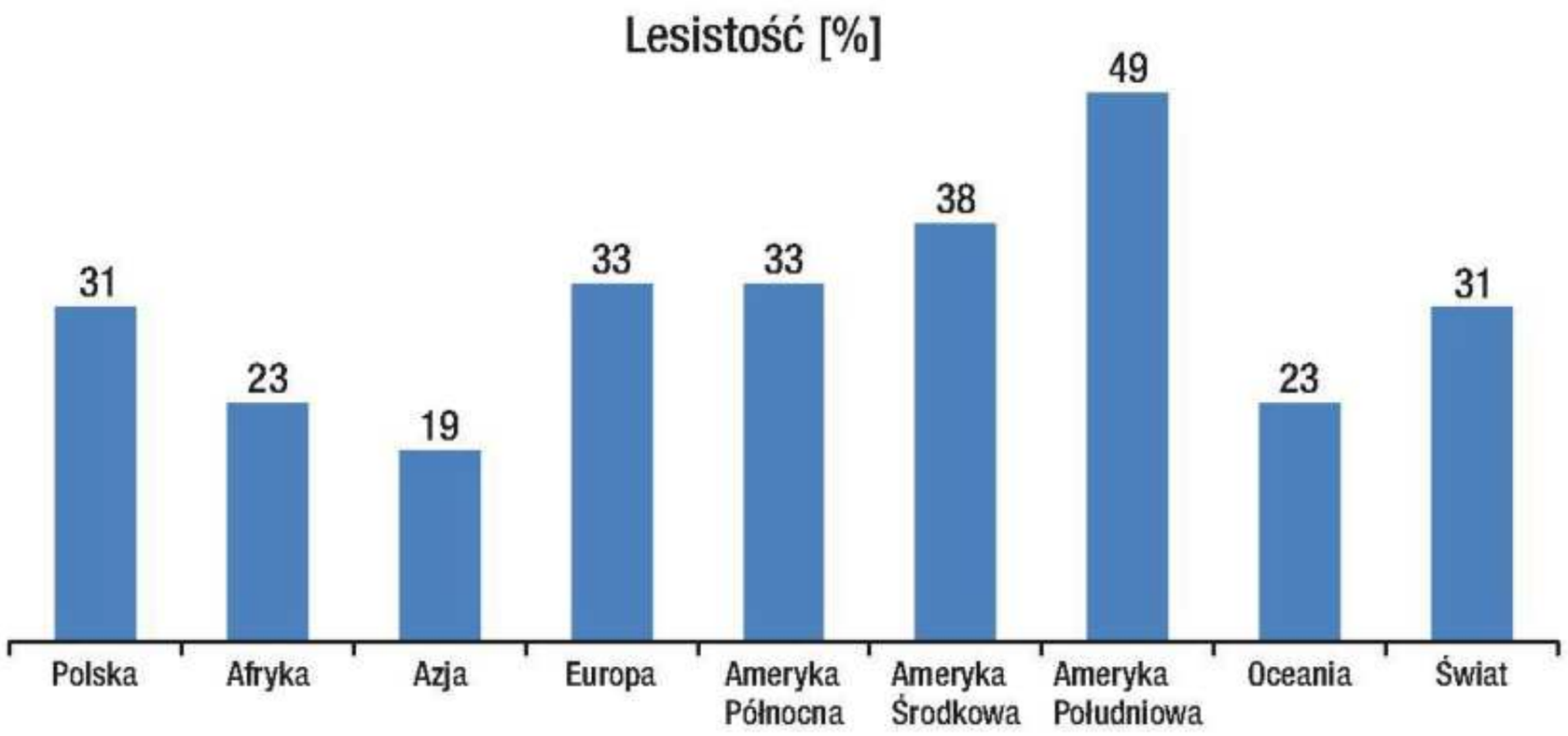
Działalność statystyczną prowadzono już w starożytności. W Biblii czytamy: „W owym czasie wyszło rozporządzenie Cezara Augusta, żeby przeprowadzić spis ludności w całym państwie". Mowa tu o okresie tuż przed narodzeniem Chrystusa, czyli samym początku naszej ery.

Udział noclegów spędzonych przez Europejczyków podczas wakacyjnych podróży, w podziale na państwa zamieszkania turystów, 2018 rok
(% noclegów za granicą mieszkańców UE-27)



Uwaga: Ocena UE-27 stworzona na potrzeby tej publikacji, na podstawie dostępnych źródeł.
(1) Dane z 2017 roku.
eurostat

Źródło: https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Tourism_statistics/pl#Miejsca_noclegowe_w_UE-27:_dominuj.C4.85_W.C5.82ochy_i_Francja [dostęp: 17 grudnia 2020 r.]



Źródło: https://www.bdl.lasy.gov.pl/portal/lasy-na-swiecie [dostęp: 17 grudnia 2020 r.]

Statystyka spełnia przede wszystkim dwa podstawowe zadania:

- służy jako narzędzie opisu i wówczas nazywamy ją **statystyką opisową**,
- służy jako narzędzie do wyciągania wniosków z przeprowadzonych badań, wówczas mamy do czynienia z **wnioskowaniem statystycznym**.

Słowo **statystyka** wywodzi się od łacińskiego *status* – stan rzeczy, państwo. Dawne znaczenie wyrazu „statysta" to mąż stanu, dyplomata, osoba zajmująca się sprawami państwa. Początkowo (od XVI w.) statystyka zajmowała się gromadzeniem rozmaitych danych liczbowych potrzebnych do sprawnego kierowania państwem.



Źródło: https://www.money.pl/gospodarka/wiadomosci/artykul/w-polsce-zyje-sie-lepiej-niz-w-niemczech-czy,24,0,2403864.html [dostęp: 17 grudnia 2020 r.]

Statystyka opisowa porządkuje i prezentuje informacje o pewnym zbiorze elementów (ludzi, zwierząt, roślin, zdarzeń, procesów itp.). Zbiór ten nazywamy **populacją**. Natomiast wnioskowanie statystyczne jest najczęściej próbą uogólnienia wyników takich badań. Wówczas badana grupa stanowi podzbiór, czyli tzw. **próbę** wybraną z populacji.

Termin **populacja** używany jest zatem w dwóch znaczeniach:

- w statystyce opisowej oznacza zbiór opisywanych elementów,
- we wnioskowaniu statystycznym oznacza zbiorowość, w stosunku do której wyciągane są wnioski (po przeanalizowaniu wyników badań wybranej próby).

Prześledźmy na przykładach różnicę w stosowaniu tych pojęć.

Przykład 1

Pani Piórnik podsumowała wyniki klasy trzeciej po pierwszym semestrze. Obliczyła, ile jest ocen niedostatecznych, dopuszczających, dostatecznych itd., obliczyła średnią klasową, liczbę osób bez ocen niedostatecznych, liczbę osób ze średnią powyżej 4,5 oraz poniżej 3 itp. Dane statystyczne przedstawiła najpierw na zebraniu rady pedagogicznej, a potem przekazała je rodzicom. Opisała w ten sposób pewną konkretną grupę osób. W tym wypadku mamy do czynienia ze statystyką opisową, a opisywaną populacją jest zbiór uczniów klasy trzeciej.

Przykład 2

Na początku sezonu właściciel firmy Alfa, szkolącej chętnych do zdobycia prawa jazdy, przedstawił dane o wynikach egzaminów ubiegłorocznych absolwentów kursów.

- Podanie odsetka osób, które zdały egzamin, jest statystyką opisową populacji wszystkich absolwentów.
- Jeżeli natomiast na podstawie tej samej informacji ocenimy poziom przygotowywania do egzaminu na prawo jazdy przez Alfę, to przeprowadzimy wnioskowanie statystyczne (niekoniecznie słuszne!), w którym zbiór wszystkich absolwentów stanowi próbę, a populacją jest zbiór wszystkich kursantów Alfy.

Przykład 3

W szkolnej bibliotece podsumowano liczbę wypożyczonych książek i obliczono średnią przypadającą na jednego czytelnika.

- Taka informacja jest statystyką opisową populacji wszystkich czytelników wypożyczających książki w tej bibliotece.
- Jeżeli na podstawie tej statystyki uogólnimy informację i wypowiemy się na temat czytelnictwa np. młodzieży licealnej, to jest to wnioskowanie statystyczne, w którym próbą jest zbiór uczniów wypożyczających książki w konkretnej bibliotece, a populację stanowi młodzież licealna.

Jedną z najgłośniejszych „wpadek" w zastosowaniu statystyki była prognoza wyników wyborów na stanowisko prezydenta USA w 1936 r., sporządzona przez czasopismo „Literary Digest". Gazeta twierdziła, że potrafi przewidzieć wynik z dokładnością do ułamka procenta. Sondaż wyborczy miał być przeprowadzony na ogromnej, 10-milionowej próbie. Odpowiedzi udzieliło 2,3 mln ankietowanych. Według wyników ankiety wybory miał wygrać gubernator stanu Kansas, republikanin – Alfred M. Landon (miał zwyciężyć w 32 na 48 stanów i uzyskać 370 głosów elektorskich). Natomiast przegranym miał być urzędujący prezydent, kandydat demokratów – Franklin Delano Roosevelt (161 głosów elektorskich). Tymczasem F. D. Roosevelt wygrał wybory w 46 stanach, uzyskał 523 głosy elektorskie i został prezydentem na następną kadencję. Na dodatek przewaga, jaką zwycięzca uzyskał nad rywalem, była największa we wszystkich wyborach od czasu, gdy Stany Zjednoczone stały się niezależnym państwem.



Franklin Delano Roosevelt

Na błędny wynik prognozy wpływ miały przede wszystkim dwa czynniki:

- niewłaściwy sposób wyboru ankietowanych (nazwiska losowano z rejestrów samochodowych, książek telefonicznych oraz prenumeratorów gazety; w 1936 r. oznaczało to zawężenie do zamożniejszej części społeczeństwa, bardziej skłonnej do głosowania na republikanów),
- nieuwzględnienie faktu, że w stosunku do liczby wysłanych ankiet tylko niewielka grupa osób udzieliła odpowiedzi (w statystyce taką sytuację określa się jako obciążenie wyników wskutek niepełności odpowiedzi).

Próba losowa, pomimo jej ogromnej liczebności, nie była reprezentatywna dla ogółu wyborców. W wyniku popełnionego błędu czasopismo „Literary Digest" niedługo po wyborach przestało się ukazywać.

Już po przeanalizowaniu kilku przykładów widać, jak bardzo ważny dla wnioskowania statystycznego jest właściwy dobór próby. Jedno z zadań statystyki to opracowanie metod, które sprawią, że wybierane próby będą **reprezentatywne**. Bardzo często proponowany sposób polega na różnego rodzaju losowaniach elementów z populacji i wówczas taką próbę nazywamy **próbą losową**. Współczesna statystyka dysponuje na tyle precyzyjnymi narzędziami, że dobór próby, metody jej badania oraz wyciąganie logicznych wniosków z wyników tych badań dają dosyć dokładny obraz analizowanej populacji. W wielu sytuacjach nie ma innej metody niż wnioskowanie na podstawie badania próbek losowych. Dotyczy to np. kontroli jakości wyrobów, określania skuteczności działania nowych leków oraz poznawania skutków ubocznych ich stosowania.

Przykład 4

W firmie Plasterek produkowane są m.in. jałowe kompresy gazowe. Porównamy rodzaje problemów, jakie mogą być interesujące dla tej firmy z punktu widzenia statystyki i rachunku prawdopodobieństwa.

W statystyce	W rachunku prawdopodobieństwa
Nie można sprawdzić jakości każdego kompresu (oznaczałoby to zniszczenie całej produkcji!), więc kontroli poddawane jest co któreś opakowanie. Wyniki takiego badania przesądzają o tym, czy wyprodukowana partia kompresów spełnia wymagania jakości i może być sprzedana, czy też trafi na przemiał. Ile opakowań trzeba sprawdzić, w jaki sposób je wybierać, jak zinterpretować wyniki, aby (z dostatecznie dużym prawdopodobieństwem) dopuścić do sprzedaży tylko wartościową produkcję?	W skrzynce pobranej z magazynu firmy Plasterek znajduje się 1000 opakowań jałowych kompresów gazowych. Wiadomo, że wśród nich jest 60 nieszczelnych (inaczej mówiąc – nadających się tylko na śmietnik). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych 30 opakowań jest co najmniej jedno nieszczelne?

Wnioskowanie statystyczne jest ściśle związanie z rachunkiem prawdopodobieństwa.

Wniosek

W statystyce mamy do czynienia z odwróconym, w stosunku do rachunku prawdopodobieństwa, wnioskowaniem:

- w probabilistyce – na podstawie znajomości całej populacji określamy prawdopodobieństwo wylosowania próbki o określonej własności,
- w statystyce – na podstawie własności próbki losowej wyciągamy najbardziej prawdopodobne wnioski o własnościach nieznanej populacji.

W tym podręczniku zajmiemy się przede wszystkim elementarnymi pojęciami statystyki opisowej. Zaawansowane metody statystyczne będą wprowadzane w trakcie studiowania na wyższych uczelniach (niezależnie od wybranego kierunku studiów). Lekarz, biolog, językoznawca, inżynier, ekonomista itd. musi obecnie umiejętnie korzystać z wyników statystyki. Nierzadko sam powinien wiedzieć, jak zaplanować i opisać eksperyment statystyczny. Umiejętność taką z pewnością powinien posiadać każdy przedsiębiorca prowadzący własną firmę. Łatwo można podać przykład niepowodzeń, do których doszło z powodu braku odpowiednich badań rynkowych. Jeżeli np. właściciel firmy odzieżowej postanawia rozszerzyć działalność gospodarczą poza obszar własnego państwa, to najpierw powinien sprawdzić, jakie są typowe rozmiary obcokrajowców, którym chce sprzedawać ubrania. Może się bowiem okazać, że rozmiary te są np. zdecydowanie mniejsze od rozmiarów oferowanych przez jego firmę w kraju. Brak tej wiedzy może spowodować niepowodzenie całego przedsięwzięcia. A przecież trzeba jeszcze zbadać, jaki jest gust przyszłych klientów, gdzie wydzierżawić sklepy, jaką metodą rozreklamować ofertę itd.

Dodajmy jeszcze jedną uwagę. Otóż wyniki (nawet rzetelnych) badań statystycznych można zaprezentować tak, aby osiągnąć zaplanowane wcześniej efekty. Mówiąc prościej – łatwo można manipulować opinią publiczną, jeżeli świadomość statystyczna obywateli jest niska. To również powód przemawiający za tym, żeby poznać przynajmniej podstawy statystyki.

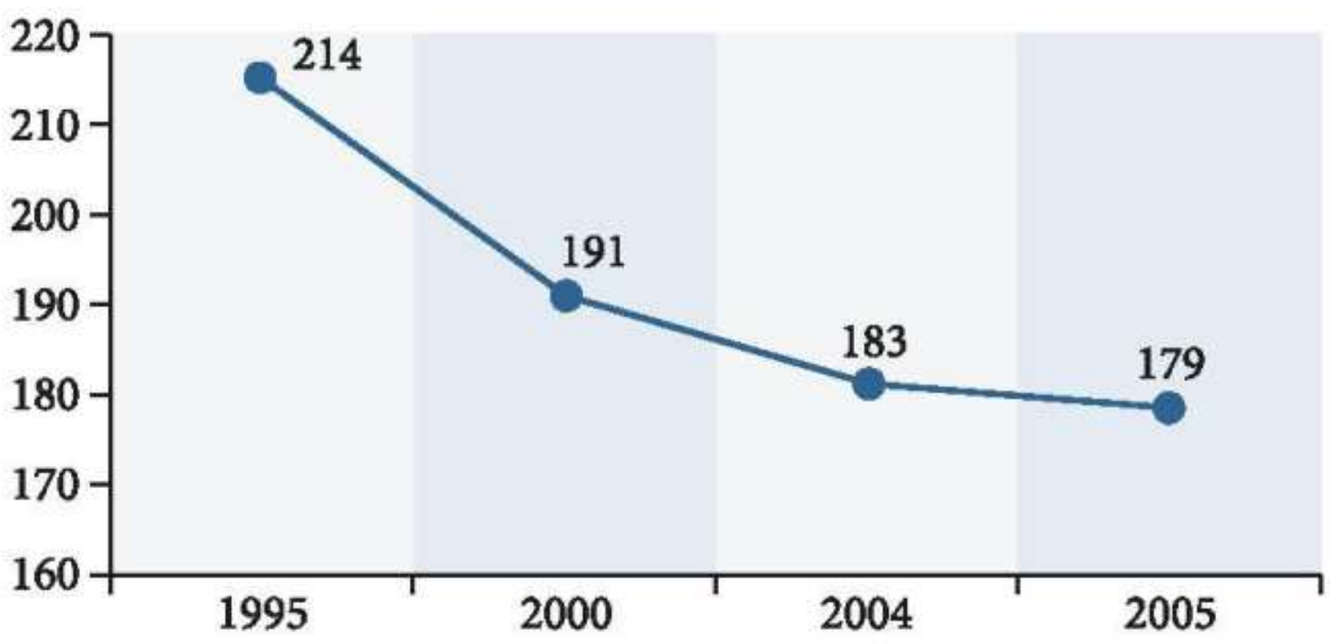
Pewną wysepkę zamieszkiwało małżeństwo, któremu w pierwszym roku urodziły się bliźnięta, a w następnym trzecie dziecko. W zależności od punktu widzenia można powiedzieć, że w ciągu roku przyrost naturalny spadł o 50% albo że liczba ludności tej wyspy wzrosła o 25%.

Przykład 5

Oto dane z *Małego Rocznika Statystycznego 2007* o liczbie łóżek w szpitalach ogólnych (w tysiącach):

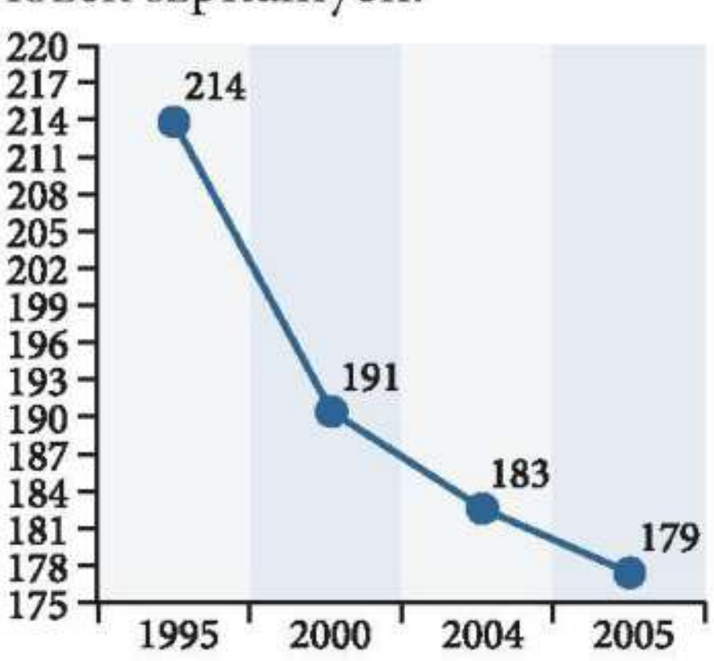
Rok	1995	2000	2004	2005
Liczba łóżek	213,97	190,95	183,28	179,49

Na podstawie tych danych możemy wykonać poniższy wykres (liczbę łóżek zaokrąglono do tysięcy).

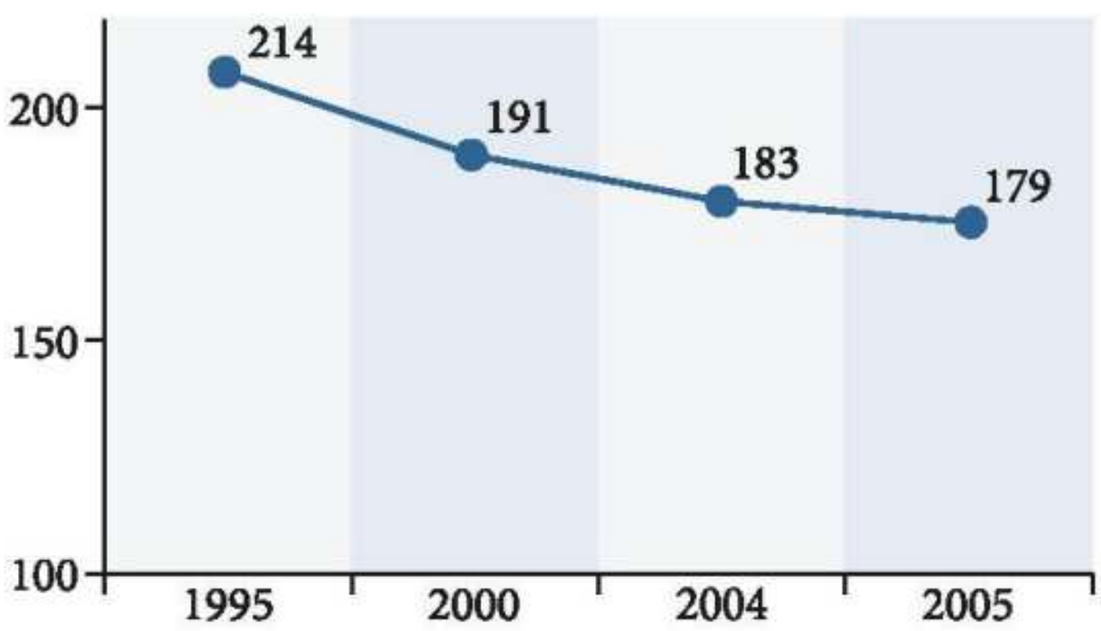


Te same dane możemy zaprezentować w nieco inny sposób i podpisać je odpowiednim komentarzem (manipulacja polega na obraniu różnych jednostek na osiach).

Dramatycznie spada liczba łóżek szpitalnych!



Od 1995 r. nieznacznie spadła liczba łóżek szpitalnych.



8. Mediana, średnia i dominanta

Umiejętności:

- prezentowanie danych z zastosowaniem mediany, dominanty, średniej arytmetycznej i średniej ważonej
- stosowanie skali centylowej
- interpretowanie parametrów opisowych dla danych empirycznych

Dane surowe i uporządkowane

Wszystkie wyniki badania statystycznego nazywamy **danymi surowymi**. Najczęściej są nimi zbiory liczb (wiek, wzrost, oceny z egzaminów, liczby piskląt w gniazdach, liczby wadliwych elementów produkcji, oglądalność programów telewizyjnych itd.). Nawet jeśli badanie ma charakter opisowy, np. podanie ulubionego gatunku filmowego, to i tak wyniki opisuje się liczbowo (tyle osób lubi fantastykę, tyle – kryminały, tyle – kino obyczajowe itd.).
Danych surowych jest na ogół bardzo dużo, więc wyciąganie wniosków na ich podstawie jest albo bardzo trudne, albo wręcz niemożliwe.

Przykład 1

Studenci trzeciego roku BIWU (czyli Bardzo Interesującego Wydziału Uniwersytetu) zdawali w sesji zimowej egzamin punktowany w skali od 0 do 9. Wyniki były następujące:

8 2 7 5 5 2 3 2 3 5 6 6 5 1 4 5 6 7 6 3 5 2 0 4 3 0 3 3 6 7 4 6 6 4 8 8 6 7 9 9 9 1 1 2 5 7
2 5 8 4 3 3 6 5 8 4 7 7 8 5 4 5 1 4 5 2 2 7 6 4 0 3 6 7 1

Są to punkty spisane z alfabetycznie ułożonej listy uczestników egzaminu. Inaczej mówiąc – pominięte zostały nazwiska zdających. Tak przedstawione wyniki są bardzo trudne do zinterpretowania. Lepszym pomysłem jest na przykład uszeregowanie danych w kolejności od najmniejszej do największej:

0 0 0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 9 9 9

Taki zapis liczb nazywać będziemy **szeregiem uporządkowanym**.

Centyle

Statystyka opisowa zajmuje się prezentacją danych (liczbowych) surowych za pomocą innych liczb, których jest już tylko kilka.

Przykład 2

Jaś wrócił ze szkoły bardzo zadowolony, ponieważ dostał z klasówki trójkę. Mama Jasia wcale nie wykazała z tego powodu entuzjazmu i zareagowała typowym dla mam pytaniem: dlaczego tylko trójka? Oburzony Jaś tłumaczy: nie „tylko", ale „aż" – w całej klasie były z tej klasówki trzy oceny dostateczne i dwie dobre, a wszystkie pozostałe były niższe!

Zatem tylko dwie osoby w klasie napisały prace lepiej od Jasia.

Przykład 3

Chętni do studiowania na BIWU muszą zdać egzamin wstępny oceniany w punktach. Ustalona przed egzaminem liczba dostępnych miejsc jest równa 230. Przyjęci zostaną ci kandydaci, którzy zmieścili się w grupie 230 osób z najlepiej zdanym egzaminem. Dla każdego zdającego najważniejsza zatem będzie pozycja na liście uporządkowanych wyników, a nie liczba punktów uzyskanych z egzaminu.

Przykłady 2 i 3 dotyczą ustalenia miejsca interesującej nas liczby w szeregu liczb uporządkowanych według wielkości. W badaniu statystycznym używa się do tego celu centyli.

Definicja

***p*-tym centylem** w zbiorze liczb nazywamy taką wartość k, że p% liczb z tego zbioru jest mniejszych lub równych k.

Zdanie „Na egzaminie wstępnym Piotr znalazł się na trzydziestym centylu" oznacza więc, że wyniki słabsze niż jego (lub identyczne) uzyskało 30% zdających. Pozostała grupa, czyli 70% zdających, otrzymała wyniki lepsze od wyniku Piotra.

