

Maciej Antek
Krzysztof Belka
Piotr Grabowski

Prosto do matury

Podręcznik do matematyki
dla liceum ogólnokształcącego i technikum

4

Zakres podstawowy



Twoje mocne strony

Prosto do matury

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

mgr. Zbigniewa Bobińskiego, dr Marii Borowskiej i dr Katarzyny Kozłowskiej.

Zakres kształcenia: podstawowy

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa (liceum ogólnokształcące i technikum)

Rok dopuszczenia: 2022

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 1008/4/2022

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Piotra Grabowskiego.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024

ISBN 978-83-267-5092-2

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Magdalena Spalińska, Anna Dubiel

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Renata Wolniewicz

Redakcja językowa: Marta Zuchowicz

Korekta językowa: Paulina Szulim

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak

Projekt graficzny: Sławomir Włodarczyk, Ewa Kaletyn, Diana Gawronkiewicz/Podpunkt

Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Andrzej Oziębło

Opracowanie graficzne stron działowych: Marcin Kołacz

Opracowanie graficzne infografik: Ewa Kaletyn, Marcin Kołacz

Ilustracje na infografikach: Adam Król (bryły i piłka, s. 60), Laura Maziewska (ikony, s. 105)

Realizacja projektu graficznego: BOP s.c.

Fotografia na okładce: Getty Images/iStock Unreleased/rusm.

Fotografie: BE&W: Alamy Stock Photo/Archive PL s. 104 (Stefan Mazurkiewicz); Biblioteka Narodowa/polona.pl s. 105 (Lwów, Plac Akademicki i ul. Fredry); Forum: Bogdan Łopieński s. 104 (Hugon Steinhaus), FoKa s. 104 (Stefan Banach); Getty Images: Corbis Historical/Michael Nicholson s. 104 (Wacław Sierpiński), iStock Unreleased/Consu1961 s. 58 (piramida w Luwrze), Moment/Fanjiarhua s. 93, Stone/Paul Souders s. 115; PAP: CAF/Danuta Rago s. 105 (Stanisław Mazur wręczający żywą ge6); Shutterstock: Aleksey Sagitov s. 80, Alexapicso s. 61 (piłka do baseballa), Autorstwa bioraven s. 105 (ikoną obiadu), BAO-Images Bildagentur s. 61 (piłka do tenisa), Berezka_Klo s. 105 (ikoną piwa), Hein Nouwens s. 105 (ikoną kawy), Mesa Studios s. 60-61 (kopuła stacji na Antarktydzie), RedKoala s. 105 (ikoną kawionu), Scott Norsworthy s. 7, Surachart Jessadanont s. 26, titov dmitriy s. 61 (piłka do siatkówki), Vlad Klok s. 105 (ikoną gęsi); Thinkstock/Getty Images: iStockphoto - boggy22 s. 70, de_design s. 151, LiamDoerksen s. 58 (szklana piramida Muttart Conservatory), yamanstock s. 85, Stockbyte/Comstock Images s. 84; link: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk> s. 104 (Zygmunt Janiszewski); link: http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/archiwalia.html s. 104-105 (kartka z Księgi Szkołkiej).

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Drukarnia Orthdruk

Spis treści

Wstęp	5
Wykaz używanych oznaczeń matematycznych	6

Dział 1. Stereometria

1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni	8
2. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny	19
3. Kąt dwuścienny	28
4. Graniastopy	34
5. Ostrośły	45
6. Bryły obrotowe	62
7. Pola powierzchni i objętości brył	71
8. Powtórzenie	86

Dział 2. Dowody w matematyce

1. Dowody w geometrii	94
2. Dowody w algebrze	106

Dział 3. Powtórzenie

1. Liczby, wyrażenia algebraiczne	116
2. Funkcje. Funkcja liniowa	126
3. Funkcja kwadratowa, wielomiany i funkcje wymierne	137
4. Funkcje trygonometryczne	147
5. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna	153
6. Ciągi liczbowe	159
7. Figury na płaszczyźnie	167
8. Geometria analityczna	178
9. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka	187
10. Stereometria	196
Odpowiedzi	206
Skorowidz	220
Tablica wartości logarytmów dziesiętnych	222
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych	223
Wybrane wzory trygonometryczne	224

Wstęp

Podręcznik *Prosto do matury* dla klasy czwartej jest dostosowany do podstawy programowej obowiązującej w liceum od września 2019 r. i obejmuje treści z zakresu podstawowego. Jest ostatnim podręcznikiem w serii, dlatego też zamieściliśmy w nim dział *Powtórzenie*, w którym przypominamy najważniejsze definicje, twierdzenia oraz wnioski, które pojawiły się w czasie całego cyklu nauczania.

Po każdym temacie w dziale *Stereometria* proponujemy zestaw siedmiu zadań zatytułowanych *Prosto do matury*. Warto, by po omówieniu każdego tematu uczniowie próbowali rozwiązywać je samodzielnie. Będzie to sprawdzianem umiejętności potrzebnych na maturze.

Dział *Dowody w matematyce* ma na celu utrwalenie umiejętności logicznego wnioskowania i wykorzystywania zdobytej wcześniej wiedzy, co jest niezbędne do przeprowadzania dowodów matematycznych.

Książka zawiera prawie 900 zadań do samodzielnego rozwiązania. To wystarczy do gruntownego przećwiczenia umiejętności nabytych podczas lekcji. Zadania trudniejsze oznaczono ✨ lub ✨, zadania typu „Wykaż...” poprzedzono znakiem , a te zadania, do których rozwiązania jest przydatny kalkulator – znakiem .

Podręcznik umożliwia samodzielną naukę, co może być cenne na przykład w razie nieobecności w szkole. Wprowadzane pojęcia ilustrujemy przykładami rozwiązyanych zadań. W zrozumieniu materiału bardzo pomogą kolorowe rysunki merytoryczne. Wybrane rozwiązane zadania typu maturalnego zostały oznaczone znakiem .

Uwagi:

W zadaniach testowych, w których należy wybrać jedną odpowiedź spośród czterech podanych, wybrana odpowiedź nie musi być jedynym istniejącym rozwiązaniem postawionego problemu.

Odpowiedzi do zadań wymagających zaokrągleń mogą się różnić w zależności od np. dokładności kalkulatorów czy kolejności wykonywania obliczeń.

Odpowiedzi i rozwiązania zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Autorzy

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

$x \in A; x \notin A$	x należy do zbioru A ; x nie należy do zbioru A
$\{a, b, c\}; \emptyset$	zbiór, którego elementami są a, b, c ; zbiór pusty
$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$	zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych
$A \subset B$	zbiór A jest podzbiorem zbioru B
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A - B$	różnica zbiorów A i B
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek stopnia n z liczby a
$\log_a b$ ($\log b$)	logarytm przy podstawie a (10) liczby b
$(a; b)$	przedział otwarty
$\langle a; b \rangle$	przedział domknięty (zamknięty)
$\langle a; b \rangle; [a; b]$	przedział lewostronnie domknięty; przedział prawostronnie domknięty
$ a $	wartość bezwzględna liczby a
$f(x)$	wartość funkcji f dla argumentu x
$D; ZW$	dziedzina funkcji; zbiór wartości funkcji
Δ	delta (wyróżnik trójkianu kwadratowego)
$o(S, r); k(S, r)$	okrąg o środku S i promieniu r ; koło o środku S i promieniu r
$A = (a, b)$	punkt A o współrzędnych a (tzw. odcięta) i b (tzw. rzędna)
$AB; AB $	odcinek o końcach A i B ; długość odcinka AB
$\sphericalangle ABC$	kąt o wierzchołku B i ramionach: półprostej BA i półprostej BC
$\triangle ABC$	trójkąt ABC
$F_1 \equiv F_2; F_1 \sim F_2$	figura F_1 jest przystająca do figury F_2 ; figura F_1 jest podobna do figury F_2
$a \parallel b; a \perp b$	prosta a jest równoległa do prostej b ; prosta a jest prostopadła do prostej b
pr. AB	prosta przechodząca przez punkty A i B
pł. ABC	płaszczyzna przechodząca przez punkty A, B i C
$P; obw$	pole figury; obwód figury
$P_c; P_p; P_b$	pole powierzchni całkowitej; pole podstawy; pole powierzchni bocznej
V	objętość
$\sin \alpha; \cos \alpha$	sinus kąta α ; cosinus kąta α
$\operatorname{tg} \alpha$	tangens kąta α
$(a_n); a_n$	ciąg; n -ty wyraz ciągu (a_n)
S_n	suma n początkowych wyrazów ciągu
$\Omega; \overline{\Omega}$	zbiór zdarzeń elementarnych; liczba zdarzeń w zbiorze Ω
$\overline{A}$	liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A
$P(A)$	prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A
A'	zdarzenie przeciwne do zdarzenia A
EX	wartość oczekiwana
$\bar{x}; \bar{x}_w$	średnia wyników; średnia ważona wyników
$\sigma; \sigma^2$	odchylenie standardowe; wariancja



Stereometria

1

1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni

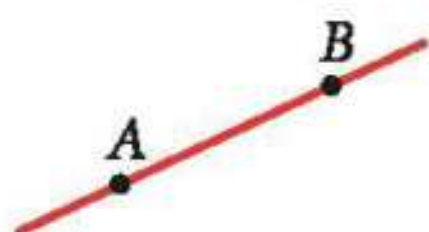
Umiejętności:

- rozpoznawanie wzajemnego położenia prostych i płaszczyzn w przestrzeni

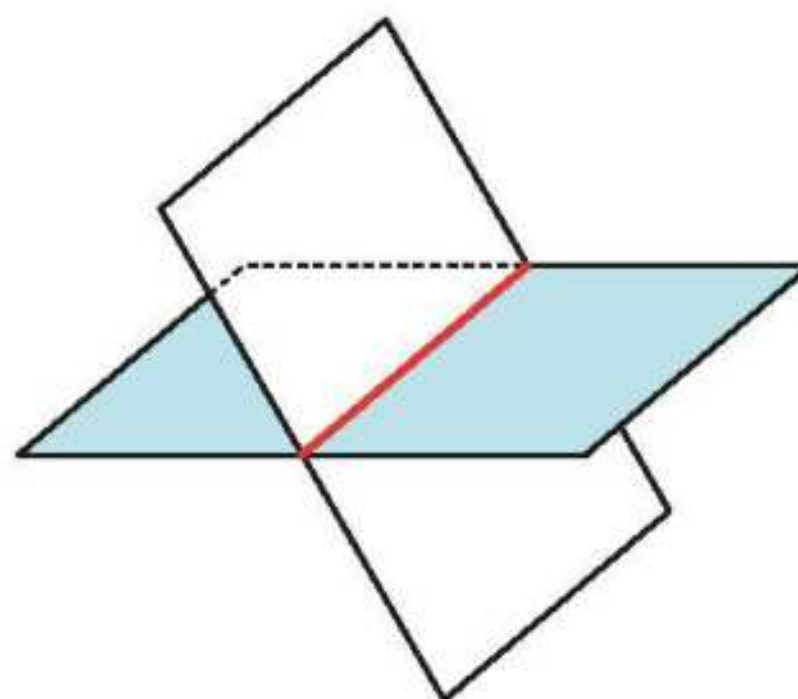
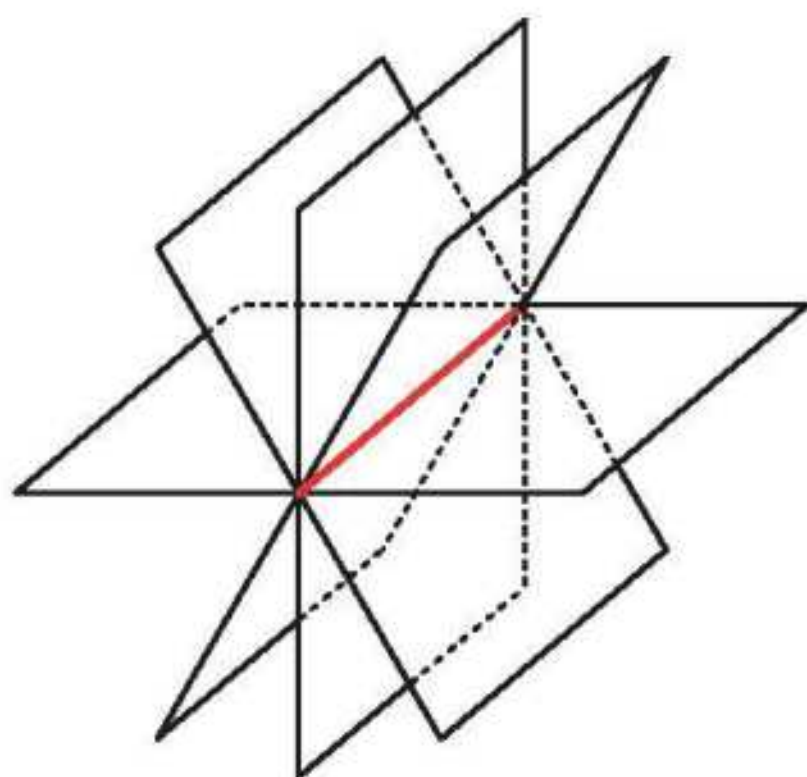
Tematy z geometrii przestrzeni (stereometrii) zaczniemy od przypomnienia i uporządkowania niektórych pojęć oraz zależności dotyczących prostych i płaszczyzn.

Wiemy, że:

- przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta,
- prosta przechodząca przez dwa różne punkty płaszczyzny jest zawarta w tej płaszczyźnie,

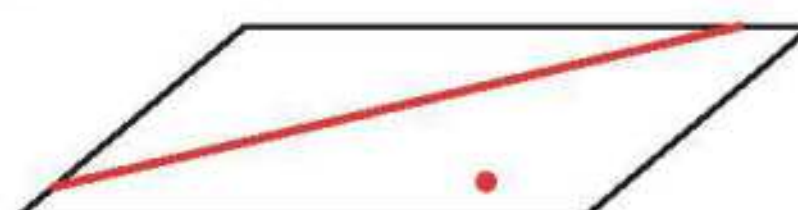
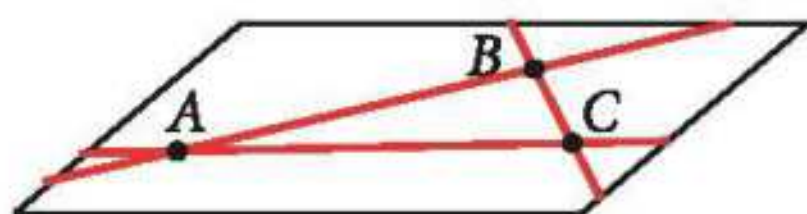


- każda prosta jest zawarta w nieskończenie wielu płaszczyznach,
- jeżeli dwie różne płaszczyzny mają punkt wspólny, to mają wspólną prostą, zwaną krawędzią przecięcia.

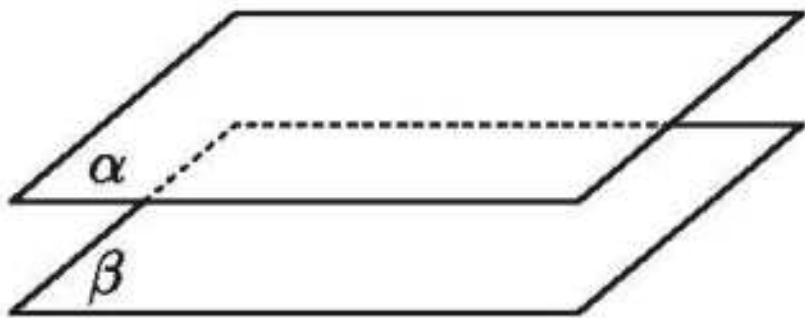
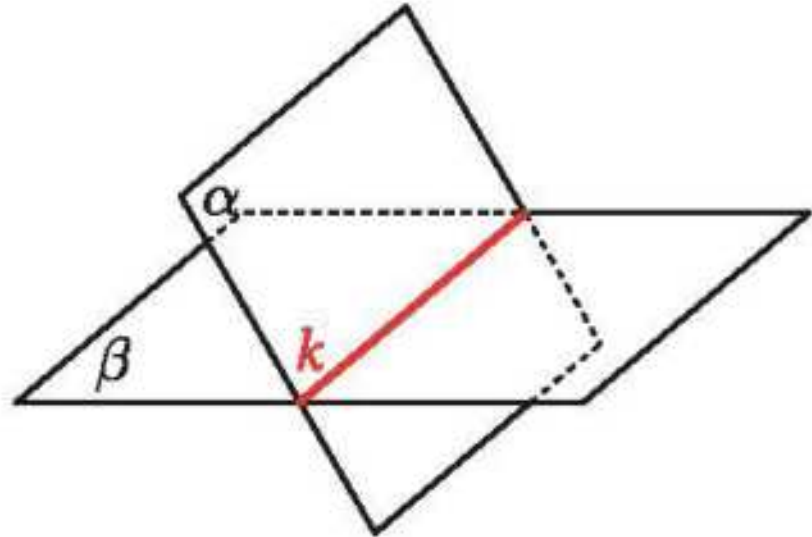


Płaszczyzna jest zbiorem punktów. W przestrzeni ma wszystkie właściwości występujące w planimetrii. Jednoznaczne wyznaczenie płaszczyzny polega na precyzyjnym określeniu, które punkty przestrzeni do niej należą, a które nie należą. Płaszczyzna jest jednoznacznie wyznaczona przez każdy z podanych zbiorów punktów:

- trzy niewspółliniowe punkty,
- dwie przecinające się proste,
- dwie rozłączne proste równoległe,
- prosta i punkt nienależący do niej.



Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn

Dwie różne płaszczyzny	
albo nie mają punktu wspólnego	albo mają punkt wspólny
 Płaszczyzny są równoległe: $\alpha \parallel \beta$.	 Płaszczyzny α i β przecinają się wzdłuż krawędzi k.

Przyjmujemy ponadto, że każda płaszczyzna jest równoległa do samej siebie.

Definicja

Mówimy, że dwie płaszczyzny:

- są **równoległe**, jeżeli nie mają punktów wspólnych albo mają wszystkie punkty wspólne,
- **przecinają się**, jeżeli mają wspólną prostą, nazywaną **krawędzią przecięcia**.

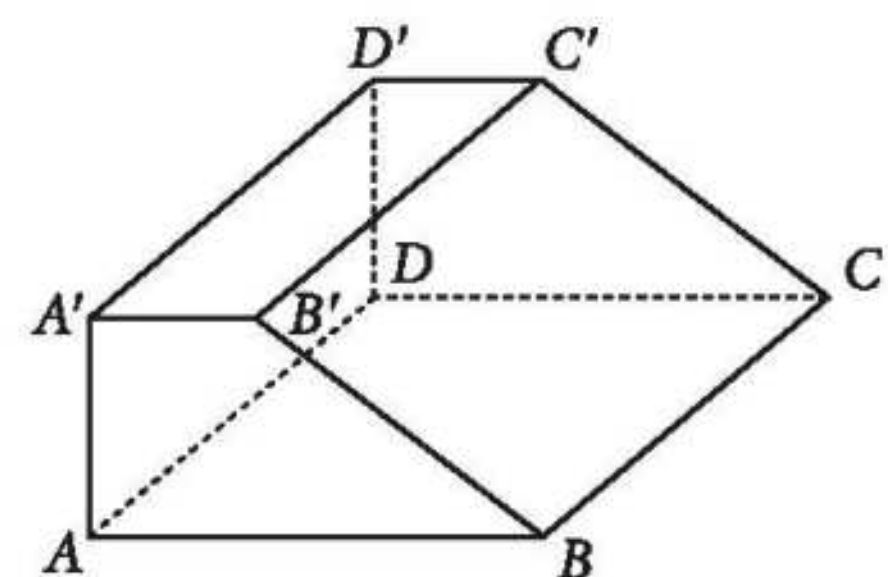
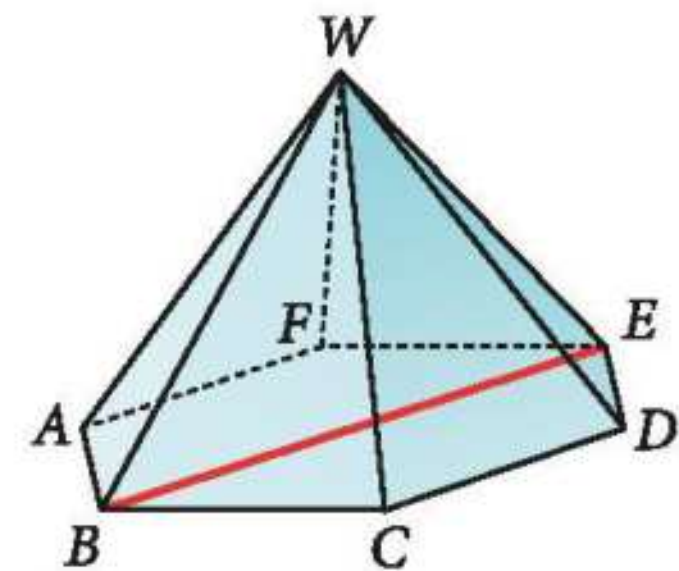
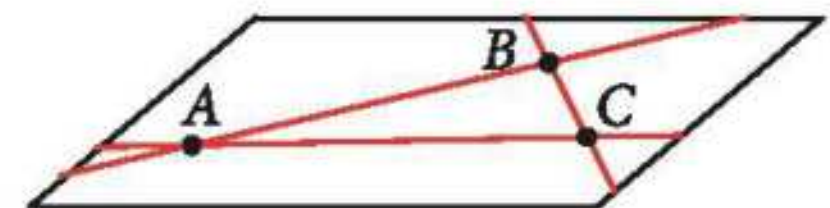
Płaszczyzny często oznacza się małymi literami alfabetu greckiego. Jeżeli podane są punkty A , B , C wyznaczające płaszczyznę, to będziemy ją oznaczać za pomocą skrótu „pł. ABC ”.

Skrótu „pł. $ABCD$ ” („pł. $ABCDE$ ” itd.) używamy wtedy, gdy chcemy wskazać więcej punktów leżących na płaszczyźnie, np. do opisu ścian wielościanów. Skrót „pr. BE ” oznacza natomiast prostą przechodzącą przez punkty B i E .

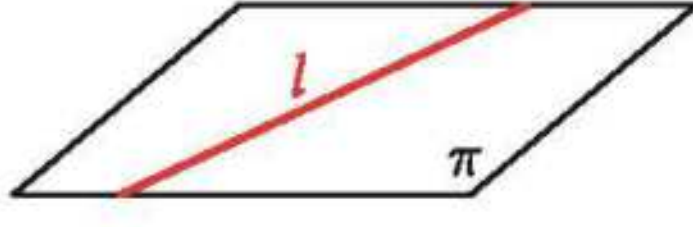
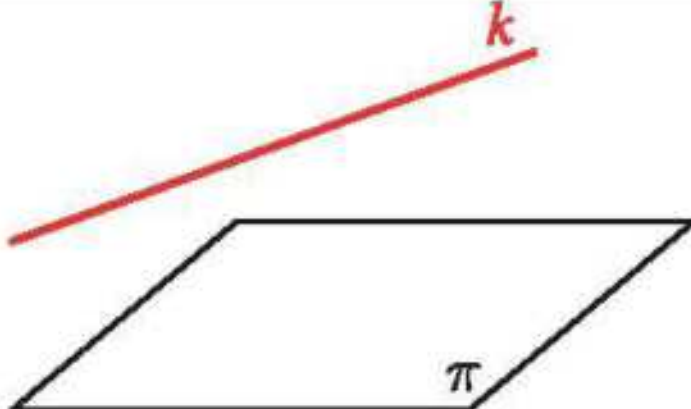
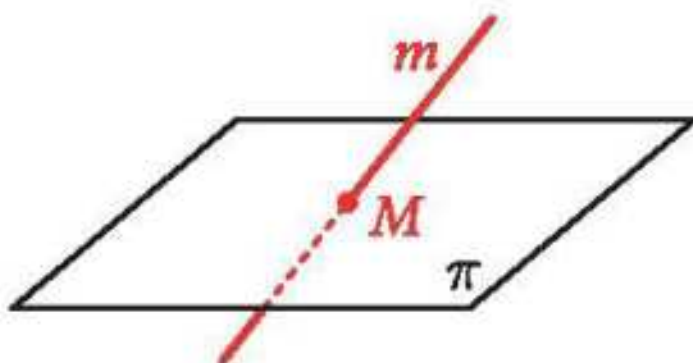
Przykład 1 ◀ zad. 1.3

W narysowanym wielościanie płaszczyzny równoległe są wyznaczone przez następujące pary ścian: $ABCD$ i $A'B'C'D'$ oraz $ABBA'$ i $DCC'D'$, czyli:

$$\begin{aligned} \text{pł. } ABCD &\parallel \text{ pł. } A'B'C'D' \text{ oraz} \\ \text{pł. } ABBA' &\parallel \text{ pł. } DCC'D' \end{aligned}$$



Wzajemne położenie płaszczyzny i prostej

 Prosta l ma wszystkie punkty wspólne z płaszczyzną π. Mówimy, że prosta l jest zawarta w płaszczyźnie π.	 Prosta k nie ma żadnego punktu wspólnego z płaszczyzną π.	 Prosta m ma dokładnie jeden punkt wspólny z płaszczyzną π. Mówimy, że prosta m przecina płaszczyznę π w punkcie M.
--	---	---

O prostych l i k mówimy, że są równoległe do płaszczyzny π :

$$l \parallel \pi \text{ i } k \parallel \pi$$

Definicja

Mówimy, że prosta:

- jest **równoległa do płaszczyzny**, jeżeli nie ma z nią punktów wspólnych albo jeżeli jest w niej zawarta,
- **przecina płaszczyznę**, jeżeli ma z nią jeden punkt wspólny.