Przykład 4 ◀ zad. 8.1

Jeżeli w klasie Jasia (przykład 2) klasówkę napisało 32 uczniów i 30 uzyskało oceny niższe niż on (lub takie same), to wynik Jasia znajduje się na 94. centylu, ponieważ liczba 30 stanowi 94% liczby 32.

Zasada wyznaczania poszczególnych centyli podana w tym podręczniku nie jest jedyna. W różnych podręcznikach można znaleźć inne sposoby ich znajdowania, wyznaczane wartości mogą się więc nieznacznie różnić.

Mediana

Do opisywania danych surowych praktycznie wykorzystuje się tylko niektóre centyle. Najważniejszy wśród nich jest 50. (nazywany medianą), czyli wartość, poniżej której znajduje się połowa wyników.

Definicja

W uporządkowanym rosnąco szeregu liczb **medianą** nazywamy wyraz środkowy (w szeregu o nieparzystej liczbie wyrazów) lub średnią arytmetyczną dwóch wyrazów środkowych (w szeregu o parzystej liczbie wyrazów).

Mediana dzieli zatem uporządkowany szereg danych surowych w taki sposób, że przed nią i za nią jest tyle samo danych.

Mediana (wartość środkowa) jest liczbą, która nie musi należeć do opisywanego zbioru danych.

Przykład 5 ◂ zad. 8.3

Marek kupił po jednej akcji jedenastu różnych spółek giełdowych. Po roku okazało się, że stopy zwrotu (w procentach) poszczególnych akcji wyniosły: 10,2, 11, 7,6, 7,3, 13,1, −2,4, 3, −3,2, 4,5, 11,2, 8,2. Wyznaczymy medianę tych danych.

Rozwiązanie

Najpierw uporządkujemy je od najmniejszej do największej:

−3,2, −2,4, 3, 4,5, 7,3, 7,6, 8,2, 10,2, 11, 11,2, 13,1

Medianą jest środkowy (szósty) wynik, czyli liczba 7,6. Przed medianą mamy pięć danych: −3,2, −2,4, 3, 4,5, 7,3, za nią również pięć: 8,2, 10,2, 11, 11,2, 13,1.

Odp.: Mediana tego zestawu wynosi 7,6.

Przykład 6

Wynagrodzenia* (w zł) wszystkich pracowników firmy Szwaczka, które umieszczono na spisanej alfabetycznie liście płac, wynoszą: 890, 3400, 1278, 2390, 980, 1500, 1500, 2600, 3400, 980, 1500, 4900. Wyznaczymy medianę tych danych.



Rozwiązanie

Porządkujemy dane rosnąco:

890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 3400, 4900

W szeregu znajduje się dwanaście wyrazów, więc medianą jest średnia arytmetyczna środkowych wyrazów (szóstego i siódmego) równa $\frac{1500 + 1500}{2} = 1500$.

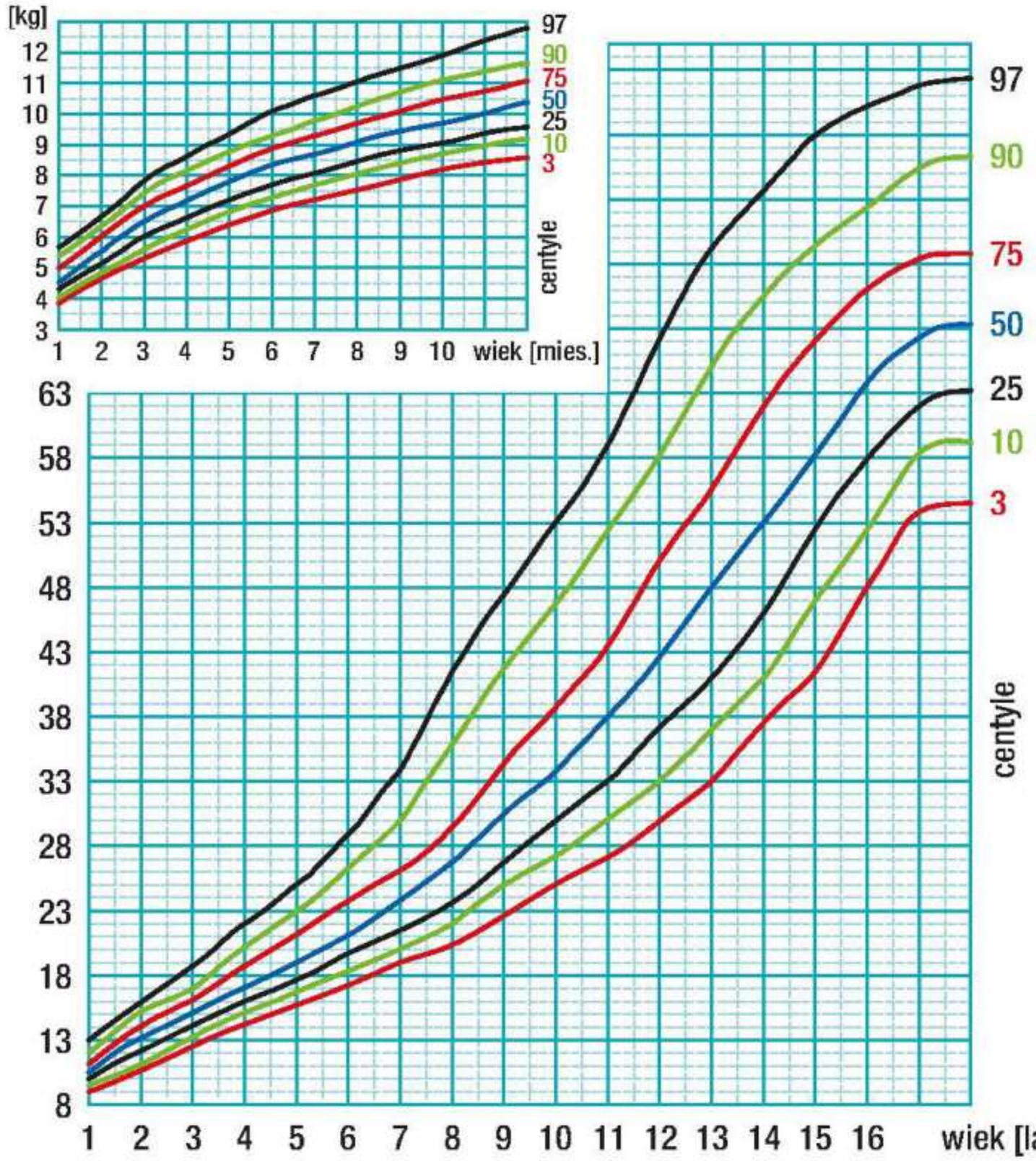
---

* Podane w przykładzie liczby nie mają odzwierciedlenia w rzeczywistości. Dla porównania: najniższa płaca krajowa – czyli najniższe wynagrodzenie, które przysługuje każdemu zatrudnionemu na pełny etat pracownikowi – w 2019 r. wynosiła 2250 zł brutto (co oznacza 1674 zł netto).

Przykład 7 ◀ zad. 8.4

Lekarze pediatrzy kontrolują rozwój dziecka między innymi w ten sposób, że sprawdzają jego wagę i wzrost ze wzorcem umieszczonym na tzw. siatce centylowej. Rodzice mogą oczywiście zaznaczać wyniki pomiarów samodzielnie. Taka kontrola jest ważna szczególnie w pierwszym roku życia dziecka.

Siatka centylowa masy ciała chłopców



Mediana (zaznaczona niebieską linią) została wyznaczona na podstawie badań statystycznych przeprowadzonych w naszym kraju. Zauważmy, że na przykład:

- 90% chłopców w wieku 18 lat nie przekracza masy 82 kg,
- 25% chłopców w wieku 10 lat waży nie więcej niż 30 kg,
- połowa niemowląt płci męskiej w dniu urodzenia waży co najwyżej 4,6 kg, a po ukończeniu roku nie przekracza masy 10,5 kg,
- duże różnice (rozrzut) w masie ciała mają chłopcy w wieku 14,5 roku, a mianowicie: 10% z nich waży co najwyżej 44 kg, 15% mieści się w przedziale 44–49 kg, 25% w przedziale 49–55 kg, 25% w przedziale 55–65 kg, 15% w przedziale 65–73 kg, 10% przekracza masę 73 kg.

Wyznaczenie mediany w zbiorze kilkunastu liczb nie jest czynnością skomplikowaną. Badania statystyczne rzadko jednak przeprowadza się na tak mało licznych próbach (populacjach). Jeżeli wyników obserwacji jest dużo, to oczywiście ich porządkowaniem i szukaniem mediany zajmuje się odpowiedni program komputerowy.
Wróćmy do danych z przykładu 1. W uporządkowanym szeregu 75 liczb:

0 0 0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9

wyznaczamy 38. wyraz, czyli medianę. Jest ona równa 5.

Średnia

W statystyce zamiast „średnia arytmetyczna" mówimy krótko – **średnia**. Średnią wyników obserwacji jest ich suma podzielona przez liczbę wszystkich wyników. Średnią w próbie oznaczamy $\overline{x}$.

Definicja

Jeżeli wyrazy szeregu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są wszystkimi wynikami obserwacji, to ich **średnia** jest równa:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Przykład 8 ◀ zad. 8.5

Obliczymy średnią (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) w przedstawionym zestawie danych.

Rozwiązanie

a) 2, 2, 4, 4, 4, 9, 11, 12, 15, 15

$$\overline{x} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 9 + 11 + 12 + 2 \cdot 15}{10} = \frac{78}{10} = 7{,}8$$

Odp.: $\overline{x} = 7{,}8$

b) 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 3400, 4900

$$\overline{x} = \frac{890 + 2 \cdot 980 + 1278 + 3 \cdot 1500 + 2390 + 2600 + 2 \cdot 3400 + 4900}{12} = \frac{25\,318}{12} \approx 2109{,}83$$

Odp.: $\overline{x} = 2109{,}83$

c) 23, 43, 73, 102, 165, 229, 332, 345, 372, 556

$$\overline{x} = \frac{23 + 43 + 73 + 102 + 165 + 229 + 332 + 345 + 372 + 556}{10} = 224$$

Odp.: $\overline{x} = 224$

d) 2, 2, 2, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 17, 17, 19

$$\overline{x} = \frac{4 \cdot 2 + 5 + 6 + 7 + 11 + 4 \cdot 12 + 13 + 2 \cdot 17 + 19}{16} \approx 9{,}44$$

Odp.: $\overline{x} = 9{,}44$

Dominanta

Do opisu zestawu danych liczbowych służy również miara zwana dominantą.

Definicja

Dominantą (modą, wartością modalną) w zestawie danych jest ta wartość, która występuje w nim najczęściej, ale więcej niż raz.

Przykład 9 ◀ zad. 8.7

Wskażemy dominantę w przedstawionym zestawie danych.

Uporządkowany szereg danych może nie mieć dominanty, może też mieć ich wiele.

Rozwiązanie

a) 2, 2, 4, 4, 4, 9, 11, 12, 15, 15
Dominanta jest równa 4.

b) 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 3400, 4900
Dominanta jest równa 1500.

c) 23, 43, 73, 102, 165, 229, 332, 345, 372, 556
Ten zestaw danych nie ma dominanty – każdy wynik występuje tylko raz.

d) 2, 2, 2, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 17, 17, 19
Dominantami tego zestawu są liczby 2 oraz 12.

Przykład 10 ◀ zad. 8.8

Spójrzmy na uporządkowane wyniki egzaminu 75 studentów trzeciego roku BIWU na s. 260.
Mediana danych jest równa 5.

Teraz zgrupujemy wyniki tak, jak czyni to najczęściej każdy egzaminator – zliczymy poszczególne oceny.

Liczba punktów	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Liczba wyników	3	5	8	9	9	12	11	9	6	3

Dominantą tego zestawu jest również 5.

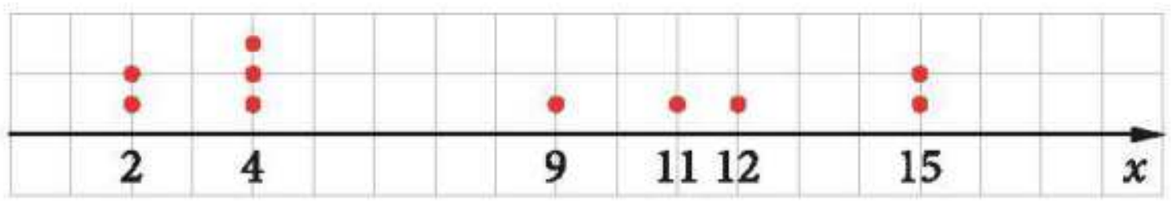
Średnia ocen:

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 12 + 6 \cdot 11 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 3}{75} = 4{,}64$$

Zilustrujmy teraz dwa z omówionych zestawów danych. Na poziomej osi x zaznaczymy wartości otrzymanych wyników, a powyżej narysujemy tyle kropek, ile było tych wyników.

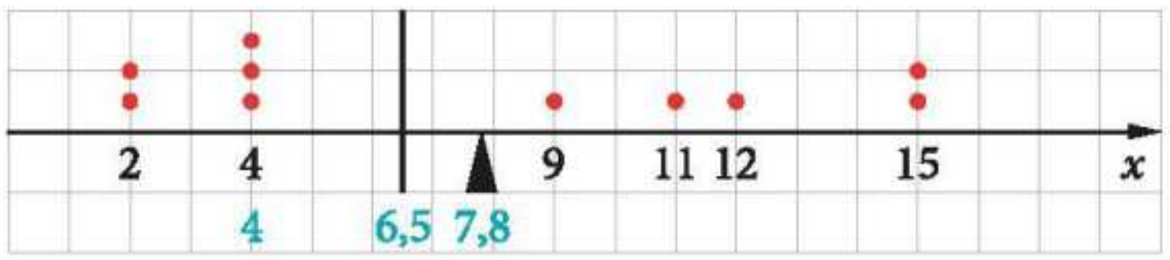
Przykład 11

a) Zestaw 2, 2, 4, 4, 4, 9, 11, 12, 15, 15 możemy przedstawić graficznie:

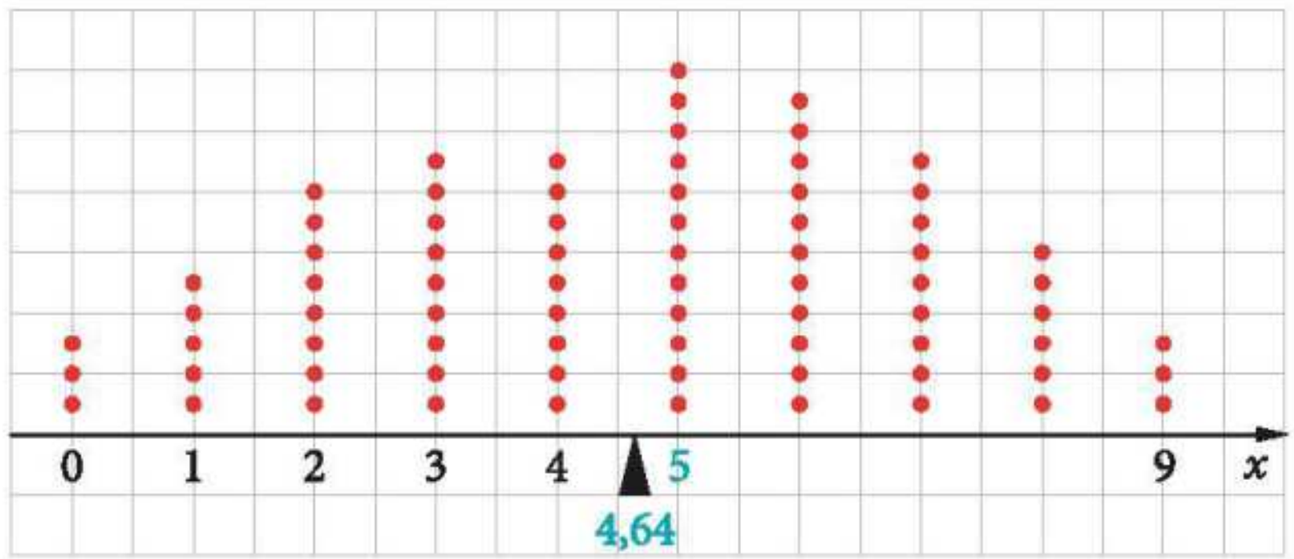


Zauważmy, że mediana dla tej próby jest równa 6,5. Średnią równą 7,8 wyznaczyliśmy w przykładzie 8a, a dominantę równą 4 – w przykładzie 9a.

Zaznaczmy te wielkości na rysunku.



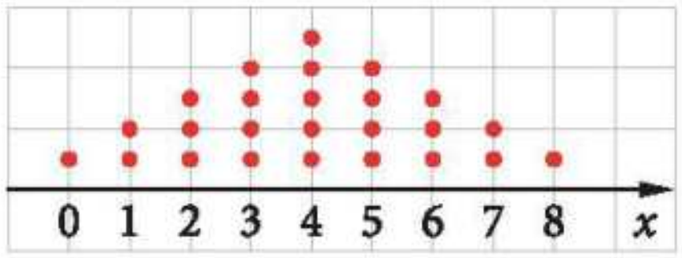
b) Dla zestawu z przykładu 10 mamy średnią równą 4,64 i dominantę oraz medianę równe 5.



Średnia wyników ma interpretację fizyczną. Jeżeli przyjmiemy, że zamiast rysowanych kółeczek mamy kulki o identycznej masie ułożone na osi w odpowiednich punktach jedna nad drugą, to **średnia wskazuje środek ciężkości** całego układu. Inaczej mówiąc, wyznacza ona taki punkt na osi, w którym masy kulek po obydwu jego stronach zrównoważą się. Jeżeli podeprzemy w tym punkcie oś, to żadna z jej stron nie przeważy drugiej.

Przykład 12

Na rysunku zaprezentowane są dane surowe pewnej obserwacji. Wyznaczymy na jego podstawie średnią, dominantę i medianę.



Szereg uporządkowany dla narysowanego zestawu danych to: 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8.

Rozwiązanie

Od razu możemy wskazać dominantę – najczęściej pojawia się wynik 4.
Na podstawie tego rysunku łatwo również wyznaczyć medianę – tyle samo kropek jest po lewej i po prawej stronie liczby 4.
Środek ciężkości całego układu jest również w punkcie 4. Aby to sprawdzić, obliczamy średnią:

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 8}{25} = \frac{100}{25} = 4$$

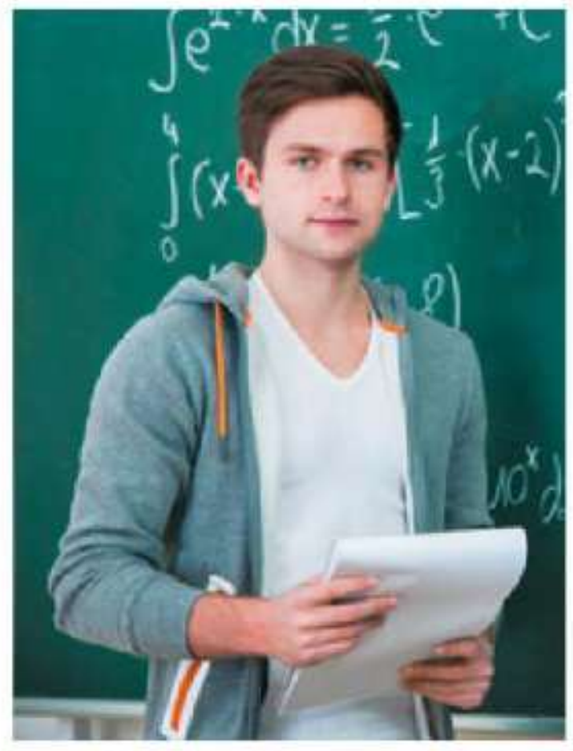
Odp.: średnia = dominanta = mediana = 4

Średnia ważona

Średnią arytmetyczną czasem wygodnie jest zastąpić innym parametrem charakteryzującym dane surowe. Zanim go wprowadzimy, przeanalizujmy przykład.

Przykład 13

Marzeniem wszystkich uczniów i nauczycieli jest opracowanie sprawiedliwego i jednoznacznego systemu oceniania, zwłaszcza w wypadku wystawiania ocen semestralnych. Najczęściej (choć nie zawsze) średnia arytmetyczna nie jest dobrym pomysłem – ocena z klasówki to nie to samo, co ocena na przykład za pracę domową. Pani Piórnik przyjęła następującą zasadę: oceny z pracy klasowej mnożyła przez 5, z odpowiedzi ustnej przez 3, z kartkówki przez 2, pozostałe oceny przez 1. Inaczej mówiąc, ocena z pracy klasowej była liczona pięciokrotnie, z odpowiedzi – trzykrotnie itd. Zatem do „średniej" musiała uwzględnić odpowiednio więcej ocen.



Izydor Muszka otrzymał w semestrze z prac klasowych oceny: 4, 3, 5, 3; z odpowiedzi ustnych: 4, 5; z kartkówek: 1, 5. Zgodnie z przyjętą zasadą „średnia" ocen Izydora jest więc równa:

$$\frac{5 \cdot (4 + 3 + 5 + 3) + 3 \cdot (4 + 5) + 2 \cdot (1 + 5)}{4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2} = \frac{114}{30} = 3{,}8$$

Pani Piórnik postawiła Izydorowi na semestr czwórkę.

Definicja

Jeżeli wynikom $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nadane są nieujemne wagi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takie, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 0$, to **średnią ważoną** tych wyników jest liczba:

$$\overline{x}_w = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

Przykład 14 ◀ zad. 8.13

Obliczymy średnią ważoną następujących wyników pomiaru: 10, 11, 5, 4, 12 z podanymi wagami.

Wartość oczekiwana gry losowej jest średnią ważoną z przyjmowanych wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z wagami $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Rozwiązanie

a) Z wagami odpowiednio 2, 1, 3, 1, 1:

$$\overline{x}_w = \frac{2 \cdot 10 + 11 + 3 \cdot 5 + 4 + 12}{2 + 1 + 3 + 1 + 1} = \frac{62}{8} = 7{,}75$$

b) Z wagami odpowiednio 0,1, 0,2, 0,3, 0,2, 0,2:

$$\overline{x}_w = \frac{0{,}1 \cdot 10 + 0{,}2 \cdot 11 + 0{,}3 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}2 \cdot 12}{0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}2} = \frac{7{,}9}{1} = 7{,}9$$

Odp.: a) $\overline{x}_w = 7{,}75$ b) $\overline{x}_w = 7{,}9$

Zauważmy, że:
- jeżeli wszystkie wagi są równe, to średnia ważona jest równa średniej arytmetycznej,
- jeżeli wszystkie wyniki są równe, to, niezależnie od przyjętych wag, ich średnia ważona jest taka sama (równa każdemu wynikowi),
- średnia ważona wyznacza środek ciężkości układu „kul" o różnych masach.

Przykład 15 ◀ zad. 8.14

Dwa izotopy miedzi mają masy atomowe 63 i 65. Wyznaczymy masę atomową miedzi otrzymanej w sposób naturalny, jeżeli wiadomo, że składa się ona z obu izotopów w stosunku odpowiednio 7 : 3.

Rozwiązanie

Szukana wielkość jest średnią ważoną liczb 63 i 65 z wagami 7 oraz 3.

$$\overline{x}_w = \frac{7 \cdot 63 + 3 \cdot 65}{7 + 3} = 63{,}6$$

Odp.: 63,6

Przykład 16 ◀ zad. 8.18

Wyznaczymy takie wagi m i p, aby średnia ważona liczby 7 z wagą m i liczby 4 z wagą p
a) była równa 5. b) była równa 5, a suma wag m i n wynosiła 1.

Rozwiązanie

a) Zgodnie z definicją: $m \geqslant 0$, $p \geqslant 0$, $m + p > 0$ i $\frac{7m + 4p}{m + p} = 5$.

Równanie możemy przekształcić do postaci $p = 2m$.

Rozwiązaniem zadania jest każda para liczb m, p spełniająca układ warunków:

$$\begin{cases} p > 0 \\ m > 0 \\ p = 2m \end{cases}$$

Takich par liczb jest nieskończenie wiele, np.: $\begin{cases} m = 1 \\ p = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} m = 3 \\ p = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} m = \frac{2}{5} \\ p = \frac{4}{5} \end{cases}$.

Odp.: Rozwiązaniem jest każda para liczb m, p spełniająca układ warunków: $p > 0$ i $m > 0$ i $p = 2m$.

b) Szukamy rozwiązania układu warunków:

$$\begin{cases} p > 0 \\ m > 0 \\ p = 2m \\ p + m = 1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu warunków jest jedna para liczb: $\begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ p = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Odp.: $m = \frac{1}{3}$, $p = \frac{2}{3}$

Zadania

8.1. W tabeli przedstawiono wyniki sprawdzianu w klasie liczącej 30 uczniów.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów, którzy uzyskali tę ocenę	4	5	9	6	4	2

Na którym centylu znajduje się wynik ucznia, który dostał
a) dwójkę? b) trójkę? c) czwórkę? d) piątkę? e) szóstkę?

8.2. Marta dostała na półrocze czwórkę z matematyki. Znajduje się z tym wynikiem na 84. centylu w klasie liczącej 25 osób. Jej koleżanka Zuzia otrzymała trójkę i znalazła się na 64. centylu. Ile czwórek było w tej klasie?

8.3. Podaj takie trzy zestawy dziesięciu liczb całkowitych, aby we wszystkich medianа była równa 6, ale każdy z nich miał inną wartość najmniejszą i inną wartość największą.

8.4. W 2019 r. egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym zdawało 250 489 osób. Poniżej przedstawiona jest tabela zawierająca rozkład wyników tego egzaminu w poszczególnych centylach.
Na jej podstawie oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Wynik nie wyższy od 10% uzyskało 2% zdających.
B. Wynik niższy od 30% uzyskało mniej niż 30 000 zdających.
C. Liczba osób, które uzyskały wynik wyższy od 50%, przekracza 150 000.
D. Liczba osób, które uzyskały wynik niższy niż 20%, jest mniejsza od liczby osób, które uzyskały wynik wyższy od 90%.

Matematyka – poziom podstawowy					
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	1	34	21	68	64
2	1	36	23	70	66
4	1	38	26	72	69
6	1	40	28	74	71
8	1	42	30	76	74
10	2	44	33	78	76
12	3	46	35	80	78
14	4	48	38	82	80
16	5	50	40	84	82
18	7	52	43	86	85
20	8	54	45	88	87
22	10	56	48	90	89
24	12	58	51	92	91
26	13	60	53	94	93
28	15	62	56	96	96
30	17	64	58	98	98
32	19	66	61	100	100

8.5. Wyznacz średnią arytmetyczną danych surowych. Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.

a) 1, 8, 7, 3, 4, 2, 9, 7, 1, 3, 2, 6, 3

b) 21, 32, 33, 45, 33, 17, 0, 21, 22, 17, 45, 48, 20, 51

8.6. Oblicz średnią liczbę biletów sprzedanych w kolejnych dniach na seans filmowy w kinie:

43, 102, 372, 229, 332, 556, 345, 23, 73, 165



8.7. Miesięczna średnia temperatura powietrza od stycznia do grudnia w Rzymie (zaokrąglona do 1°) wynosi w kolejnych miesiącach:

7°C, 8°C, 11°C, 14°C, 18°C, 22°C,
25°C, 25°C, 22°C, 17°C, 12°C, 9°C

Wskaż dominantę i wyznacz medianę tych danych.

8.8. Zapisz dane surowe w szeregu uporządkowanym, wyznacz ich medianę, dominantę i średnią. Wyniki zaokrąglij do całości.

a) Liczby punktów uzyskanych ze sprawdzianu w klasie 3 przez poszczególnych uczniów: 14, 17, 12, 11, 8, 5, 16, 11, 13, 14, 17, 12, 7, 8, 14, 11, 12, 10, 15, 11, 13, 9, 14, 11, 7, 18, 15.

b) Liczby batonów sprzedanych dziennie w sklepiku szkolnym w ciągu miesiąca: 18, 14, 20, 11, 5, 66, 18, 11, 4, 3, 19, 21, 20, 15, 2, 1, 0, 12, 12, 20, 5, 9, 7, 50, 8.

c) Miesięczne opady w mm od stycznia do grudnia w Łowiczu: 30, 24, 30, 44, 52, 62, 85, 72, 45, 35, 33, 35.

d) Masa w gramach losowo wybranych z koszyka jajek kurzych: 41, 39, 42, 47, 36, 29, 52, 44, 42, 43, 40, 42, 41.

e) Liczby książek wypożyczonych w ciągu roku szkolnego przez poszczególnych uczniów: 25, 4, 107, 21, 23, 46, 17, 4, 0, 29, 34.

8.9. Krzyś chciał zważyć jednocześnie cztery szczeniaki na domowej wadze. Udało mu się zważyć trzy, bo suczka Sinuska uciekła. Średnia masa trzech zważonych szczeniąt wyniosła 2,1 kg. Sinuskę postawiono na wagę oddzielnie. Ważyła 1,9 kg. Ile średnio waży jeden szczeniak?

8.10. Pani Gertruda prowadzi bar Uszko, w którym daniem głównym są pierogi. Przez trzy tygodnie pani Gertruda skrupulatnie notowała liczbę oraz rodzaj wydawanych porcji pierogów. W tabeli zanotowane są zebrane przez nią dane (R oznacza pierogi ruskie, M – pierogi z mięsem, G – pierogi z kapustą i grzybami).

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.
R	8	5	10	6	13	5	5	7	6	10	6	16	4	5	8	7	11	5	14	7	4
M	7	10	5	3	2	5	9	7	3	2	7	5	3	2	7	5	7	6	–	3	5
G	4	2	7	5	10	2	4	–	3	5	10	9	1	2	5	–	3	9	7	1	6

Wyznacz średnią, medianę i dominantę w zestawie liczb

a) sprzedanych dziennie porcji pierogów ruskich.

b) sprzedanych dziennie porcji pierogów z mięsem.

c) wszystkich sprzedanych dziennie porcji pierogów.

Wyniki zaokrąglij do całości.

8.11. Skorzystaj z danych dotyczących sprzedaży pierogów w barze Uszko z poprzedniego zadania.

a) Pani Gertruda swoje obserwacje zapisywała w kolejne dni, zaczynając od poniedziałku. W jaki dzień tygodnia ma najwięcej chętnych na swoje danie główne?

b) Cena hurtowa porcji pierogów, które kupuje pani Gertruda, wynosi: R – 3 zł, M – 5 zł, G – 4 zł, natomiast w Uszku klient płaci odpowiednio: 5,50 zł, 7 zł i 6 zł. Na którym rodzaju pierogów pani Gertruda zarobiła najwięcej? Czy zysk pani Gertrudy byłby większy czy mniejszy, gdyby każdy rodzaj pierogów kosztował w Uszku 6,50 zł za porcję (zakładamy sprzedaż na takim samym poziomie)?

8.12. Dwie klasy trzecie planują wspólną dyskotekę. Wszyscy chętni mają przyjść o godzinie 18. Trzeba ustalić, do której godziny ma trwać dyskoteka i jak długo powinien być czynny bufet. Uczniowie przeprowadzili pomiędzy sobą ankietę z pytaniem „Ile godzin zamierzasz zostać na dyskotece?". Odpowiedzi zebrano w następującej tabeli:

Czas (w godz.)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6
Liczba uczniów	2	1	6	4	12	4	8	1	2	1

Postanowiono, że dyskoteka zakończy się, gdy w szkole pozostanie nie więcej niż 50% liczby uczestników. Natomiast bufet będzie otwarty, dopóki będzie co najmniej 75% uczniów. Do której godziny ma trwać dyskoteka i jak długo będzie czynny bufet?

8.13. Dane są wyniki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i ich wagi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Oblicz średnią ważoną wyników.

a)

x_i	−2	1	3
a_i	3	5	4

b)

x_i	−2	−1	0	1	2
a_i	1	3	5	7	9

c)

x_i	3	4	5	6
a_i	0,3	0,2	0,4	0,1

d)

x_i	2	4	6
a_i	1	1	1

8.14. Łukasz musi wybrać liceum. Aby ułatwić sobie podjęcie decyzji, wybrał cztery kryteria i przypisał im wagi. Następnie zdobył informacje o liceach i ocenił te kryteria w skali od 0 do 10 (im więcej punktów, tym lepsza ocena). Wyniki zebrał w poniższej tabeli. Które liceum powinien wybrać Łukasz?

	Wyniki matury	Łatwość dojazdu	Oferta nauki języków obcych	Opinia uczniów klas starszych
	waga 0,4	waga 0,3	waga 0,2	waga 0,1
I LO	6	3	4	8
II LO	3	5	2	7
III LO	5	7	3	9

8.15. Średnia ważona liczby 4 z wagą 2 i liczby 8 z wagą x jest równa 7. Wyznacz x.

8.16. Średnia ważona podanego zestawu danych i ich wag wynosi $\overline{x}_w = 14{,}3$. Oblicz brakującą wagę m.

x	5	10	15	22
waga	2	3	m	4

8.17. Oblicz średnią ważoną swoich ocen z pierwszego semestru. Przyjmij jako wagę liczbę godzin danego przedmiotu w tygodniu.

8.18. Średnia ważona liczby 15 z wagą m i liczby 33 z wagą n jest równa 21.

a) Podaj przykład takich wag m i n.

b) Jaką zależność spełniają wielkości m i n?

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Średni wzrost dziesięciorga zawodników drużyny jest równy 184 cm. Jedenasty zawodnik ma 195 cm wzrostu. Wskaż średni wzrost jedenastu sportowców.

A. 190 cm **B.** 188 cm **C.** 187 cm **D.** 185 cm

2. Średnia ważona liczby 7 z wagą 3 i liczby 19 z wagą x jest równa 17. Wskaż x.

A. $x = 13$ **B.** $x = 15$ **C.** $x = 7$ **D.** $x = 12$

3. Do zestawu danych surowych: 2, 3, 3, 4, 6, 6, 8, 9, 11, 11, 11, 25 dopisano jedną daną, taką że mediana całego zestawu nie uległa zmianie. Wskaż tę daną.

A. 5 **B.** 7 **C.** 10 **D.** 12

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

W uporządkowanym rosnąco szeregu liczb całkowitych mediana

A. może być liczbą niecałkowitą.

B. jest liczbą wymierną.

C. może być liczbą niewymierną.

5. Kolejni klienci kiosku robili zakupy za następujące kwoty (w zł): 2,40; 0,60; 7,20; 5; 4,20; 1,50; 2; 6,40; 1,50; 12,50; 1,50; 2,50. Wyznacz średnią i dominantę tych kwot. Średnią podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

6. We wszystkich klasach trzecich pewnej szkoły przeprowadzono wspólny sprawdzian z matematyki. Liczbę poszczególnych ocen ze sprawdzianu przedstawiono w tabeli.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	23	16	35	27	11	3

Wyznacz medianę i średnią tych ocen. Średnią podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

7. Wyznacz zestaw czterech danych, w którym mediana wynosi 6, dominanta jest równa 3, a średnia 7.

9. Miary rozproszenia

Umiejętności:

- obliczanie odchylenia standardowego zestawu danych (także w wypadku danych odpowiednio pogrupowanych)
- interpretowanie parametrów opisowych dla danych empirycznych

Zastanówmy się teraz, jakie wady i zalety mają omówione wcześniej parametry opisujące dane surowe – mediana i średnia.

Mediana dzieli uporządkowany szereg danych na pół. Jej wartość zależy od liczby wszystkich wyników oraz od wartości wyrazu środkowego (dla nieparzystej liczby wszystkich danych) lub wyrazów środkowych (dla parzystej liczby wszystkich danych). Natomiast wartości skrajne nie mają na nią wpływu.

Przykład 1 ◂ zad. 9.1

W zestawieniu zarobków pracowników firmy Szwaczka (zob. przykład 6 na s. 258) mediana jest równa 1500. Z informacji tej wynika tylko tyle, że np. zarobki księgowej tej firmy wynoszące 3400 zł sytuują się w górnej połowie listy.

Przypomnijmy całą listę płac.

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 3400, 4900
  mediana: 1500

Jeżeli księgowa dostanie podwyżkę o 1000 zł, to wartość mediany się nie zmieni.

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 4400, 4900
  mediana: 1500

Jeżeli prezes firmy, zarabiający 4900 zł, dostanie pensję o 2000 zł większą, to mediana również się nie zmieni.

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 4400, 6900
  mediana: 1500

Natomiast zmiana na liście w sąsiedztwie mediany może zmienić jej wartość. Na przykład w szeregu:

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1700, 2390, 2600, 3400, 4400, 6900
  mediana jest równa 1600.

Porównajmy teraz średnie dla powyższych danych. W szeregu:

- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 3400, 4900 średnia jest równa 2109,83,
- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 4400, 4900 średnia jest równa 2193,17,
- 890, 980, 980, 1278, 1500, 1500, 1500, 2390, 2600, 3400, 4400, 6900 średnia jest równa 2359,83.

Zatem zmiana w szeregu danych nawet jednej wartości powoduje zmianę średniej.

Średnia – środek ciężkości rozkładu danych – ma więc istotną zaletę. Reaguje na zmiany każdej wartości rozkładu. Poza tym wygodnie jest ją stosować w różnych obliczeniach matematycznych. Może się jednak zdarzyć, że to, co uważamy za zaletę średniej, w konkretnym przypadku jest wadą. Dzieje się tak na przykład wtedy, gdy w szeregu danych wystąpi wynik nietypowy.

Przykład 2

W drugim semestrze, do końca maja, Agata otrzymała z matematyki następujące oceny:

4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6

Zauważmy, że mediana i średnia tych wyników są identyczne i wynoszą 5. Agata spodziewała się na świadectwie piątki z matematyki. Niestety, na początku czerwca nie zrobiła pracy domowej i „złapała" jedną ocenę niedostateczną. Zatem jej wyniki utworzyły szereg:

1, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6

Mediana danych nadal jest równa 5. Natomiast średnia ocen spadła do 4,6.
W tym wypadku wydaje się, że do wystawienia końcowej oceny lepiej posłużyć się medianą, traktując jedną ocenę niedostateczną jako wynik dla Agaty nietypowy.

Częstym błędem jest wyznaczanie średniej dla populacji jako średniej dla średnich jej podzbiorów.

Przykład 3

Dwie rodziny wybrały się wspólnie na grzybobranie. Każde z szóstki dzieci pierwszej rodziny zebrało odpowiednio 10, 8, 7, 9, 8 i 6 grzybów. Czworo dzieci z drugiej rodziny przyniosło odpowiednio 3, 7, 6, 4 grzybów. Obliczymy średnią liczbę grzybów zebranych przez dziecko w każdej z rodzin i średnią liczbę grzybów zebranych przez każde z dzieci.

Rozwiązanie

Średnia liczba grzybów znaleziona przez jedno dziecko w pierwszej rodzinie wynosi:

$$\frac{10+8+7+9+8+6}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

a w drugiej jest równa:

$$\frac{3+7+6+4}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

Średnia liczba grzybów zebranych przez jedno dziecko podczas tej wyprawy to $\frac{48+20}{10} = 6{,}8$. Zauważmy, że ta średnia nie jest równa średniej dwóch wyznaczonych średnich (która wynosi $\frac{8+5}{2} = 6{,}5$).

Często zdarza się, że średnia z wyliczonych wcześniej średnich klasowych jest błędnie nazywana średnią ocen w szkole.

Różne parametry charakteryzujące próbę wprowadzane są po to, aby na ich podstawie można było wyciągnąć poprawne wnioski o całej populacji. Zastanówmy się, jak podanie mediany, dominanty i średniej spełnia to zadanie.

Przykład 4

Klasy 3a i 3b liczą po 20 osób. Biblioteka szkolna zebrała dane o liczbie książek przeczytanych przez uczniów obydwu klas we wrześniu i październiku. Po podsumowaniu danych i wykonaniu obliczeń statystycznych okazało się, że parametry opisujące wyniki były identyczne dla obu klas. Liczba 4 była zarówno średnią, medianą, jak i dominantą zestawu danych dotyczących każdej z klas.

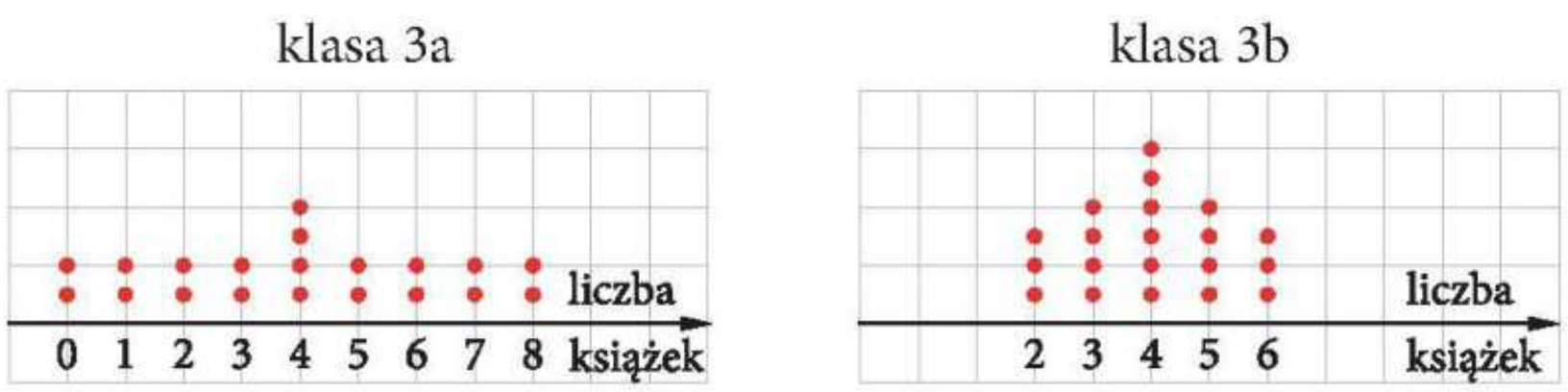


Jakie zatem wnioski (wspólne dla obydwu klas) można wyciągnąć na podstawie takich informacji?

- Średnia jest równa 4, czyli każdy z uczniów przeczytał przeciętnie 4 książki.
- Mediana jest równa 4, zatem połowa uczniów przeczytała co najwyżej 4 książki oraz połowa uczniów przeczytała co najmniej 4 książki.
- Dominanta jest równa 4, czyli największa liczba uczniów przeczytała w badanym okresie 4 książki.

Czy z powyższych danych można wnioskować, że uczniowie obydwu klas prezentują podobne grupy czytelników? Niezupełnie – można się o tym przekonać, porównując dane surowe, które były następujące:

Podane rozkłady nie wyczerpują wszystkich możliwości dopasowania danych surowych do informacji podanych na początku przykładu.



W klasie 3a cztery osoby przeczytały co najmniej 7 książek, ale jednocześnie dość liczna jest grupa uczniów nielubiących czytać, wyniki są równomiernie rozproszone. Natomiast w klasie 3b każdy uczeń przeczytał co najmniej 2 książki, wszystkie wyniki są zgrupowane blisko średniej, nie ma tu „maniaków" czytania.

Podanie średniej, dominanty i mediany nie wystarcza zatem do opisania badanej populacji.

Wprowadzimy teraz parametry mierzące rozproszenie wyników.

Jest wiele takich miar. Najprostszą jest **rozstęp** w uporządkowanym szeregu, czyli odległość między danymi skrajnymi.

W wynikach klasy 3a rozstęp jest równy $8 - 0 = 8$, a w wynikach klasy 3b: $6 - 2 = 4$. Wadą tej miary jest jej wrażliwość na pozycje skrajne. Jeżeli pojawi się wynik nietypowy, to rozstęp będzie bardzo duży i niewiele powie o skupieniu danych wokół średniej.

Dla rzeczywistych potrzeb wnioskowania statystycznego taka miara rozproszenia jest za mało dokładna i dlatego niezbyt przydatna. Ważniejsza jest informacja o przeciętnej odległości wyników od wartości średniej.

Definicja

Przeciętnym odchyleniem od średniej $\overline{x}$ liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest wartość:

$$\frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n}$$

Przykład 5

Obliczymy przeciętne odchylenie liczb 1, 4, 7, 8, 10 od ich średniej $\overline{x} = 6$.

Rozwiązanie

Kolejne odległości są równe:

$$|1-6| = 5,\ |4-6| = 2,\ |7-6| = 1,\ |8-6| = 2,\ |10-6| = 4$$

Zatem odchylenie to $\frac{5+2+1+2+4}{5} = 2{,}8$.

Odp.: Przeciętne odchylenie liczb tego zestawu od ich średniej wynosi 2,8.

Zauważmy, że suma nieujemnych liczb jest tym mniejsza, im mniejsze są jej składniki i na odwrót – jeżeli suma nieujemnych liczb jest mała, to jej składniki muszą być również małe (żadne wyrazy nie mogą się przecież zredukować). Zatem jeżeli przeciętne odchylenie od średniej jest małe, to dane są zgrupowane blisko niej.

Wyrażanie wielkości za pomocą wartości bezwzględnej nie jest wygodne. Takie wzory nie dają się na przykład łatwo przekształcać. Dlatego (chociaż nie jest to jedyny powód) narzędziem mierzącym rozproszenie wyników, używanym w statystyce, jest wielkość wyrażona przez kwadraty odległości, tzw. **wariancja**.

Definicja

Wariancją w zestawie wyników $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy przeciętne odchylenie kwadratowe od wartości średniej $\overline{x}$, czyli:

$$\frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n}$$

Przykład 6

Obliczymy wariancję danych 2, 2, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8.

Rozwiązanie

Kolejno obliczamy:

- średnią (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku): $\overline{x} = 5{,}1$
- wariancję: $\frac{2\cdot 3{,}1^2 + 3\cdot 1{,}1^2 + 4\cdot 0{,}1^2 + 3\cdot 0{,}9^2 + 1{,}9^2 + 2\cdot 2{,}9^2}{15} = \frac{45{,}75}{15} = 3{,}05$

Odp.: Wariancja jest równa 3,05.

Wariancja ma tę samą własność co przeciętne odchylenie, tzn. jest sumą nieujemnych składników, więc jest mała tylko wtedy, gdy składniki są małe. Jej wadą jest niewygodna, mierzona w kwadratach, jednostka. Wprowadzona została więc jeszcze jedna miara rozproszenia, tzw. **odchylenie standardowe**.

Definicja

Odchyleniem standardowym w zestawie wyników obserwacji nazywamy pierwiastek kwadratowy z wariancji. Odchylenie standardowe oznaczamy σ.

Zatem:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

σ (sigma) jest małą literą alfabetu greckiego.

Zaletą odchylenia standardowego jest to, że wyraża się je, podobnie jak przeciętne odchylenie, w jednostkach liniowych, a nie kwadratowych. Nadal zachowana zostaje podstawowa własność potrzebna do oszacowania rozproszenia – **odchylenie standardowe jest małe wtedy i tylko wtedy, gdy wyniki są skupione blisko średniej**.

Ze względu na zależność między wariancją a odchyleniem standardowym przyjmuje się σ^2 jako oznaczenie wariancji.

Dla zestawu danych z przykładu 6 odchylenie standardowe jest równe:

$$\sigma = \sqrt{3{,}05} \approx 1{,}75$$

Przykład 7 ◀ zad. 9.3

Powróćmy jeszcze raz do wyników czytelnictwa w klasach 3a i 3b (zob. przykład 4 na s. 273).
Obliczymy odchylenie przeciętne i odchylenie standardowe dla obydwu rozkładów wyników. Przypomnijmy, że średnie wyników są równe 4 w każdej z klas.

W klasie 3a (0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8) mamy:

- odchylenie przeciętne: $\frac{40}{20} = 2$
- odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2(0-4)^2 + 2(1-4)^2 + 2(2-4)^2 + 2(3-4)^2 + 2(5-4)^2 + 2(6-4)^2 + 2(7-4)^2 + 2(8-4)^2}{20}}$$

$$\sigma = \sqrt{6} \approx 2{,}45$$

Natomiast w klasie 3b (2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6) mamy:

- odchylenie przeciętne: $\frac{20}{20} = 1$
- odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{\frac{3(2-4)^2 + 4(3-4)^2 + 4(5-4)^2 + 3(6-4)^2}{20}} = \sqrt{\frac{8}{5}} \approx 1{,}26$$

Wyniki potwierdzają wcześniejsze obserwacje dotyczące rodzaju czytelnictwa w obydwu klasach. Ale zauważmy, że obserwacje te zostały poczynione po zaprezentowaniu danych surowych eksperymentu. Teraz moglibyśmy wyciągnąć podobne wnioski bez znajomości dokładnych wyników, a tylko mając do dyspozycji następujące liczby:

- w zestawie wyników klasy 3a:
  dominanta = mediana = średnia = 4, odchylenie standardowe = 2,45,
- w zestawie wyników klasy 3b:
  dominanta = mediana = średnia = 4, odchylenie standardowe = 1,26.

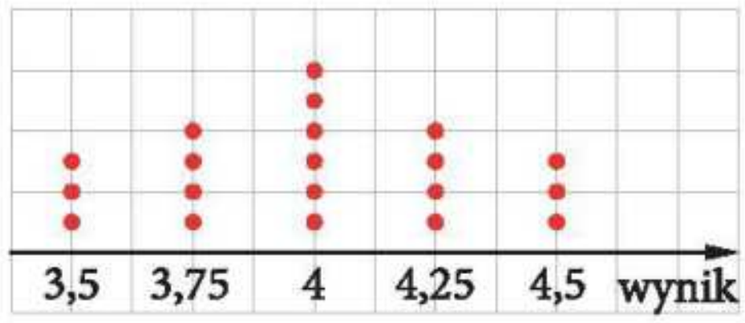
Przykład 8

Obliczymy odchylenie standardowe wyników o rozkładzie zbliżonym do rozkładu wyników klasy 3b, ale skupionych bliżej średniej.

Rozwiązanie

W zestawie danych:

3,5 3,5 3,5 3,75 3,75 3,75 3,75 4 4 4 4 4 4
4,25 4,25 4,25 4,25 4,5 4,5 4,5



średnia wynosi 4, sześć wyników jest oddalonych od niej o 0,5, osiem – o 0,25.
Odchylenie standardowe tego zestawu równa się:

$$\sqrt{\frac{6 \cdot 0{,}5^2 + 8 \cdot 0{,}25^2}{20}} = \sqrt{0{,}1} \approx 0{,}32$$

i jest dużo mniejsze niż w wypadku zestawu wyników klasy 3b.