Przykład 2

Opiszemy położenie prostej BM względem płaszczyzn wyznaczonych przez ściany sześciennego pudełka przedstawionego na rysunku.

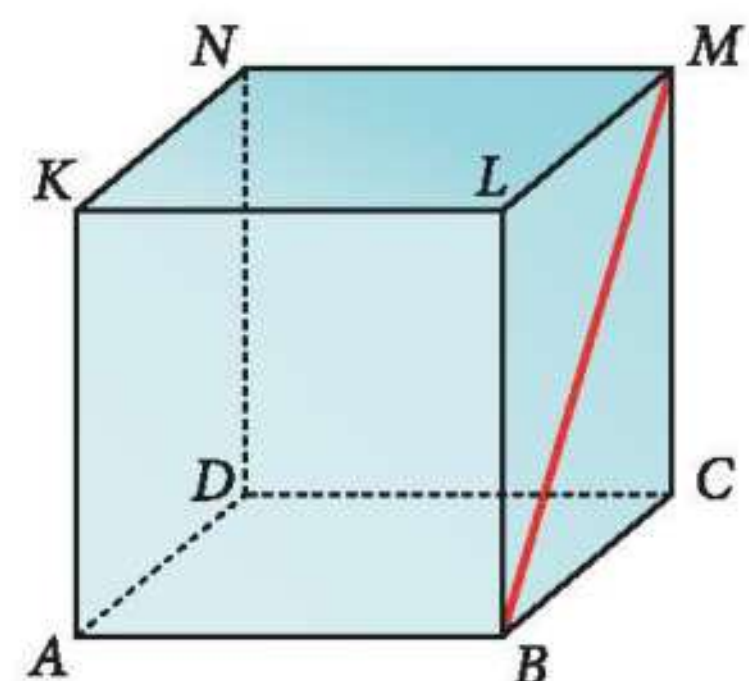
Rozwiązanie

Prosta BM jest równoległa do płaszczyzny:

- $BCML$, ponieważ jest zawarta w tej płaszczyźnie,
- $ADNK$, bo nie ma z tą płaszczyzną żadnego punktu wspólnego.

Prosta BM przecina płaszczyznę:

- $ABCD$ w punkcie B ,
- $ABLK$ w punkcie B ,
- $KLMN$ w punkcie M ,
- $DCMN$ w punkcie M .



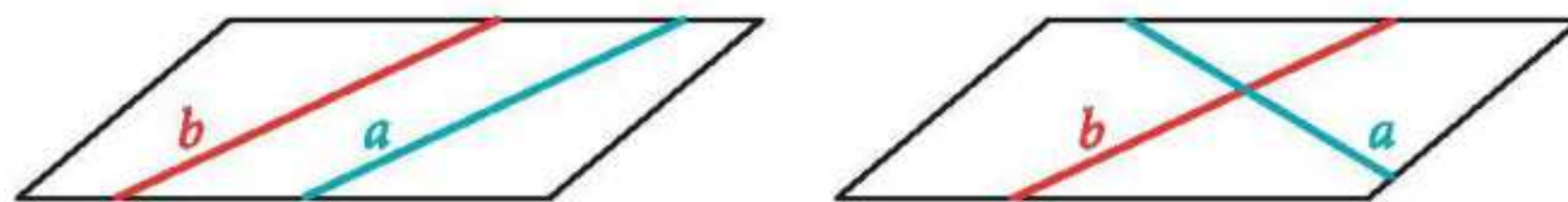
Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

Definicja

Jeżeli dwie różne proste zawarte są w jednej płaszczyźnie, to takie proste nazywamy **współpłaszczyznowymi**.

Przykład 3

Proste a i b są współpłaszczyznowe.



Definicja

Dwie proste, przez które nie można poprowadzić jednej płaszczyzny, nazywamy **skośnymi**.

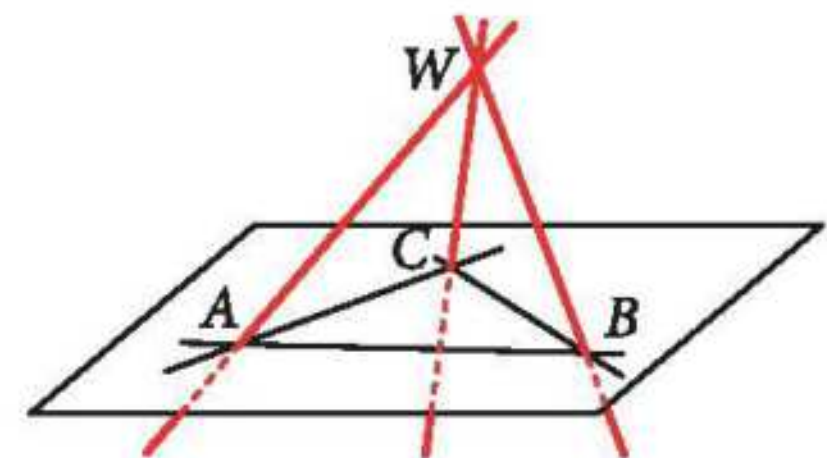
Przykład 4 ◀ zad. 1.5–1.7

Wypiszemy wszystkie pary prostych skośnych pokazanych na rysunku.

Rozwiązanie

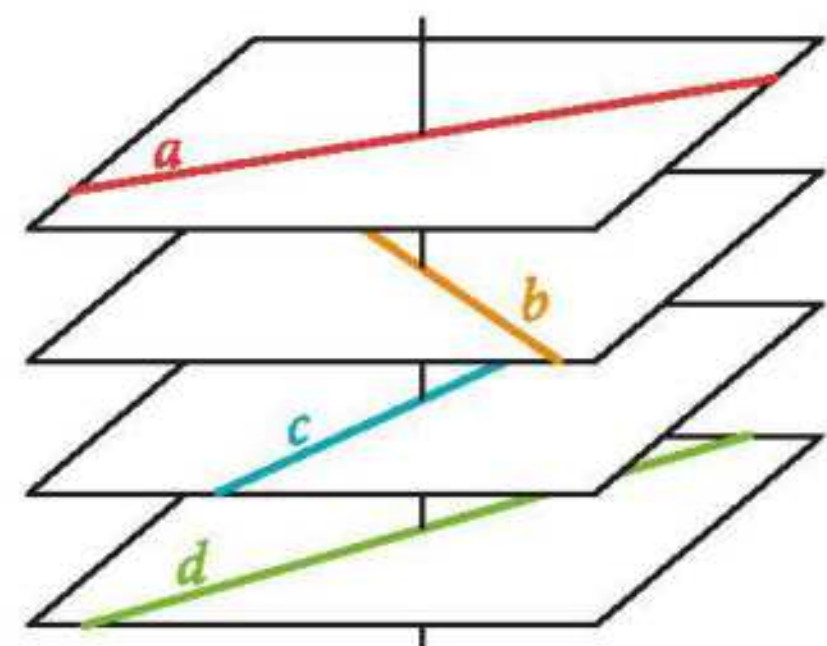
Skośne są proste:

- pr. AB i pr. CW ,
- pr. AC i pr. BW ,
- pr. BC i pr. AW .



Przykład 5

Na rysunku obok pokazujemy sposób umieszczenia w przestrzeni dowolnej liczby prostych, z których każde dwie są skośne (na rysunku mamy model utworzony z czterech prostych: a , b , c , d).



Równoległość i prostopadłość w przestrzeni

Jeżeli dwie różne proste na płaszczyźnie nie mają żadnego punktu wspólnego, to są równoległe. Przyjmujemy również, że każda prosta jest równoległa do samej siebie, czyli $a \parallel a$.



Równoległość w przestrzeni definiujemy tak, aby odróżnić proste skośne od prostych równoległych. Proste skośne nie mają punktów wspólnych, ale nie nazywamy ich równoległymi.

Definicja

Dwie proste nazywamy **równoległymi w przestrzeni**, jeżeli są współpłaszczyznowe i równoległe na płaszczyźnie, na której leżą.

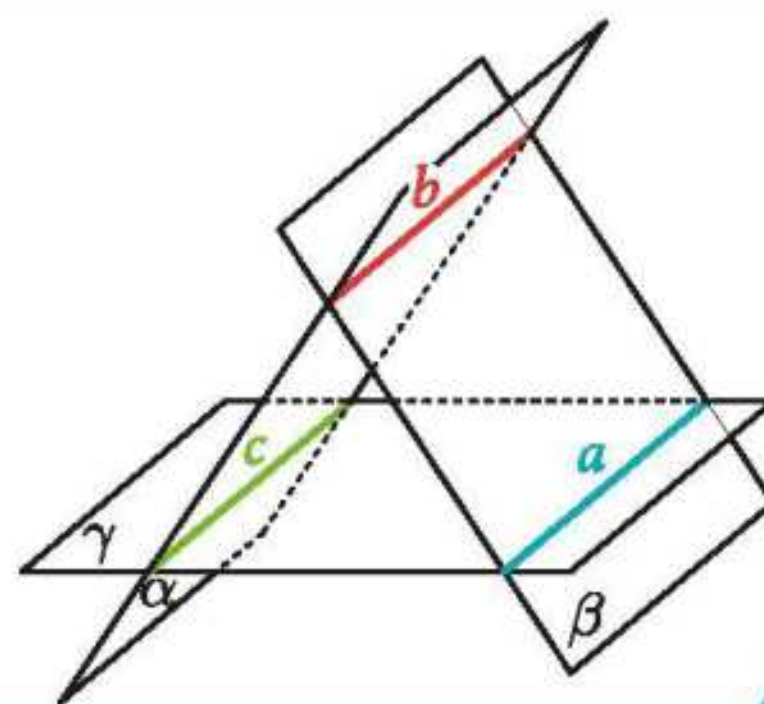
Przykład 6

Proste a , b , c są równoległe w przestrzeni, ponieważ:

$a \parallel b$ w płaszczyźnie β ,

$a \parallel c$ w płaszczyźnie γ ,

$b \parallel c$ w płaszczyźnie α .



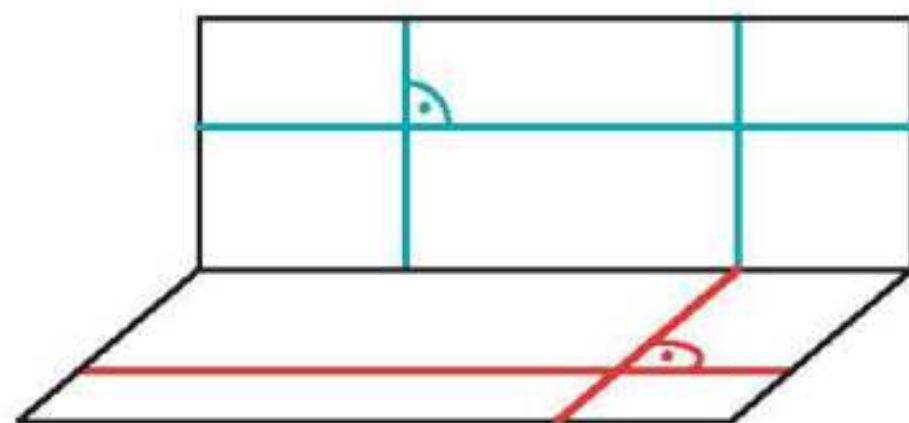
Zdefiniowaliśmy równoległość prostej a do płaszczyzny α oraz równoległość dwóch płaszczyzn.

Zauważmy jeszcze, że przez każdy punkt przestrzeni przechodzi:

- dokładnie jedna prosta równoległa do danej prostej a ,
- nieskończenie wiele prostych równoległych do danej płaszczyzny α – zbiór wszystkich punktów należących do tych prostych tworzy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny α ,
- dokładnie jedna płaszczyzna równoległa do danej płaszczyzny α .

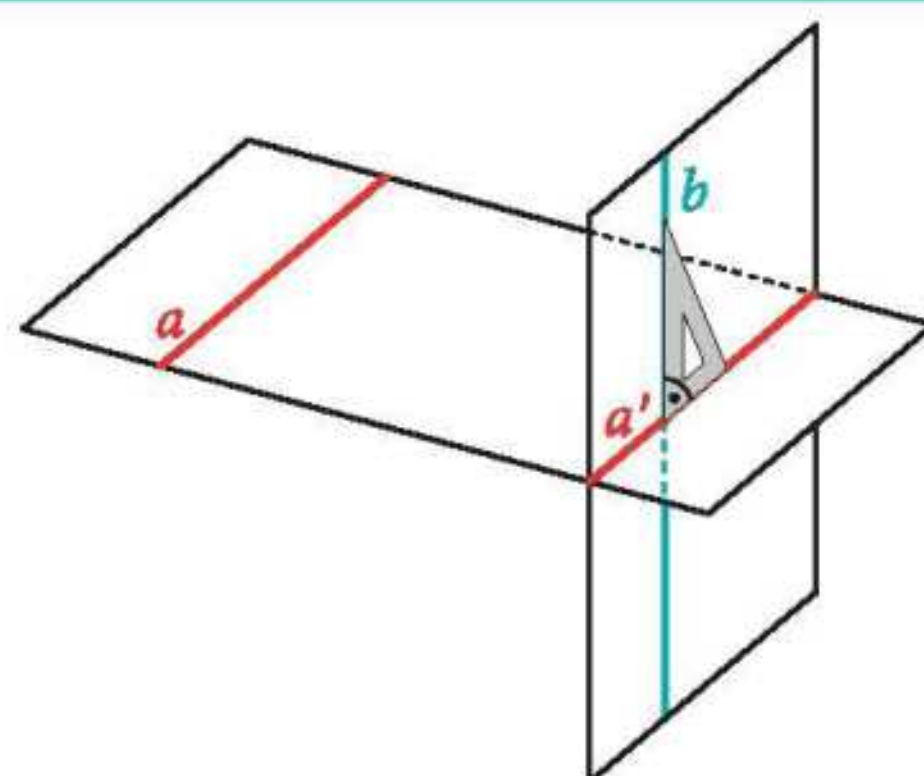


Dwie proste przecinające się na płaszczyźnie pod kątem prostym nazywamy prostymi prostopadłymi. Prostopadłość prostych w przestrzeni definiujemy w bardziej ogólny sposób, tak aby rozszerzyć pojęcie prostopadłości prostych na proste skośne.

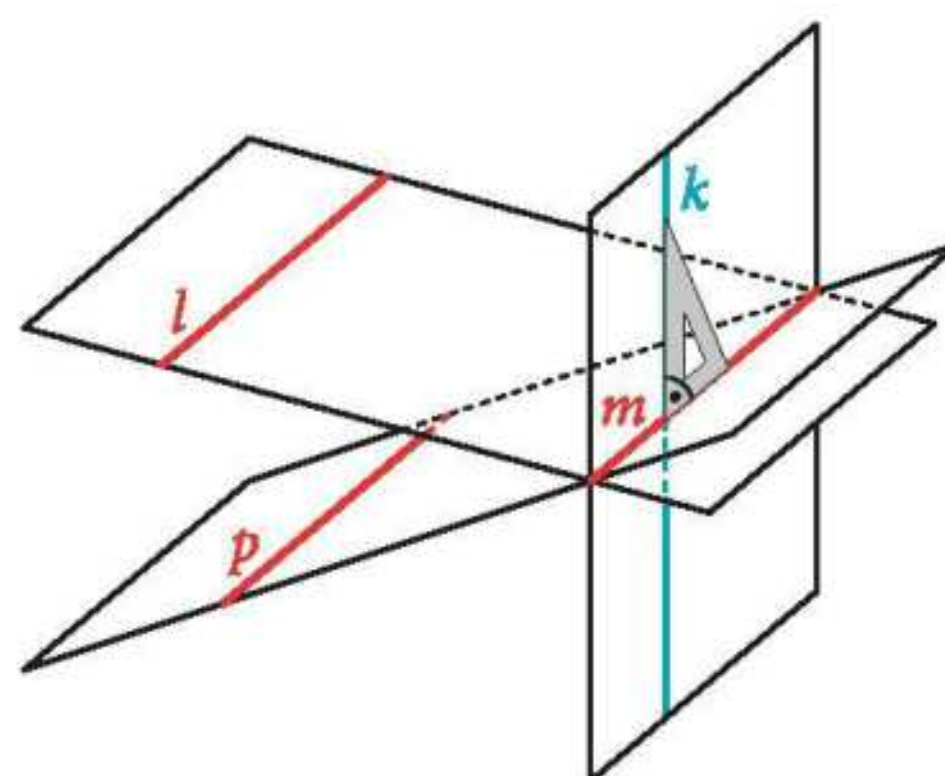


Definicja

Prosta a jest prostopadła do prostej b w przestrzeni ($a \perp b$), gdy istnieje prosta a' równoległa do prostej a i przecinająca prostą b pod kątem prostym.



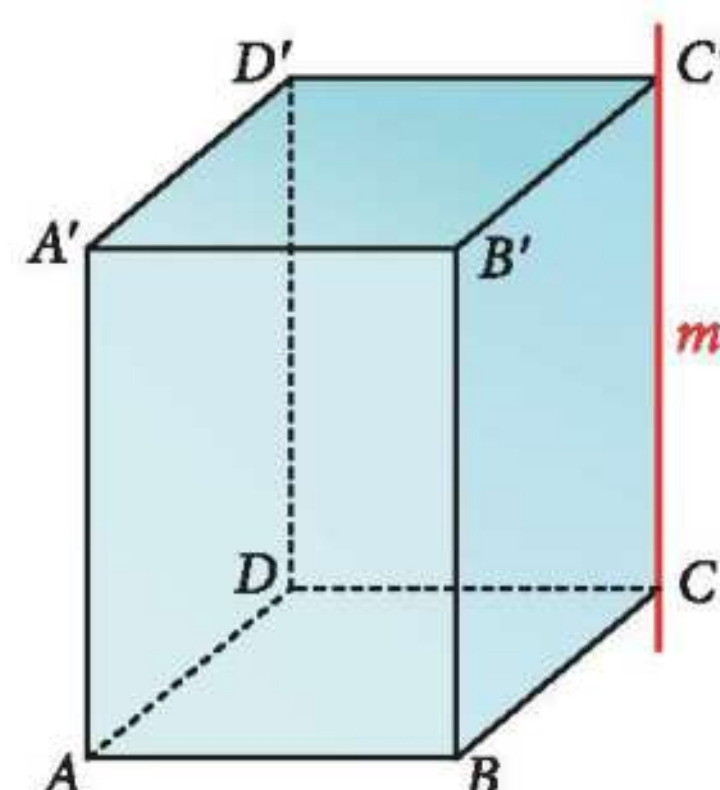
Na rysunku obok przedstawiona jest sytuacja, w której proste k i m przecinają się pod kątem prostym, czyli $k \perp m$. Proste l i p są równoległe do prostej m (i skośne do prostej k). Zgodnie z definicją $k \perp l$ i $k \perp p$. Prosta k jest prostopadła w przestrzeni do każdej prostej równoległej do m .

**Przykład 7** ◀ zad. 1.11

Wypiszemy wszystkie krawędzie równoległe i wszystkie krawędzie prostopadłe do prostej m w prostokącie $ABCD A'B'C'D'$.

Rozwiązanie

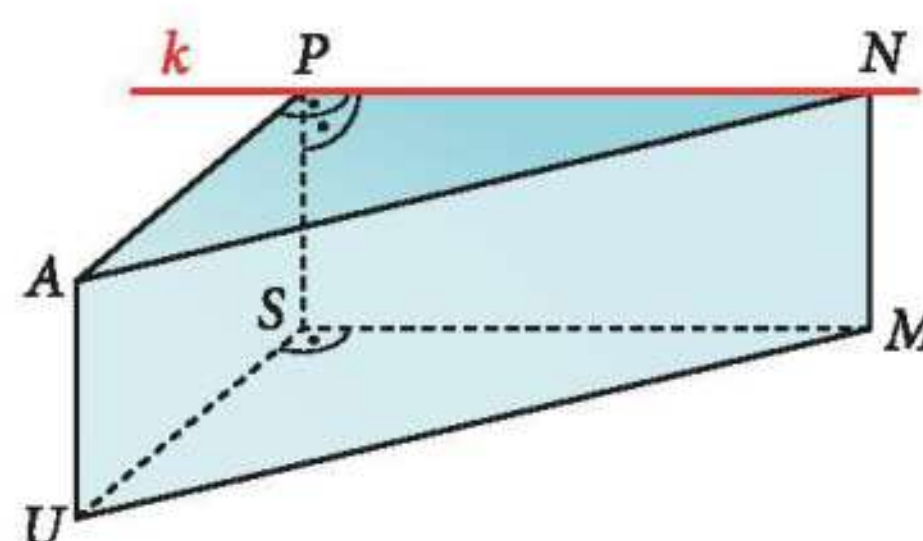
- Krawędzie równoległe:
 $CC' \parallel m$ (bo krawędź CC' jest zawarta w prostej m),
 $AA' \parallel m$, $BB' \parallel m$, $DD' \parallel m$.
- Krawędzie prostopadłe:
 $B'C' \perp m$, $A'D' \perp m$, $D'C' \perp m$, $A'B' \perp m$,
 $BC \perp m$, $AD \perp m$, $DC \perp m$, $AB \perp m$.

**Przykład 8** ◀ zad. 1.12

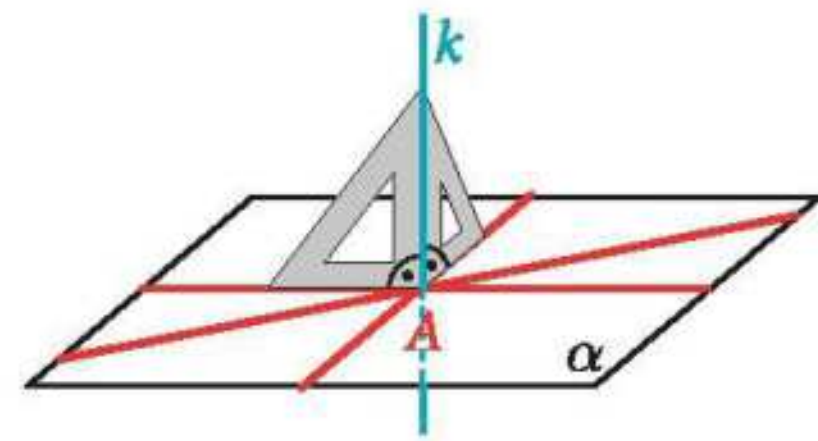
Wypiszemy krawędzie prostopadłe do prostej k w graniastosłupie prostym $SUMPAN$, którego podstawą jest trójkąt prostokątny.

Rozwiązanie

$$AP \perp k, \quad US \perp k, \quad PS \perp k, \\ MN \perp k, \quad AU \perp k.$$



Jeżeli ustawimy ekierki na stole w sposób przedstawiony na rysunku, to prosta k , zawierająca jedną z przyprostokątnych, będzie prostopadła do każdej prostej przechodzącej przez punkt A i zawartej w płaszczyźnie stołu. Jest zatem prostopadła do dowolnej prostej zawartej w płaszczyźnie stołu.



Definicja

Mówimy, że **prosta k jest prostopadła do płaszczyzny α** ($k \perp \alpha$), jeżeli jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie α .