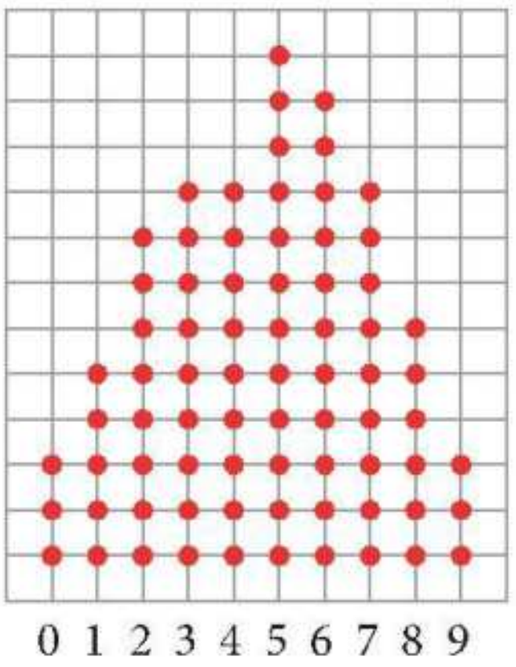
Grupowanie danych

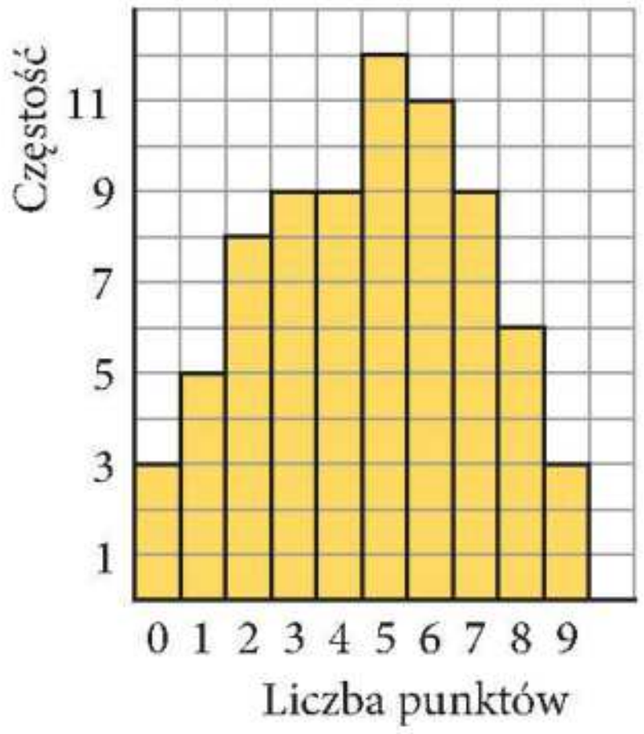
Pokazaliśmy wcześniej przykłady grupowania danych w tabelach. Przypomnijmy tabelę wyników egzaminu 75 studentów BIWU:

Liczba punktów	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Liczba wyników	3	5	8	9	9	12	11	9	6	3

Na podstawie tak zaprezentowanych danych wyznaczaliśmy dominantę i średnią wyników (medianę wskazujemy w uporządkowanym szeregu). W tabeli mamy podaną informację, jak często występuje każdy z wyników i dlatego tak opracowane dane noszą nazwę **tabeli rozkładu częstości**.

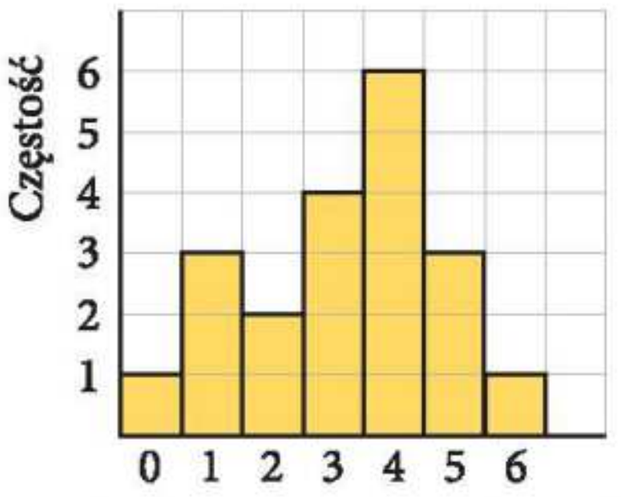
Częstym sposobem prezentowania danych zgrupowanych są diagramy słupkowe, wykonane na podstawie tabeli częstości. Są one dokładnym odwzorowaniem „punktowych" rysunków, co można zaobserwować na poniższych rysunkach.





Przykład 9 ◂ zad. 9.5

Na diagramie przedstawiono liczbę zniszczonych w ostatnim sezonie krzeseł we wszystkich kinach sieci Sowa. Odczytamy z tego diagramu różne informacje.



Rozwiązanie

a) Ile kin liczy sieć Sowa?

Słupki diagramu podzielone zostały poziomymi kreskami – każda kostka dotyczy jednego kina.
Zatem dane w diagramie są następujące:
0 zniszczonych krzeseł – w jednym kinie, 1 zniszczone krzesło – w trzech kinach, 2 zniszczone krzesła – w dwóch kinach, 3 – w czterech kinach itd. Cała sieć składa się z dwudziestu kin.

b) W ilu kinach uległy zniszczeniu jakieś krzesła?

W dziewiętnastu.

c) Jaki jest rozstęp liczby zniszczonych krzeseł?

Najmniejsza liczba jest równa 0, największa 6, zatem rozstęp jest równy 6.

d) Jaka liczba dominuje?

4 (aż w sześciu kinach zniszczone zostały 4 krzesła)

e) W ilu kinach zniszczono co najmniej 5 krzeseł?

W czterech.

f) Ile jest równa mediana?

3,5 (w dwudziestu uporządkowanych danych surowych mediana jest średnią arytmetyczną 10. i 11. wyniku)

g) Ile jest równa średnia liczba zniszczonych krzeseł?

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1}{20} = 3{,}2$$

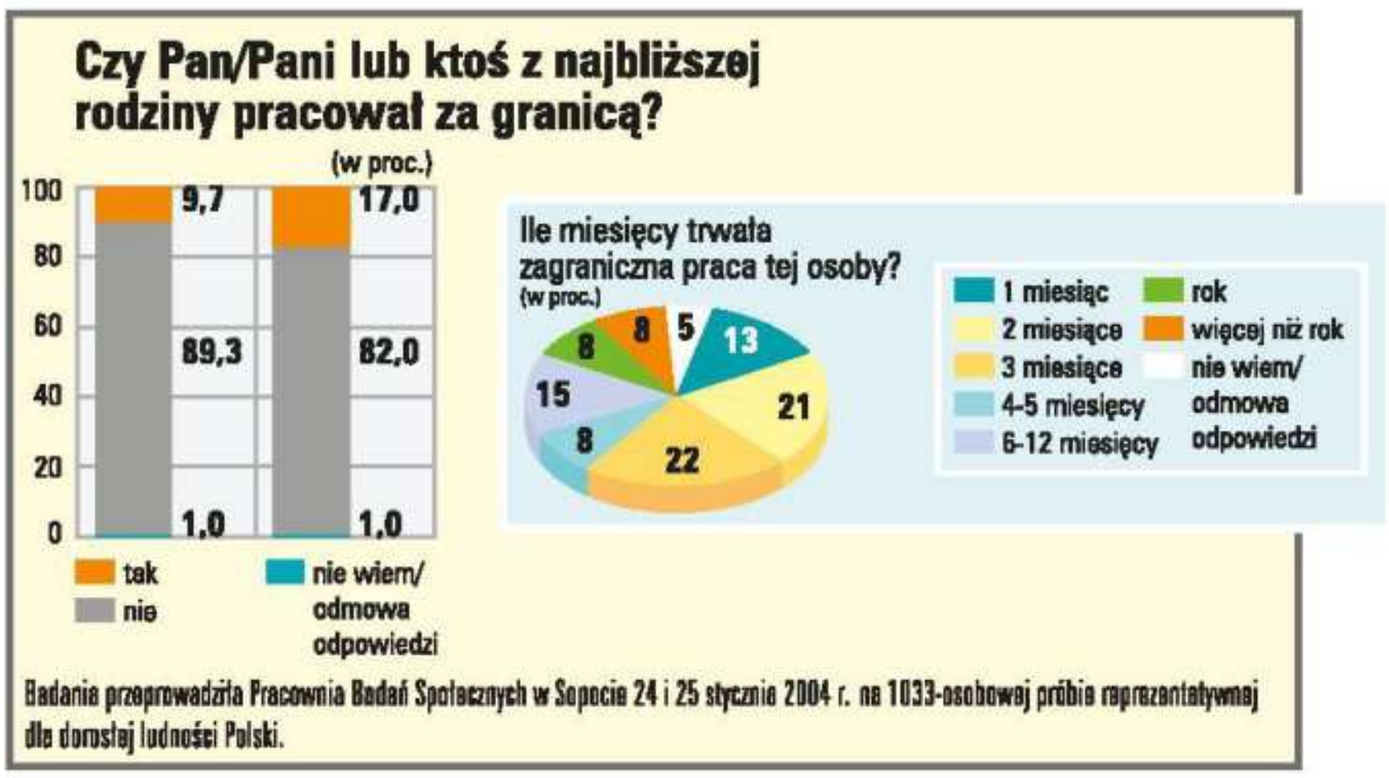
h) Ile jest równe odchylenie standardowe w tym zestawie danych?

$$\sigma = \sqrt{\frac{(0-3{,}2)^2 + 3(1-3{,}2)^2 + 2(2-3{,}2)^2 + 4(3-3{,}2)^2 + 6(4-3{,}2)^2 + 3(5-3{,}2)^2 + (6-3{,}2)^2}{20}}$$

$$\sigma \approx 1{,}57$$

Za pomocą wprowadzonych parametrów opisujemy dane surowe zebrane w wyniku obserwacji próby jakiejś populacji. Jeżeli chcemy uogólnić wyciągnięte wnioski na całą populację, to bardzo ważnym warunkiem jest właściwy dobór próby – istotna jest np. jej liczebność i sposób losowania.

Wyniki badań statystycznych prezentowane np. w gazetach powinny być zaopatrzone w informacje na temat rodzaju próby.



Próba powinna być reprezentatywna dla badanej populacji.
Jeżeli ten warunek jest spełniony, to najczęściej cechy rozkładu wyników próby są również cechami rozkładu całej populacji. Inaczej mówiąc, parametry opisujące próbę są dobrym przybliżeniem parametrów opisujących całą populację.

Pokażemy na koniec przykład sposobu wyboru próby losowej innego niż typowe losowanie ze zbioru wszystkich elementów.

Przykład 10

W liceum, do którego chodzi Matylda, między kilkoma grupami uczniów doszło do konfliktu o muzykę nadawaną w trakcie przerw. Aby problem rozstrzygnąć i wybrać jeden z kilku możliwych wariantów (najprostszy, zaproponowany przez dyrekcję, polegał na wyłączeniu radiowęzła), postanowiono przeprowadzić badanie opinii na ten temat wśród szkolnej społeczności. Matylda otrzymała za zadanie przygotowanie sposobu wybrania reprezentatywnej próby losowej. Przyjęto, że jej liczebność nie powinna przekroczyć 50 osób – taka liczba ankiet wydawała się możliwa do opracowania. Ponadto, ponieważ wystąpiły wyraźne różnice w gustach między różnymi poziomami klas, a nie poszczególnymi klasami, należało wybrać jedną grupę reprezentującą klasy pierwsze, drugą – klasy drugie, trzecią – klasy trzecie, czwartą – klasy czwarte. O uwzględnienie swoich głosów upomniał się też personel szkoły.

Prześledźmy, co kolejno przygotowała Matylda.

Krok 1: Zebrała dane o liczebności poszczególnych grup.

Grupa	klasy 1	klasy 2	klasy 3	klasy 4	personel
Liczebność	180	171	165	150	74

Krok 2: Obliczyła, jaki procent całej szkolnej populacji tworzy każda z grup.

Grupa	klasy 1	klasy 2	klasy 3	klasy 4	personel
Procent	24,3%	23,1%	22,3%	20,3%	10%

Krok 3: Obliczyła, ile osób w takim razie powinna liczyć reprezentacja każdej z grup w ustalonej 50-osobowej próbie losowej.

Grupa	Liczebność	Procent	Reprezentacja
klasy 1	180	24,3%	$24{,}3\% \cdot 50 = 12{,}15$ 12 osób
klasy 2	171	23,1%	$23{,}1\% \cdot 50 = 11{,}55$ 12 osób
klasy 3	165	22,3%	$22{,}3\% \cdot 50 = 11{,}15$ 11 osób
klasy 4	150	20,3%	$20{,}3\% \cdot 50 = 10{,}15$ 10 osób
personel	74	10%	$10\% \cdot 50 = 5$ 5 osób

W skład ankietowej próby powinno zatem wejść 12 uczniów klas pierwszych, 12 – klas drugich, 11 – klas trzecich, 10 – klas czwartych i 5 osób reprezentujących personel szkoły.
Wylosowanie tych grup miało się odbyć tradycyjnie – poprzez wskazanie (losowo!) odpowiedniej liczby numerów z alfabetycznie zapisanych list. Tak wybrana próba nazywana jest **warstwową próbą** losową.

Zadania

9.1. Kasia bawi się kostką do gry, rzucając ją wiele razy. Wyniki zapisuje w kolejności rzutów:

2, 6, 4, 5, 1, 1, 3, 2, 2, 2, 4, 5, 6, 6, 5, 1, 3, 4, 5, 2, 1, 3, 5, 6, 4, 3, 5, 1, 6, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 5, 6, 6, 5, 4, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 1

Narysuj diagram częstości oraz wyznacz medianę tych wyników i ich dominantę.

9.2. Pielęgniarka szkolna przeprowadziła wśród uczniów klas pierwszych pomiar masy ciała. Wyniki (w kg) zapisała zgodnie z kolejnością alfabetyczną nazwisk:

48, 49, 47, 48, 51, 54, 52, 47, 49, 53, 50, 48, 49, 51, 48, 50, 49, 51, 47, 47, 52, 51, 51, 50, 49, 48, 47, 54, 47, 50, 48, 49, 49, 50, 51, 48, 50, 48, 48, 56, 50, 52, 51, 53, 49, 54, 55, 48, 49, 50, 51, 52, 48, 49, 51, 52, 49, 53, 53, 55, 54, 49

Dla tego zestawu danych

a) wyznacz rozstęp wartości.
b) wyznacz medianę i dominantę.
c) oblicz średnią masę ucznia (wynik zaokrąglij do całości) oraz odchylenie standardowe od średniej (wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku).
d) narysuj diagram rozkładu częstości.

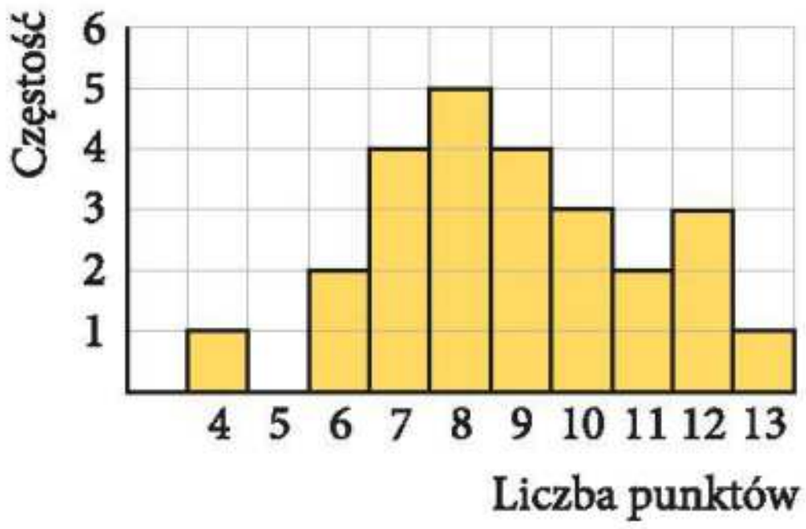
9.3. Oblicz średnią, wariancję i odchylenie standardowe następujących danych surowych. Wyniki zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

a) Masa (w gramach) losowo wybranych z koszyka jajek kurzych:
41, 39, 42, 47, 36, 29, 52, 44, 42, 43, 40, 42, 41
b) Liczby pacjentów przychodni lekarskiej w wybranych dniach:
37, 59, 24, 113, 49, 83, 57, 57, 69, 17
c) Rozmiary damskich ubrań zakupionych w pewnym sklepie:
38, 40, 38, 42, 42, 42, 44, 50, 36, 38, 38, 46, 42, 42, 40, 44, 46, 42, 36, 40, 40
d) Liczby sprzedanych przez kwiaciarkę tulipanów w losowo wybranych dziesięciu dniach: 112, 108, 102, 115, 92, 111, 84, 98, 105, 93

9.4. W tabeli podana jest moc silnika (w KM) wybranych 20 modeli samochodów. Uporządkuj dane niemalejąco, wyznacz ich medianę i dominantę. Oblicz średnią, wariancję i odchylenie standardowe. Wyniki podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Marka samochodu	moc [KM]	Marka samochodu	moc [KM]
Citroen Berlingo II	115	Subaru Forester IV	150
Citroen Xsara Picasso	110	Toyota Auris II	132
Fiat Bravo II	90	Toyota Avensis I	128
Fiat Punto IV	77	Toyota Corolla IX	97
Fiat Grande Punto	90	Opel Astra H	100
Alfa Romeo 146	103	Opel Corsa D	75
Ford Focus 95	95	Opel Omega A	125
Ford Fiesta VI	60	Land Rover Discovery IV	190
Ford KA II	75	Suzuki Swift V	136
IV Mazda CX-5	160	Suzuki Alto VII	68

9.5. Diagram przedstawia liczby punktów zdobyte w turnieju przez poszczególnych zawodników. Na jego podstawie odpowiedz na poniższe pytania.



a) Ile osób uczestniczyło w zawodach?
b) Jaką najmniejszą i jaką największą liczbę punktów zdobyli zawodnicy?
c) Ile wynosi dominanta liczby punktów?
d) Ilu zawodników zdobyło co najmniej 9 punktów?
e) Ile średnio punktów zdobył w tym turnieju jeden zawodnik?

9.6. Długości ciał noworodków (w cm) wprowadzane do szpitalnego rejestru w takiej kolejności, w jakiej dzieci się rodziły, wynosiły:

54, 57, 59, 58, 59, 56, 54, 58, 57, 52, 50, 53, 53, 55, 54, 57, 55, 57, 49, 53, 54, 62, 56, 58, 55, 60, 50, 53, 53, 56, 56, 53, 58, 54, 54, 53, 57, 53, 55, 54, 53, 54, 58, 58, 52, 53, 53, 56, 57, 58

a) Jaka jest średnia długość ciała noworodka z badanej próby? Wynik zaokrąglij do całości.
b) Wyznacz medianę, dominantę, rozstęp i odchylenie standardowe (zaokrąglone do dwóch miejsc po przecinku) w tym zestawie danych.

9.7. Podaj przykład zestawu czterech danych, których średnia jest równa 10, zaś odchylenie standardowe zaokrąglone do całości wynosi 3.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Dane do zadań 1–3. Wyniki zaokrąglono do jednego miejsca po przecinku.
Według *Małego Rocznika Statystycznego 1938* produkcja światowa włókna bawełny wynosiła (w milionach kwintali):

Rok	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936
Mln q	57,4	56,3	59,7	51,8	57,7	51,3	57,4	68,6

1. Wskaż średnią podanego zestawu danych.
A. 57,5 **B.** 57,6 **C.** 57,8 **D.** 56,8

2. Wskaż wariancję podanego zestawu danych.
A. 25,6 **B.** 25,0 **C.** 25,1 **D.** 25,2

3. Wskaż odchylenie standardowe podanego zestawu danych.
A. 5,3 **B.** 5,0 **C.** 5,1 **D.** 5,2

4. Przyjmujemy, że $\overline{x}$ oznacza średnią zestawu danych, σ^2 – wariancję tego zestawu oraz σ – odchylenie standardowe. Oceń prawdziwość podanych zdań.
Istnieje taki zestaw danych, w którym
A. $\sigma > \sigma^2$. **B.** $\sigma < 0$. **C.** $\overline{x} < 0 < \sigma$.

5. Kolejne miesięczne rachunki za telefon zaokrąglone do pełnych złotych wynosiły: 50, 61, 43, 60, 49, 52, 47, 36, 42, 45, 33, 46. Wyznacz średnią i odchylenie standardowe tych danych (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku).

6. Przeliczono zawartość 100 losowo wybranych pudełek zapałek. Wyniki kontroli przedstawiono w poniższej tabeli.

Liczba zapałek w pudełku	38	39	40	41	42	43	44
Liczba pudełek	3	11	37	18	16	13	2

Wyznacz średnią i odchylenie standardowe liczby zapałek w pudełku (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).

7. Wyznacz zestaw czterech danych, tworzących ciąg arytmetyczny, których średnia jest równa 5, zaś odchylenie standardowe zaokrąglone do całości wynosi 2.

10. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–25 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Jaką liczbę trzeba dopisać do zestawu -3, 0, 7 i 10, aby średnia arytmetyczna wszystkich pięciu liczb była równa 3?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

2. Ile wynosi prawdopodobieństwo znalezienia w 30-osobowej grupie co najmniej dwóch osób urodzonych w tym samym miesiącu?

A. 1 **B.** $\frac{1}{15}$ **C.** $\frac{2^{30}}{30^{30}}$ **D.** Jest za mało danych, żeby to obliczyć.

3. Rzucamy raz kostką do gry. Które z poniższych zdarzeń jest przeciwne do zdarzenia „wypadły co najwyżej trzy oczka”?

A. Wypadły mniej niż trzy oczka.
B. Wypadły co najmniej cztery oczka.
C. Wypadły więcej niż cztery oczka.
D. Wypadły trzy oczka lub więcej.

4. Czterech panów wybiera losowo (w tym samym czasie, ale w różnych mieszkaniach) jeden z pięciu kanałów telewizyjnych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszyscy wybiorą ten sam kanał?

A. $\frac{1}{125}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{4}{125}$ **D.** $\frac{4^5}{5^4}$

5. Średnia arytmetyczna liczb A i B jest równa k i $A = 6k$. Ile jest równe B?

A. $4k$ **B.** $2k$ **C.** $-3k$ **D.** $-4k$

6. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w rzucie dwiema monetami wypadnie (w dowolnej kolejności) orzeł i reszka?

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{2}{3}$

7. Z klasy, w której stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców jest równy $4 : 5$, wylosowano jedną osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest to dziewczyna?

A. $\frac{4}{9}$ **B.** $\frac{4}{5}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{9}$

8. W urnie znajduje się 7 kul białych i 3 kule czarne. Losujemy dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosowane kule są różnego koloru?

A. $\frac{7}{30}$ **B.** $\frac{7}{15}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{10}{21}$

9. W uporządkowanym szeregu: 3, 3, 5, 7, k, k, 15, 16, 16, 19, 20, 21 mediana wynosi 12. Ile jest równe k?

A. 11 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 9

10. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w rzucie dwiema kostkami wypadną różne liczby oczek?

A. $\frac{11}{12}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{5}{6}$

11. Ula chce zamalować trzy różne kwiatki na obrazku, każdy na inny kolor. W pudełku ma 10 różnych kredek. Na ile sposobów może zamalować kwiatki?

A. 27 **B.** 10 **C.** 10^3 **D.** 720

12. Rzucamy trzy razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w trzecim rzucie wypadnie szóstka?

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{216}$ **D.** $\frac{6}{125}$

13. Średnia dwóch liczb, z których jedną jest $\sqrt{5}$, wynosi $\sqrt{3}$. Wskaż drugą liczbę.

A. $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$ **B.** $2\sqrt{5} - \sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{15}$ **D.** $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$

14. Ze zbioru kolejnych liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 555\}$ wybieramy losowo jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wybrana liczba jest podzielna przez 3?

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{184}{555}$ **D.** $\frac{1}{3}$

15. Odchylenie standardowe zestawu danych: 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7

A. równa się 1. **B.** równa się 7. **C.** równa się 0. **D.** nie istnieje.

16. Ile jest równe prawdopodobieństwo tego, że przy losowym ustawianiu w kolejkę sześciu osób Ania i Mania będą stały obok siebie?

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

17. Które zdanie dotyczące uporządkowanego szeregu danych:
1, 1, 3, 3, 3, 4, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10 jest prawdziwe?

A. Dominantą w tym zestawie jest liczba 3.
B. Ten zestaw danych ma dwie dominanty.
C. Dominantą w tym zestawie jest liczba 8.
D. Ten zestaw danych ma cztery dominanty.

18. Który zestaw danych ma trzy dominanty?

A. 3 2 3 3 1 1 3 5 6 5 1 5 5 7 7 9 9 7 8 9 8 7
B. 1 2 3 3 1 3 4 4 5 7 7 3 7
C. 2 4 2 7 2 7 2 9 9 2 1 2 2 2 2
D. 9 9 9 9 9 9 9 8 8 8 8 8 6 6 6 6

19. Uparty pan Kajetan co tydzień bierze udział w grze w lotto. Przez 100 kolejnych gier nie wygrał ani razu. Wypełnia więc kupon po raz 101.

I. Szansa na wygraną przez pana Kajetana się zwiększyła.

II. Szansa na kolejną przegraną nie uległa zmianie.

Które spośród zdań I, II są prawdziwe?

A. tylko I **B.** tylko II **C.** żadne **D.** obydwa

20. Ile wynosi mediana w następującym zestawie danych surowych:
6 2 2 5 2 8 2 2 8 5 6 8 8?

A. 5,5 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 8

21. Średnia punktów z egzaminu czterdziestu studentów jest równa s. Dwudziestu innych studentów otrzymało w sumie 1800 punktów. Ile wynosi średnia wszystkich studentów?

A. $\frac{2}{3}s + 30$ **B.** $\frac{2s + 30}{3}$ **C.** $\frac{40s + 90}{60}$ **D.** $\frac{s + 1800}{60}$

22. W urnie znajduje się n kul białych i $2n$ kul czarnych. Losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Prawdopodobieństwo tego, że wylosowane kule są różnego koloru, wynosi $\frac{16}{33}$. Ile jest równe n?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

23. Ile jest pięciocyfrowych liczb o różnych, nieparzystych cyfrach?

A. 60 **B.** 5^5 **C.** $4 \cdot 5^4$ **D.** 120

24. Dany jest uporządkowany nierosnąco zestaw liczb naturalnych: 16, 15, a, 13, 12, 11. Mediana tego zestawu jest równa 14. Zatem

A. $a = 12$. **B.** $a = 13$. **C.** $a = 14$. **D.** $a = 15$.

25. Rzucamy trzema monetami dwuzłotowymi. Wygrywamy te monety, na których wypadł orzeł. Wskaż wartość oczekiwaną wygranej.

A. 2 zł **B.** 3 zł **C.** 4 zł **D.** 5 zł

W zadaniach 26–34 oceń prawdziwość podanych zdań.

26. Liczba wszystkich liczb czterocyfrowych utworzonych z cyfr 0, 1, 5

A. jest równa 81. **B.** jest równa 54. **C.** podzielnych przez 4 jest równa 6.

27. Prawdopodobieństwo tego, że w czterech rzutach monetą co najmniej raz wypadnie

A. orzeł, wynosi $\frac{1}{16}$. **B.** orzeł, wynosi $\frac{1}{4}$. **C.** reszka, wynosi $\frac{15}{16}$.

28. Zdarzenie polegające na tym, że w tysiącu rzutach monetą ani razu nie wypadnie orzeł, jest zdarzeniem

A. niemożliwym.

B. tak samo prawdopodobnym jak to, że orzeł pojawi się 1000 razy.

C. o prawdopodobieństwie zajścia równym $\frac{1}{2^{1000}}$.

29. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 można utworzyć

A. 6^5 liczb pięciocyfrowych.

B. 6^4 liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 5.

C. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ liczb czterocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach.

30. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech p oznacza prawdopodobieństwo wyrzucenia sumy oczek mniejszej od 5, a r – sumy oczek większej od 9. Zatem

A. $p < r$. **B.** $p \geqslant r$. **C.** $p = r$.

31. Rzucamy kostką i monetą. Jeżeli wypadnie reszka i parzysta liczba oczek, wygrywamy 120 zł. W przeciwnym razie przegrywamy 40 zł.

A. Wartość oczekiwana gry jest równa 5.

B. Wartość oczekiwana gry jest równa -2.

C. Gra jest sprawiedliwa.

32. Średnia arytmetyczna zestawu liczb naturalnych: $23,\ x+8,\ 6,\ 14,\ x+15,\ 2$ jest równa 12.

A. Ten zestaw nie ma dominanty.

B. $x = 2$

C. Mediana tego zestawu jest równa 12.

33. Średnia arytmetyczna zestawu liczb naturalnych: $5,\ 21,\ 2x,\ 19,\ 11,\ 7x,\ 31,\ 8x+5$ jest równa $5x$.

A. Ten zestaw nie ma dominanty.

B. Średnia tego zestawu jest równa 20.

C. Mediana tego zestawu jest mniejsza od średniej.

34. Spośród 16 uczniów piszących kartkówkę z języka hiszpańskiego dwie osoby dostały ocenę niedostateczną, dwie – dopuszczającą, trzy – dostateczną, pięć – dobrą, trzy – bardzo dobrą i jedna – ocenę celującą.

A. Wynik ucznia, który dostał piątkę, znajduje się na 94. centylu.

B. W klasie jest uczeń, którego wynik znajduje się na 50. centylu.

C. Najliczniejsza jest grupa uczniów, których wynik znajduje się na 44. centylu.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

35. Na ile sposobów można wybrać dziewczynkę i chłopca z klasy, w której jest 17 dziewczynek i 15 chłopców?

36. Ile liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach jest mniejszych od 50 000?

37. Grupa 5 znajomych wybiera się na wakacje dwoma samochodami. Każdy z nich może wybrać, którym samochodem chce jechać, ale w każdym samochodzie musi jechać co najmniej 1 osoba. Na ile sposobów mogą się podzielić?

38. Na ile sposobów możemy posadzić pięcioro dzieci na sześciu różnokolorowych krzesełkach?

39. Rzucamy kostką ośmiościenną, na której ściankach znajdują się liczby od 1 do 8. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba wyrzuconych oczek jest liczbą pierwszą.

40. Rzucamy dwiema kostkami czworościennymi, na których ściankach znajdują się liczby 1, 3, 5, 7. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 3.

41. Z talii 52 kart losujemy 2 karty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch asów.

42. Rzucamy czterema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej trzech orłów.

43. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dwie losowo wybrane osoby urodziły się tego samego dnia tygodnia.

44. Do zestawu danych 5, 6, 6, 8, 12 dopisz taką liczbę x, aby

a) mediana zestawu była równa 7.

b) średnia zestawu była równa 6.

45. Dane są wyniki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i ich wagi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Oblicz średnią ważoną wyników.

x_i	4,1	5,3	5,8	6	6,4	7
a_i	1	3	5	4	2	1

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

46. Dwie rodziny – czworo dorosłych i pięcioro dzieci – zajmują 9 kolejnych miejsc w jednym rzędzie w kinie. Na ile sposobów mogą to zrobić tak, aby

a) rodzice siedzieli obok siebie oraz dzieci siedziały obok siebie (w dowolnym porządku)?

b) dzieci siedziały obok siebie (w dowolnym porządku)?

c) żadnych dwoje dzieci nie siedziało obok siebie?

47. Ile jest różnych kodów składających się z dwóch liter i dwóch cyfr? Litery i cyfry mogą występować w dowolnej kolejności. Zakładamy, że alfabet składa się z 24 liter.

48. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Wypisz zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego, a następnie oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:
A – wypadną dwie szóstki,
B – na dokładnie jednej kostce wypadnie piątka,
C – suma oczek na obu kostkach jest mniejsza od 2,
D – iloczyn oczek na obu kostkach wynosi 12,
E – na żadnej kostce nie wypadnie jedynka,
F – na każdej kostce wypadnie parzysta liczba oczek.

49. Z pudełka, w którym jest 6 kul białych i 2 kule czarne, losujemy kolejno bez zwracania trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kul o tym samym kolorze.

50. Z pudełka, w którym są 2 kule białe i 3 kule czarne, losujemy cztery razy po jednej kuli ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania najpierw kuli czarnej, a potem trzech kul białych.

51. Z pudełka, w którym są 2 kule białe, 3 czarne i 5 kul zielonych, losujemy trzy razy po jednej kuli ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul w tym samym kolorze i trzeciej w innym kolorze.

52. Na biurku Weroniki stoją cztery maskotki – słoń, kot, pies i laleczka Pyza. Weronika losuje dwie spośród nich. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) obydwie maskotki będą zwierzakami.
b) jedną z maskotek będzie Pyza.

53. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana liczba dwucyfrowa jest podzielna przez 2 lub przez 5.

54. Trzy osoby kolejno rzucają kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwie z nich otrzymają taki sam wynik.

55. Z pudełka, w którym jest 7 losów wygrywających i 3 losy puste, wyciągamy trzy losy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający.

56. Do gry planszowej dzieci używają sześciennej kostki, na której ściankach napisane są cyfry: 0, 2, 2, 3, 3 i 5. Jeżeli wypadnie liczba oczek różna od zera, pionek porusza się na planszy do przodu o wskazaną przez kostkę liczbę kroków, czyli 2, 3 lub 5. Jeżeli na kostce wypadnie 0, pionek musi się cofnąć o 10 kroków. Oblicz wartość oczekiwaną liczby kroków w jednym rzucie kostką.

D **57.** Rzucamy dwiema kostkami sześciennymi. Jeżeli wypadną dwie szóstki, wygrywamy 50 zł. Jeżeli wypadnie jedna szóstka lub na obu kostkach wypadną takie same (ale różne od 6) liczby oczek, to wygrywamy 10 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 10 zł. Wykaż, że gra jest sprawiedliwa.

58. Na jednym z wydziałów pewnej uczelni obowiązuje następujący system obliczania punktów rekrutacyjnych:

- wynik matury z matematyki na poziomie rozszerzonym (w %) z wagą 0,4,
- wynik matury z geografii na poziomie rozszerzonym (w %) z wagą 0,3,
- wynik matury z języka angielskiego na poziomie rozszerzonym (w %) z wagą 0,2,
- wynik matury z języka polskiego na poziomie podstawowym (w %) z wagą 0,1.

a) Ile punktów rekrutacyjnych uzyskał Szymon, który otrzymał na maturze 92% z matematyki, 73% z geografii, 91% z języka angielskiego i 70% z języka polskiego?

b) Adam uzyskał 69,6 punktów rekrutacyjnych. Na maturze otrzymał 62% z geografii, 83% z języka angielskiego i 56% z języka polskiego. Jaki wynik miał na maturze z matematyki?

59. Podaj taki układ wag w_1 i w_2, aby średnia liczby 32 z wagą w_1 i liczby 27 z wagą w_2 była równa 30 i aby suma wag wynosiła 10.

60. W tabeli przedstawiono średni wynik matury z matematyki na poziomie podstawowym w kraju w latach 2010–2013.

Rok	2010	2011	2012	2013
Wynik (w %)	58	48	56	54

Oblicz średnią i odchylenie standardowe tych danych.

61. Zbadano masę 20 losowo wybranych paczek herbaty. Wyniki przedstawiono w tabeli.

Liczba pudełek	2	4	10	3	1
Masa (w gramach)	98	99	100	101	105

Oblicz średnią i odchylenie standardowe tych danych.

Odpowiedzi

1. Trygonometria

s. 10

1.1. a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ b) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $\cos\alpha = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$ c) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$ d) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$ **1.2.** a) $\alpha = 37°$ b) $\alpha = 79°$ c) $\alpha = 20°$ d) $\alpha = 77°$ **1.3.** a) 24,22 b) 291,7 **1.4.** 47,7 **1.5.** 144 **1.6.** $21\sqrt{3}$ **1.7.** 59,34 **1.8.** a) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{12}$ **1.9.** a) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$ b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$ c) $\sin\alpha = \frac{60}{61}$, $\cos\alpha = -\frac{11}{61}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{60}{11}$ d) $\sin\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{20}$ e) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -4$ f) $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = -1$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$ **1.10.** a) 0 b) 1 **1.11.** 1 **1.12.** a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ b) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$ d) $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $\cos\alpha = -\frac{40}{41}$ **1.13.** a) 0 b) 2 c) −1 **1.14.** $\sin\sphericalangle A = \cos\sphericalangle C = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\sphericalangle A = \sin\sphericalangle C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle A = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle C = 2$ **1.15.** $13\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$ **1.16.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ lub $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ **1.17.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$

s. 18

2.1. $4\left(\sqrt{3}-1\right)$ **2.2.** a) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ b) $12\sqrt{6}$ c) 0,612 d) 12,37 **2.3.** 30° **2.4.** a) $\gamma = 43°$, $b = 11{,}45$ cm, $c = 7{,}93$ cm b) $\gamma = 57°$, $a = 17{,}57$ cm, $c = 15{,}06$ cm c) $\alpha = 33°$, $a = 13{,}56$ cm, $b = 21{,}56$ cm **2.5.** 190 m **2.6.** $4\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ cm i $8\sqrt{6}$ cm **2.7.** $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45°$, $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 135°$, $|AD| = |BC| = 4{,}24$ cm, $|AB| = 10{,}41$ cm, $|CD| = 4{,}42$ cm **2.8.** $|AW| = 1{,}22$ km, $|BW| = 1{,}32$ km **2.9.** a) ok. 20,7 cm b) ok. 5,4 cm **2.10.** $|BC| = 7{,}08$, $|AC| = 8{,}68$ lub $|BC| = 17{,}92$, $|AC| = 21{,}98$ **2.11.** 11,54 cm, 9,13 cm, 50°, 56° **2.12.** 7 **2.13.** $18\sqrt{2}$ cm, $18\sqrt{3}$ cm, $9\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ cm **2.14.** $obw = 2\left(3+2\sqrt{3}\right)$ **2.16.** 25°, 39°, 116°, 9,0 cm lub 25°, 141°, 14°, 2,4 cm **2.17.** *Wskazówka*: Zapisz kąty trójkąta ABM w zależności od kątów trójkąta ABC i skorzystaj z twierdzenia sinusów dla obu trójkątów. Analogicznie postępuj z trójkątami BMC i ACM. **2.18.** *Wskazówka*: Skorzystaj z twierdzenia sinusów i znajdź zależność między wartościami funkcji tangens dla wymienionych kątów. **2.19.** a) ok.18,5 tys. km b) nie **2.20.** $2\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ lub $2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ **2.21.** $\frac{d\cdot\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\beta\right)}$, $\frac{d\cdot\sin\beta}{\sin\left(\alpha+\beta\right)}$

s. 20

1. B **2.** C **3.** B **4.** P, F, P **5.** 3,7 **6.** 33°

7. *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ oraz z twierdzenia sinusów.

s. 24

3.1. a) $\frac{33}{35}, \frac{9}{25}, -\frac{1}{35}$ b) $\frac{17}{35}, \frac{5}{21}, \frac{11}{15}$ c) $\frac{47}{52}, \frac{17}{28}, -\frac{19}{91}$ d) $\frac{9\sqrt{2}-4}{16}, \frac{5-3\sqrt{2}}{4}, \frac{10-3\sqrt{2}}{8}$ **3.2.** 8,36
3.3. $|BC| = 6\sqrt{7}$, $\sphericalangle B = 19°$, $\sphericalangle C = 41°$ **3.4.** 5, 37°, 98° **3.5.** a) 53°, 44°, 83° b) 30°, 56°, 94°
c) 109°, 26°, 45° d) 46°, 59°, 75° **3.6.** a) rozwartokątny b) prostokątny c) ostrokątny
d) ostrokątny **3.7.** 120° **3.8.** $|AB| = 8$, $|BC| = 5$, $|AC| = 6$ **3.9.** $obw = 7\left(3 + \sqrt{3}\right)$ cm,
$R = 7$ cm **3.10.** $|AB| = 10$, $|AC| = 15$

3.11.

	a	b	c	α	β	γ
a)	$\sqrt{6}$	2	$\sqrt{3}+1$	60°	45°	75°
b)	$3-\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	$3+\sqrt{3}$	15°	60°	105°
c)	$\sqrt{2}$	$3+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	15°	120°	45°
d)	$\sqrt{8}$	4	$2\sqrt{3}+2$	30°	45°	105°
e)	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+\sqrt{6}$	45°	60°	75°
f)	$2\sqrt{3}-2$	2	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	45°	105°	30°

3.12. bok: $4\sqrt{7}$ cm, przekątna: $4\sqrt{13}$ cm, kąty: ok. 79° i ok. 101° **3.13.** 45°, 60°, 75° **3.14.** 6,2 cm
3.15. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ **3.16.** $7\sqrt{7}$ **3.17.** *Wskazówka*: Wyznacz długość środkowej w zależności od długości przyprostokątnej trójkąta i skorzystaj z twierdzenia o środkowych. **3.18.** *Wskazówka*: Zastosuj twierdzenie cosinusów i przekształć sumę kwadratów długości przekątnych równoległoboku.
3.19. *Wskazówka*: Skorzystaj najpierw z twierdzenia sinusów, a potem z twierdzenia cosinusów.

s. 26

1. B **2.** C **3.** C **4.** P, F, P **5.** $\sphericalangle A = 23°$, $\sphericalangle B = 49°$, $\sphericalangle C = 108°$ **6.** $-\frac{1}{15}$ **7.** $\frac{\sqrt{5}}{3}a$

s. 32

4.1. $5\frac{5}{7}, 4\frac{2}{7}$ **4.2.** AB: $2\frac{18}{19}$ i $5\frac{1}{19}$, BC: 2,8 i 4,2, AC: 6,4 i 5,6 **4.3.** 4 cm **4.4.** $|AB| = 18$,
$|AC| = 15$ **4.5.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}a$ **4.6.** a) $3\sqrt{15}$ b) $8\sqrt{30}$ c) $\frac{45}{4}\sqrt{7}$ d) $\frac{3}{4}\sqrt{255}$ **4.7.** $3\frac{1}{4}$
4.8. $R = \frac{8}{7}\sqrt{7}$ cm, $r = \frac{1}{2}\sqrt{7}$ cm **4.9.** 2,50 **4.10.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$ **4.11.** $3\pi\left(7-4\sqrt{3}\right)$ **4.12.** $\frac{5}{3}\sqrt{3}$
4.13. $x = \sqrt{17}$ cm, $r = \frac{9-\sqrt{17}}{4}$ cm lub $x = \sqrt{65}$ cm, $r = \left(9-\sqrt{65}\right)$ cm **4.14.** $\frac{9\left(3+\sqrt{5}\right)}{8}$
4.15. 4,71 **4.16.** $P = \frac{\sqrt{23}}{2}$ cm^2, $\frac{6\left(7\sqrt{3}+3\right)}{23}$ **4.17.** $2\pi\left(2+\sqrt{3}\right)$ cm^2 **4.18.** a) $r = \frac{2\sqrt{15}}{5}$ cm,
$R = \frac{16\sqrt{15}}{15}$ cm b) $\frac{2}{5}$ **4.19.** a) $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$ b) $a\left(1+\sqrt{2}\right)$ c) $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$
4.20. *Wskazówka*: Wyznacz miary kątów trójkąta APB. **4.21.** *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ i zauważ, że długości boków trójkąta są mniejsze lub równe $\sqrt{2}$.
4.23. promienie: $4\left(3-\sqrt{5}\right)$ cm, $2\left(3-\sqrt{5}\right)$ cm, odległość między środkami: $2\sqrt{10}\left(3-\sqrt{5}\right)$ cm

4.24. *Wskazówka*: Rozważ trójkąt AEM i przekątną EB jako dwusieczną kąta w tym trójkącie.

4.25. $R = \dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-4P^2}}}{4P}$ lub $R = \dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2+2\sqrt{a^2b^2-4P^2}}}{4P}$

s. 35

1. B **2.** A **3.** C **4.** P, F, P **5.** $6\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)$ **6.** 1, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **7.** $5\sqrt{123-18\sqrt{41}}$

s. 36

1. B **2.** D **3.** B **4.** A **5.** D **6.** C **7.** B **8.** B **9.** B **10.** B **11.** P, P, P

12. F, F, P **13.** P, P, P **14.** F, P, P **15.** P, P, P **16.** 15,5 **17.** 76,0 **18.** 60° lub 120°

19. $2\sqrt{10}$ **20.** $|AC| = \sqrt{97}$, $|BD| = \sqrt{273}$ **21.** *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$; wyznacz długości boków trójkąta i zauważ, że nie spełniają nierówności trójkąta.

22. a) $\sphericalangle CAD = 41°$, $\sphericalangle DAB = 19°$ b) 1 **23.** $\sphericalangle A = 45°$, $\sphericalangle B = 105°$, $\sphericalangle C = 30°$, $P = 32\pi$

24. $\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$ **25.** *Wskazówka*: $\sphericalangle AKB = \sphericalangle CKA = 60°$ **26.** *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru Herona.

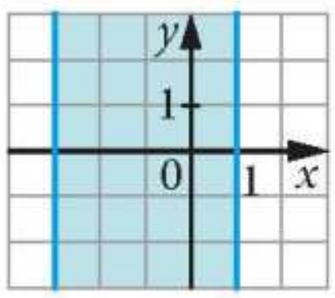
27. a) 120° b) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ c) $\sqrt{6}$ **28.** $\dfrac{6\sqrt{7}}{5}$, $\dfrac{9\sqrt{7}}{5}$ **29.** 30°, 60°, 90°

2. Geometria analityczna

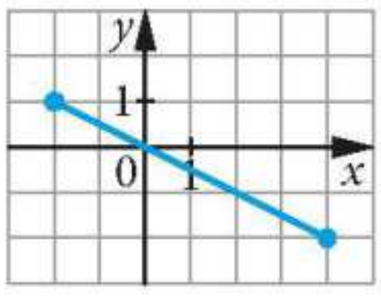
s. 43

1.1. C **1.2.** D **1.3.** C **1.4.** P, P, F

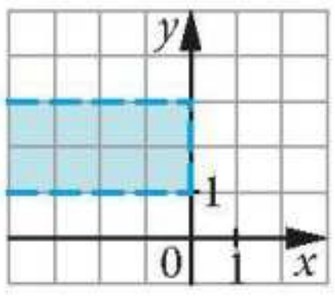
1.5. a)



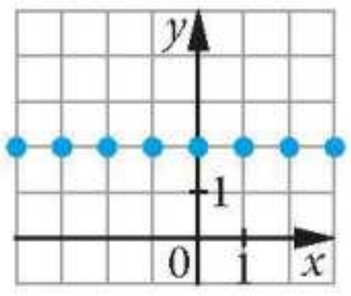
b)



c)



d)



e)

f)

g)

h)

1.6. a) $y = 2x$ b) $y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$ c) $y = 4$ d) brak równania w postaci kierunkowej

e) $y = -3x + \frac{1}{2}$ f) $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ **1.7.** a) $a = -5$ b) $a = 1$ c) $a = \frac{3}{4}$ d) $a = \frac{\pi}{2}$

1.8. a) $3x - y + 1 = 0$ b) $x - 5y - 15 = 0$ c) $2x + 9y - 6 = 0$ d) $5x + y = 0$ e) $3x - 4y - 20 = 0$

f) $2x + 14y - 7 = 0$ **1.9.** a) tak b) tak c) nie d) nie e) nie f) tak **1.10.** a) $y = -4x + 11$

b) $y = \frac{1}{3}x + 2$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 7$ d) $y = x + 1\frac{1}{3}$ **1.11.** a) (0, 2), (4, 0) b) (0, 6), (−2, 0)

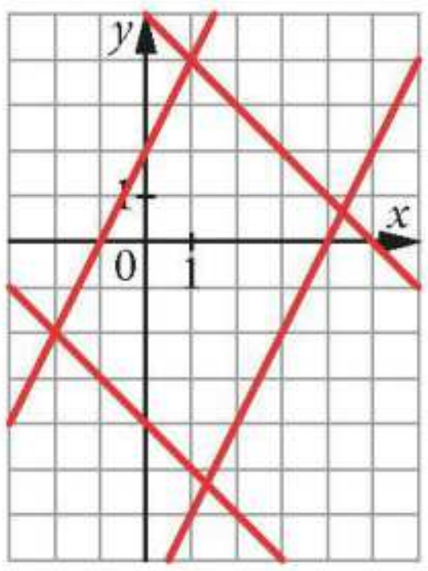
c) $\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ d) $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ **1.12.** a) np. $(-3, 3), (0, 2), \left(1, 1\frac{2}{3}\right), (3, 1), (6, 0)$

b) np. $\left(-2, \frac{6}{7}\right), \left(-\frac{2}{7}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{7}\right), \left(2, -1\frac{1}{7}\right), \left(-4, 1\frac{6}{7}\right)$ **1.13.** a) $(0, 2)$ b) $(3, -1)$ c) $(1, -4)$

d) brak punktów wspólnych e) $(0, -2)$ f) proste pokrywają się

1.14. Szukany zbiór punktów to: a) suma dwóch prostych: $x = 7$ i $y = 0$, b) suma dwóch prostych: $x = -3$ i $y = x$, c) prosta $x = 6$, d) suma dwóch prostych: $x = 1$ i $x = 3$, e) $\{(-5, 2)\}$, f) prosta $x = -3$, g) $\{(-7, 1)\}$, h) prosta $y = -5$.

1.15. nie ma osi symetrii, ma środek symetrii



1.16. $m \in \langle -4; 6\rangle$ **1.17.** $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}; \infty\right)$

1.18. a) $m \in \langle -2; 1\rangle$ b) $m \in (-\infty; -2\rangle$ c) $m \in \langle 1; \infty)$ d) Nie ma takiego m.