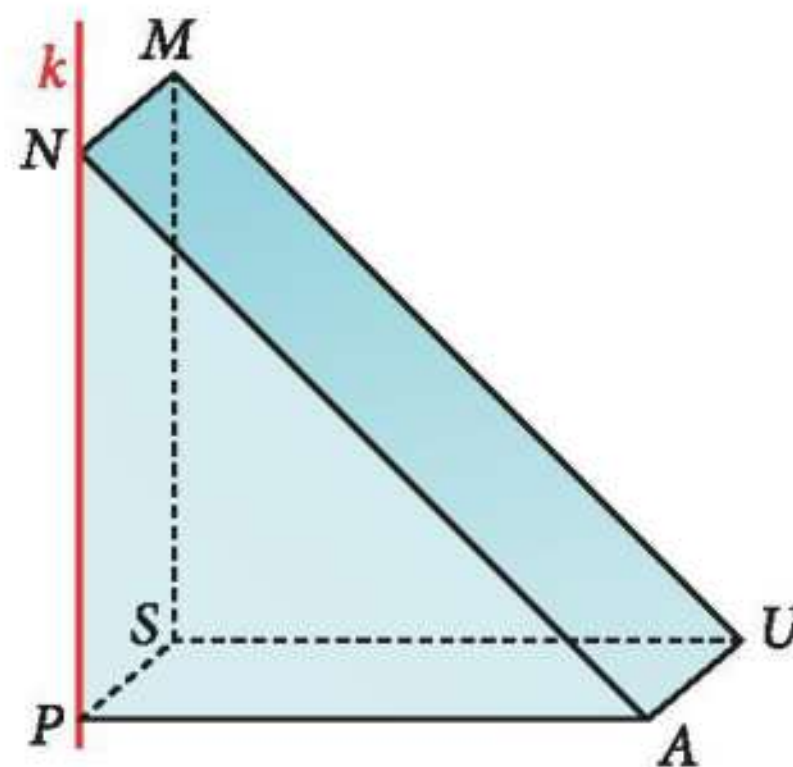
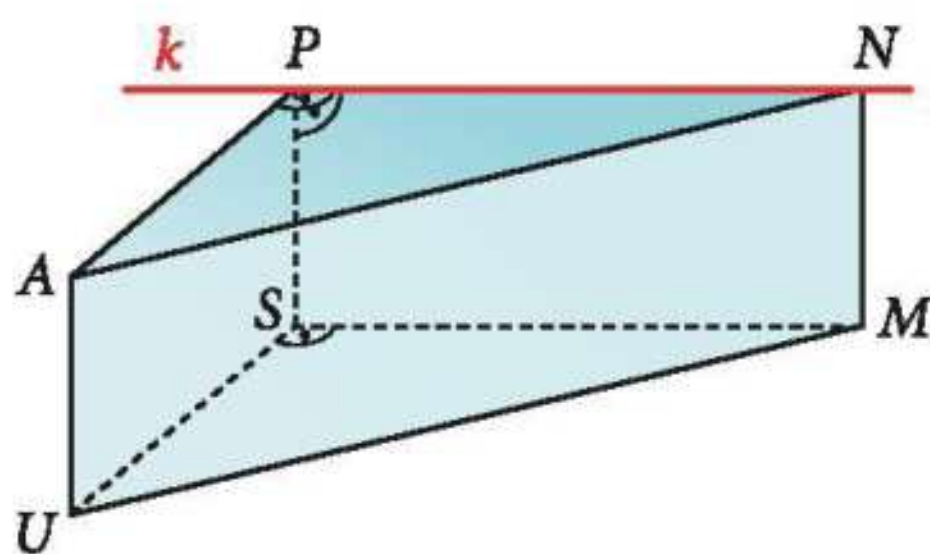
Przyjmujemy bez dowodu następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Prosta prostopadła do dwóch przecinających się prostych jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste.

Przykład 9

Prosta k z przykładu 8 jest prostopadła do dwóch prostych: AP i PS , przecinających się w punkcie P . Jest więc prostopadła do płaszczyzny zawierającej ścianę boczną $PAUS$. Rysunek po prawej stronie przedstawia ten sam graniastosłup, ale stojący na ścianie $PAUS$.



Definicja

Mówimy, że **płaszczyzna α jest prostopadła do płaszczyzny β** , jeżeli α zawiera prostą prostopadłą do płaszczyzny β .

Jeżeli płaszczyzna α zawiera prostą prostopadłą do płaszczyzny β , to płaszczyzna β zawiera prostą prostopadłą do płaszczyzny α (można to pokazać na modelu z ekierką), zatem prawdziwe jest następujące twierdzenie, które podajemy bez dowodu.

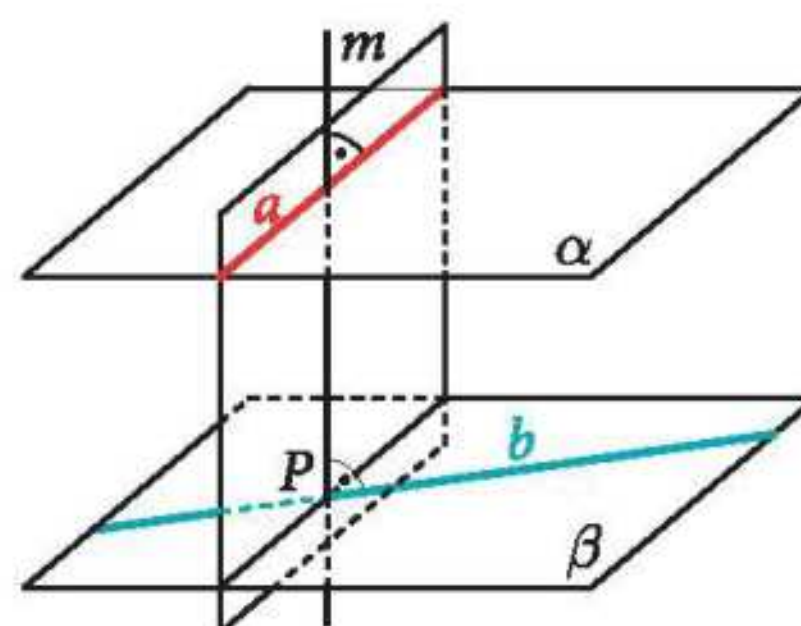
Twierdzenie

Jeżeli płaszczyzna α jest prostopadła do płaszczyzny β , to płaszczyzna β jest prostopadła do płaszczyzny α .

W przykładzie 9 płaszczyznami prostopadłymi są np.: pł. $PAUS$ i pł. $PSMN$.

Zauważmy na koniec, że w przestrzeni dwie dowolne proste mają wspólną, przecinającą je, prostą prostopadłą. Dla prostych skośnych można ją wyznaczyć w następujący sposób:

Przez proste skośne a i b prowadzimy płaszczyzny równoległe α i β . Następnie przez jedną z prostych (na rysunku jest nią prosta a) prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do β , która przecina prostą b w punkcie P . Szukana prosta m jest zawarta w tej płaszczyźnie, przechodzi przez punkt P i jest prostopadła do β , zatem przecina każdą z prostych a , b i jest do nich prostopadła.

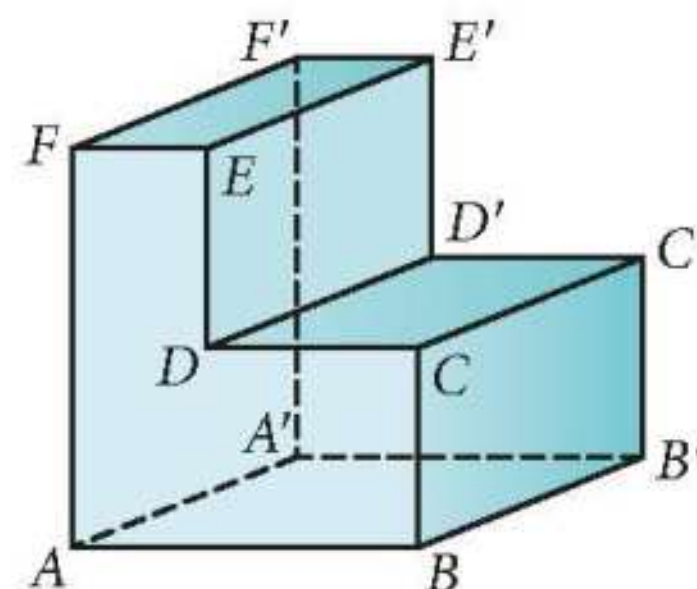
**Zadania**

- 1.1.** Dane są prosta k i płaszczyzna α . Oceń prawdziwość podanych zdań.
- A. Istnieje dokładnie jedna płaszczyzna zawierająca prostą k i prostopadła do płaszczyzny α .
 - B. Istnieje co najmniej jedna płaszczyzna zawierająca prostą k i prostopadła do płaszczyzny α .
 - C. Istnieje nieskończenie wiele płaszczyzn zawierających prostą k i prostopadłych do płaszczyzny α .

- 1.2.** Jakim zbiorem może być zbiór punktów wspólnych trzech różnych płaszczyzn? Rozważ różne możliwości położenia płaszczyzn.

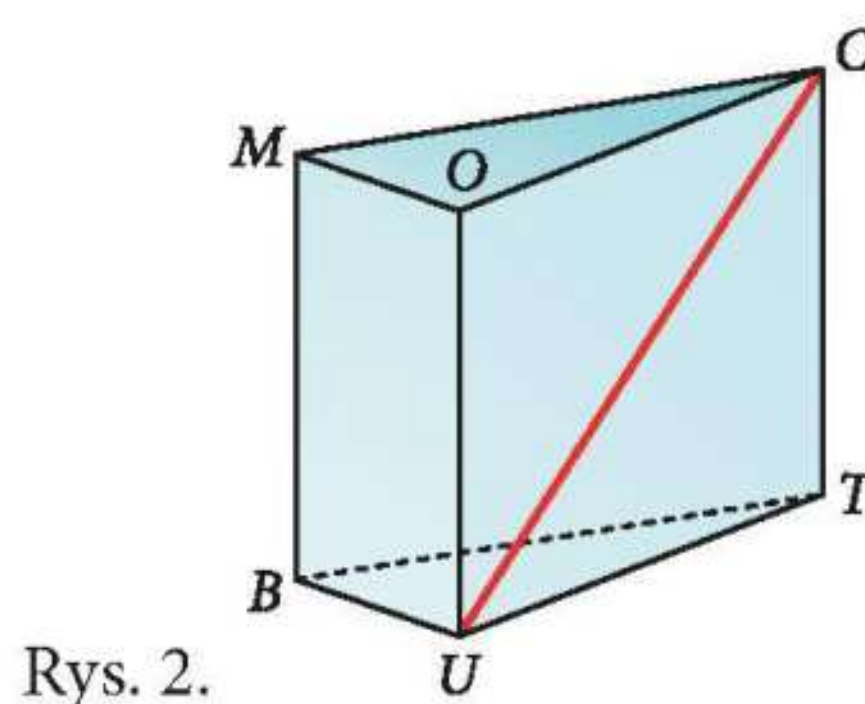
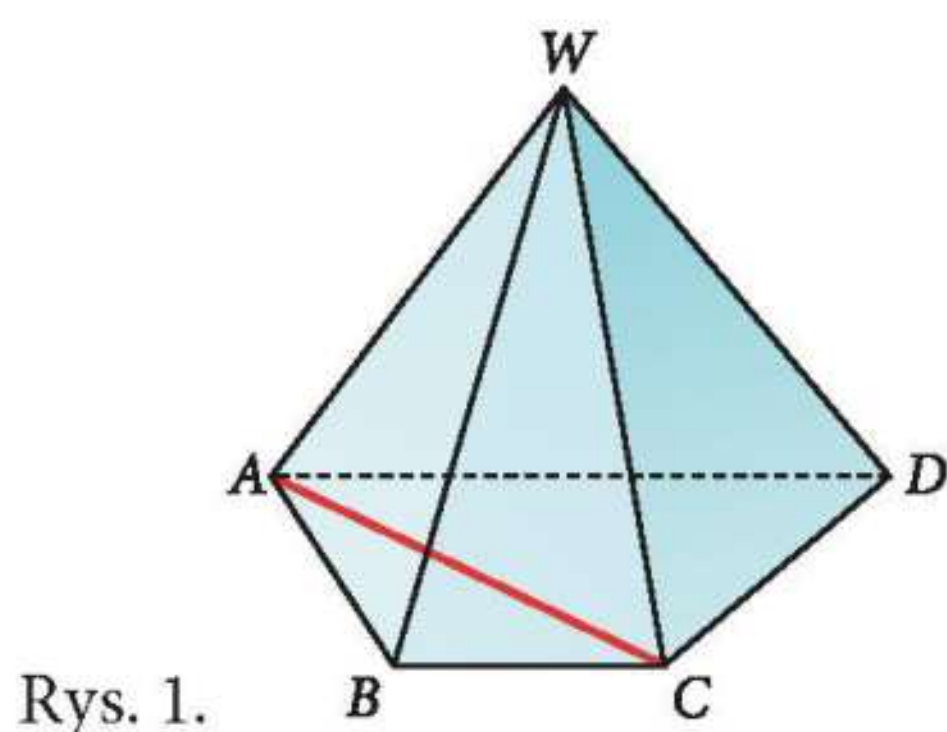
- 1.3.** Wskaż wszystkie płaszczyzny równoległe w wielościanie na rysunku obok.

- 1.4.** Punkty K , O , Z , A nie leżą na jednej płaszczyźnie. Wymień wszystkie płaszczyzny wyznaczone przez każde trzy spośród tych punktów. Podaj krawędzie przecięcia każdej pary płaszczyzn.

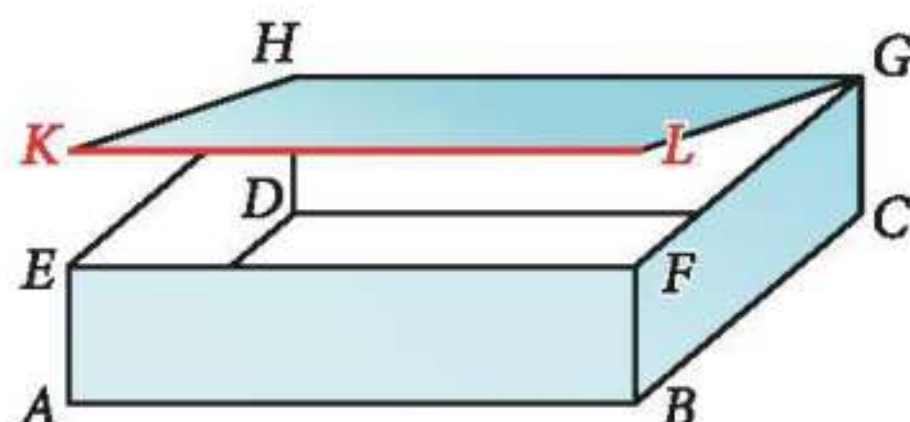


1.5. Na rysunku 1 przedstawiony jest wielościan $ABCDW$. Wypisz wszystkie jego krawędzie, które są zawarte w prostych skośnych do prostej AC .

1.6. Na rysunku 2 przedstawiono graniastosłup prosty $BUTMOC$ o podstawie trójkątnej. Wypisz wszystkie jego krawędzie, które są zawarte w prostych skośnych do prostej UC .



1.7. Na rysunku przedstawiono otwarte prostopadłościenne pudełko. Wszystkie jego narożniki oznaczono literami. Wypisz krawędzie zawarte w prostych skośnych do prostej KL .



1.8. Dane są dwie proste skośne k i l . Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny π równoległej do obydwu tych prostych i nieposiadającej z nimi punktów wspólnych.

a) Ile jest takich płaszczyzn?

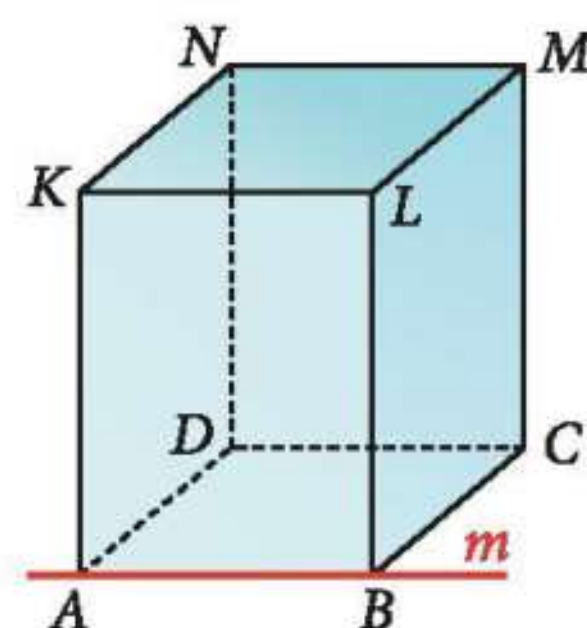
b) Czy przez każdy punkt przestrzeni nienależący do żadnej z tych prostych można poprowadzić taką płaszczyznę? Jeżeli tak, to ile jest takich płaszczyzn przechodzących przez dany punkt?

✱ **1.9.** Dane są proste skośne k i l . Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) prostej m przecinającej proste k oraz l i równoległej do danej prostej p . Czy dla każdej prostej p istnieje taka prosta m ?

D ✱ **1.10.** Trzy proste nie leżą w jednej płaszczyźnie, ale każde dwie spośród nich się przecinają. Wykaż, że proste te mają jeden punkt wspólny.

1.11. Na rysunku pokazano prostopadłościan z wyróżnioną krawędzią AB , wyznaczającą prostą m . Wypisz wszystkie

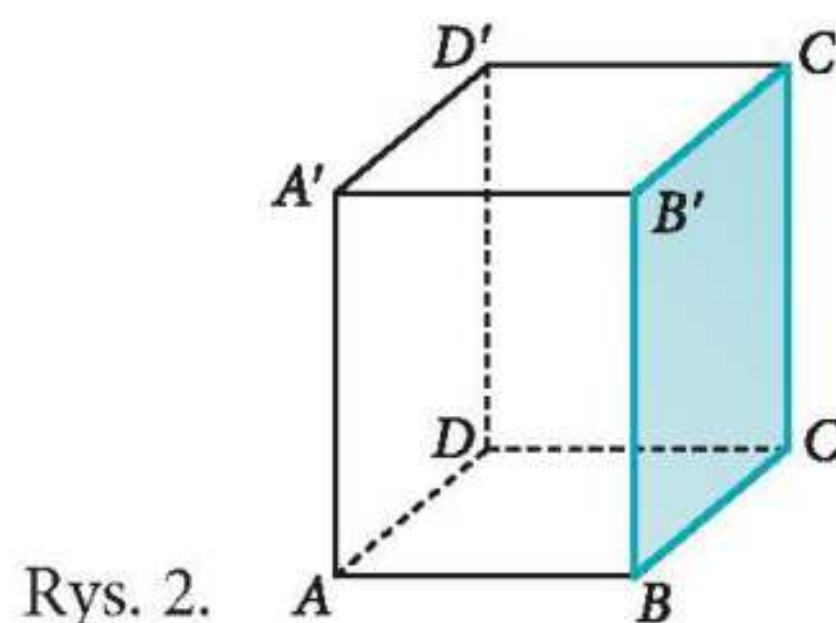
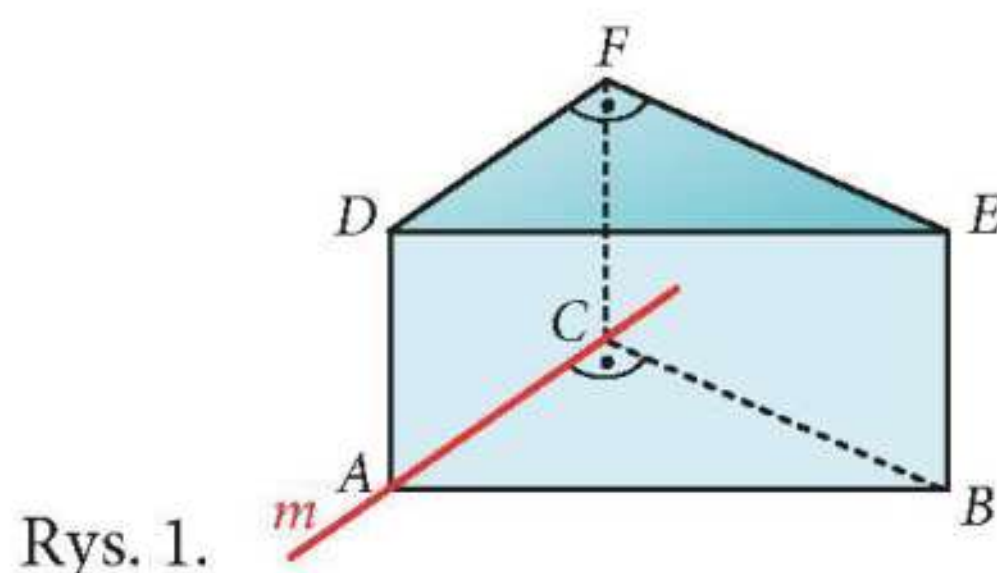
- krawędzie równoległe do m .
- krawędzie prostopadłe do m .
- krawędzie skośne do m .
- ściany równoległe do m .
- ściany prostopadłe do m .



1.12. Wypisz krawędzie prostopadłe do prostej m w graniastosłupie prostym $ABCDEF$, którego podstawą jest trójkąt prostokątny (rys. 1).

1.13. Na rysunku 2 przedstawiony jest prostopadłościan z wyróżnioną kolorem ścianą α . Wypisz wszystkie

- krawędzie prostopadłe do α .
- krawędzie równoległe do α .
- ściany równoległe do α .
- ściany prostopadłe do α .



1.14. Czy dwie proste prostopadłe do tej samej płaszczyzny mogą być skośne?

1.15. Czy dwie płaszczyzny prostopadłe do tej samej prostej mogą się przecinać?

1.16. Dana jest płaszczyzna π i punkt A nieleżący na niej. Ile jest płaszczyzn prostopadłych do π przechodzących przez punkt A ? Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny α prostopadłej do π , przechodzącej przez punkt A i równoległej do danej prostej k .

✳ **1.17.** Dane są dwie proste skośne a i b . Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny równoległej do prostej a i zawierającej prostą b .

✳ **1.18.** Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny zawierającej daną prostą a i prostopadłej do danej płaszczyzny π . Rozważ przypadki, gdy $a \perp \pi$ oraz gdy a nie jest prostopadła do π .

✳ **1.19.** Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny przechodzącej przez dany punkt P , prostopadłej do danej płaszczyzny π i równoległej do danej prostej k .

D 1.20. Wykaż, że dla pary prostych skośnych a i b istnieje dokładnie jedna para płaszczyzn α i β takich, że a zawiera się w α , b zawiera się w β i $\alpha \parallel \beta$.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Punkty P , Q , R , S nie leżą na jednej płaszczyźnie. Wskaż liczbę płaszczyzn wyznaczonych przez każde trzy spośród tych punktów.

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

2. Proste AB i CD są skośne. Jak są położone proste AC i BD ?

- A. Są równoległe. C. Są skośne.
B. Przecinają się. D. Jest za mało danych, żeby odpowiedzieć na to pytanie.

3. Dane są prosta k i punkt P nieleżący na tej prostej. Ile istnieje prostych, a ile płaszczyzn przechodzących przez punkt P i równoległych do prostej k ?

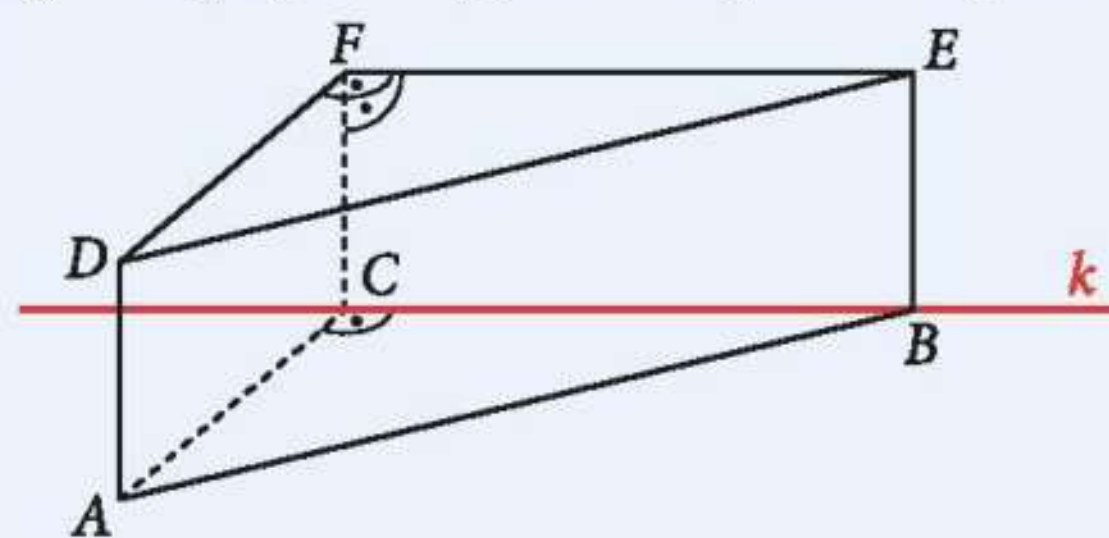
- A. Jedna prosta i jedna płaszczyzna.
B. Jedna prosta i nieskończenie wiele płaszczyzn.
C. Nieskończenie wiele prostych i jedna płaszczyzna.
D. Nieskończenie wiele prostych i nieskończenie wiele płaszczyzn.