1.19. a) $m \in (-3; -1)$ b) $m \in (-\infty; -5)$

1.20. a) $y = 5x - 7$ b) $y = \frac{2}{3}x + 1$ c) $y = -4x + 5$ d) $x = 3$ e) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ f) $y = 2\sqrt{2}x$

1.21. a) $y = \frac{1}{3}x + 3$ b) $y = -\frac{1}{7}x - 4$ c) $y = -\sqrt{3}x + 10$ d) $y = 5x - 2$ e) $y = 2\frac{1}{2}$ f) $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x + 1$

s. 55

2.1. a) 5 b) $\sqrt{29}$ c) $3\sqrt{10}$ d) 6 **2.2.** a) 8 b) 7 c) $3\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}$ **2.3.** a) 5 b) 10 c) 15 d) 41 **2.4.** a) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$ b) $5 + \sqrt{13} + \sqrt{26}$ c) $2\sqrt{5} + \sqrt{17} + \sqrt{29}$ d) $4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$

2.5. a) 18 b) $32 + \sqrt{10}$ c) $10\sqrt{2}$ d) $14 + \sqrt{10}$ **2.6.** a) $P = 10$ b) $P = 17$ c) $P = 17$ d) $P = 25$ **2.7.** a) $10\left(2 + \sqrt{2}\right)$ b) $4\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 3\right)$ c) $10 + \sqrt{2}$ d) $15 + \sqrt{29}$

2.8. a) $P = 10\frac{1}{2}$ b) $P = 8$ c) $P = 12$ **2.9.** a) $(5, 4)$ b) $(-2, 1)$ c) $\left(-2\frac{1}{2}, 1\right)$ d) $\left(-3\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}\right)$

2.10. a) $B = (-1, 10)$ b) $B = (1, -3)$ c) $B = (-10, 0)$ d) $B = (5, 8)$ **2.11.** $A = (-1, 2)$, $B = (8, -4)$ **2.12.** $S_{AB} = (-1, 3)$, $S_{AC} = \left(2\frac{1}{2}, -1\right)$, $S_{BC} = \left(-1\frac{1}{2}, 1\right)$ **2.13.** $5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{13}$

2.14. a) $D = (-3, 3)$ b) $A = (-5, 6)$ **2.15.** a) $S = (2, -1)$ b) $S = (3, -1)$ **2.16.** $A = (-5, -1)$

2.17. a) środkowa z A: $\sqrt{82}$, środkowa z B: $\sqrt{58}$, środkowa z C: 10 b) środkowa z A: $\frac{\sqrt{85}}{2}$, środkowa z B: 2, środkowa z C: $\frac{\sqrt{85}}{2}$ c) środkowa z A: $\frac{\sqrt{53}}{2}$, środkowa z B: $\frac{\sqrt{41}}{2}$, środkowa z C: $\sqrt{2}$ d) środkowa z A: $\frac{\sqrt{61}}{2}$, środkowa z B: $\sqrt{13}$, środkowa z C: $\frac{1}{2}$ **2.20.** środkowa z A: $y = 3$, środkowa z B: $y = -x + 5$, środkowa z C: $x = 2$

s. 57

1. C **2.** A **3.** C **4.** F, P, P **5.** $4\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$ **6.** $obw = 10\sqrt{2} + 14$, $|BD| = 13$, $|AC| = \sqrt{29}$ **7.** $P = 15$

s. 67

3.1. a) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ b) $y = -x$ c) $y = \sqrt{3}x$ d) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ **3.2.** a) 31° b) 111° c) 84° d) 94° e) 3° f) 174° **3.3.** a) $y = x + 14$ b) $y = \sqrt{3}x + 1 - 5\sqrt{3}$ c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 5\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $y = -\sqrt{3}x + 5$ e) $y = -2$ f) $y = -x - 7$ **3.4.** a) $9x - 2y - 6 = 0$ b) $2x + 3y - 5 = 0$ c) $7x + y - 35 = 0$ d) $6x - 5y - 3 = 0$ e) $x + 11y - 10\sqrt{2} = 0$ f) $5x + \sqrt{3}y - 7 = 0$ **3.5.** a) $l \parallel k$, $p \nparallel k$ b) $l \nparallel k$, $p \parallel k$ c) $l \parallel k$, $p \parallel k$ d) $l \nparallel k$, $p \nparallel k$ **3.6.** $|AB| = |CD| = 6$, $|AD| = |BC| = \sqrt{13}$, $|AC| = \sqrt{73}$, $|BD| = 5$ **3.7.** a) l: $3x - 8y - 10 = 0$ b) l: $11x - 5y - 14 = 0$ c) l: $3x + \sqrt{2}y - 2 = 0$ d) l: $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0$ e) l: $x + 3y + 3 = 0$ f) l: $7x - 4y + 4 - 7\sqrt{3} = 0$ **3.8.** punkt A: 2, punkt B: $1\frac{1}{5}$, punkt C: 0 **3.9.** punkt A: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, punkt B: $\frac{7\sqrt{5}}{5}$, punkt C: 0 **3.10.** $2\sqrt{2}$ **3.11.** 3 **3.12.** a) $P = 25$ b) $P = 10\frac{1}{8}$ c) $P = 16{,}5$ **3.13.** $(6, -1)$, $(0, 7)$, $(2, 1)$, $P = 10$ **3.14.** a) $obw = \sqrt{13}\left(4 + \sqrt{2}\right)$, $P = 19{,}5$ b) $obw = 16\sqrt{2}$, $P = 24$ c) $obw = 4\sqrt{13}$, $P = 13$ d) $obw = 10\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$, $P = 30$ **3.15.** $C = (2, 3)$, $|AB| = \sqrt{130}$, $|BC| = 2\sqrt{10}$, $|AC| = 3\sqrt{10}$ **3.16.** a) 2 b) $\sqrt{5}$ c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ **3.17.** a) $y = -x + 2$ b) $y = 4x - 15$ c) $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$ d) $y = \frac{8}{5}x + \frac{51}{10}$ **3.18.** $y = 3x + 1$ **3.19.** $B = (-10, 22)$, $C = (8, 4)$ **3.20.** $C = (4, 9)$ **3.21.** $P = 67{,}5$ **3.22.** $C = \left(4\sqrt{3} - 4,\ 12 - 4\sqrt{3}\right)$. *Wskazówka*: Wyznacz najpierw równania boków AC i BC.

s. 70

1. C **2.** B **3.** C **4.** F, P, P **5.** $x - y - 3 = 0$ **6.** $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 2\sqrt{10}$, $|AC| = 8\sqrt{2}$, $|BD| = 4\sqrt{2}$ **7.** $|CD| = 2\sqrt{5}$

s. 76

4.1. a) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ b) $x^2 + y^2 = 121$ c) $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 1$ d) $x^2 + (y - 5)^2 = 18$ e) $(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 25$ f) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = 3$ **4.2.** a) okrąg o środku $S = (2, 3)$ i promieniu $r = 4$ b) zbiór $\{(-2, 5)\}$ c) okrąg o środku $S = (0, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$ d) zbiór pusty e) okrąg o środku $S = (-2, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{3}$ f) zbiór pusty **4.3.** a) $S = (-3, -11)$, $r = \sqrt{5}$ b) $S = (0, 0)$, $r = 14$ c) $S = (1, -3)$, $r = 2$ d) $S = (3, -5)$, $r = \sqrt{14}$ **4.4.** a) A – tak, B – nie b) A – nie, B – tak **4.5.** $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ **4.6.** a) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$ b) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 4$ **4.7.** np. $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$ (są cztery takie okręgi) **4.8.** $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ lub $x^2 + (y + 3)^2 = 9$ **4.9.** a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ b) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$ **4.10.** $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$ **4.11.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ **4.12.** $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ **4.13.** $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ lub $(x - 29)^2 + (y - 29)^2 = 841$ **4.14.** a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$ b) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$ c) $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ **4.15.** $(x + 2)^2 + y^2 = 25$ **4.16.** a) A i B – należą, C – nie należy. b) A – należy, B i C – nie należą.

s. 78

1. A **2.** A **3.** B **4.** P, P, P **5.** $(x+1)^2+(y-5)^2=25$ **6.** $(x+2)^2+y^2=4$
7. $(x-2)^2+(y-2)^2=5$

s. 84

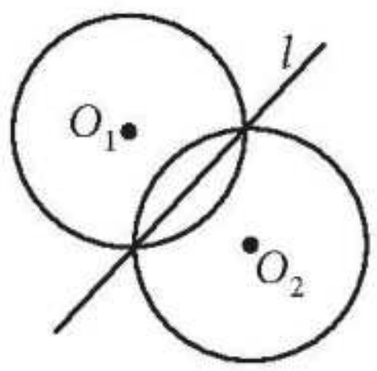
5.1. P, P, F **5.2.** a) Prosta przecina okrąg w punktach $(-1, -2)$ i $(3, 2)$. b) Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem. c) Prosta przecina okrąg w punktach $(-6, 4)$ i $(1, -3)$. d) Prosta jest styczna do okręgu w punkcie $(2, 1)$. **5.3.** a) $(-2, -1), (2, 3)$ b) $(1, 7), (4, 4)$ c) $(5, -4), (5, 4)$ d) brak punktów wspólnych **5.4.** $2\sqrt{5}$ **5.5.** $(2, 4), (4, 0)$ **5.6.** $P=16$, $obw=8\left(1+\sqrt{2}\right)$
5.7. $C=\left(1-\sqrt{5}, 2-\sqrt{5}\right)$ lub $C=\left(1+\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\right)$ **5.8.** a) odcinek b) punkt c) odcinek d) zbiór pusty **5.9.** $obw=16+4\sqrt{5}$, $P=32$ **5.10.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4\frac{1}{2}$
5.11. $x+5y-15=0$ **5.12.** $(x+3)^2+(y-1)^2=7{,}2$ **5.13.** $y=-x+6$, $y=-x-6$
5.14. a) $y=-x+3$, $y=-x-9$ b) $y=-x+2-2\sqrt{5}$, $y=-x+2+2\sqrt{5}$
5.15. $(x-6)^2+(y-3)^2=20$, l: $y=-2x+5$ **5.17.** $\sqrt{10}$ **5.18.** $(x-7)^2+(y-5)^2=49$, punkty: $\left(7-2\sqrt{6}, 0\right)$, $\left(7+2\sqrt{6}, 0\right)$ lub $(x+7)^2+(y-5)^2=49$, punkty: $\left(-7-2\sqrt{6}, 0\right)$, $\left(-7+2\sqrt{6}, 0\right)$ **5.19.** a) $(x-3)^2+(y-1)^2=5$ b) $C=(1, 2)$ c) $P=3$

s. 86

1. B **2.** D **3.** B **4.** F, P, F **5.** $(x-2)^2+(y+3)^2=34$ **6.** $4\sqrt{2}$ **7.** $x=7$, $x=9$

s. 91

6.1. równoległobok **6.2.** Tak, każdy punkt prostej jest jej środkiem symetrii. **6.3.** a) nie b) nie c) Tak, wtedy i tylko wtedy, gdy środkowa prosta jest jednakowo oddalona od dwóch pozostałych prostych. d) tak **6.4.** a), b) trzy **6.5.** trójkątem równoramiennym prostokątnym, w którym $\sphericalangle A=90°$
6.6.



6.7. a) dwie b) trzy **6.8.** $A'=(5, -4)$, $B'=(-7, 2)$, $C'=\left(\sqrt{3}, 5\right)$, $D'=\left(6, -\sqrt{5}\right)$ **6.9.** a) $(-1, 2)$ b) $(0, 3)$ c) $(4, 3)$ d) $(1, 4)$
6.10. $A'=(6, 2)$, $B'=(1, 4)$, $C'=(4, -2)$ **6.11.** a) $y=3x+4$ b) $y=\sqrt{2}x-11$ c) $y=-0{,}3x+\sqrt{7}$ d) $x+15=0$ e) $8x-3y-5=0$ f) $9x+\sqrt{11}y+3\sqrt{2}=0$
6.12. $(2, 2), (-1, -7), (-8, -2)$ **6.13.** $(x+4)^2+(y-6)^2=9$ **6.14.** a) $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ b) $x^2+\left(y-\sqrt{5}\right)^2=1$ c) $(x-4)^2+(y-2)^2=2$ d) $(x+7)^2+(y-8)^2=45$
6.15. a) $(x+8)^2+(y-4)^2=2$ b) $(x+5)^2+(y+5)^2=7$ c) $(x-11)^2+(y-0{,}1)^2=9$ d) $\left(x+\sqrt{3}\right)^2+(y-2)^2=\sqrt{2}$ **6.16.** a) K: $(x-4)^2+(y-17)^2=5$ b) K: $\left(x+\sqrt{7}\right)^2+(y+7)^2=3$ c) K: $(x-1)^2+(y+11)^2=2$ d) K: $(x+3)^2+(y-0{,}2)^2=13$ **6.17.** $(-2, 1)$
6.18. $(x+1)^2+(y+2)^2=16$

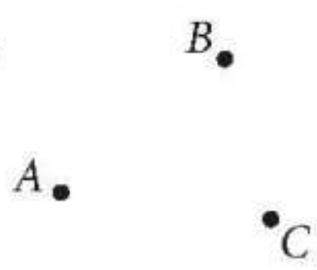
s. 94

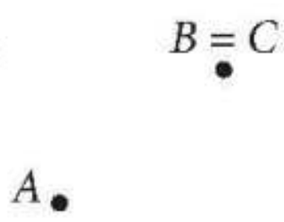
1. B **2.** A **3.** B **4.** F, F, F **5.** $2x - 4y - 5 = 0$ **6.** $(0, -1)$ **7.** $A_1 = (5, -2)$, $B = (-2, -3)$, $P = 38$

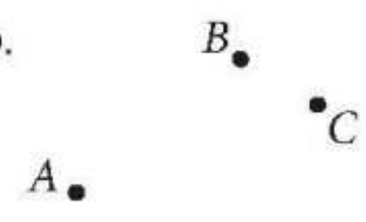
s. 100

7.1. a) jedną lub dwie b) jedną, dwie lub nieskończenie wiele c) dwie lub nieskończenie wiele

7.2. a) prosta zawierająca wspólny bok, prosta przechodząca przez wierzchołki trójkątów nienależące do wspólnego boku b) prosta prostopadła do danej prostej, przechodząca przez dany punkt c) prosta przechodząca przez środki obu okręgów

7.3. a) np. 

b) np. 

c) np. 

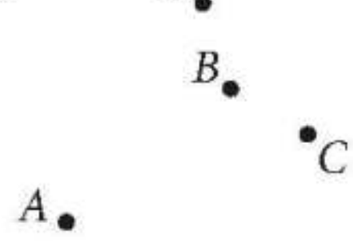
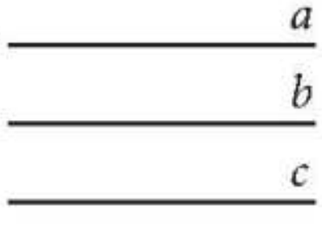
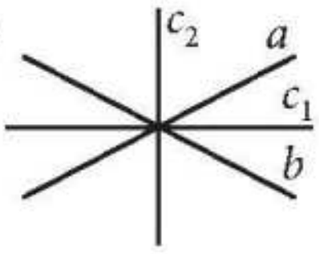
7.4. np. 

Figura $\{A, B, C, D\}$ ma dwie osie symetrii, gdy punkty A, B, C i D są wierzchołkami rombu lub prostokąta.

7.5. a) nieskończenie wiele np. 

b) dwie 

7.7. na przecięciu symetralnej odcinka łączącego kran z ogniskiem oraz dwusiecznej kąta między lasem a jeziorem **7.8.** a) szesnaście b) jedenaście **7.9.** *Wskazówka*: Kąt padania jest równy kątowi odbicia. **7.10.** a) $(x-9)^2 + (y-11)^2 = 1$ b) $\left(x - 1 + \sqrt{2}\right)^2 + y^2 = 8$ c) $x^2 + \left(y + 2 + \sqrt{5}\right)^2 = 7$ d) $x^2 + \left(y - 1 + 3\sqrt{6}\right)^2 = 9$ **7.11.** a) $(x-3)^2 + (y-13)^2 = 12$ b) $x^2 + \left(y - 7 + \sqrt{11}\right)^2 = 6$ c) $\left(x - 5 + \sqrt{3}\right)^2 + y^2 = 18$ d) $(x-0{,}4)^2 + \left(y - 1 - 2\sqrt{7}\right)^2 = 16$ **7.12.** a) K: $(x+3)^2 + (y-17)^2 = 10$ b) K: $(x+13)^2 + (y+10)^2 = 15$ c) K: $(x+14)^2 + (y+16)^2 = 17$ **7.13.** P, F, F **7.14.** $P = 42$ **7.15.** b) $y = -x + 5$

s. 103

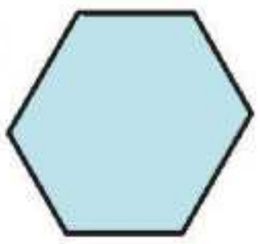
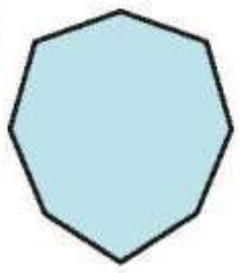
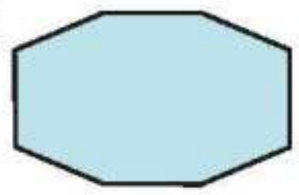
1. D **2.** B **3.** C **4.** F, F, P **5.** $A_1 = (-4, -3)$, $B_1 = (1, 2)$, $P = 20$ **6.** $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 6)$, $(-2, 2)$, $P = 12$ **7.** $P = 6\sqrt{7}$

s. 111

8.1. F, F, P, P, P, P, P, F **8.2.** a) romb b) prostokąt c) kwadrat **8.4.** np. trójkąt równoramienny, pięciokąt foremny **8.5.** $4x - 6y - 17 = 0$, $3x + 2y + 10 = 0$ **8.6.** $y = -2x + 9$ **8.7.** $C = (8, 7)$, $obw = 2\left(5\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$ **8.8.** $x = 1$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5\sqrt{3}}{3}$

8.9. $(-3, -1), (-1, -5), (3, -3), (1, 1)$ **8.10.** a) $A' = (5, -2)$, $B' = (1, -2)$, $C' = (3, -8)$ b) nie c) tak – dwie osie symetrii: $y = -\frac{14}{9}x$, $y = \frac{9}{14}x$ **8.11.** $D = (4, -1)$, $P = 104$

8.12. $(4, 5)$, $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1, 2\frac{1}{2}\right)$, $P = 25$

8.13. nie, np.  **8.14.** a)  b) 

8.15. $2\sqrt{10} + 4\sqrt{13}$ **8.16.** $10\sqrt{2} + 6\sqrt{10}$ **8.17.** $B = (-6, -10)$, $C = (6, -4)$, $D = (2, 4)$

8.19. $C = (6, 0)$, $D = \left(8, 2\sqrt{3}\right)$, $E = \left(6, 4\sqrt{3}\right)$, $F = \left(2, 4\sqrt{3}\right)$ **8.20.** $\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ i $\left(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$

s. 113

1. C **2.** C **3.** C **4.** F, F, P **5.** tak **6.** $C = (2, -4)$, $D = (1, 4)$ **7.** $C = (3, 3)$

s. 114

1. C **2.** D **3.** B **4.** A **5.** C **6.** B **7.** D **8.** D **9.** D **10.** B **11.** B **12.** C

13. A **14.** C **15.** C **16.** C **17.** C **18.** B **19.** A **20.** B **21.** B **22.** F, F, P

23. F, P, F **24.** P, F, P **25.** P, P, P **26.** F, F, P **27.** P, F, P **28.** P, F, P **29.** P, P, P

30. F, P, P **31.** P, P, F **32.** F, F, F **33.** a) $2\sqrt{26}$ b) 4 c) 8,5 d) $3\sqrt{11}$

34. a) $5\sqrt{2}$ b) 4 c) $\sqrt{13}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **35.** a) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 26$ b) $(x - 4)^2 + y^2 = 61$

c) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y + 3)^2 = 11\frac{1}{9}$ d) $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 24$ **36.** a) Prosta jest styczna do okręgu.

b) Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem. c) Prosta przecina okrąg w dwóch punktach.

d) Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem. **37.** a) przecinające się b) styczne zewnętrznie

c) rozłączne zewnętrznie d) styczne wewnętrznie **38.** $m < 0$ **39.** prostokątem o polu 42

40. $m \in \langle -8; 5\rangle$ **41.** $|QR| = 4\sqrt{13}$ **42.** $y = \frac{1}{3}x + 1$ **43.** k': $y = 3x + 7$ **44.** $(6, 9)$, $(6, 0)$, $(0, 3)$, $obw = 6\left(2\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$ **45.** $C = (-2, 7)$ **46.** $D = (2, 2)$ **47.** a) $A = (-3, 2)$, $B = (6, 5)$, $C = (0, 8)$ b) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ c) $y = 5$ **48.** $B = (10, -7)$ **49.** $C = (4, 5)$, $P = 30$

50. $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 25$ **51.** $4\sqrt{2}$ **52.** $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 50$

53. $B = (2, 0)$, $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 18$ **54.** k: $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + 3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

55. $y = -3x + 11 - 3\sqrt{10}$, $y = -3x + 11 + 3\sqrt{10}$ **56.** $P = 12{,}5$ **57.** $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 45$

58. $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 18$ **59.** $y = -x + 2$, $y = -x + 14$ **60.** $C = \left(1 - \sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}\right)$ lub $C = \left(1 + \sqrt{2}, 3 - 3\sqrt{2}\right)$ **61.** $(1, 0), (2, 5), (7, 4), (6, -1)$, $P = 26$ **62.** $y = 3x + 1$

63. $C = (-10, 8)$, $D = (0, -8)$ **64.** a) $obw = 5 + 9\sqrt{5}$ b) $P = 35$ c) $|AC| = \sqrt{65}$, $|BD| = 10$

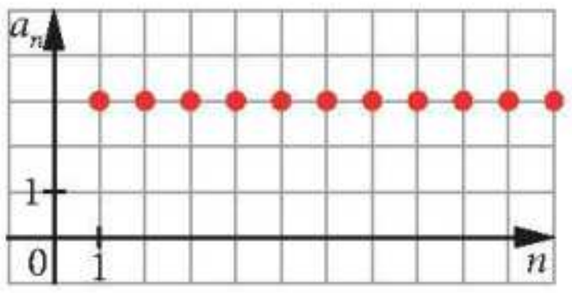
65. $P = 45$ **68.** $y = 2x - 6$, $y = -\frac{1}{2}x + 4$, $y = -3x + 14$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

3. Ciągi

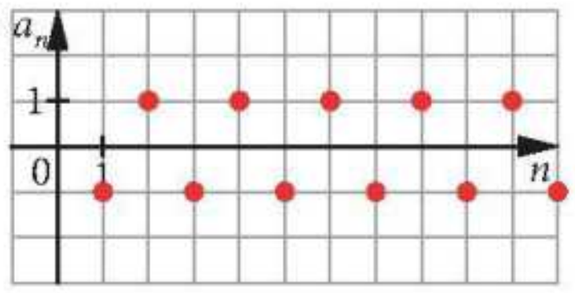
s. 131

1.1. P, F, F **1.2.** a) $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_3 = 7$ b) $b_1 = 3,\ b_2 = 9,\ b_3 = 27$ c) $c_1 = 1,\ c_2 = 27,\ c_3 = 125$ d) $d_1 = 1,\ d_2 = 4,\ d_3 = 27$ e) $e_1 = 1,\ e_2 = 2\frac{1}{3},\ e_3 = 3$ f) $f_1 = 5,\ f_2 = 2,\ f_3 = -3$ g) $g_1 = 2\sqrt{2},\ g_2 = \sqrt{10},\ g_3 = 2\sqrt{3}$ h) $h_1 = 2,\ h_2 = 3,\ h_3 = 4$ i) $i_1 = 2,\ i_2 = 2,\ i_3 = 2$ **1.3.** a) $a_9 = 162,\ a_{11} = 242,\ a_{k+1} = 2(k+1)^2,\ a_{3m} = 18m^2,\ a_{m+k} = 2(m+k)^2$ b) $a_9 = \frac{1}{9},\ a_{11} = \frac{1}{11},\ a_{k+1} = \frac{1}{k+1},\ a_{3m} = \frac{1}{3m},\ a_{m+k} = \frac{1}{m+k}$ c) $a_9 = -\frac{1}{9},\ a_{11} = -\frac{1}{11},\ a_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{k+1},\ a_{3m} = \frac{(-1)^{3m}}{3m},\ a_{m+k} = \frac{(-1)^{m+k}}{m+k}$ d) $a_9 = \frac{33}{14},\ a_{11} = \frac{41}{16},\ a_{k+1} = \frac{4k+1}{k+6},\ a_{3m} = \frac{12m-3}{3m+5},\ a_{m+k} = \frac{4m+4k-3}{m+k+5}$ **1.4.** a) $a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = 1,\ a_3 = -2,\ a_4 = 4,\ a_5 = -8$ b) $a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_3 = 14,\ a_4 = 30,\ a_5 = 55$ c) $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{11}{6},\ a_4 = \frac{25}{12},\ a_5 = \frac{137}{60}$ d) $a_1 = 1,\ a_2 = -3,\ a_3 = 6,\ a_4 = -10,\ a_5 = 15$ **1.5.** $c_{100} = 1, d_{100} = 1$ **1.6.** a) trzy b) trzynaście c) czternaście d) jeden e) pięć f) pięć g) dwanaście h) $k-1$ i) $k-1$ **1.7.** a) $a_n + a_{n+1}$ b) $\frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ c) $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2}$ d) $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ e) $\frac{a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{5}$ f) $a_{k-2} + a_{k-1} + a_k$ g) $a_{n-k+1} \cdot a_{n-k+2} \cdot a_{n-k+3}$ **1.8.** a) $a_{n+k},\ a_{n+k+1},\ a_{n+k+2}$ b) $a_{2n+1},\ a_{2n+2},\ a_{2n+3}$ c) $a_{3(n+7)+1},\ a_{3(n+7)+2},\ a_{3(n+7)+3}$ d) $a_{5(n-2)+1},\ a_{5(n-2)+2},\ a_{5(n-2)+3}$ **1.9.** a) $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 9,\ a_5 = 17$ b) $b_1 = 5,\ b_2 = \frac{1}{5},\ b_3 = 5,\ b_4 = \frac{1}{5},\ b_5 = 5$ c) $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ c_3 = 5,\ c_4 = 11,\ c_5 = 89$ d) $d_1 = 2,\ d_2 = 2,\ d_3 = 2,\ d_4 = 2,\ d_5 = 2$ **1.10.** a) $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 8,\ a_5 = 13,\ a_6 = 21$ b) $b_1 = 1,\ b_2 = 5,\ b_3 = 4,\ b_4 = -1,\ b_5 = -5,\ b_6 = -4$ c) $c_1 = 2,\ c_2 = 5,\ c_3 = 10,\ c_4 = 50,\ c_5 = 500,\ c_6 = 25\,000$ d) $d_1 = 3,\ d_2 = 5,\ d_3 = \frac{5}{3},\ d_4 = \frac{1}{3},\ d_5 = \frac{1}{5},\ d_6 = \frac{3}{5}$ **1.11.** a) np. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$ b) np. $\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = 2b_n - 1 \end{cases}$ c) np. $\begin{cases} c_1 = 13 \\ c_{n+1} = -c_n \end{cases}$ d) np. $\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_{n+1} = (n+1) \cdot d_n \end{cases}$