4. Różne proste a i b są prostopadłe do prostej k . Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Proste a i b mogą być równoległe.
B. Proste a i b mogą być prostopadłe.
C. Proste a i b mogą być skośne.

5. Podstawą graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku jest trójkąt prostokątny. Prosta k zawiera przyprostokątną tego trójkąta. Wypisz wszystkie wyznaczone przez wierzchołki tego graniastosłupa

- a) krawędzie równoległe do prostej k .
b) krawędzie prostopadłe do prostej k .
c) krawędzie skośne do prostej k .
d) płaszczyzny równoległe do prostej k .
e) płaszczyzny prostopadłe do prostej k .



6. Dane są prosta k i różne punkty P , Q nieleżące na niej. Ile istnieje płaszczyzn zawierających punkty P i Q i równoległych do prostej k ? Rozważ różne położenia punktów względem prostej.

7. Dane są dwie proste skośne a i b oraz punkt P nienależący do żadnej z nich. Zbuduj model lub wykonaj rysunek płaszczyzny równoległej do prostej a i do prostej b oraz przechodzącej przez punkt P .

2. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

Umiejętności:

- rozpoznawanie w graniastopach i ostrosłupach kątów między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi), obliczanie miar tych kątów
- rozpoznawanie w graniastopach i ostrosłupach kątów między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), obliczanie miar tych kątów
- stosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków oraz miar kątów

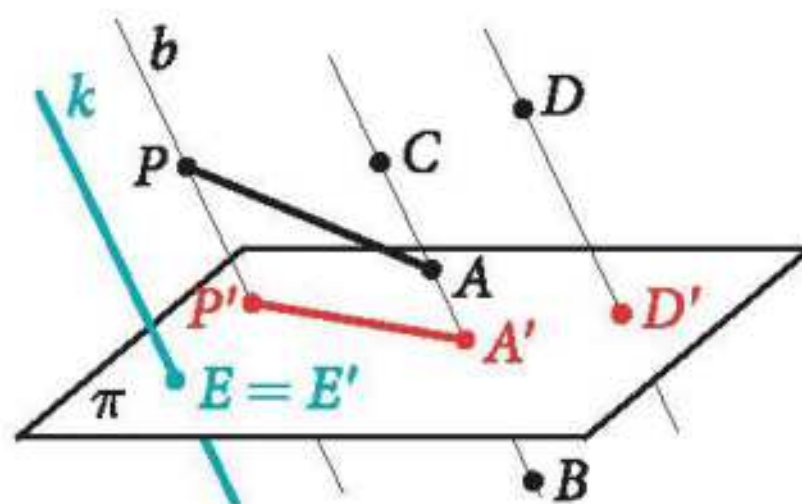
Rzut równoległy

Wiemy, że przez każdy punkt przestrzeni przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do danej prostej. Obserwację tę wykorzystamy do zdefiniowania przekształcenia, które dowolnemu punktowi przestrzeni przyporządkowuje punkt nazywany jego rzutem równoległym na ustaloną płaszczyznę.

Definicja

Niech będzie dana płaszczyzna π i prosta k przecinająca tę płaszczyznę. Przez punkt P przestrzeni prowadzimy prostą b równoległą do prostej k . Prosta b przecina płaszczyznę π w punkcie P' , który nazywamy **rzutem równoległym** punktu P na płaszczyznę π w kierunku k .

Na rysunku zaznaczone są rzuty równoległe kilku punktów na płaszczyznę π w kierunku prostej k .



Zauważmy, że:

- przekształcenie to różnym punktom przestrzeni może przyporządkować ten sam punkt płaszczyzny π , np. rzutem każdego z punktów A , B , C jest punkt A' ,
- rzutem punktu należącego do płaszczyzny π jest on sam (punkty płaszczyzny π są punktami stałymi w tym przekształceniu).

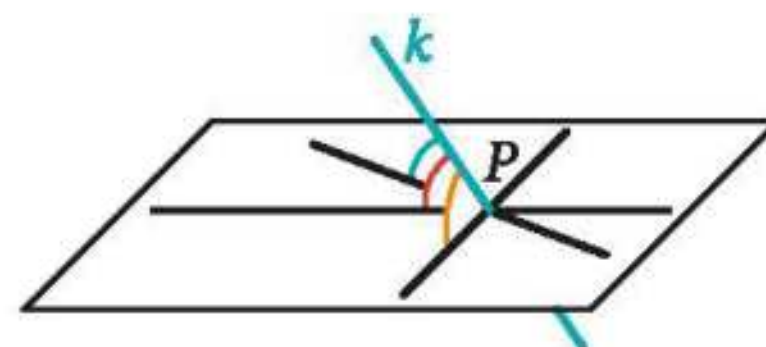
W rzucie równoległym:

- obrazem odcinka jest albo odcinek ($A'P'$ jest obrazem odcinka AP), albo – gdy rzutowany odcinek jest równoległy do kierunku rzutu – punkt* (A' jest obrazem np. odcinka AB),
- obrazem prostej jest prosta albo – gdy rzutowana prosta jest równoległa do kierunku rzutu – punkt**,
- obrazem przestrzeni jest płaszczyzna π .

Szczególnym przypadkiem rzutu równoległego jest rzut w kierunku prostej prostopadłej do płaszczyzny π . Nazywamy go wówczas **rzutem prostokątnym** (prostokątnym) na płaszczyznę π .

Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

Jeżeli prosta k przecina w punkcie P płaszczyznę π , ale nie jest do niej prostopadła, to tworzy różne kąty z prostymi zawartymi w π i przechodzącymi przez P . Jeden z tych kątów ma szczególne znaczenie.



Definicja

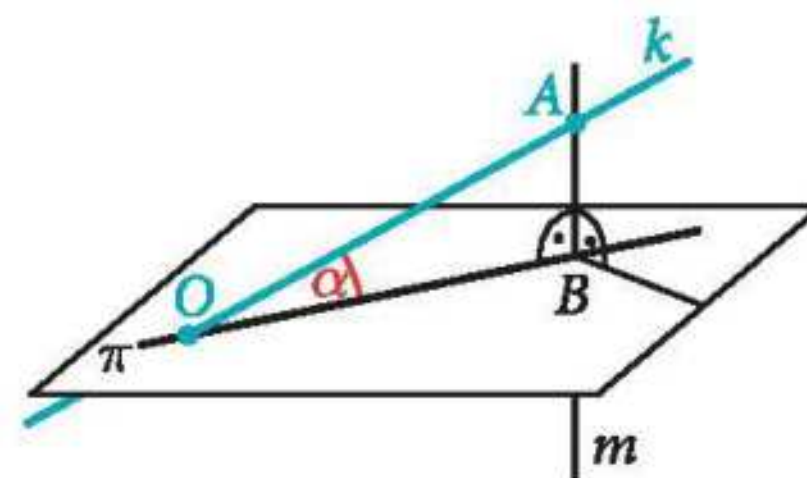
Kątem nachylenia prostej do płaszczyzny, przy założeniu, że prosta nie jest do niej ani prostopadła, ani równoległa, nazywamy kąt ostry utworzony przez tę prostą i jej rzut prostokątny na płaszczyznę.

Kąt nachylenia prostej k do płaszczyzny π wyznaczamy w kolejnych krokach.

Krok 1: Na prostej k wybieramy punkt A różny od O – punktu przecięcia płaszczyzny.

Krok 2: Przez punkt A prowadzimy prostą m prostopadłą do płaszczyzny π i przecinającą ją w punkcie B (jest to rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę π).

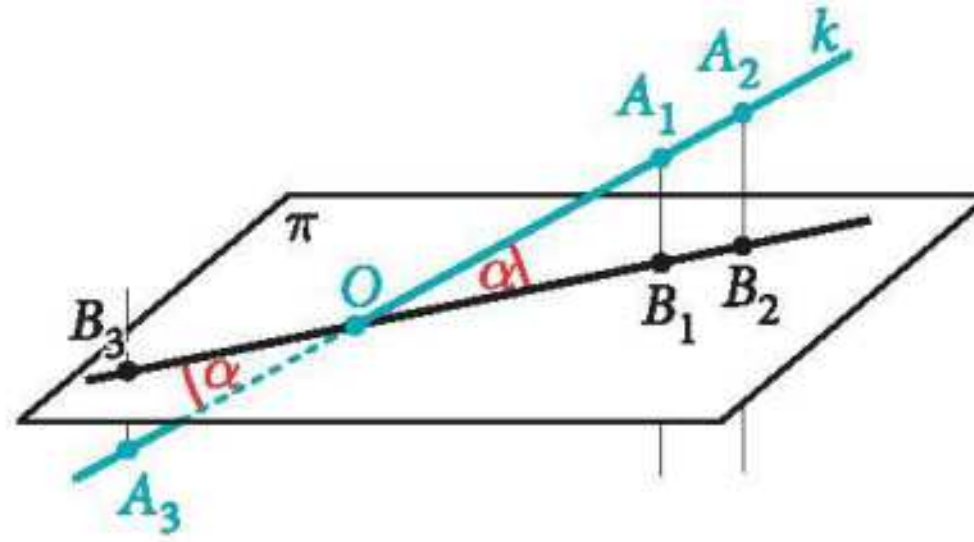
Krok 3: Prowadzimy prostą OB . Kąt AOB oznaczony na rysunku literą α jest szukanim kątem nachylenia prostej k do płaszczyzny π .



* Formalnie: zbiór jednopunktowy.

** jw.

Miara kąta α nie zależy od tego, który z punktów prostej k wybierzemy jako punkt A .

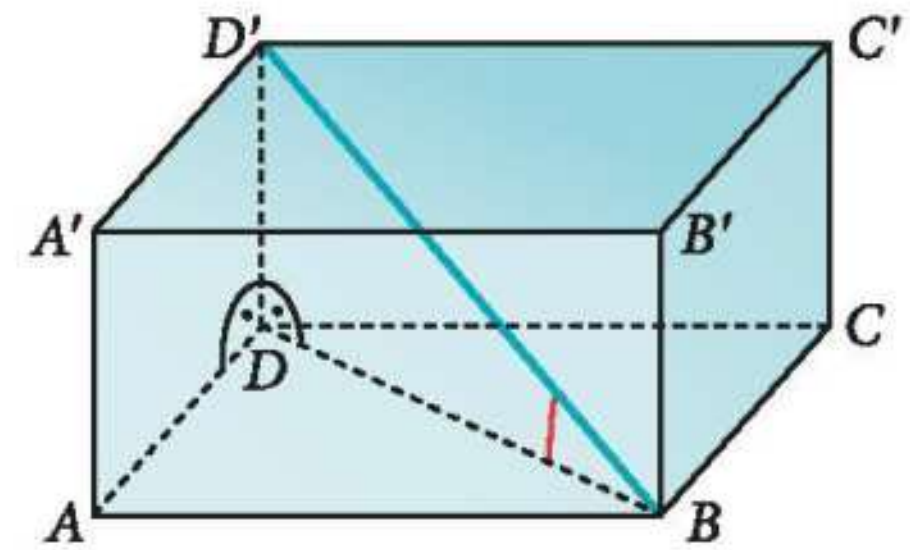


Ponadto przyjmujemy, że prosta równoległa do płaszczyzny tworzy z nią kąt zerowy, czyli kąt o mierze 0° , a prosta prostopadła do płaszczyzny tworzy z nią kąt prosty, czyli kąt o mierze 90° .

Zauważmy, że jeżeli punkt B jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π , a punkt $C \in \pi$ i $C \neq B$, to $|AB| < |AC|$. Inaczej mówiąc, punktem płaszczyzny π , który leży najbliżej punktu A , jest rzut prostokątny punktu A na tę płaszczyznę.

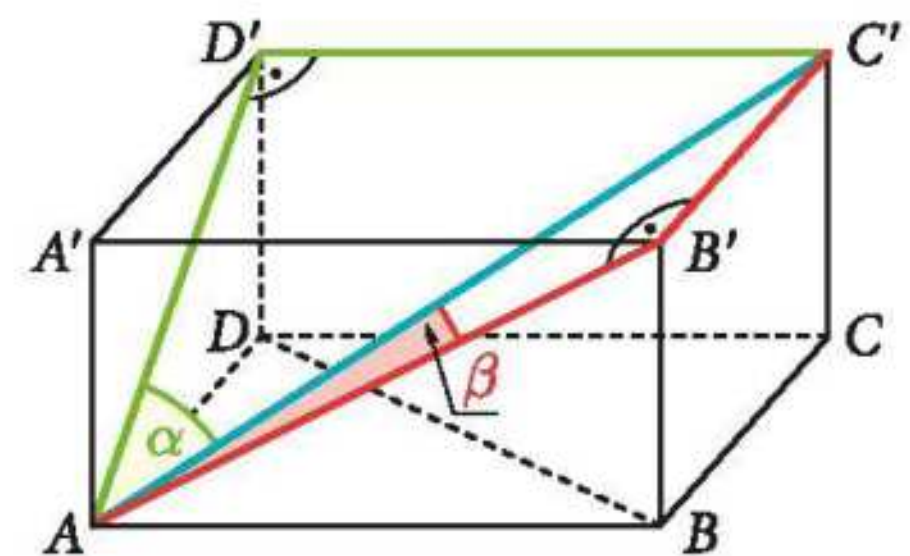
Przykład 1 ◀ zad. 2.5

W prostopadłościanie $ABCD A' B' C' D'$ prosta DD' jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$. Kąt $D'DB$ jest prosty, więc kąt $D'BD$ jest kątem nachylenia prostej BD' do płaszczyzny $ABCD$.



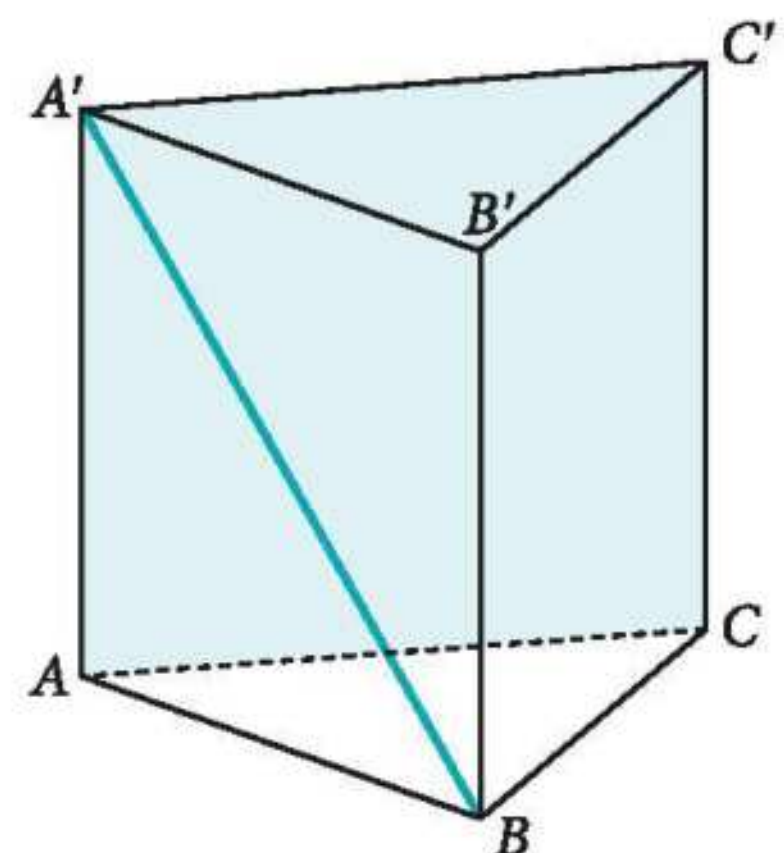
Na rysunku zaznaczone są kąty nachylenia przekątnej AC' prostopadłościanu:

- do płaszczyzny $ABB'A'$ – jest nim kąt β ,
- do płaszczyzny $AA'D'D$ – jest nim kąt α .



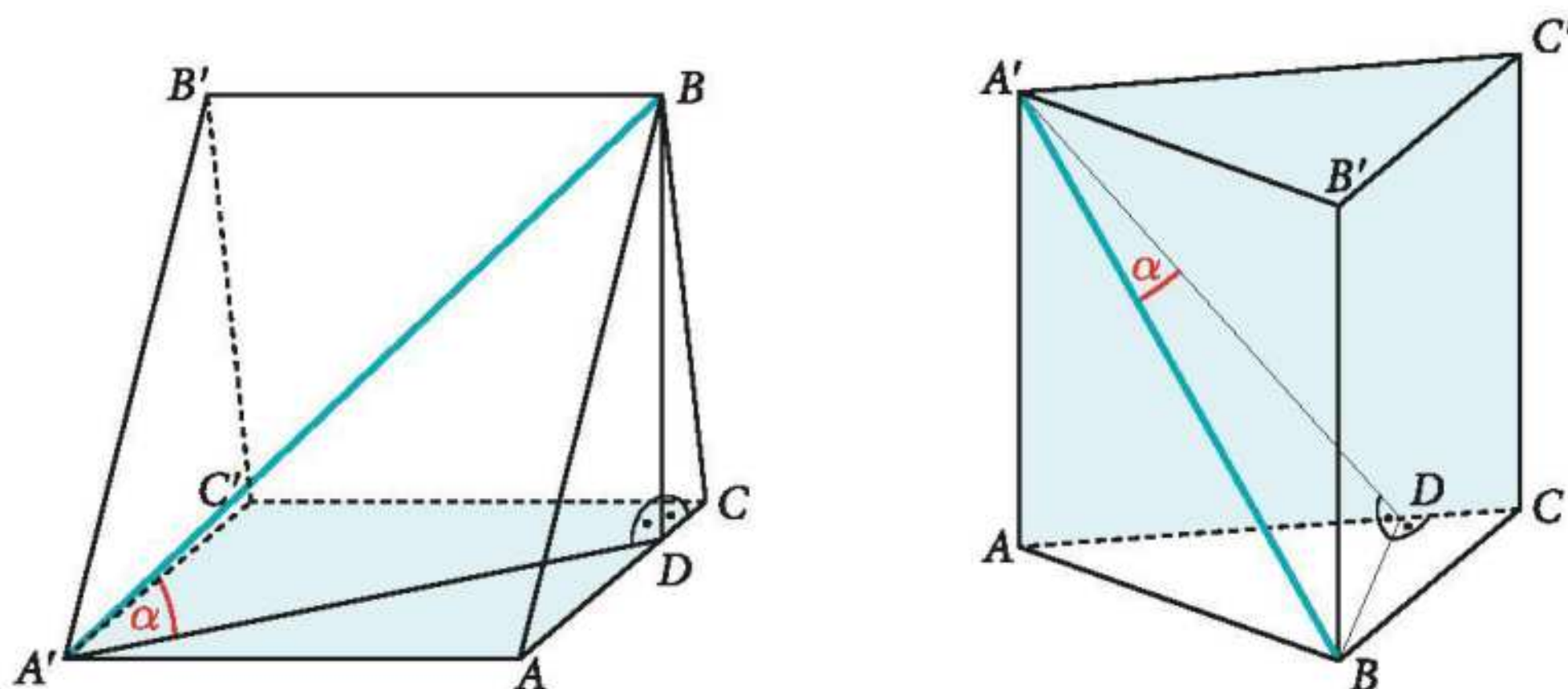
Przykład 2 ◀ zad. 2.6

Zaznaczmy kąt nachylenia prostej $A'B$ do płaszczyzny $ACC'A'$ w przedstawionym na rysunku graniastosłupie prostym, którego podstawą jest trójkąt ostrokątny.



Rozwiązanie

Dla ułatwienia ustawmy graniastosłup tak, jak na rysunku po lewej stronie. Ściana ABC jest prostopadła do płaszczyzny $ACC'A'$, zatem wysokość BD trójkąta ACB jest prostopadła do płaszczyzny $ACC'A'$. Rzutem prostokątnym punktu B na płaszczyznę $ACC'A'$ jest punkt D . Szukany kąt to $\angle DA'B$, oznaczony na rysunku literą α .



Na rysunku po prawej stronie przedstawiony jest graniastosłup w poprzednim położeniu z zaznaczonym kątem α .

Przykład 3 ◀ zad. 2.7

Zaznaczmy kąty nachylenia krawędzi bocznych danego ostrosłupa o podstawie trójkątnej do płaszczyzny podstawy.

Rozwiązanie

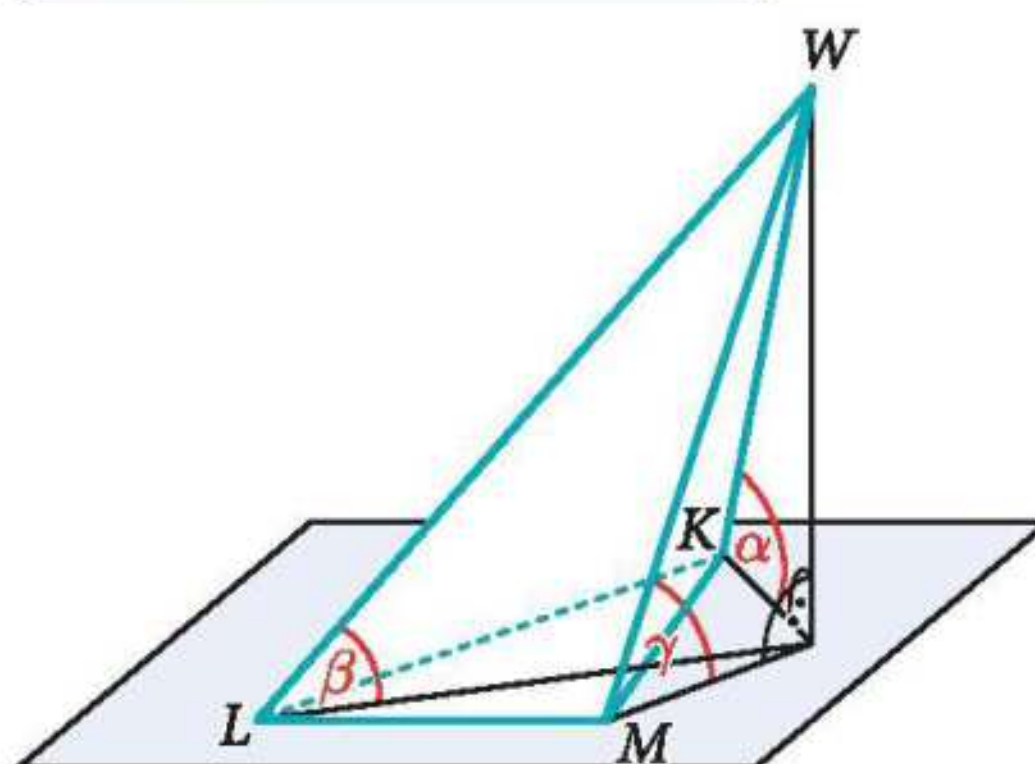
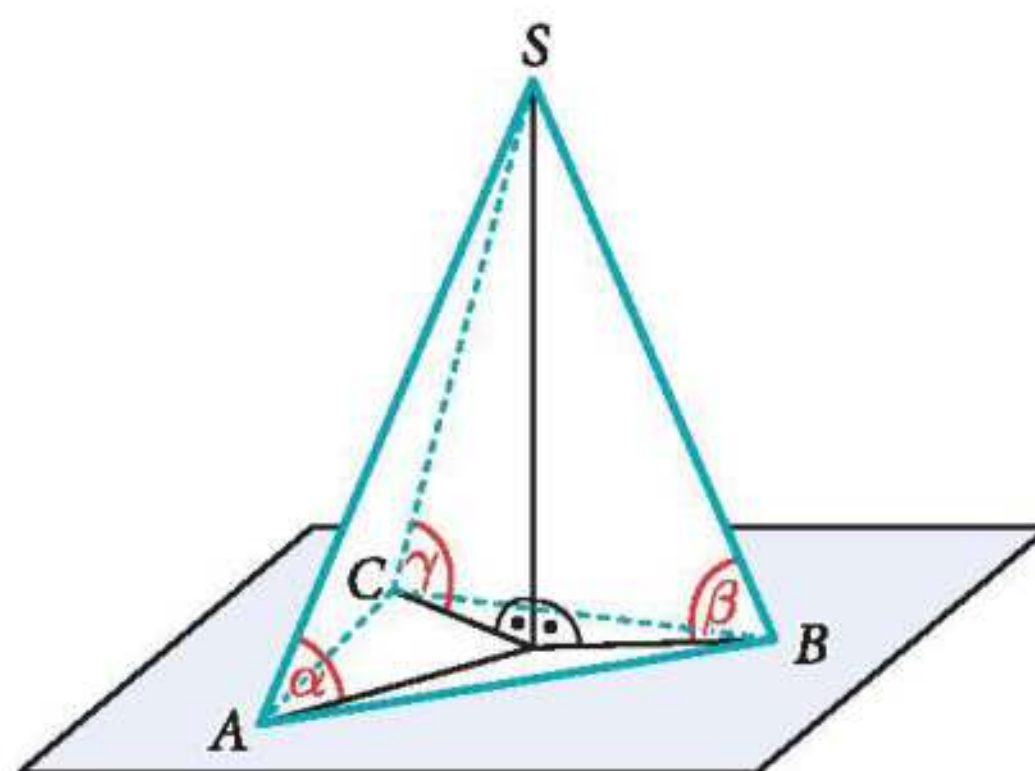
Najpierw należy znaleźć rzuty prostokątne krawędzi bocznych bryły. W tym celu najwygodniej jest zrzutować prostopadle wierzchołek ostrosłupa, czyli poprowadzić wysokość.

a) W ostrosłupie $ABCS$ rzut prostokątny wierzchołka należy do podstawy.

α , β , γ to odpowiednio kąty nachylenia krawędzi AS , BS i CS do płaszczyzny ABC .

b) W ostrosłupie $KLMW$ rzut prostokątny wierzchołka nie należy do podstawy.

α , β , γ to odpowiednio kąty nachylenia krawędzi KW , LW i MW do płaszczyzny KLM .



Odległość punktu od płaszczyzny

Definicja

Niech A_1 oznacza rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę π . **Odległość punktu A od płaszczyzny π** jest równa: 0, gdy $A_1 = A$, oraz $|A_1 A|$, gdy $A_1 \neq A$.

Za pomocą odległości punktu od płaszczyzny można zdefiniować:

- odległość między prostą l i płaszczyzną π do niej równoległą jako odległość dowolnego punktu prostej l od płaszczyzny π ,
- odległość między dwiema płaszczyznami równoległymi jako odległość dowolnego punktu jednej z tych płaszczyzn od drugiej płaszczyzny.



Przykład 4 ◀ zad. 2.9

Odległość punktu A od płaszczyzny π jest równa 6 cm, odległość punktu B od płaszczyzny π jest równa 10 cm. Prosta AB jest nachylona do płaszczyzny π pod kątem 50° , a punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Obliczmy długość odcinka AB (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku).

Rozwiązanie

Oznaczmy:

A_1 – rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę π ,

B_1 – rzut prostokątny punktu B na płaszczyznę π ,

P – punkt przecięcia prostej AB z płaszczyzną π .

Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π , jeżeli odcinek AB nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną π .

Punkty A, B, P, A_1, B_1 leżą na jednej płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny π . Zgodnie z treścią zadania:

$$\sphericalangle BPB_1 = 50^\circ, |AA_1| = 6 \text{ cm}, |BB_1| = 10 \text{ cm}$$

Jeżeli przez punkt A poprowadzimy prostą równoległą do prostej PA_1 , to przetnie ona prostą BB_1 w pewnym punkcie. Oznaczmy go literą C .

Zatem w trójkącie ACB mamy:

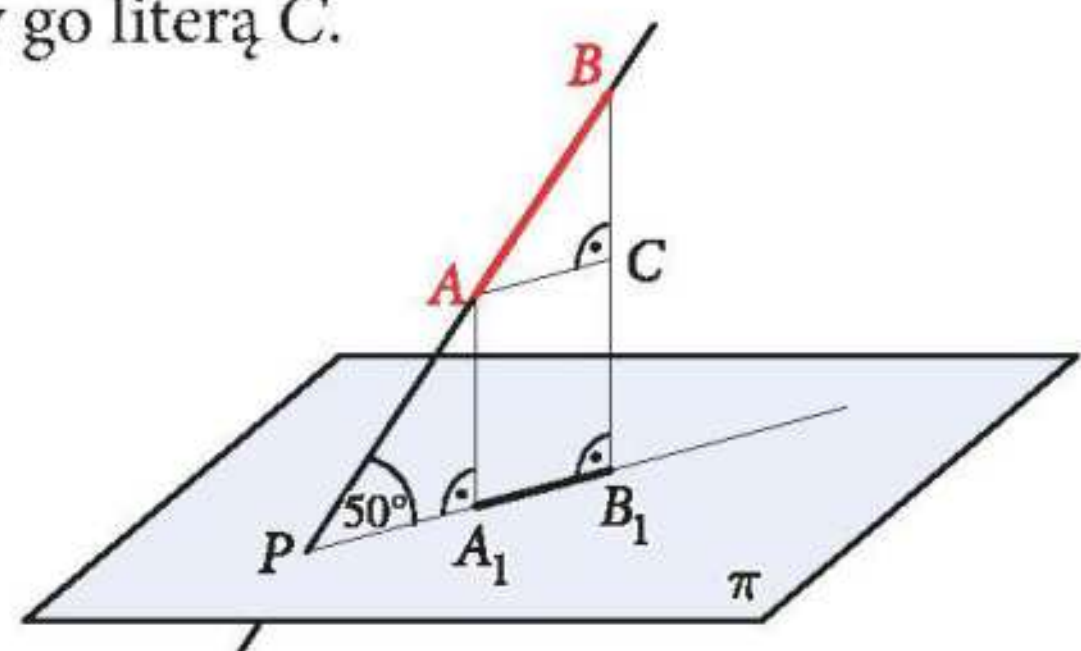
$$\sphericalangle ACB = 90^\circ, \sphericalangle BAC = 50^\circ$$

$$|BC| = |BB_1| - |CB_1| = 10 - 6 = 4 \text{ [cm]}$$

Długość boku AB obliczymy, korzystając z funkcji trygonometrycznych.

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \sin 50^\circ, \text{ stąd } |AB| = \frac{|BC|}{\sin 50^\circ} \approx \frac{4}{0,7660} \approx 5,22 \text{ [cm]}.$$

Odp.: $|AB| = 5,22 \text{ cm}$



Zadania

2.1. Ustaw na stole ołówek tak, by był on nachylony do płaszczyzny stołu pod danym kątem.

- a) 30° b) 45° c) 60° d) 90°

2.2. Jaka figura może być obrazem trójkąta w rzucie prostokątnym na daną płaszczyznę? Rozważ różne możliwości. Kiedy obrazem tego trójkąta jest trójkąt do niego przystający?

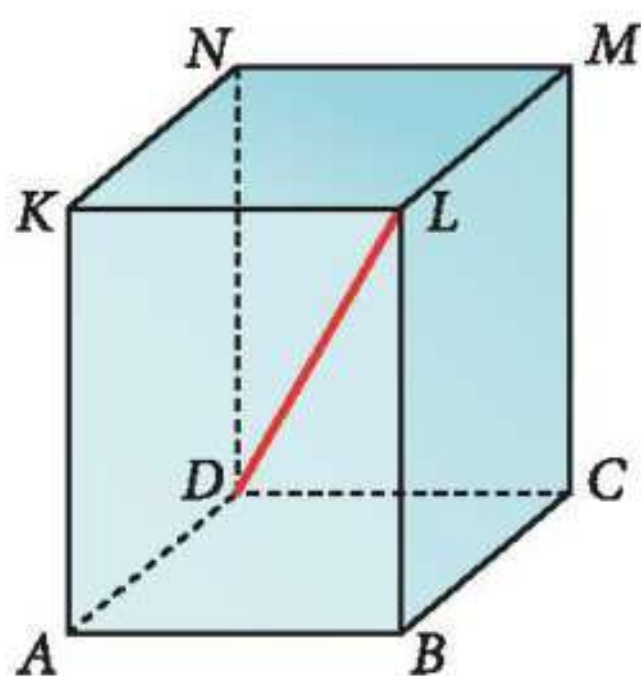
2.3. Dwie różne proste równoległe k i l rzutujemy prostopadle na płaszczyznę π . Czy obrazy tych prostych mogą mieć punkty wspólne?

2.4. Dane są dwie przecinające się proste k i l oraz płaszczyzna π , która ich nie zawiera. W jakim kierunku należy zrzutować te proste na płaszczyznę π , aby ich obrazem była jedna prosta? Kiedy nie można uzyskać takiego wyniku?

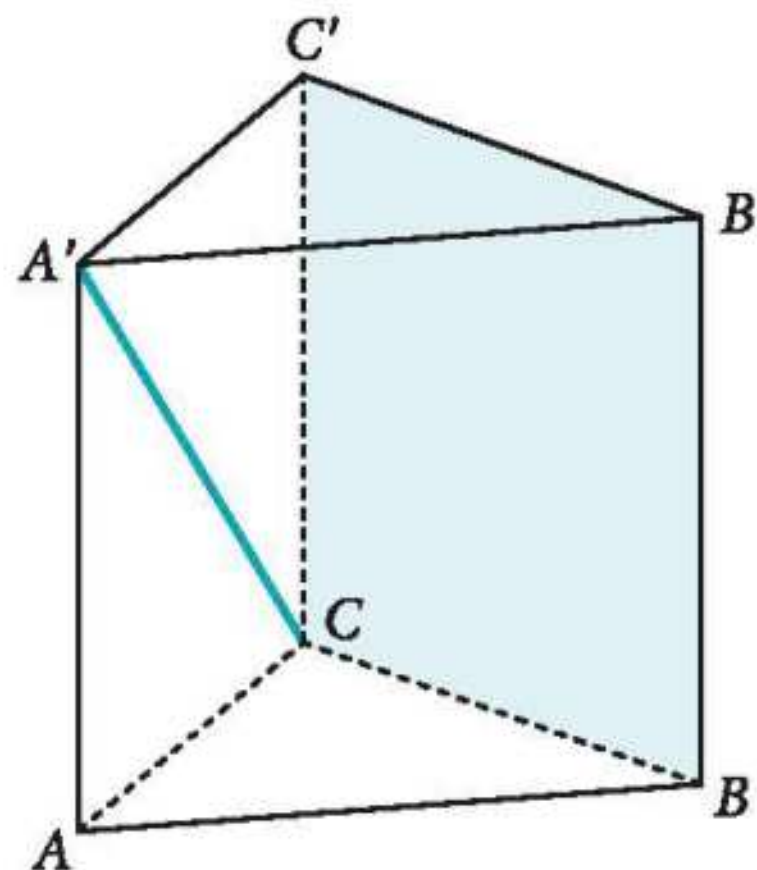
2.5. Przerysuj rzut prostopadłościanu $ABCDKLMN$ (rys. 1). Zaznacz na rysunku kąty nachylenia przekątnej DL do płaszczyzny

- a) podstawy $ABCD$. c) ściany bocznej $DCMN$.
b) ściany bocznej $ADNK$. d) podstawy $KLMN$.

2.6. Przerysuj rzut graniastosłupa prostego $ABCA'B'C'$, którego podstawą jest ostrokątny trójkąt ABC (rys. 2). Zaznacz na rysunku kąt nachylenia prostej $A'C$ do płaszczyzny $CBB'C'$.

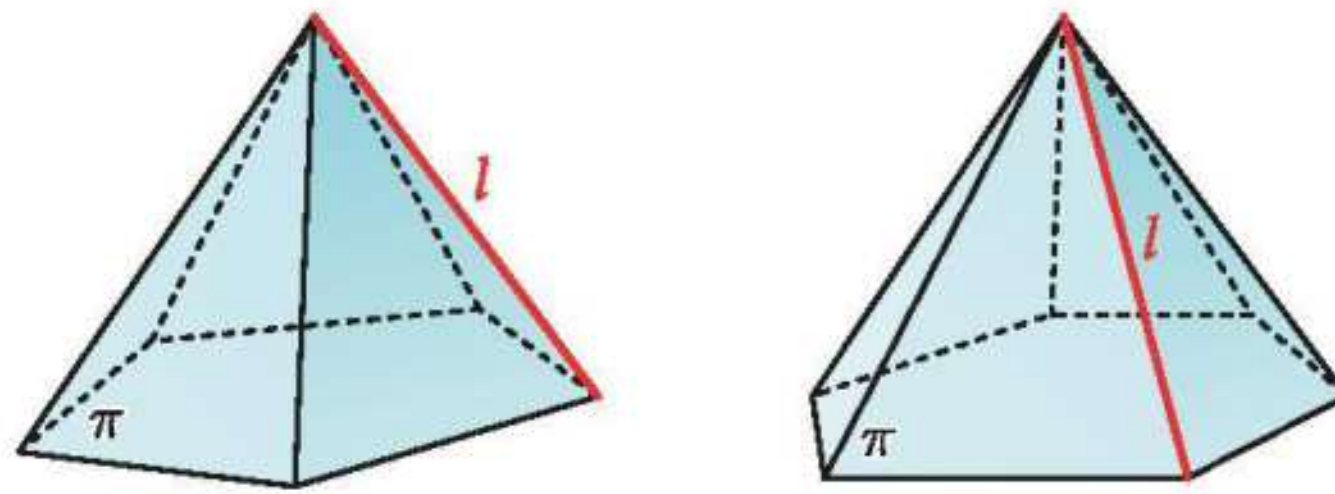


Rys. 1.



Rys. 2.

2.7. Przerysuj rzuty ostrosłupów. Na każdym rysunku zaznacz kąt nachylenia prostej l do płaszczyzny podstawy π .



2.8. Odcinek AB ma długość 1. Oblicz długość rzutu prostokątnego tego odcinka na płaszczyznę, do której prosta AB jest nachylona pod danym kątem.

- a) 0° b) 30° c) 45° d) 60° e) 90°

2.9. Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Punkty A_1 , B_1 są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Punkty A , B , A_1 , B_1 spełniają podane warunki. Oblicz długość odcinka AB .

- a) $|A_1B_1| = 8$, $|AA_1| = 15$, $|BB_1| = 7$
 b) $|A_1B_1| = 10$, $|AA_1| = 3$, $|BB_1| = 7$

★ **2.10.** Punkty A i B leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny π . Punkty A_1 i B_1 są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Ponadto wiadomo, że $|A_1B_1| = 8$, $|AA_1| = 5$, $|BB_1| = 3$. Oblicz długość odcinka AB .

 **2.11.** Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Punkty A_1 i B_1 są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Wiadomo, że $|AA_1| = 5$, $|BB_1| = 7$, a prosta AB jest nachylona do płaszczyzny π pod danym kątem. Oblicz długość odcinka AB (z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku).

- a) 30° b) 60° c) 85° d) 10°

2.12. Punkty P i Q leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Punkty P' i Q' są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Punkty P , Q , P' , Q' spełniają podane warunki. Wyznacz kąt nachylenia prostej PQ do płaszczyzny π .

- a) $|PP'| = 9$, $|QQ'| = 5$, $|P'Q'| = 4\sqrt{3}$
 b) $|P'Q'| = 3\sqrt{2}$, $|QQ'| = 2\sqrt{2}$, $|PP'| = 5\sqrt{2}$
 c) $|P'Q'| = 3$, $|PQ| = 6$
 d) $|PQ| = 6$, $|PP'| = 3$, $|QQ'| = 13$
 e) $|PQ| = 5\sqrt{2}$, $|P'Q'| = 10$

2.13. Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Punkty A' i B' są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Wiadomo, że

- $|A'B'| = 6$, $|AA'| = 12$, $|AB| = 10$. Oblicz $|BB'|$.
- $|AA'| = 18$, $|BB'| = 10$, $|AB| = 4\sqrt{13}$. Oblicz $|A'B'|$.
- $|AA'| = 2$, $|BB'| = 10$, $|A'B'| = 6$. Oblicz $|AB|$.
- $|AB| = 20$, $|BB'| = 17$, $|A'B'| = 16$. Oblicz $|AA'|$.

 **2.14.** Punkty M i N leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Punkty M' i N' są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Prosta MN jest nachylona do płaszczyzny π pod kątem α . Wiadomo, że

- $|M'M| = 12$, $|N'N| = 5$, $\alpha = 40^\circ$. Oblicz $|MN|$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.
- $|M'N'| = 5$, $|M'M| = 10$, $|N'N| = 4$. Oblicz α z dokładnością do 1° .
- $|M'N'| = 4$, $|MN| = 25$. Oblicz α z dokładnością do 1° .
- $|M'N'| = 5,4$, $\alpha = 72^\circ$. Oblicz $|MN|$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

2.15. Przez punkt M , odległy od płaszczyzny π o 13 cm, poprowadzono dwie proste przecinające płaszczyznę π w punktach K i L oraz nachylone do niej pod kątem 45° . Kąt KML ma miarę α . Wyznacz długość odcinka KL .

a) $\alpha = 90^\circ$

b) $\alpha = 60^\circ$

2.16. Z punktu A poprowadzono odcinki AK i AL o długościach odpowiednio równych 25 cm i 17 cm. Przez punkty K i L przechodzi taka płaszczyzna π , że prostokątne rzuty odcinków AK i AL na nią pozostają w stosunku 5:2. Wyznacz odległość punktu A od płaszczyzny π .

2.17. Zosia znalazła na strychu stary namiot i postanowiła sprawdzić, jak się go rozbija. Według instrukcji każdy z masztów o długości 1 m należy przymocować do podłoża za pomocą dwóch linek. Producent zaleca, aby kąt między linkami był równy 60° , zaś kąt między linkami a podłożem wynosił 30° . Jakiej długości powinny być linki i w jakiej odległości od siebie powinny być ich dolne końce?



2.18. Trójkąt ABC , w którym kąt C jest prosty, wyznacza płaszczyznę π . Przez punkt C poprowadzono prostą prostopadłą do płaszczyzny π i wyznaczono na niej punkt W oddalony od π o 10 cm. Ponadto wiadomo, że $|AW| = 15$ cm i $|BW| = 20$ cm. Oblicz pole trójkąta ABC .

- D** * **2.19.** Dane są dwie równoległe i różne płaszczyzny π_1 i π_2 oraz nierównoległa do nich prosta m . Wykaż, że kąty nachylenia prostej m do płaszczyzn π_1 i π_2 są równe.

Prosto do matury

W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

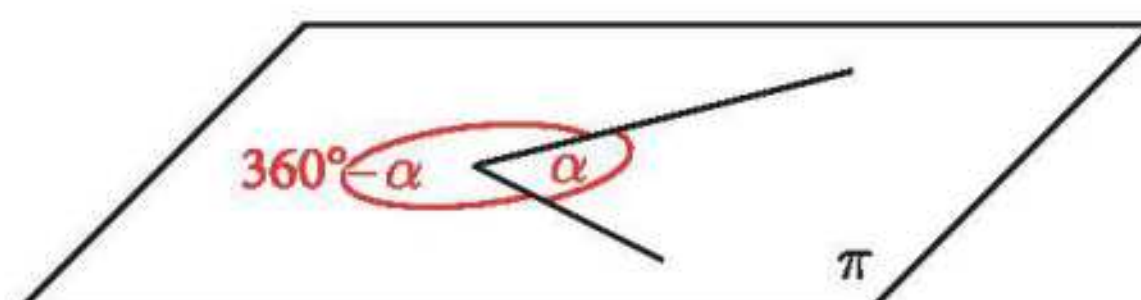
- 1.** Punkty P i Q leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Punkty P' i Q' są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Punkty P , Q , P' , Q' spełniają warunki $|PQ| = 6$, $|QQ'| = 2\sqrt{3}$ i $|PP'| = 5\sqrt{3}$. Wskaż miarę kąta nachylenia prostej PQ do płaszczyzny π .
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°
- 2.** Punkty P i Q leżą po tej samej stronie płaszczyzny π w odległościach od niej odpowiednio równych 8 cm i 3 cm. Odcinek PQ o długości 13 cm zrzutowano prostopadle na płaszczyznę π . Wskaż długość rzutu tego odcinka.
- A. $8\sqrt{3}$ cm B. $2\sqrt{13}$ cm C. 11 cm D. 12 cm
- 3.** Rzut prostokątny odcinka AB o długości 24 cm na płaszczyznę π ma długość 10 cm. Wskaż obliczony z dokładnością do 1° kąt nachylenia prostej AB do płaszczyzny π .
- A. 30° B. 65° C. 67° D. 63°
- 4.** Oceń prawdziwość podanych zdań. W rzucie równoległym na płaszczyznę
- A. obrazem koła może być odcinek.
B. obrazem odcinka nie musi być odcinek.
C. obrazem okręgu może być punkt.
- 5.** W graniastosłupie prostym o podstawie będącej trójkątem równobocznym poprowadzono prostą l przechodzącą przez wierzchołek podstawy dolnej i środek przeciwległej krawędzi podstawy górnej. Wykonaj rysunek ilustrujący tę sytuację. Zaznacz na nim kąty nachylenia prostej l do płaszczyzny podstawy oraz do płaszczyzny każdej ze ścian bocznych.
- 6.** Belka startowa skoczni narciarskiej znajduje się na wysokości 865 m n.p.m., a próg tej skoczni na wysokości 831 m n.p.m. Długość najazdu jest równa 92 m. Oblicz kąt nachylenia skoczni (z dokładnością do 1°). Przyjmij, że najazd jest odcinkiem.
- 7.** Odległość między punktami P i Q wynosi 17 cm, a rzut prostokątny odcinka PQ na płaszczyznę π ma długość 15 cm. Punkt P jest oddalony od płaszczyzny π o 30 cm. Oblicz odległość punktu Q od płaszczyzny π .

3. Kąt dwuścienny

Umiejętności:

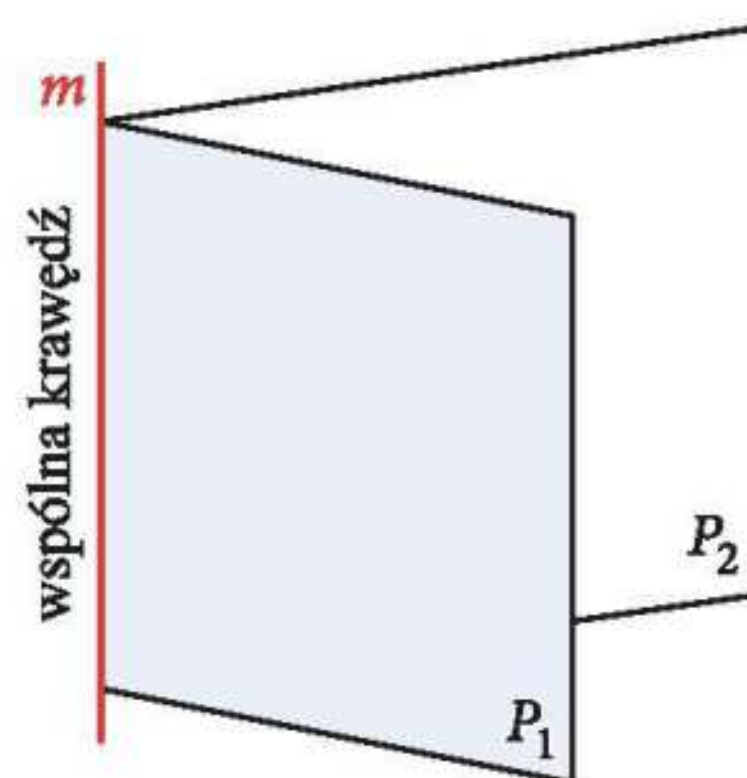
- rozpoznawanie w graniastosłupach i ostrosłupach kątów między ścianami

Przypomnijmy, że każdą z dwóch części płaszczyzny wyznaczonych przez dwie półproste o wspólnym początku, wraz z tymi półprostymi, nazywamy kątem płaskim. Podobnie definiuje się kąt przestrzenny.