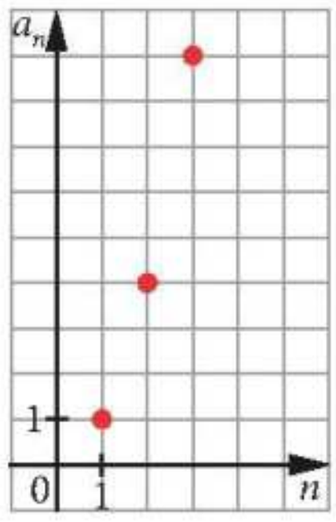
1.12. a)



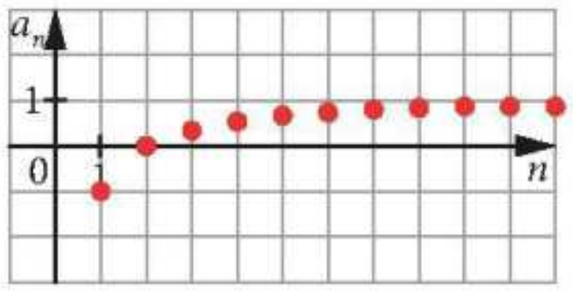
b)



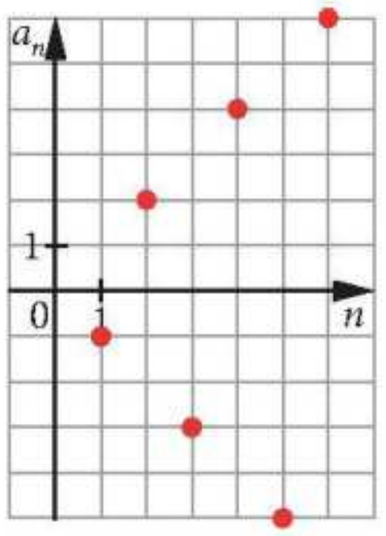
c)



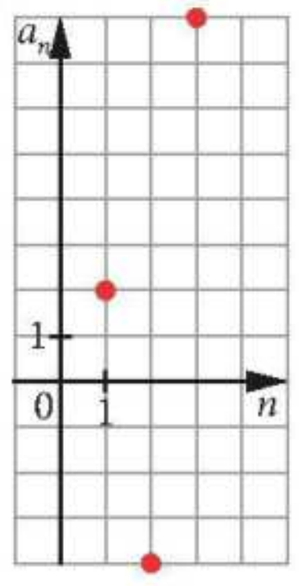
d)

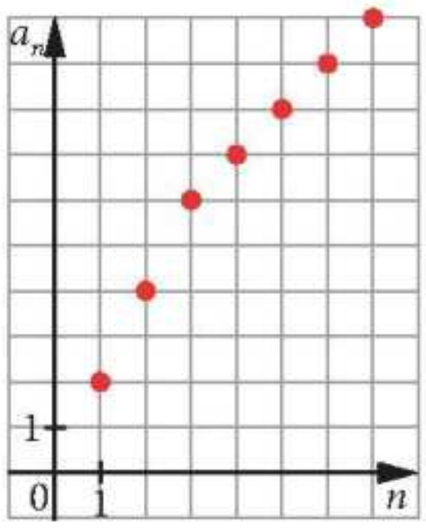


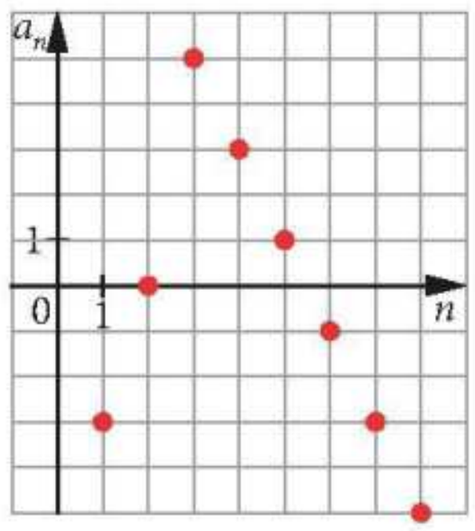
e)



f)



1.13. a) 

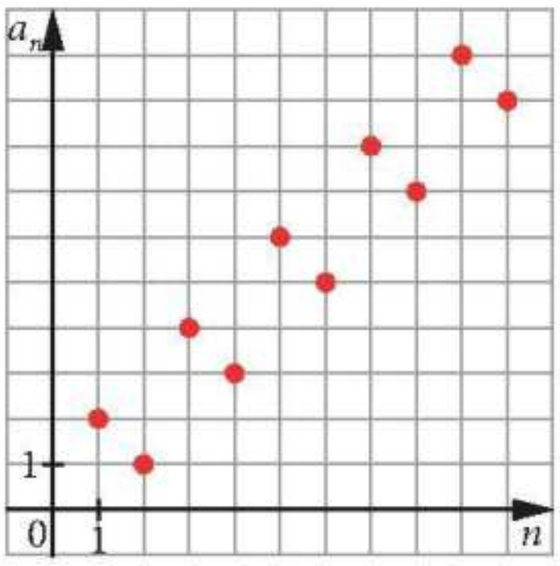
b) 

1.14. a) rosnący
b) rosnący
c) malejący
d) niemonotoniczny
e) niemonotoniczny
f) niemonotoniczny

1.15. d) *Wskazówka*: Rozważ np. wyrazy a_9, a_{10} i a_{11}. **1.16.** a) brak miejsc zerowych b) $n = 5$ lub $n = 6$ c) $n = 4$ d) $n = 2$ **1.17.** $n = 5$ lub $n = 6$. *Wskazówka*: Zbadaj najpierw monotoniczność ciągu. **1.18.** a) a_7 b) a_5 c) a_9 d) a_3 e) a_{13} f) a_3

1.19. Nie. *Wskazówka*: Liczba przekątnych n-kąta wypukłego ($n \geqslant 3$) jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$.

1.20. a) dwa b) nieskończenie wiele c) osiem d) trzysta trzydzieści dziewięć **1.21.** a) $a_1 = 1$ b) $a_1 = 10$ c) brak największego wyrazu d) $a_1 = \frac{1}{3}$ **1.22.** a) największy: $a_{10} = 102{,}4$, najmniejszy: $a_1 = a_2 = 2$ b) największy: $a_1 = 1$, najmniejszy: $a_{100} = \frac{1}{100}$ c) największy: $a_9 = 54$, najmniejszy: $a_1 = a_2 = -2$ d) największy: $a_5 = 1$, najmniejszy: $a_{20} = -224$

1.23. najmniejszy wyraz: 1,
brak największego wyrazu;
nie jest monotoniczny


1.25. (a_n) – rosnący, (b_n) – malejący
a) $c_n = 2$, stały b) $c_n = 4 - \frac{2}{n}$, rosnący
c) $c_n = \frac{1-n}{3n-1}$, malejący d) $c_n = -3 + \frac{4n-1}{n^2}$, malejący

1.26. a) rosnący b) rosnący c) rosnący d) rosnący

1.27. a) rosnący b) rosnący c) malejący

1.28. a) np. $a_n = n$, $b_n = \frac{n}{n+1}$ b) np. $a_n = n^2$, $b_n = -\frac{1}{n}$
c) np. $a_n = n - 2$, $b_n = n - 3$

s. 135

1. C **2.** C **3.** B **4.** P, F, P **5.** siedem **6.** $a_4 = \frac{27}{23}$ **7.** $c_n = 4$

s. 144

2.1. $(a_n), (c_n)$ **2.2.** $(a_n), (d_n)$ **2.3.** a) 9, 13, 17 b) −8, −13, −18 c) $1, -\frac{1}{2}, -2$ d) 7, 7, 7

2.4. a) 7, 11, 13 b) 1, 2, 3 c) 3,1; 3,6; 4,6 d) −3, −1, 1 **2.5.** a) $a_{25} = -42$ b) $a_{11} = 17\frac{1}{3}$
c) $a_8 = 7\sqrt{2} - 5$ d) $a_5 = 6\frac{1}{2}$ e) $a_{11} = 1{,}4$ f) $a_6 = 6\sqrt{5}$ **2.6.** a) jedenaście b) dziewiętnaście
c) czternaście d) osiem **2.7.** a) tak b) nie **2.8.** a) np. $\sqrt{2} + 1$, $\sqrt{2} + 2$, $\sqrt{2} + 3$, ...
b) np. 5, 11, 17, 23 **2.9.** 40 **2.10.** pierwszy wyraz: 11, różnica: −4

2.11. pierwszy wyraz: 2, różnica: 3 lub pierwszy wyraz: −16, różnica: 6 **2.12.** 30 **2.13.** 32 **2.14.** sześć **2.15.** $a_1 = -5, r = 3$ **2.16.** 930 minut (15,5 godziny) **2.17.** nie **2.18.** a) tak b) nie **2.19.** $x = 28$ **2.20.** $x = 0{,}4$ lub $x = 2$ **2.21.** a) 12, 16, 20 b) 9, 12, 15 **2.22.** a) 150 b) 1500 zł c) w siódmym **2.23.** a) $y = -3x + 4$ b) $y = 3x - 5$ **2.24.** tak **2.25.** a) tak b) tak c) może być (np. gdy jeden z ciągów jest stały), ale nie musi **2.26.** a) tak b) tak c) nie d) tak **2.27.** $r = k + m$. *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzorów na wyrazy a_k i a_m ciągu arytmetycznego. **2.28.** $r = -1$, $a_p = m + k - p$ **2.29.** 0 **2.30.** Jest pięć takich ciągów o różnicach odpowiednio: 1, 2, 3, 4, 6. *Wskazówka*: Różnica szukanego ciągu jest dzielnikiem liczby 17 − 5. **2.31.** a) tak, np. $a_n = 101 - n$ b) nie **2.32.** *Wskazówka*: Zastosuj wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego.

s. 148

1. B **2.** C **3.** B **4.** P, F, P **5.** 22 **6.** $x = 111$ **7.** sześć (zob. wskazówkę do zadania 2.30)

s. 153

3.1. P, F, P **3.2.** a) $S_8 = 80$ b) $S_{20} = 370$ c) $S_{17} = 782$ d) $S_{100} = 435$ e) $S_7 = 203$ f) $S_5 = 25\sqrt{2}$ g) $S_8 = 21$ h) $S_{12} = 9$ **3.3.** a) 3240 b) 5202 c) −180 d) $253\sqrt{3}$ **3.4.** 1460 **3.5.** a) 1375 b) 672 **3.6.** a) 494 550 b) 594 c) 1188 **3.7.** 55 **3.8.** 55 **3.9.** 1092 **3.10.** a) $n = 11$ b) $n = 13$ c) $n = 6$ d) $n = 8$ **3.11.** 819 **3.12.** $a_1 = -5, r = 2$ **3.13.** a) $x = -1$ b) $x = -1$ c) $x = 41$ d) $x = 3$ e) $x = 40$ **3.14.** a) tak, $n = 18$ b) nie **3.15.** dwanaście **3.16.** 36, 34, 32, 30, 28; suma: 224 **3.17.** osiemnaście **3.18.** −2, 1, 4 lub 4, 1, −2 **3.19.** $a_1 = 3$, $n = 6$ **3.20.** 26, 22, 18, 14, 10 **3.21.** po 16 dniach **3.22.** nie **3.23.** tak, po 11 dniach **3.24.** 140 patyczków, 18 domków **3.25.** po 21 dniach roboczych i 3 niedzielach, czyli po 24 dniach **3.26.** a) $a_n = -38$, $S_n = -155$ b) $a_1 = -3$, $S_n = 84$ c) $a_1 = -11$, $r = 3$ d) $n = 115$, $S_n = 25\,645$ e) $n = 10$, $a_n = -16$ **3.28.** a) $3,\ 4 - \sqrt{3},\ 5 - 2\sqrt{3};\ S_5 = 15$ b) $4 + \sqrt{2},\ 6,\ 8 - \sqrt{2};\ S_5 = 5\left(4 + \sqrt{2}\right)$ c) $1,\ 2 - \sqrt{5},\ 3 - 2\sqrt{5};\ S_5 = 5$ d) $\sqrt{3},\ 1,\ 2 - \sqrt{3};\ S_5 = 5\sqrt{3}$

s. 157

1. C **2.** C **3.** D **4.** P, P, P **5.** 45 **6.** A: 8 rat, 980 zł, B: 12 rat, 700 zł **7.** $a_1 = 4,\ r = 2.$ *Wskazówka*: Wykorzystaj zależności $S_1 = a_1$, $S_n - S_{n-1} = a_n$ dla $n \geqslant 2$.

s. 164

4.1. P, F, P **4.2.** $(b_n), (d_n)$ **4.3.** a) 18, 54, 162 b) $\sqrt{5}, 1, \frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ d) $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ **4.4.** a) 8, 64 b) $4\frac{1}{2},\ 40\frac{1}{2}$ c) $2\sqrt{5},\ 8\sqrt{5}$ d) $7\sqrt{7}, 49$ **4.5.** a) $a_6 = -4$ b) $a_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $a_3 = -1$ d) $a_6 = 2000$ **4.6.** a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ b) $a_n = 2^{2-n}$ lub $a_n = (-2)^{2-n}$ c) $a_n = 3^{n-2}$ lub $a_n = (-1)^{n-1} \cdot 3^{n-2}$ d) $a_n = -2^{3-n}$ lub $a_n = (-2)^{3-n}$ **4.7.** a) nie b) tak c) tak d) tak

4.8. $q = 1 - \sqrt{2}$ **4.9.** a) $x = 5\sqrt{15}$ b) $x = 6$ c) $x = 2$ **4.10.** a) $x = -9$ lub $x = 9$ b) $x = -\frac{\sqrt{3}}{12}$ lub $x = \frac{\sqrt{3}}{12}$ c) $x = -3$ lub $x = 3$ **4.11.** $x = 64$, $y = 256$ **4.12.** $a_1 = \frac{3}{2}$, $q = 2$ lub $a_1 = \frac{3}{2}$, $q = -2$ **4.13.** 5 **4.14.** ok. 107 km **4.15.** po trzech latach **4.16.** 26 liczb trzycyfrowych, 20 liczb czterocyfrowych, 18 liczb n-cyfrowych dla $n > 4$ **4.17.** (7, 21, 63), (63, 21, 7), (13, 26, 52), (52, 26, 13), (25, 30, 36), (36, 30, 25), (1, 9, 81), (81, 9, 1), (91, 0, 0) **4.18.** 2, 6, 18 **4.19.** $x = 6$, $y = 30$ lub $x = -6$, $y = 42$ **4.20.** 17, 8, −1 lub 5, 8, 11 **4.21.** 2, 4, 6, 9, 12 **4.22.** (b_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q.

s. 167

1. B **2.** A **3.** B **4.** P, F, P **5.** $-\frac{1}{16}$ **6.** 13, 13, 13 lub 3, 9, 27 **7.** *Wskazówka*: Zapisz liczby a, b, c w postaci a, aq, aq^2.

s. 171

5.1. F, P, F **5.2.** a) $S_6 = 315$ b) $S_5 = -40\frac{1}{3}$ c) $S_{10} = 80$ d) $S_{100} = 0$ e) $S_6 = 1344$ f) $S_8 = 15\left(\sqrt{2}+2\right)$ g) $S_3 = 2\left(3\sqrt{2}-5\right)$ h) $S_4 = 2\left(3-2\sqrt{2}\right)$ **5.3.** a) 1092 b) $11\frac{13}{16}$ c) $13\left(3+\sqrt{3}\right)$ d) $\frac{31+15\sqrt{2}}{2}$ e) $93\left(5+\sqrt{5}\right)$ f) 63π **5.4.** 2047 **5.5.** a) $n = 7$ b) $n = 7$ c) $n = 5$ d) $n = 5$ **5.6.** a) $S_5 = -5\frac{13}{16}$ b) $k = 7$ c) $q = \frac{1}{3}$ d) $a_1 = \frac{1}{2}$ **5.7.** 4, 8, 16, 32 **5.8.** ok. 75,5 m **5.9.** 1365π cm^2 **5.10.** 20 ha **5.11.** 37 448 **5.12.** 5625 zł, 4500 zł, 3600 zł, 2880 zł, 2304 zł **5.13.** $n = 4$ **5.14.** Ciąg arytmetyczny (a_n): $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$, $S_n = \frac{n(n+7)}{4}$, ciąg geometryczny (b_n): $b_n = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-2}$, $S_n = \frac{1-(-2)^n}{6}$; ciągi nie mają równych wyrazów. *Wskazówka*: Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie i leżą na wykresie funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, a dodatnie wyrazy ciągu (b_n) mają nieparzyste numery i leżą na wykresie funkcji $g(x) = 2^{x-2}$. Naszkicuj wykresy funkcji f i g dla dodatnich wartości x i zauważ, że mają tylko jeden punkt wspólny, dla argumentu, który nie jest liczbą naturalną. **5.15.** cztery drukarki; pierwsza: 13 stron, druga: 39, trzecia: 117, czwarta: 351 **5.16.** a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{3367\sqrt{3}}{16\,384}$. *Wskazówka*: Po sześciu krokach będzie $3^6 = 729$ niezamalowanych trójkątów o boku $\frac{1}{64}$. **5.17.** a) $x = \frac{1}{32}$ b) $x = 64$ c) $x = 96$ d) $x = 32$

s. 174

1. D **2.** C **3.** C **4.** P, F, P **5.** $S_7 = 21\frac{1}{2}$ **6.** 420,20 zł **7.** $\frac{1}{6}$

s. 186

6.1. P, P, P **6.2.** 10,368 **6.3.** a) 313,84 zł b) 179,59 zł c) 359,17 zł d) 380,47 zł **6.4.** po osiemnastu latach **6.5.** po czterech latach **6.6.** o ok. 99,39% **6.7.** o ok. 19,25% **6.8.** ok. 8533 m^3 **6.9.** 87,5% **6.10.** 2024 zł **6.11.** a) 4064 zł b) 4129,02 zł c) 4330,41 zł

6.12. 3036,16 zł **6.13.** 8056 zł, o 0,7% **6.14.** 4274,80 zł **6.15.** I. 145,19 zł, II. 144,97 zł, III. 144 zł; III < II < I **6.16.** a) 2431,20 zł b) 4894,01 zł c) 5694,01 zł **6.17.** 5086,67 zł **6.18.** a) 186 392 zł b) 196 857 zł c) 76 104 zł **6.19.** 128 749 zł; przez 10 lat i 8 miesięcy **6.20.** a) 5676 zł, 500 zł b) 7757,20 zł, 341,17 zł c) 11 124,96 zł, 420 zł **6.21.** 1389,14 zł **6.22.** rata: 2702,78 zł, zwrócona kwota: 324 333,60 zł **6.23.** 13,1% **6.24.** Paweł, 212 zł **6.25.** 2,5 roku (30 rat miesięcznych)

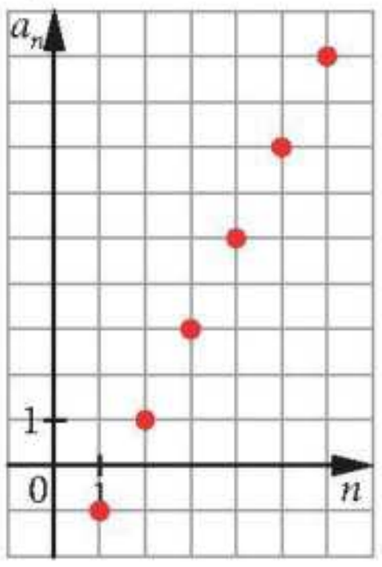
s. 189

1. B **2.** D **3.** C **4.** F, P, P **5.** ok. 14,1 **6.** a) 2400 zł b) o 27,1% **7.** 587,76 zł

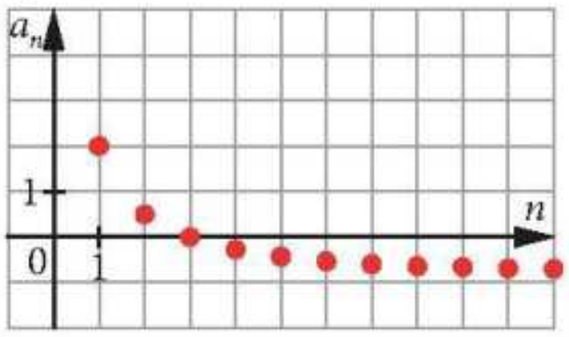
s. 190

1. B **2.** C **3.** C **4.** B **5.** D **6.** A **7.** D **8.** C **9.** A **10.** D **11.** A **12.** B **13.** D **14.** A **15.** B **16.** D **17.** A **18.** D **19.** B **20.** B **21.** A **22.** A **23.** B **24.** A **25.** F, P, P **26.** P, P, P **27.** F, P, P **28.** P, F, P **29.** F, P, F **30.** P, P, P **31.** P, P, F **32.** P, P, P **33.** P, P, F **34.** P, F, P **35.** P, P, P **36.** P, F, P **37.** P, F, P **38.** F, P, P **39.** P, F, P **40.** F, P, P **41.** P, F, P **42.** P, F, P **43.** a) np. $a_n = n + 1$ b) np. $a_n = \frac{1}{n}$ c) np. $a_n = \frac{n+1}{n}$ d) np. $a_n = \sqrt{n}$ e) np. $a_n = 2n$ f) np. $a_n = -n - 2$ g) np. $a_n = 2^{n-1}$ h) np. $a_n = \frac{1}{2n+1}$ **44.** a) cztery b) a_{15} c) $n > 11$ **45.** czterdzieści dziewięć **46.** a) rosnący b) rosnący c) niemonotoniczny d) niemonotoniczny e) malejący f) malejący

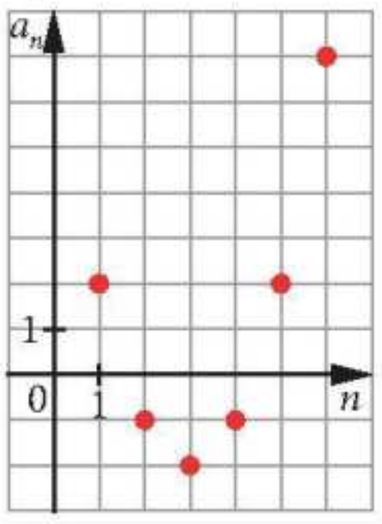
47. a)



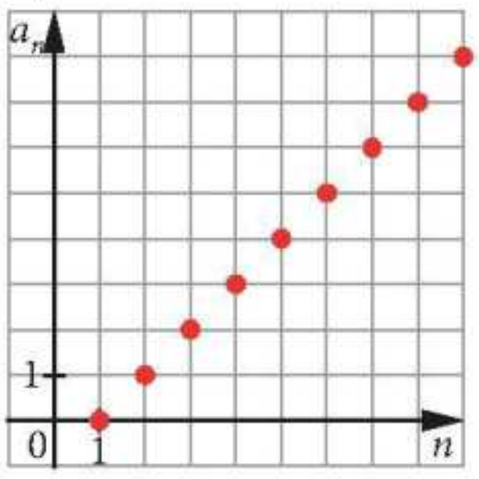
b)



c)



d)



48. $a_1 = -17,\ r = 3$ **49.** $a_1 = 7,\ r = 13$ **50.** 20 **51.** $S_{10} = 255$ **52.** a) tak, $a_1 = 12,\ q = 4$ b) nie c) tak, $a_1 = -\pi,\ q = 1$ d) tak, $a_1 = -\frac{3}{2},\ q = -\frac{1}{2}$ **53.** $q = 2 - \sqrt{2}$ **54.** $a_4 = 2\frac{1}{4},\ a_5 = 2\frac{5}{9},\ a_6 = 2\frac{4}{5}$ **56.** $a_1 = -5,\ r = 3$ **57.** −98 **58.** $a_1 = 3,\ r = \frac{1}{4}$ lub $a_1 = 7\frac{3}{4},\ r = -\frac{1}{4}$ **59.** $n \leqslant 66$ **60.** $a_1 = -5,\ k = 12$ **61.** $a_1 = -147$ **62.** $S_8 = 228$ **63.** a) w Supertaxi b) 5 km **64.** 222 lub −222 **65.** $a_1 = -3\frac{1}{2},\ n = 27$ lub $a_1 = 4,\ n = 12$ **66.** pierwszy wyraz: −3, iloraz: −2; nie jest monotoniczny **67.** $x = 3,\ y = -6$ lub $x = 12,\ y = 12$ **68.** $m = 0$ lub $m = 4$ **69.** $m = 0$ lub $m = 3$ **70.** pierwsza **71.** ok. 7,6 razy **72.** 16 zł, 24 zł, 36 zł **73.** a) $a_1 = 17,\ r = -2$ b) $q = \frac{1}{3}$ c) $n = 9$ **74.** $a = 5,\ b = 2,\ c = 128$ **75.** $a = 4,\ b = 12,\ c = 36$ **76.** 3472,88 zł **77.** 20 zł **78.** a) 1296 zł b) 4207,33 zł c) 18 774,58 zł **79.** lokata A **80.** 855 zł, 850,63 zł, 846,25 zł, średnia rata 804,69 zł

4. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

s. 207

2.1. a) $\frac{1}{17}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{15}$ d) $\frac{1}{36}$ e) $\frac{1}{25}$ f) $\frac{1}{15}$ **2.2.** a) $A = \{2, 4, 5, 6\}$ b) $\frac{4}{6}$ **2.3.** a) 0,87 b) 0,13 **2.4.** a) $\frac{57}{67}$ b) $\frac{10}{67}$ **2.5.** $\frac{7}{20}$ **2.6.** a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{4}{13}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{8}{13}$ f) $\frac{11}{13}$ **2.7.** $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(D) = \frac{2}{3}$, $P(E) = \frac{1}{3}$, $P(F) = \frac{5}{6}$, $P(G) = \frac{1}{3}$, $P(H) = \frac{1}{2}$ **2.8.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{13}{90}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{23}{30}$ f) $\frac{7}{30}$ g) $\frac{1}{15}$ h) $\frac{1}{45}$ **2.9.** a) 0,09 b) 0,5 c) 0,45 d) 0,33 e) 0,1 f) 0,15 **2.10.** $\frac{1}{3}$ **2.11.** a) $\frac{8}{17}$ b) $\frac{7}{17}$ c) $\frac{15}{17}$ d) $\frac{11}{17}$ e) $\frac{10}{17}$ **2.12.** a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ **2.13.** $\frac{11}{14}$ **2.14.** $\frac{7}{12}$ **2.15.** $\frac{7}{90}$ **2.16.** 36 **2.17.** $\frac{1}{51}$ **2.18.** a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$

s. 210

1. B **2.** B **3.** D **4.** P, P, F **5.** $\frac{17}{20}$ **6.** $\frac{1}{2}$ **7.** 30

s. 218

3.1. 180 **3.2.** 900 **3.3.** 80 **3.4.** 6^{32} **3.5.** a) 6^5 b) 128 c) 36 d) 32 e) 12 f) 288 **3.6.** 2^{30} **3.7.** a) 3^2 b) 6 c) 1 d) 3^{10} **3.8.** a) 360 b) o 240 **3.9.** $180 \cdot 179 \cdot 178 \cdot 177$ **3.10.** a) 900 b) 180 c) 180 d) 625 **3.11.** $58^6 \approx 38$ mld haseł; ponad 1200 lat **3.12.** $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604\,800$ **3.13.** 5^{12} **3.14.** a) $7 \cdot 6 \cdot 5$ b) to niemożliwe c) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ d) $11 \cdot 10 \cdot 9$ **3.15.** a) 6 b) 30 c) 120 d) 360 e) 720 f) 720 **3.16.** $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ **3.17.** $3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 1512$ **3.18.** a) $4 \cdot 3 \cdot 2$ b) $5 \cdot 4 \cdot 3$ c) $3 \cdot 2$ d) $3 \cdot 3 \cdot 2$ **3.19.** 136. *Wskazówka*: Ostatnią cyfrą musi być 0 lub 5. **3.20.** a) $9 \cdot 89 \cdot 88 = 70\,488$ b) 0 **3.21.** 1000 **3.22.** 840 **3.23.** $18 \cdot 12 \cdot 28$ **3.24.** 6 **3.25.** a) 5^{30} b) 6^{30}

s. 221

1. A **2.** C **3.** B **4.** P, F, F **5.** 72 **6.** 57 600 **7.** 6

s. 229

4.1. $\frac{1}{4}$ **4.2.** $\frac{1}{16}$ **4.3.** $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(D) = \frac{1}{2}$, $P(E) = 0$, $P(F) = \frac{1}{6}$ **4.4.** $\frac{1}{6}$ **4.5.** $\frac{4}{663}$ **4.6.** Zdarzenia są jednakowo prawdopodobne. **4.7.** a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{7}{18}$ **4.8.** a) $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4^4} = \frac{3}{32}$ b) $\frac{4^3 \cdot 1}{4^4} = \frac{1}{4}$ **4.9.** $\frac{4}{9}$ **4.10.** a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{4}{15}$ **4.11.** $\frac{1}{4}$ **4.12.** $\frac{1}{4^{10}} = \frac{1}{1\,048\,576}$ **4.13.** a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{24}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ **4.14.** a) $\frac{1}{243}$ b) $\frac{3\left(2^6 - 2\right)}{3^6} = \frac{62}{243}$ **4.15.** a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{9}{25}$ **4.16.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{12}$ **4.17.** $\frac{7}{12}$ **4.18.** a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ **4.19.** a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{18}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{5}{9}$ **4.20.** $\frac{1}{12}$ (jeśli uznamy za poprawne ustawienia 1, 2, 3, 4 oraz 4, 3, 2, 1) lub $\frac{1}{24}$ (jeśli poprawne jest tylko ustawienie 1, 2, 3, 4) **4.21.** tak **4.22.** $\frac{5}{54}$

4.23. a) 0,09 b) 0,267 c) 0,1 **4.24.** $\frac{12 \cdot 11 \cdot \left(2^6 - 2\right)}{2 \cdot 12^6} = \frac{341}{12^5}$ **4.25.** a) 0,384 b) 0,096 c) 0,008 d) 0,48 e) 0,512 **4.26.** $\frac{1}{16}$ **4.27.** a) $\frac{1}{243}$ b) $\frac{41}{729}$ **4.28.** a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$

s. 233

1. D **2.** C **3.** C **4.** F, P, F **5.** $\frac{5}{9}$ **6.** $\frac{2}{5}$ **7.** $\frac{1}{6}$

s. 239

5.1. tak, zdarzenia A i B **5.2.** pary zdarzeń wykluczających się: A i B, A i C, A i D **5.3.** pary zdarzeń wykluczających się: A i C, B i C **5.4.** A' – wypadły trzy reszki **5.5.** A' – na żadnej kostce nie wypadły dwa oczka **5.6.** nie **5.7.** a) nie b) tak c) tak d) tak e) nie **5.8.** $\frac{3}{4}$ **5.9.** $\frac{7}{8}$ **5.10.** $\frac{33}{49}$ **5.11.** $\frac{215}{216}$ **5.12.** przez 5 i przez 9: 0,022; przez 5 lub przez 9: 0,289 **5.13.** $\frac{4}{9}$ **5.14.** $\frac{3}{8}$ **5.15.** $\frac{17}{26}$ **5.16.** $\frac{1}{3}$ **5.17.** $\frac{1}{2}$

s. 241

1. A **2.** C **3.** D **4.** P, F, F **5.** $\frac{11}{12}$ **6.** $\frac{25}{169}$ **7.** 0,19

s. 245

6.1. $\frac{5}{13}$ **6.2.** $-\frac{85}{26} \approx -3{,}27$ **6.3.** 0 **6.4.** $\frac{1}{36}$ **6.6.** −3,75 **6.7.** −0,625 **6.8.** $\frac{2}{13}$ **6.9.** nie

s. 247

1. A **2.** B **3.** A **4.** F, P, F **5.** $-\frac{55}{26}$ **6.** $-\frac{950}{169}$

s. 265

8.1. a) 30 b) 60 c) 80 d) 93 e) 100 **8.2.** pięć **8.3.** np.: {0, 1, 2, 2, 4, 8, 9, 9, 9, 11}, {1, 1, 3, 3, 5, 7, 7, 7, 8, 12}, {3, 3, 4, 4, 6, 6, 9, 9, 10, 15} **8.4.** P, F, P, P **8.5.** a) 4,31 b) 28,93 **8.6.** 224 **8.7.** dominanty: 22°C i 25°C, mediana: 15,5°C **8.8.** a) mediana: 12, dominanta: 11, średnia: 12 b) mediana: 12, dominanta: 20, średnia: 15 c) mediana: 40, dominanty: 30 i 35, średnia: 46 d) mediana: 42, dominanta: 42, średnia: 41 e) mediana: 23, dominanta: 4, średnia: 28 **8.9.** 2,05 kg **8.10.** a) średnia: 8, mediana: 7, dominanta: 5 b) średnia: 5, mediana: 5, dominanty: 5 i 7 c) średnia: 17, mediana: 17, dominanta: 12 **8.11.** a) w piątki b) Najwięcej zarobiła na pierogach ruskich. Zysk byłby większy. **8.12.** Dyskoteka ma trwać do godz. 21^{00}, bufet będzie czynny 2,5 h. **8.13.** a) $\frac{11}{12}$ b) $\frac{4}{5}$ c) 4,3 d) 4 **8.14.** III LO **8.15.** $x = 6$ **8.16.** $m = 1$ **8.18.** a) np. $n = 2$, $m = 4$ b) $m = 2n$

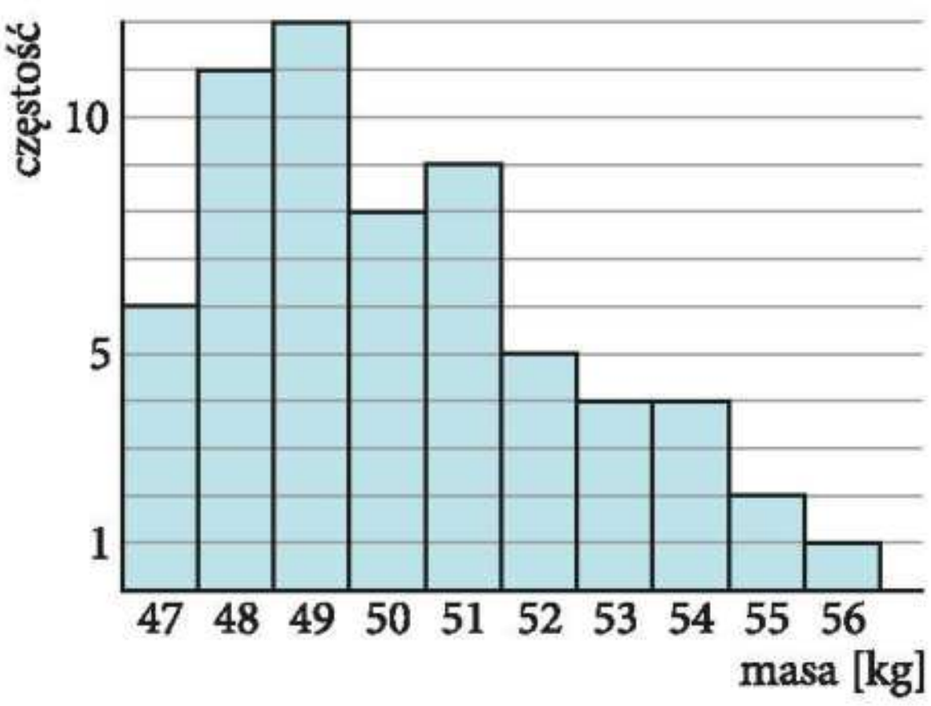
s. 270

1. D **2.** B **3.** B **4.** P, P, F **5.** $\overline{x} = 3{,}94$, dominanta: 1,5 **6.** mediana: 3, $\overline{x} = 2{,}97$
7. 3, 3, 9, 13

s. 281

9.1. mediana: 3, dominanta: 2

9.2. a) 9 b) mediana: 50, dominanta: 49
c) średnia: 50, odchylenie standardowe: 2,35
d)



9.3. a) $\overline{x} = 41{,}4$, $\sigma^2 = 26{,}5$, $\sigma = 5{,}2$
b) $\overline{x} = 56{,}5$, $\sigma^2 = 711{,}1$, $\sigma = 26{,}7$
c) $\overline{x} = 41{,}2$, $\sigma^2 = 11{,}6$, $\sigma = 3{,}4$
d) $\overline{x} = 102{,}0$, $\sigma^2 = 91{,}6$, $\sigma = 9{,}6$

9.4. mediana: 101,5, dominanty: 75 i 90, średnia: 108,8, wariancja: 1067,6, odchylenie standardowe: 32,7

9.5. a) 25 b) najmniejsza: 4, największa: 13 c) 8 d) 13 e) 8,84

9.6. a) 55 cm b) mediana: 55, dominanta: 53, rozstęp: 13, $\sigma \approx 2{,}66$

9.7. np. 6, 8, 12, 14

s. 283

1. A **2.** C **3.** B **4.** P, F, P **5.** $\overline{x} = 47$, $\sigma = 7{,}99$ **6.** $\overline{x} = 40{,}8$, $\sigma = 1{,}4$ **7.** np. 2, 4, 6, 8

s. 284

1. A **2.** A **3.** B **4.** A **5.** D **6.** C **7.** A **8.** B **9.** D **10.** D **11.** D **12.** A
13. A **14.** D **15.** C **16.** B **17.** C **18.** A **19.** B **20.** B **21.** A **22.** C **23.** D
24. D **25.** B **26.** F, P, P **27.** F, F, P **28.** F, P, P **29.** P, P, P **30.** F, P, P **31.** F, F, P
32. P, P, P **33.** P, P, F **34.** P, F, F **35.** 255 **36.** 12 096 **37.** 30 **38.** 720 **39.** $\frac{1}{2}$
40. $\frac{5}{16}$ **41.** $\frac{1}{221}$ **42.** $\frac{5}{16}$ **43.** $\frac{1}{7}$ **44.** a) $x \geqslant 8$ b) $x = -1$ **45.** 5,8 **46.** a) 5760 b) 14 400 c) 2880 **47.** 345 600 **48.** $P(A) = \frac{1}{36}$, $P(B) = \frac{5}{18}$, $P(C) = 0$, $P(D) = \frac{1}{9}$, $P(E) = \frac{25}{36}$, $P(F) = \frac{1}{4}$
49. $\frac{5}{14}$ **50.** $\frac{24}{625}$ **51.** $\frac{33}{50}$ **52.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ **53.** $\frac{3}{5}$ **54.** $\frac{4}{9}$ **55.** $\frac{119}{120}$ **56.** $\frac{5}{6}$ **58.** a) 83,9 b) 72% **59.** $w_1 = 6$ i $w_2 = 4$ **60.** $\overline{x} = 54$, $\sigma = \sqrt{14} \approx 3{,}74$ **61.** $\overline{x} = 100$, $\sigma = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

Skorowidz

Centyl 257
ciąg 122
— arytmetyczny 138
— Fibonacciego 127, 136
— geometryczny 158
— liczbowy 122
— malejący 129
— naprzemienny 162
— niemalejący 129
— nierosnący 129
— nieskończony 122
— rosnący 129
— skończony 122
— stały 124
cosinus kąta 8

Dane surowe 256
dominanta (moda, wartość modalna) 261
doświadczenie losowe 201, 203

Figura osiowosymetryczna 97
— środkowosymetryczna 88

Geometria analityczna 46
gra losowa 244
— — sprawiedliwa 244

Iloraz ciągu geometrycznego 158

Kąt nachylenia prostej do osi x 58
klasyczna definicja prawdopodobieństwa 205

Liczby Fibonacciego 127
logika probabilistyczna 200
losowanie bez zwracania 216
— ze zwracaniem 216

Mediana 258
monotoniczność ciągu 129

Nierówność opisująca koło 75
n-ty wyraz ciągu 123

Odchylenie standardowe 276
odległość między punktami na płaszczyźnie 48
— punktu od prostej 66
okres kapitalizacji (rozrachunkowy) 177
oprocentowanie stałe 178
— zmienne 178
osie symetrii czworokąta 107, 108
— — trójkąta 106
— — wielokąta foremnego 109
oś symetrii 95, 97

Populacja 252
prawdopodobieństwo wygranej 244
— zajścia zdarzenia 205, 222
— zdarzenia przeciwnego 235
procent składany 175
promień wodzący punktu 9
proste prostopadłe 64
— równoległe 61, 62
próba losowa 253
— z populacji 252
przeciętne odchylenie od średniej 274
punkt stały przekształcenia 90
punkty symetryczne względem prostej 95
— — — punktu 87

Raty malejące 184
— równe 182, 184
reguła dodawania 214
— mnożenia 212
rok bankowy 179
rozstęp 274
rozwiązywanie trójkąta 12
równania prostych prostopadłych 42, 64
— — równoległych 42, 60–62
równanie kierunkowe prostej 40

— okręgu 71
— prostej w postaci ogólnej 40
różnica ciągu arytmetycznego 138

Sinus kąta 8
statystyka 251
— opisowa 251
stopa procentowa 177
suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 149
— — — — geometrycznego 168
symetria osiowa 95, 97
— — względem osi x 98
— — — — y 99
— środkowa 87, 89
— — względem początku układu współrzędnych 90, 91
szereg uporządkowany 256

Średnia 260
— ważona 264
środek ciężkości trójkąta 53
— — układu 262
— odcinka 51
— symetrii 87, 88
środkowa boku trójkąta 53

Tabela rozkładu częstości 277
tangens kąta 8
twierdzenie cosinusów 21
— o dwusiecznej 27
— sinusów 16

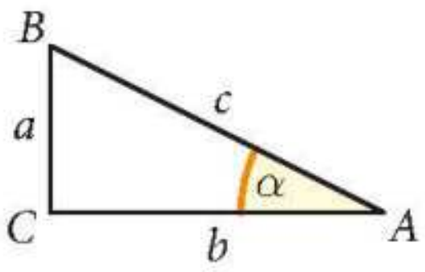
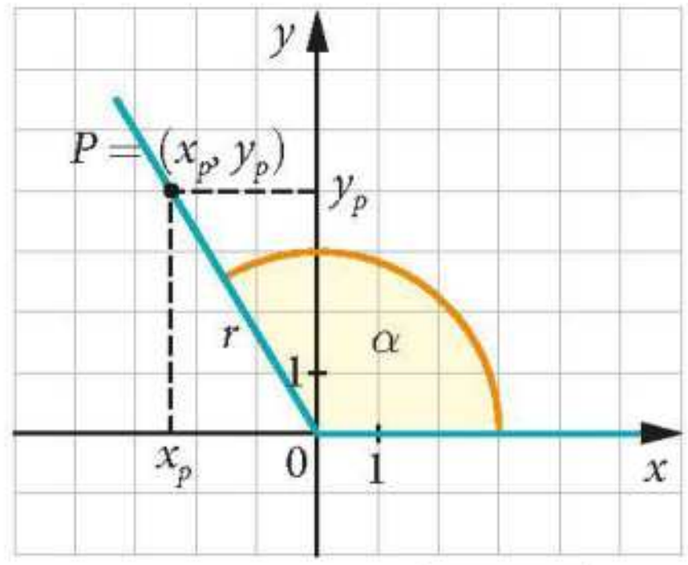
Uogólnione twierdzenie Pitagorasa 21

Wariancja 275
warstwowa próba losowa 281
wartość oczekiwana gry losowej 244, 264
wielokąt foremny 109
własności ciągu arytmetycznego 141, 143, 144
— — geometrycznego 162
wnioskowanie statystyczne 251
współczynnik kierunkowy prostej 40, 58, 59
współrzędne środka ciężkości trójkąta 54
— — odcinka 51, 52
wzory redukcyjne 9
wzór Herona 30
— na pole trójkąta 10, 29, 30
— ogólny ciągu arytmetycznego 140
— — — geometrycznego 159
— — — liczbowego 124
— rekurencyjny (indukcyjny) ciągu liczbowego 126
— sinusów 13

Zbiory rozłączne 214
zdarzenia przeciwne 234
— wykluczające się 234
zdarzenie elementarne 203
— niemożliwe 205
— pewne 205

Wybrane wzory trygonometryczne

Definicje funkcji trygonometrycznych

kąta ostrego	kąta wypukłego
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$  	$\sin\alpha = \frac{y_P}{r}$ $\cos\alpha = \frac{x_P}{r}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_P}{x_P}$  $r = \lvert OP\rvert = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$

Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0

α	$(0°; 90°)$	$(90°; 180°)$
$\sin\alpha$	$+$	$+$
$\cos\alpha$	$+$	$-$
$\operatorname{tg}\alpha$	$+$	$-$

Podstawowe zależności trygonometryczne

- **Jedynka trygonometryczna**
  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ dla $\alpha \neq 90°$
- **Wzory redukcyjne**

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

Zależności trygonometryczne w trójkącie

- **Pole trójkąta**

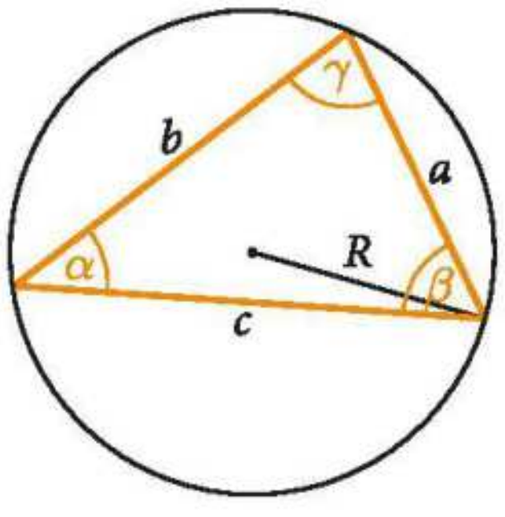
$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ $\quad P = \frac{1}{2}ac\sin\beta$ $\quad P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

- **Twierdzenie sinusów**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

- **Twierdzenie cosinusów**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



Tablica wartości funkcji trygonometrycznych

Miara kąta α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	Miara kąta α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000	90°	1,0000	0,0000	—

Twoje mocne strony

Prosto do matury

Podręcznik *Prosto do matury 3* do zakresu podstawowego został opracowany z myślą o uczniach przygotowujących się do obowiązkowej matury z matematyki. Ponad 900 zadań z odpowiedziami pozwala wyćwiczyć umiejętności sprawdzane na maturze.



Pomoc w zrozumieniu

Przykładowe rozwiązania zadań typu maturalnego pokazują różne możliwości radzenia sobie z takimi zadaniami.

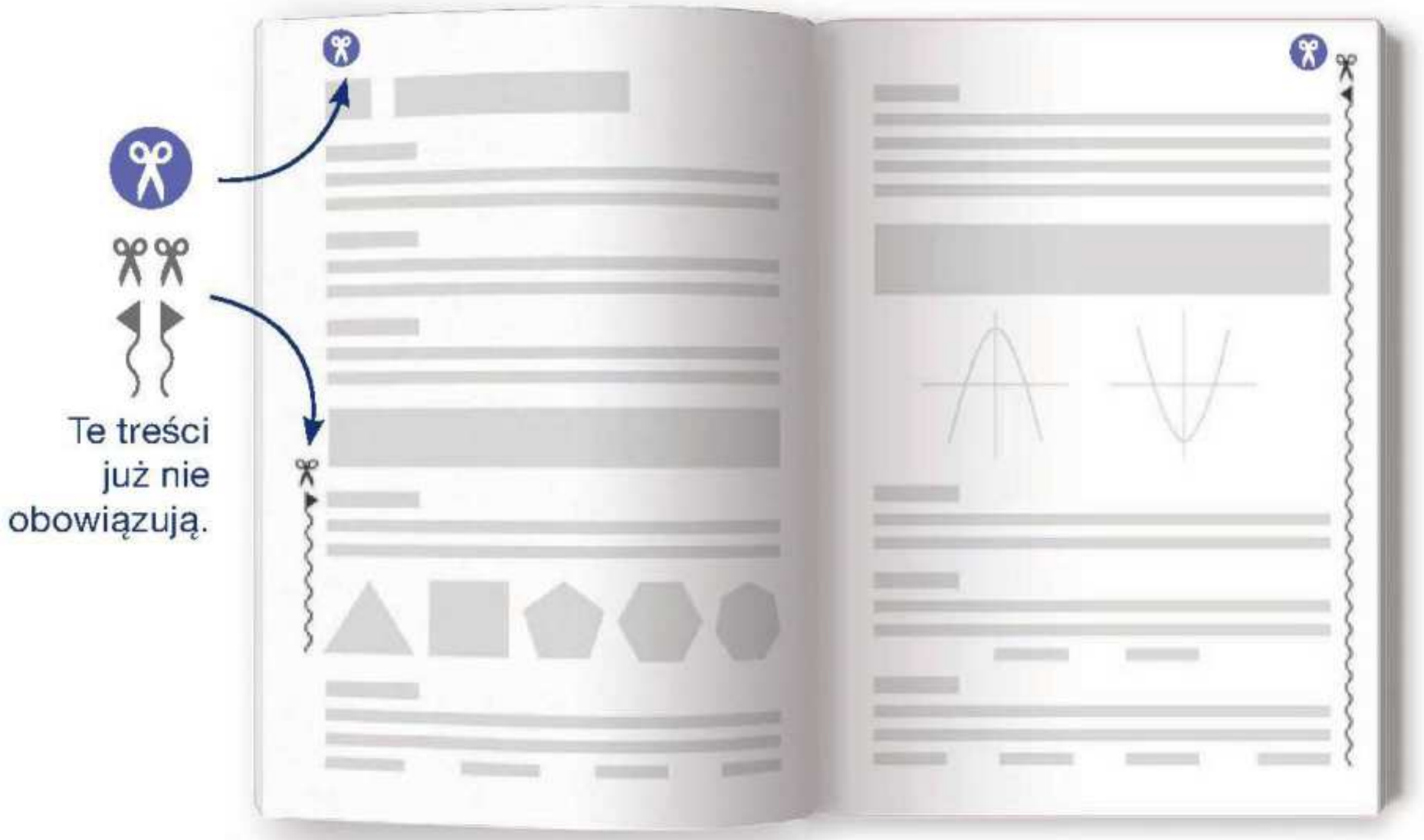
Porządkowanie i syntetyzowanie

Warto powtórzyć przypominają wiadomości z wcześniejszego etapu nauki.

Obszerne powtórzenia

Powtórzenie po każdym dziale zawiera zadania różnego typu, zarówno zamknięte, jak i otwarte.

W podręczniku znajdziesz oznaczenia treści, które od września 2024 r. nie są już wymagane.



Fioletowa ikona na górze strony wskazuje, że na tej stronie znajdują się treści, które nie są wymagane – oznaczono je szarą ikoną i falką.

Nowa Era Sp. z o.o.

www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-5090-8