Definicja

Dwie różne półpłaszczyzny P_1 , P_2 o wspólnej krawędzi m dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z nich wraz z tymi półpłaszczyznami nazywamy **kątem dwuściennym** o krawędzi m i ścianach P_1 i P_2 .

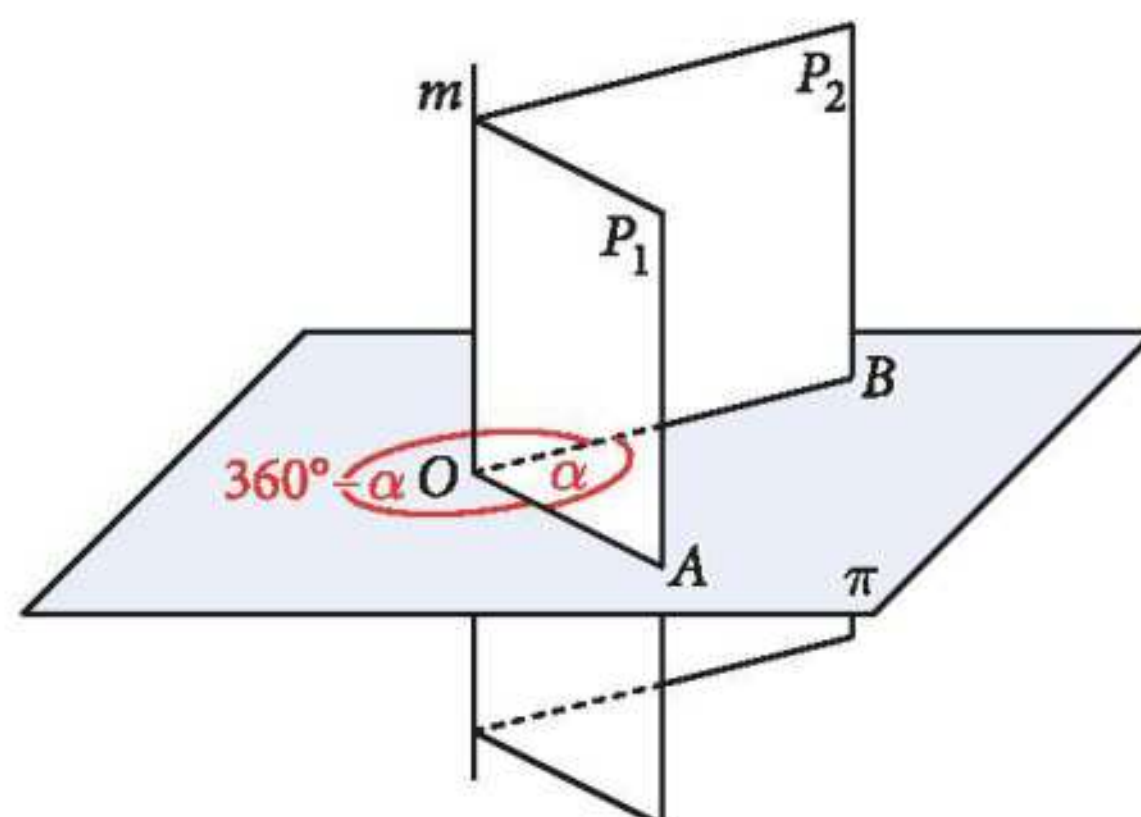


Miarą kąta dwuściennego nazywamy miarę kąta płaskiego będącego częścią wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi. W takim znaczeniu używać będziemy zwrotu „kąt dwuścienny $\alpha = 30^\circ$ ”.

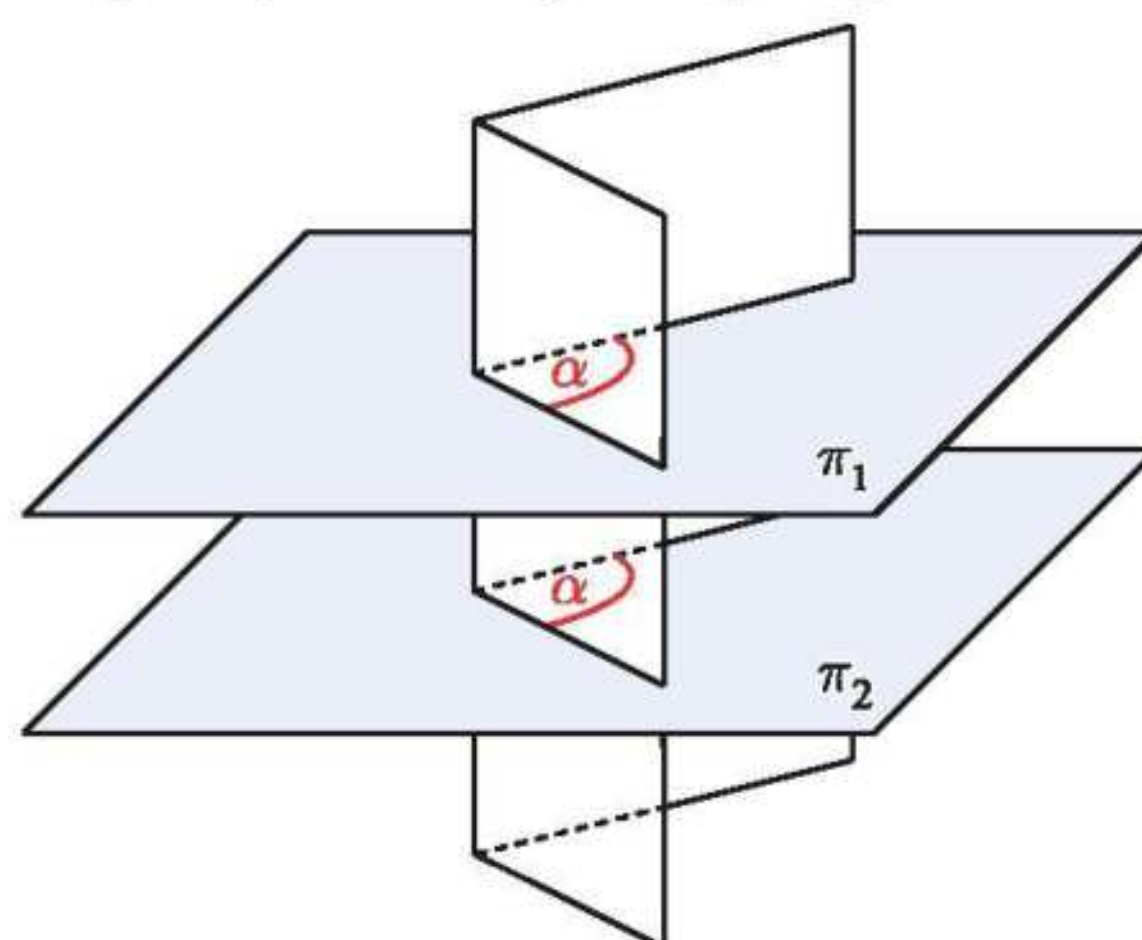
Miarę kąta dwuściennego o krawędzi m i ścianach P_1 , P_2 wyznaczamy w kolejnych krokach.

Krok 1: Prowadzimy płaszczyznę π prostopadłą do prostej m .

Krok 2: Mierzmy kąt płaski, wypukły lub wklęsły, będący częścią wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny π . Jeden z kątów dwuściennych ma miarę α , a drugi $360^\circ - \alpha$.

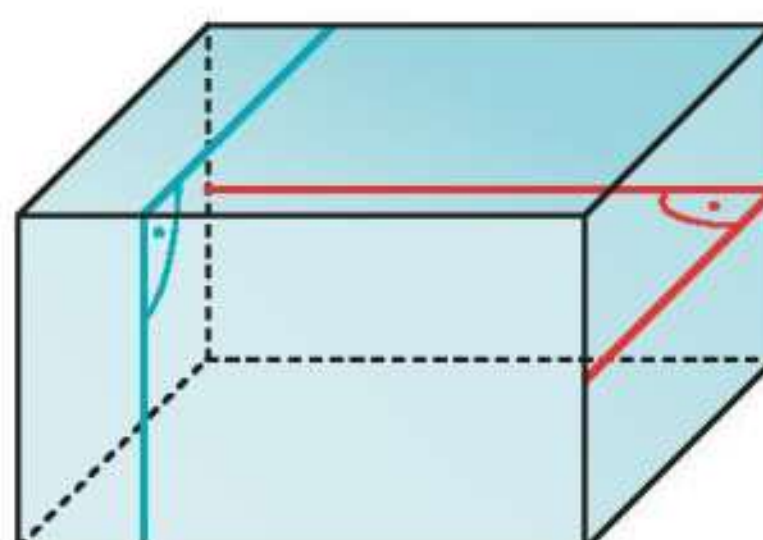


Miara kąta dwuściennego nie zależy od tego, przez który punkt prostej m poprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do krawędzi tego kąta.



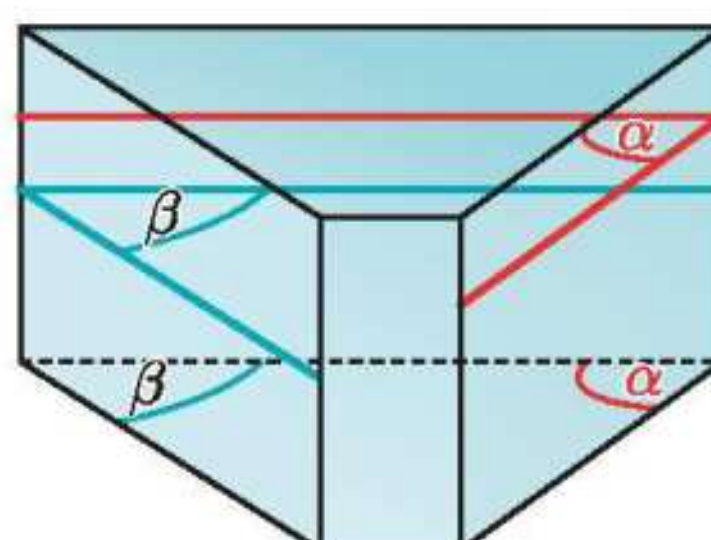
Przykład 1

Kąt dwuścienny wypukły między dwiema półpłaszczyznami prostopadłymi jest kątem prostym, czyli ma miarę 90° . Kąty takie są utworzone przez dowolne dwie przecinające się ściany prostopadłościanu.



Przykład 2

W graniastosłupie prostym kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równy kątowi wyznaczonemu przez odpowiednie krawędzie podstawy.



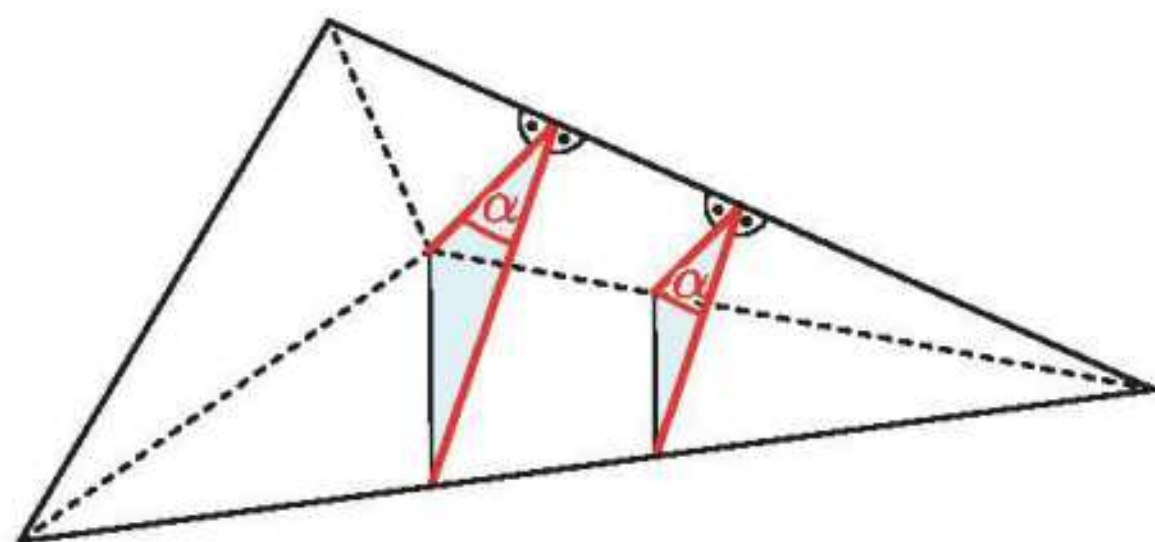
Kątem nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy jest kąt wypukły wyznaczony przez półpłaszczyznę zawierającą ścianę boczną oraz półpłaszczyznę zawierającą podstawę ostrosłupa. **Kąt dwuścienny między ścianami** wielościanu to kąt wypukły wyznaczony przez dwie półpłaszczyzny zawierające ściany wielościanu o wspólnej krawędzi.

Przykład 3 ◀ zad. 3.2

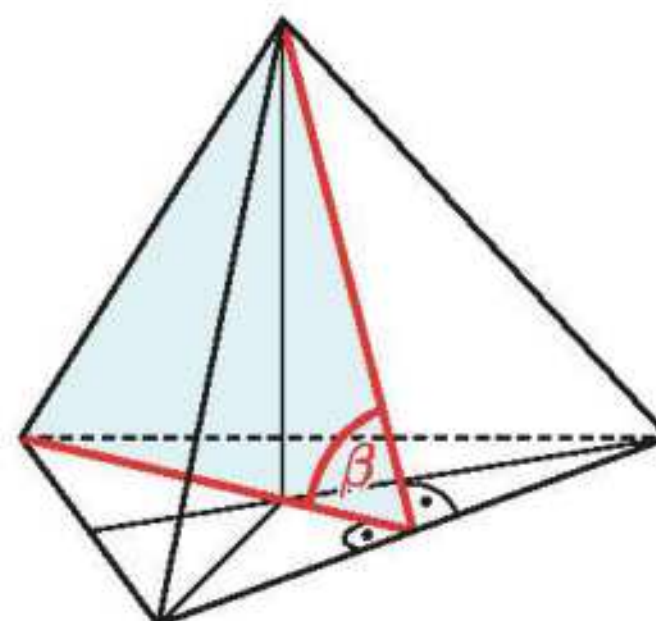
Zaznaczmy kąt dwuścienny w danym ostrosłupie.

Rozwiązanie

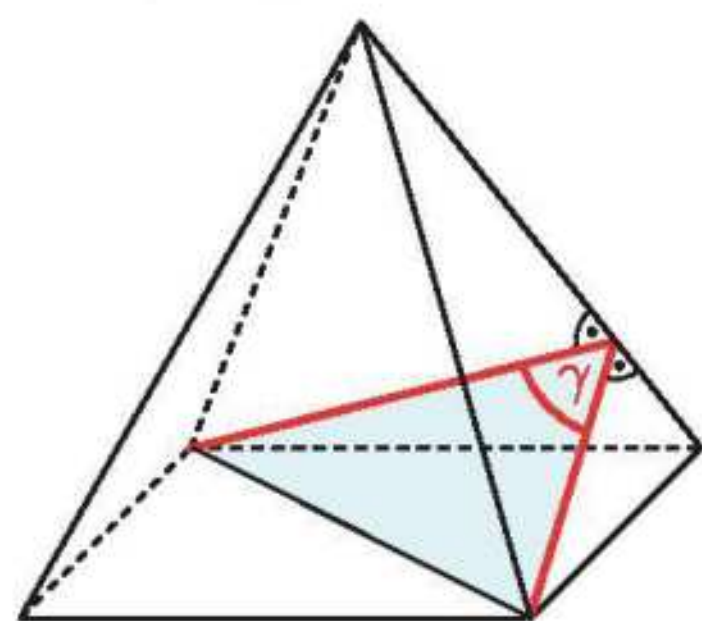
a) α – kąt dwuścienny między ścianami bocznymi ostrosłupa



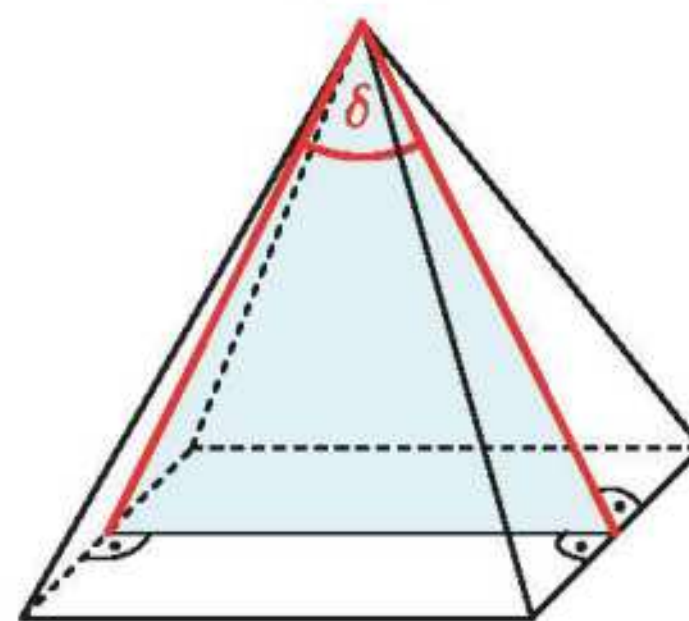
b) β – kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym



c) γ – kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego



d) δ – kąt między przeciwległymi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego



W przykładzie d) zauważmy, że przeciwległe ściany boczne ostrosłupa, będące przystającymi trójkątami równoramiennymi, mają wspólny tylko wierzchołek. Krawędź kąta dwuściennego δ jest równoległa do dwóch krawędzi podstawy ostrosłupa zawartych w ścianach kąta δ . Wysokości ścian bocznych poprowadzone z tego wierzchołka wyznaczają płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzn ścian bocznych. Zatem na płaszczyźnie tej możemy zaznaczyć nie tylko szukany kąt δ , lecz także kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy.

Zadania

3.1. Ustaw książkę tak, aby jej okładki wyznaczyły kąt dwuścienny o podanej mierze.

a) 30°

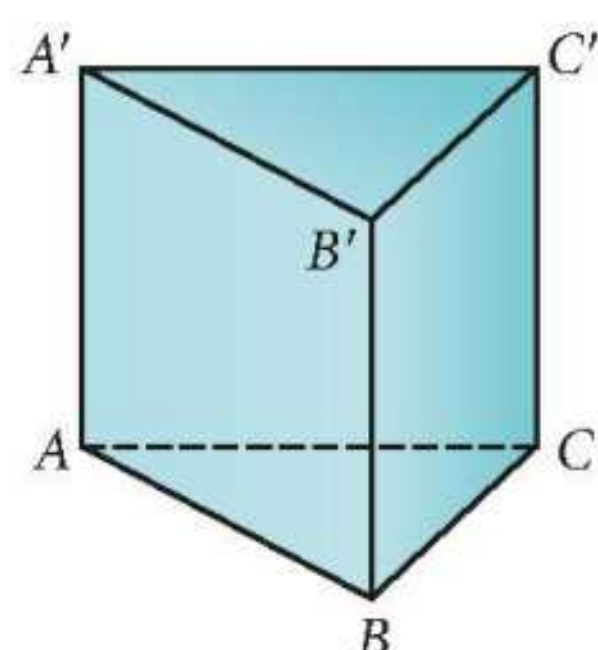
b) 45°

c) 60°

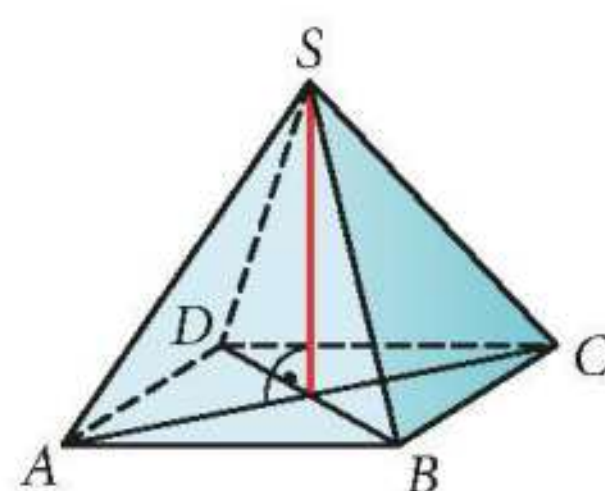
d) 90°

3.2. Przerysuj do zeszytu rzut wielościanu i zaznacz podany kąt dwuścienny.

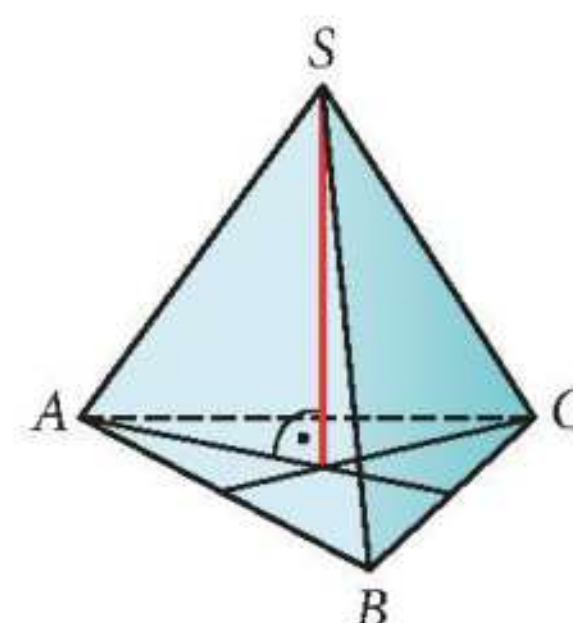
- kąt między ścianami bocznymi $ABBA'$ i $BCC'B'$ graniastosłupa prawidłowego trójkątnego (rys. 1)
- kąt nachylenia ściany ABS ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy (rys. 2)
- kąt między ścianami bocznymi ABS i ACS ostrosłupa prawidłowego trójkątnego (rys. 3)



Rys. 1.



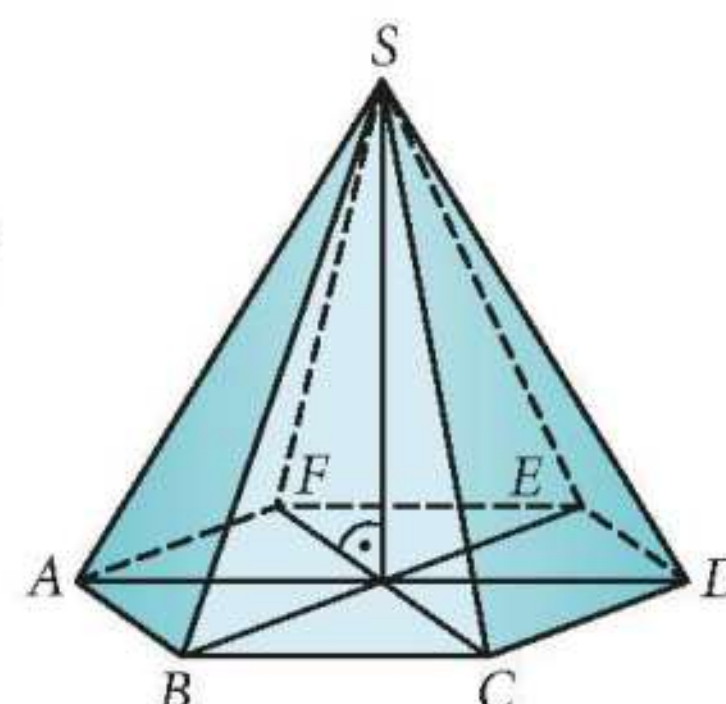
Rys. 2.



Rys. 3.

3.3. Przerysuj do zeszytu rzut ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego i zaznacz podany kąt dwuścienny.

- kąt między ścianą boczną CDS a płaszczyzną podstawy
- kąt między ścianami bocznymi AFS i EFS
- kąt między ścianami bocznymi ABS i DES



3.4. Półpłaszczyzny π_1 i π_2 o wspólnej krawędzi k tworzą kąt dwuścienny o miarze α . Przez punkt A należący do tego kąta poprowadzono prostą l prostopadłą do prostej k i przecinającą ją w punkcie A' . Punkt B_1 jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π_1 , a punkt B_2 jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π_2 . Prosta l jest nachylona do płaszczyzny π_1 pod kątem β_1 , a do płaszczyzny π_2 pod kątem β_2 . Przerysuj tabelę do zeszytu. Zastąp $?$ odpowiednimi wielkościami.

α	β_1	β_2	$ AA' $	$ AB_1 $	$ AB_2 $	$ B_1A' $	$ B_2A' $	$\sphericalangle B_1AB_2$
$?$	30°	60°	10	$?$	$?$	$?$	$?$	$?$
120°	30°	$?$	$?$	$?$	$?$	6	$?$	$?$
$?$	$?$	45°	$?$	8	$?$	$?$	$?$	100°

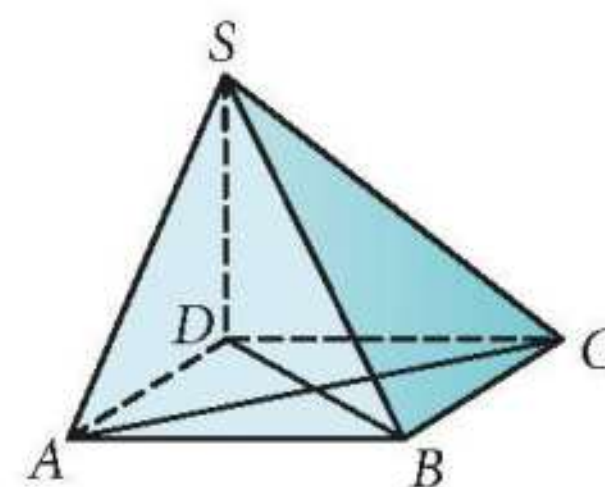
✱ **3.5.** Z punktu P należącego do kąta dwuściennego utworzonego przez półpłaszczyzny π_1 i π_2 poprowadzono prostą k przecinającą krawędź tego kąta pod kątem prostym. Prosta k jest nachylona do płaszczyzny π_1 pod kątem 13° , a do płaszczyzny π_2 pod kątem 38° . Jaka jest miara kąta dwuściennego?

3.6. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest trójkąt równoboczny o boku 5 cm. Wysokość ostrosłupa jest równa 15 cm. Oblicz tangens kąta dwuściennego między ścianą boczną i podstawą ostrosłupa.

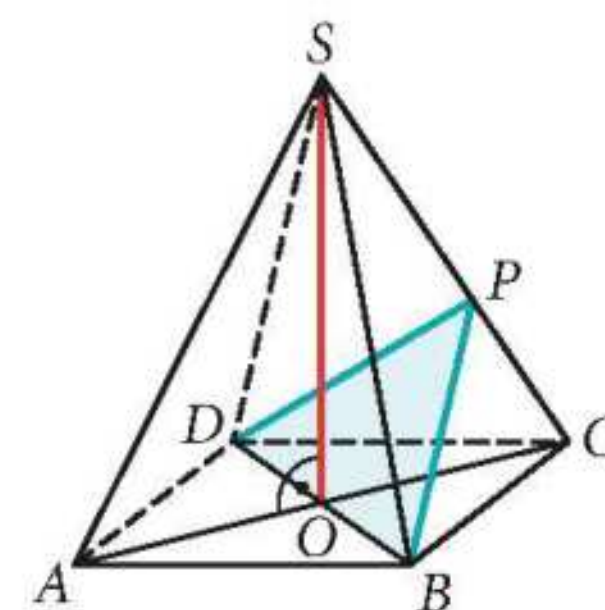
3.7. Co jest większe: miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, czy miara kąta między ścianą boczną a podstawą tego ostrosłupa?

✱ **3.8.** Dwa trójkąty równoramienne mają wspólną podstawę o długości 2. Półpłaszczyzny, w których zawierają się te trójkąty, tworzą kąt dwuścienny o mierze α . Odległość między wierzchołkami trójkątów jest równa 5, ramiona pierwszego trójkąta mają długość $\sqrt{10}$, a drugiego $\sqrt{17}$. Wyznacz kąt α .

3.9. Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest prostokąt. Krawędź DS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Przerysuj do zeszytu rzut tego ostrosłupa i zaznacz na nim kąty nachylenia ścian BCS i ABS do płaszczyzny podstawy.



✱ **3.10.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCD S$ krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Kąt BPD jest kątem dwuściennym między ścianami BCS i CDS . Wyznacz cosinus kąta SOP .



Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż miarę kąta dwuściennego między sąsiednimi ścianami bocznymi w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym.

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

2. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym podstawą jest kwadrat o boku długości 10 cm, a krawędzie boczne są równe 25 cm. Wskaż wyznaczoną z dokładnością do 1° miarę kąta dwuściennego między ścianą boczną i płaszczyzną podstawy tego ostrosłupa.

- A. 65° B. 82° C. 73° D. 78°

3. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 12, a wysokość tego ostrosłupa wynosi $2\sqrt{3}$. Wskaż miarę kąta między przeciwległymi ścianami bocznymi.

- A. 120° B. 140° C. 135° D. 150°

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. W dowolnym ostrosłupie kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy mają miarę mniejszą od 90° .
B. W każdym graniastosłupie prostym kąty między sąsiednimi ścianami bocznymi są proste.
C. W każdym prostopadłościanie kąty między sąsiednimi ścianami są proste.

5. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym zaznacz

- a) kąt dwuścienny, który wyznacza ściana boczna z płaszczyzną podstawy.
b) kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi.

6. Przeciwprostokątna AB o długości a jest wspólną podstawą trójkątów równoramiennych prostokątnych ABC i ABC_1 . Półpłaszczyzny, w których zawierają się te trójkąty, tworzą kąt dwuścienny o mierze 60° . Oblicz odległość między wierzchołkami C i C_1 .

7. Punkty M i N leżą na jednej ścianie kąta dwuściennego i są oddalone od jego krawędzi odpowiednio o 24 cm i 40 cm. Odległość punktu N od płaszczyzny drugiej ściany tego kąta dwuściennego jest równa 15 cm. Oblicz odległość punktu M od płaszczyzny tej ściany.



4. Graniastosłupy

Umiejętności:

- rozpoznawanie w graniastosłupach kątów między: odcinkami, odcinkami i płaszczyznami, ścianami
- korzystanie z siatek graniastosłupów
- ✂ • określanie, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną

Przypomnimy i uporządkujemy najważniejsze wiadomości o **graniastosłupach** omawiane podczas nauki w szkole podstawowej.

Zacniemy jednak od wprowadzenia ogólniejszych pojęć.

Definicja

Figurę (zbiór punktów przestrzeni) nazywamy **wypukłą**, gdy cały odcinek łączący dwa dowolne punkty tej figury jest w niej zawarty.

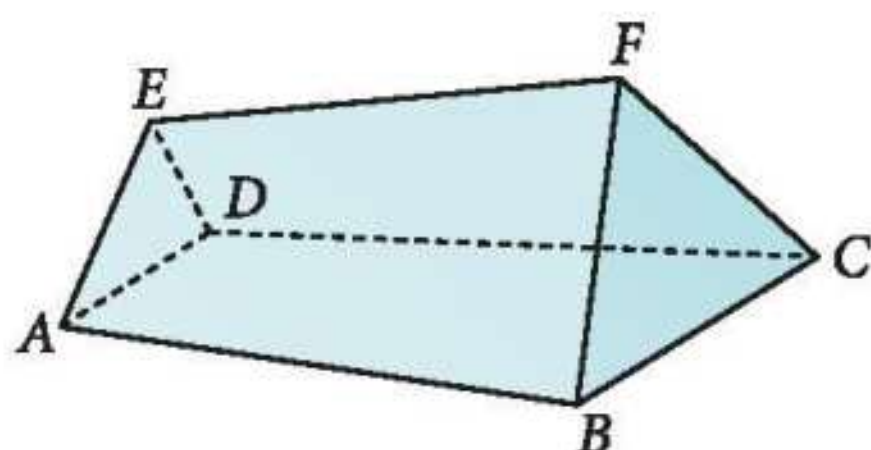
Definicja

Wielościanem wypukłym nazywamy taką figurę wypukłą, której powierzchnię stanowi skończona liczba wielokątów.

Przekątną wielościanu jest odcinek łączący dwa wierzchołki i niezawarty w żadnej ze ścian.

W wielościanie na rysunku poniżej:

- wierzchołkami są punkty: A, B, C, D, E, F ,
- krawędziami są odcinki: $AB, BC, CD, AD, BF, CF, DE, AE$ i EF ,
- ścianami są wielokąty: $ABCD, ABFE, DCFE, BCF, ADE$.



Zauważmy, że w podręczniku wszystkie bryły są narysowane w rzucie równoległym.



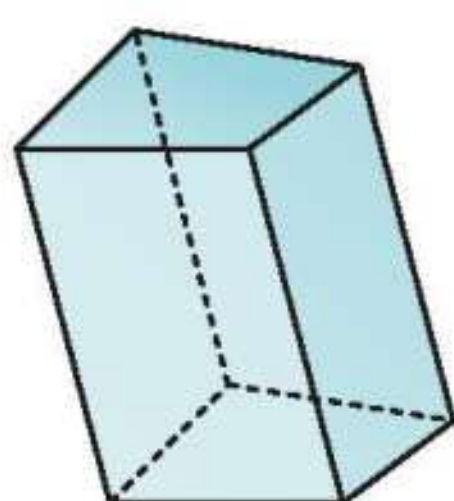
Ten wielościan nie ma żadnej przekątnej.

Graniastosłupy

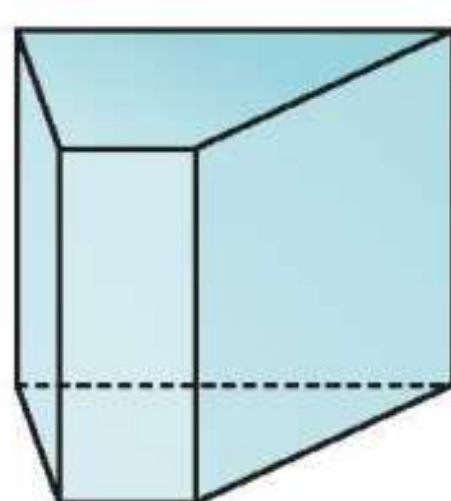
Definicja

Graniastosłupem wypukłym nazywamy wielościan wypukły, którego dwie ściany (zwane podstawami) są przystającymi wielokątami zawartymi w równoległych płaszczyznach, a pozostałe ściany (zwane bocznymi) są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.

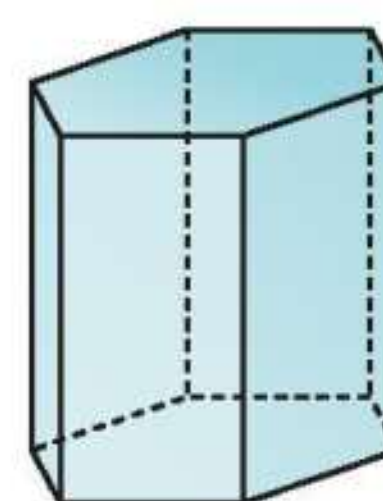
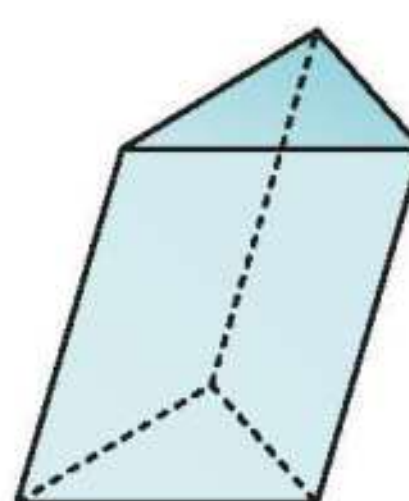
Przykłady graniastosłupów:



graniastosłup
czworokątne



graniastosłup
trójkątny

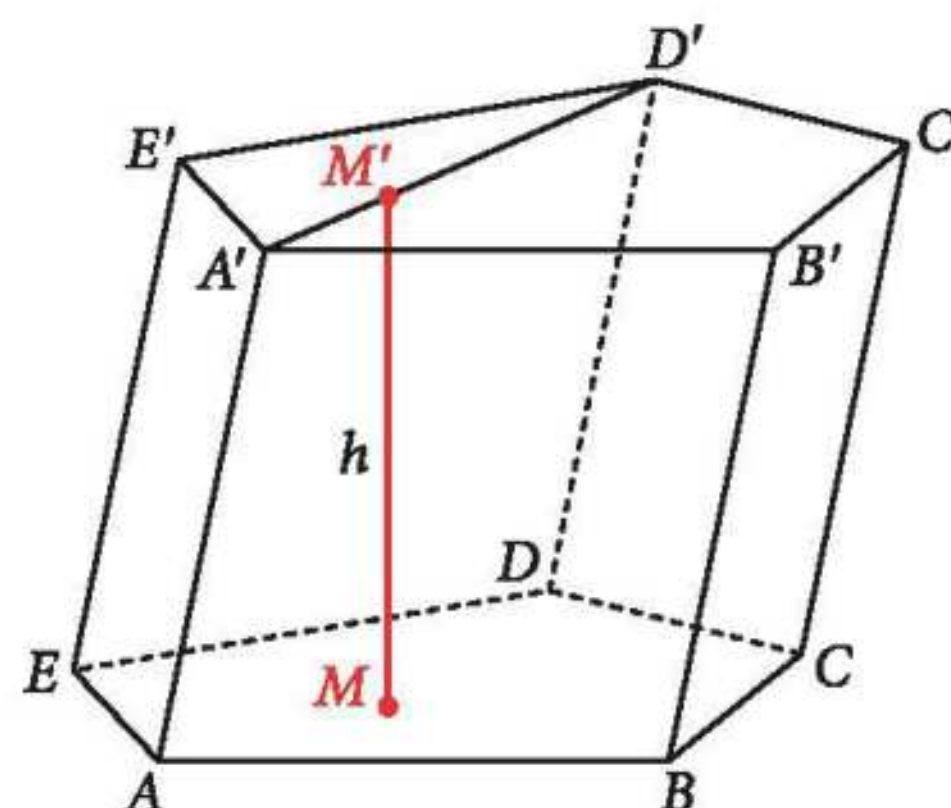


graniastosłup
sześciokątne

Przykład 1

W narysowanym graniastosłupie pięciokątnym (czyli takim, który ma w podstawie pięciokąt):

- wierzchołkami są punkty: $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$,
- podstawami są pięciokąty: $ABCDE, A'B'C'D'E'$,
- ścianami bocznymi są równoległoboki: $ABB'A', BCC'B', DCC'D', EDD'E', EAA'E'$,
- krawędziami podstaw są odcinki: $AB, BC, CD, DE, EA, A'B', B'C', C'D', D'E', E'A'$,
- krawędziami bocznymi są odcinki: AA', BB', CC', DD', EE' ,
- wysokością h graniastosłupa jest odcinek łączący dowolny punkt M' płaszczyzny jednej z podstaw z jego rzutem prostokątnym M na płaszczyznę drugiej podstawy.

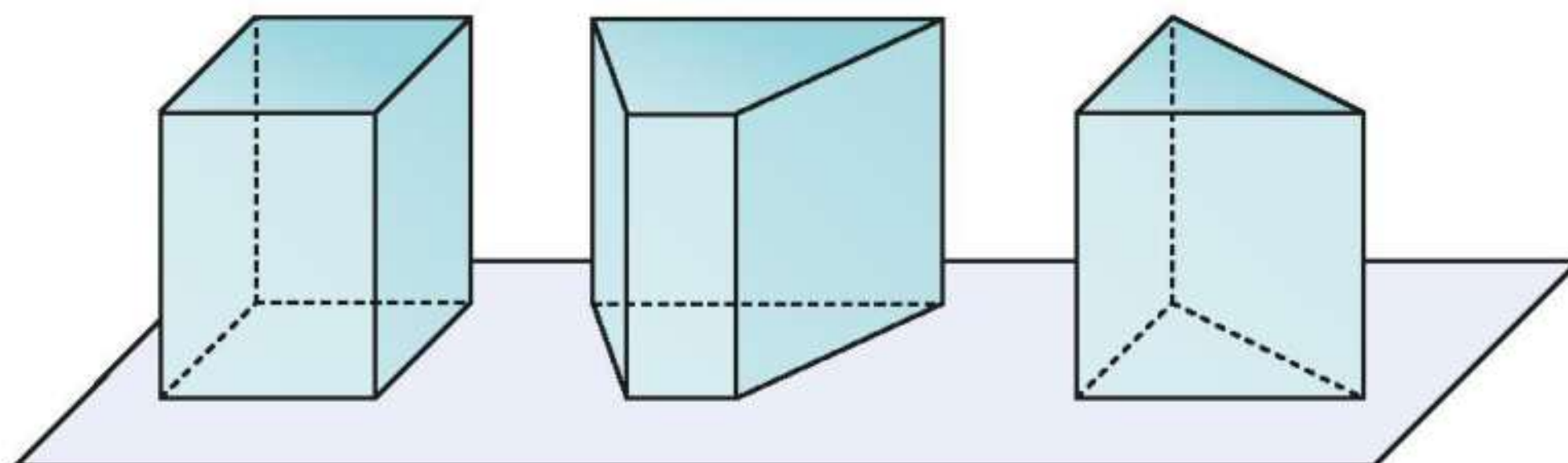


Zauważmy, że wszystkie krawędzie boczne są równoległe i mają tę samą długość:

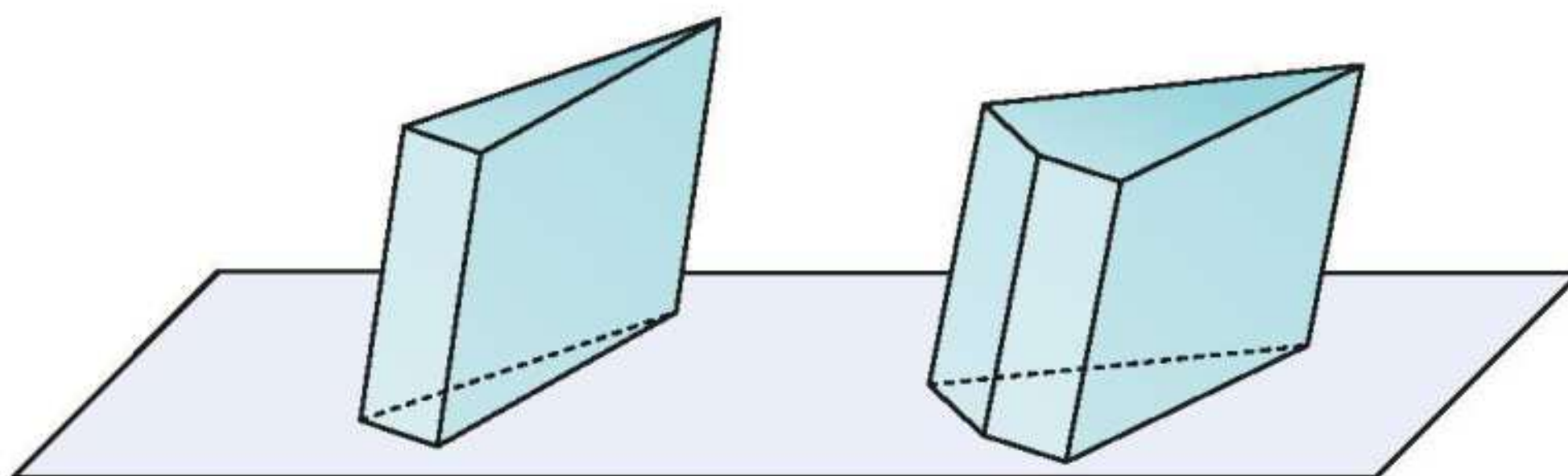
$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'| = |EE'|$$

Definicja

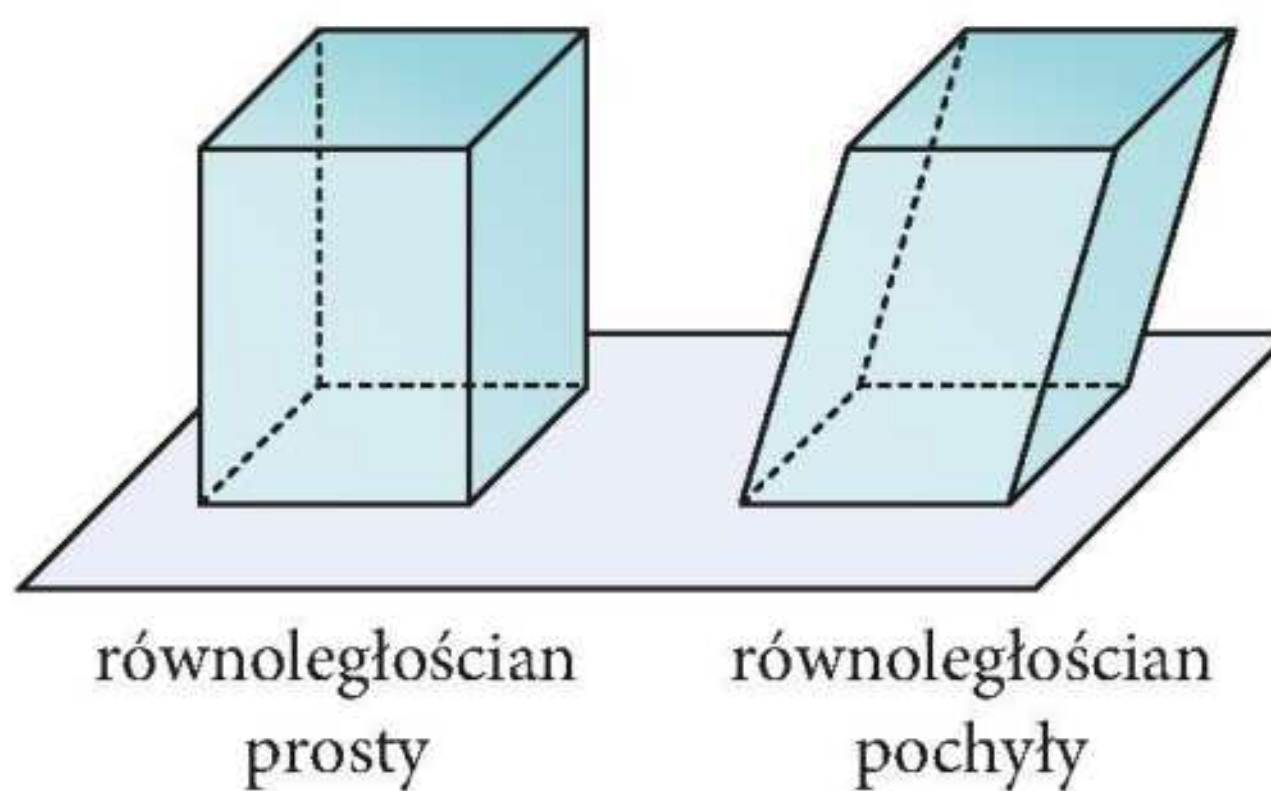
Graniastosłup nazywamy **prostym**, jeżeli jego krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzn podstaw.



Pozostałe graniastosłupy nazywamy **pochyłymi**.

**Definicja**

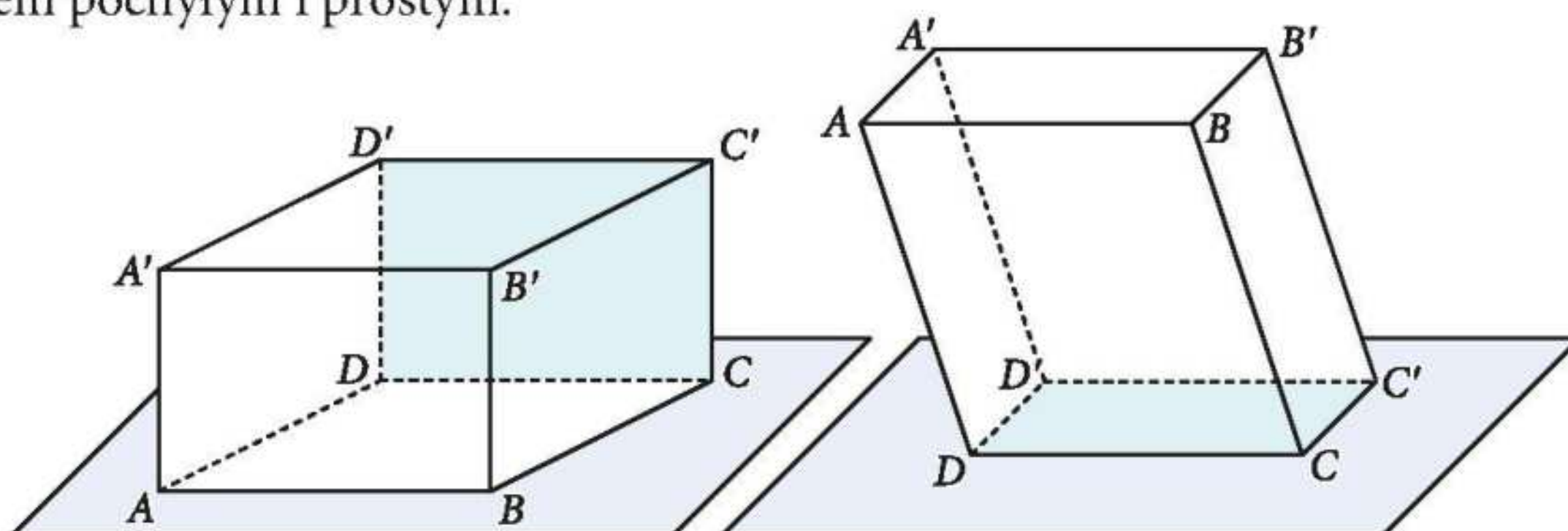
Równoległoscian to graniastosłup, którego podstawą jest równoległobok.



Jeżeli podstawą rysowanego graniastosłupa jest równoległobok różny od prostokąta, to tę informację trzeba podać słownie, ponieważ na płaskim rysunku nie widać różnicy między tymi czworokątami.



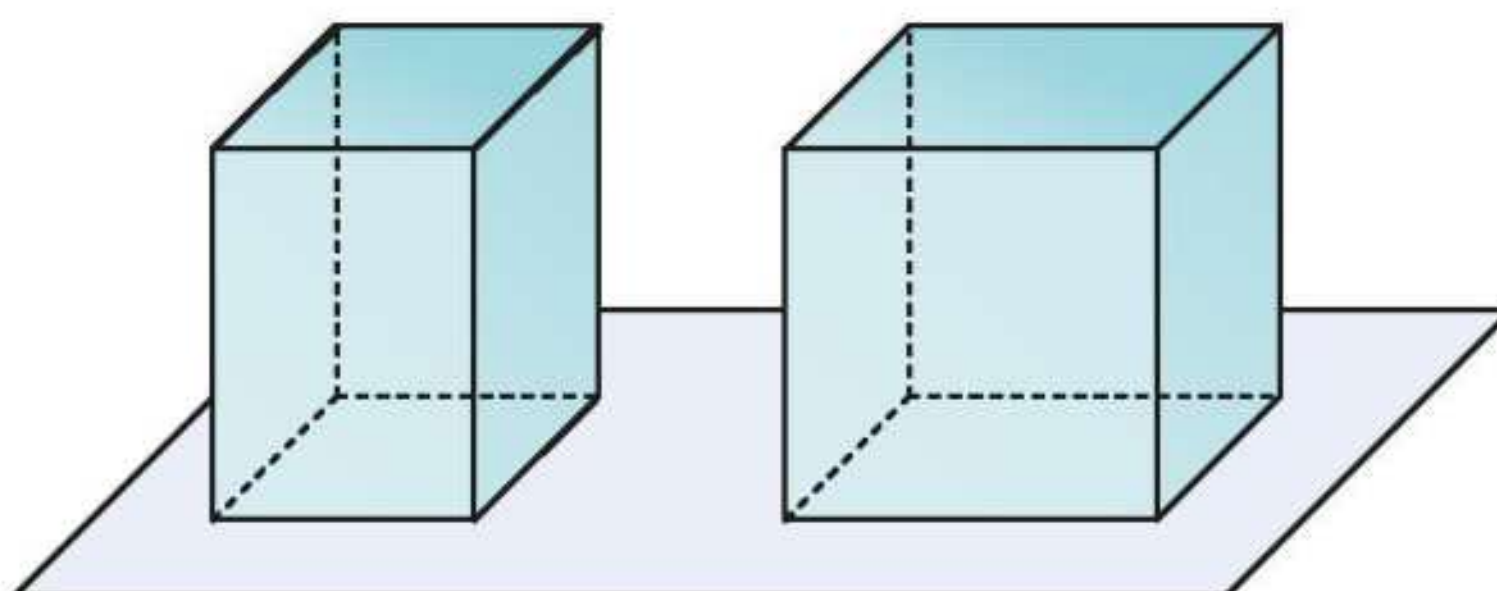
Zauważmy, że równoległoscian ma trzy pary ścian równoległych (i przystających). Każda z nich może stanowić parę podstaw tego równoległoscianu. Ten sam równoległoscian, w zależności od wyboru podstaw, może więc być jednocześnie graniastosłupem pochyłym i prostym.



Definicja

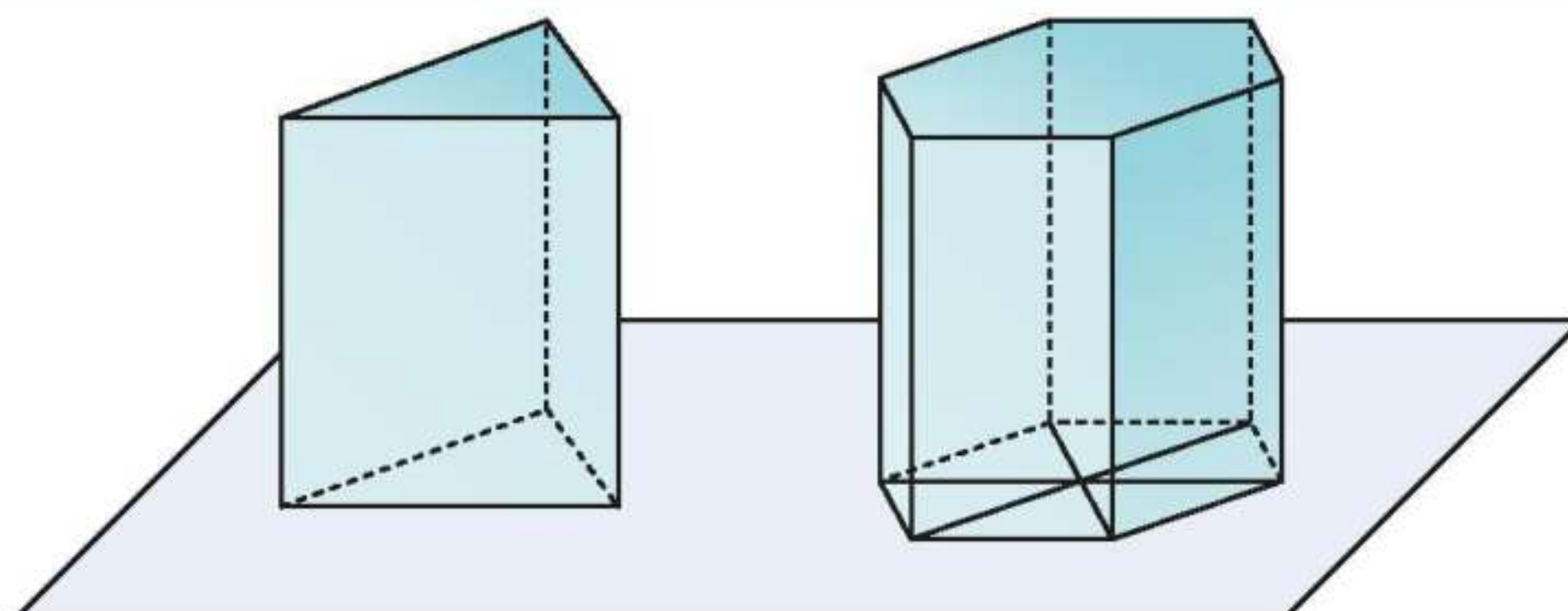
Prostopadłościan to graniastosłup prosty, którego podstawą jest prostokąt. Prostopadłościan o wszystkich krawędziach równych nazywamy **sześcianem**.

Wszystkie ściany prostopadłościanu są prostokątami, a wszystkie ściany sześcianu są kwadratami.



Definicja

Graniastosłup nazywamy **prawidłowym**, jeżeli jest prosty i ma w podstawie wielokąt foremny.



Siatki wielościanów

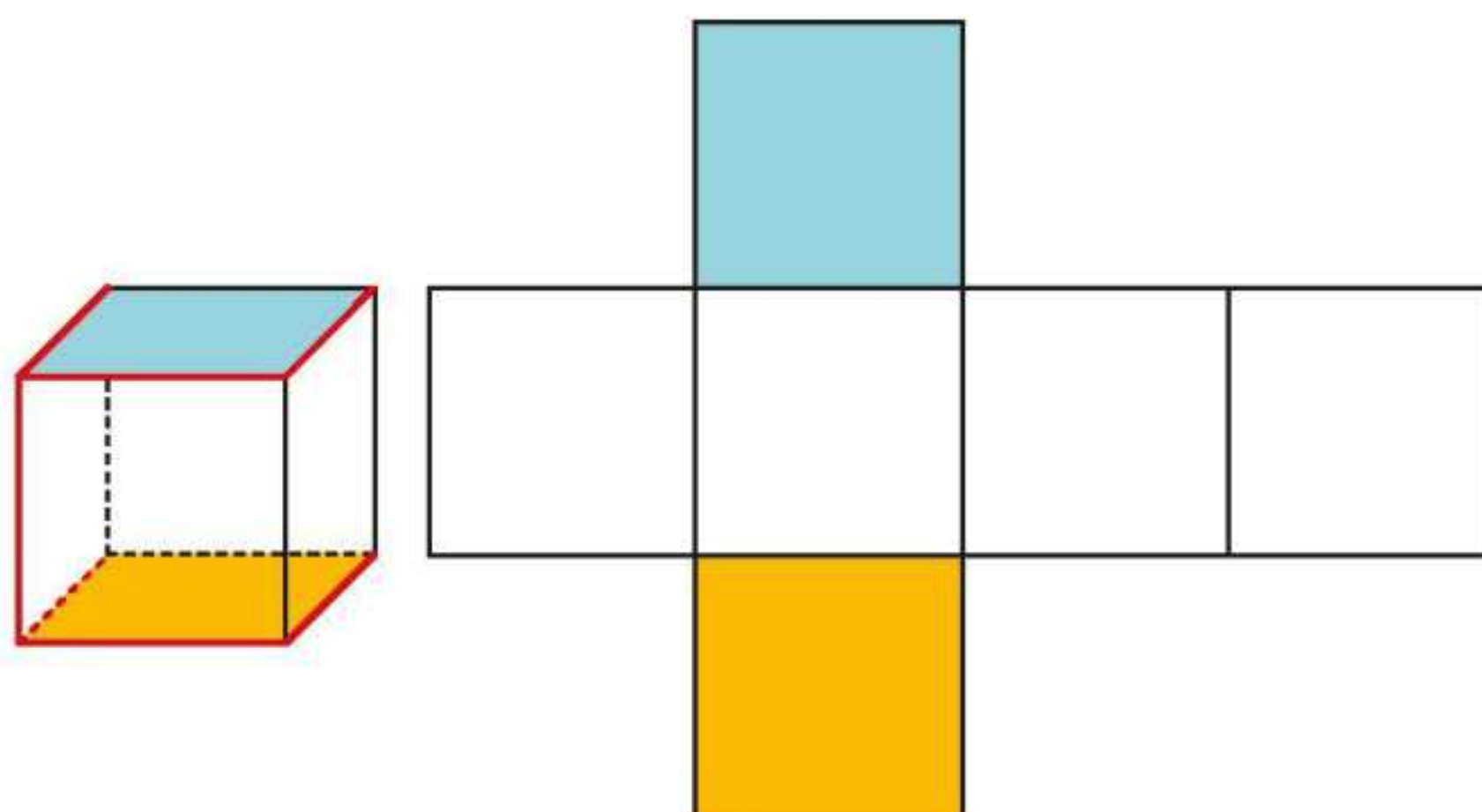
Jeżeli chcemy przedstawić wielościan, czyli figurę trójwymiarową, na płaskiej kartce, to możemy albo narysować jego rzut równoległy – tak postępowaliśmy dotychczas – albo narysować jego siatkę.

Siatką wielościanu nazywamy płaską figurę będącą sumą wielokątów stykających się bokami, a powstałą przez rozcięcie pewnej liczby krawędzi wielościanu tak, aby jego ściany dały się rozłożyć na płaszczyźnie.

Czasami zamiast nazwy „siatka wielościanu” używa się zwrotu „rozwiniecie powierzchni wielościanu na płaszczyźnie”.

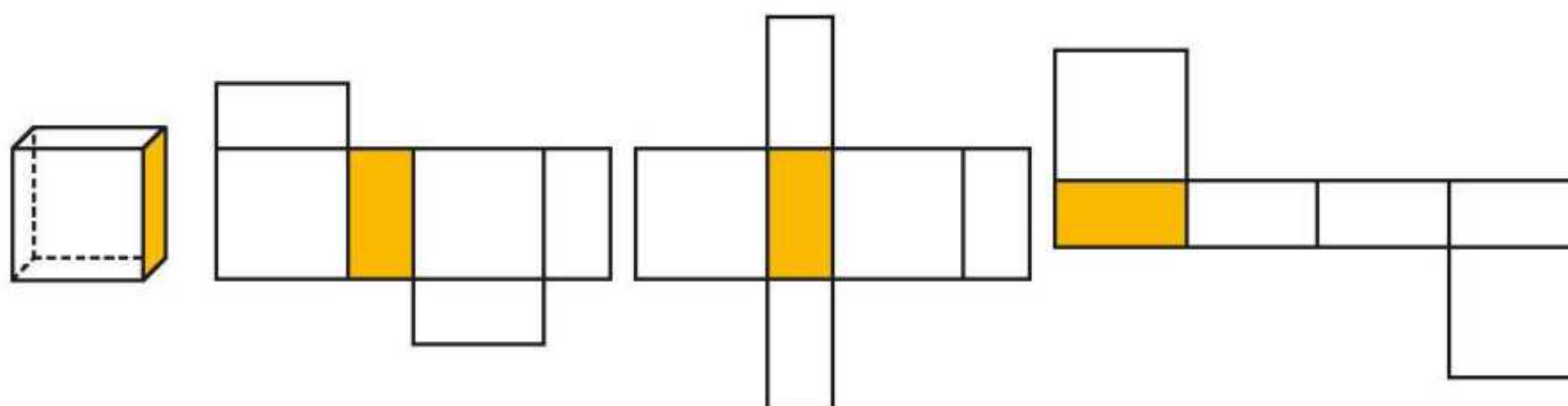
Przykład 2 ◀ zad. 4.10

Narysujemy siatkę sześcianu. Kolorem czerwonym zaznaczone są te krawędzie sześcianu, wzdłuż których został on rozcięty.



Aby wykonać czynność odwrotną, tzn. z siatki otrzymać wielościan, trzeba pozaginać ją wzdłuż każdej krawędzi, odpowiednio złożyć i skleić.

Wielościany mogą mieć wiele różnych siatek. Poniżej prezentujemy trzy różne siatki tego samego prostopadłościanu.



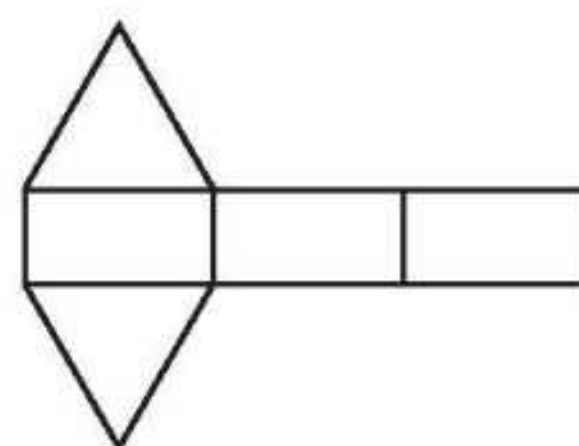
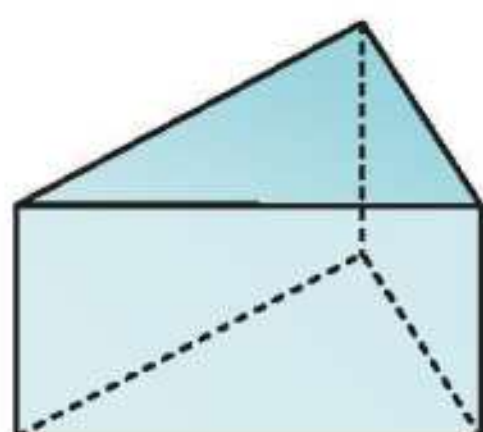


Przykład 3 ◀ zad. 4.11–4.13

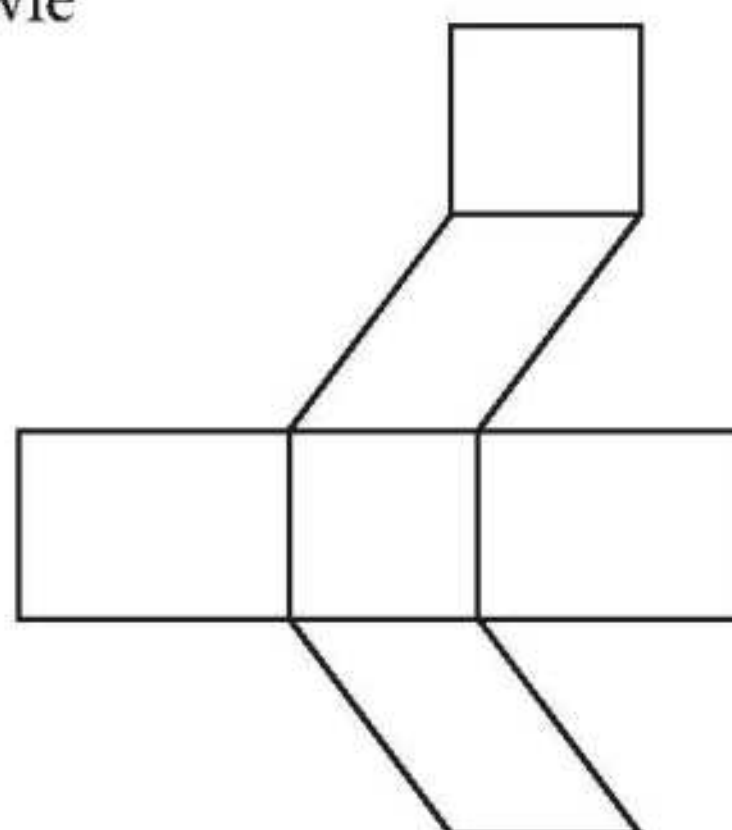
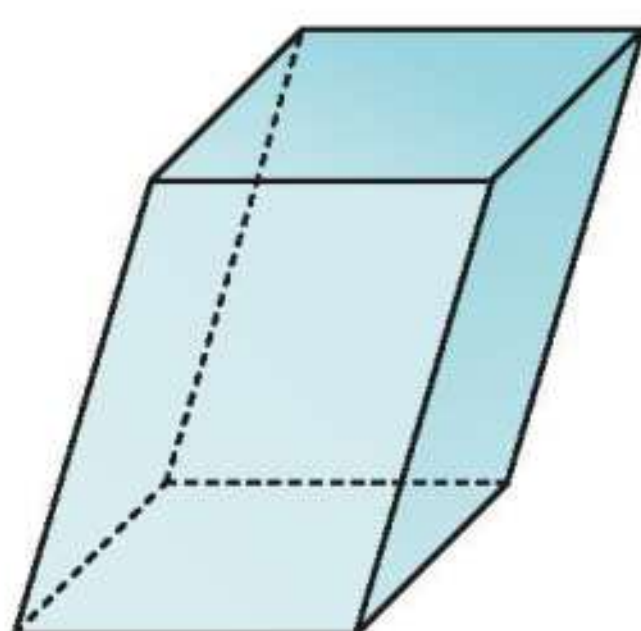
Narysujemy siatki kilku graniastosłupów.

Rozwiązanie

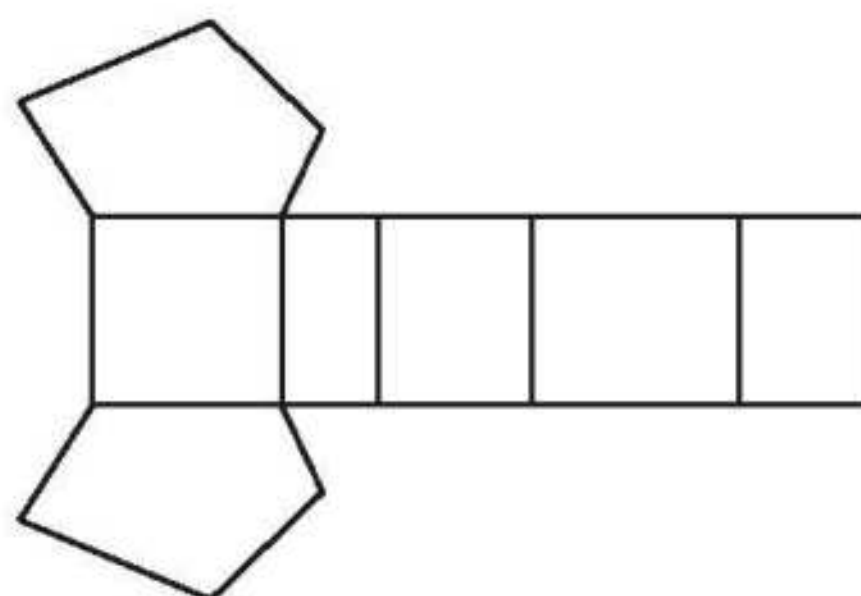
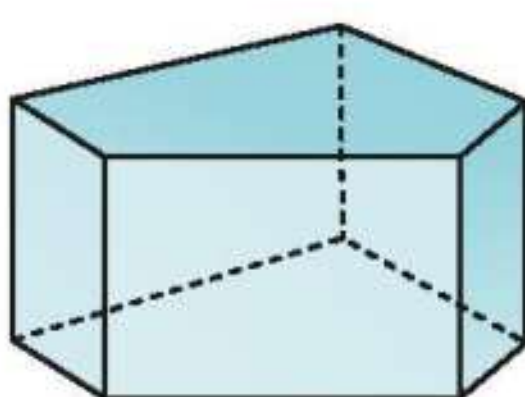
- graniastosłup prawidłowy trójkątny



- graniastosłup pochyły z kwadratem w podstawie



- graniastosłup pięciokątny prosty

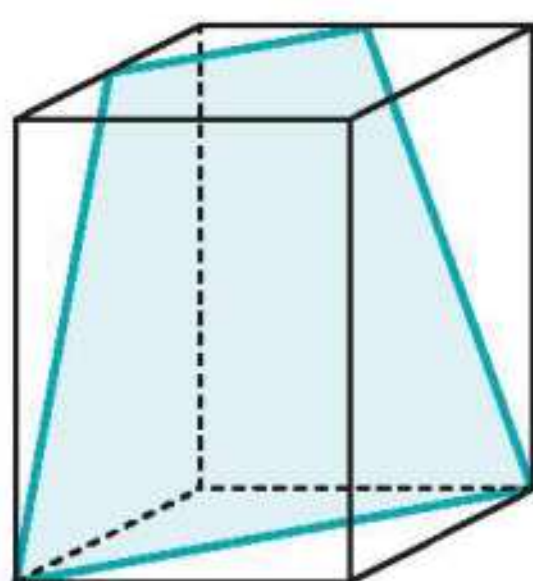


Uwaga: Wymiary siatek graniastosłupów zostały zmniejszone, aby rzuty graniastosłupów i ich siatki zmieściły się na stronie.

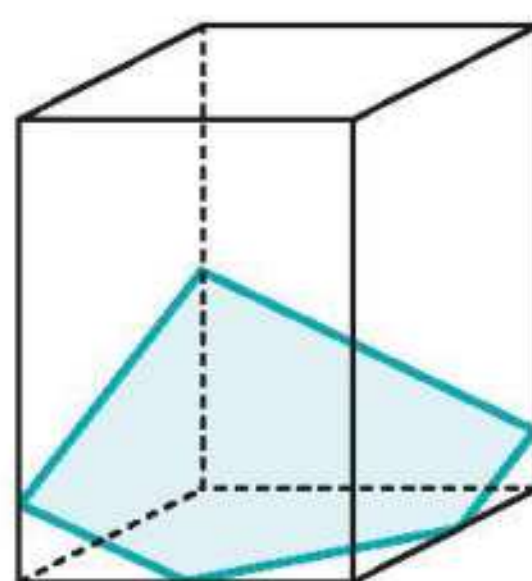
✂ Przekroje wielościanów

Jeżeli wielościan przetniemy płaszczyzną w taki sposób, że żadna ze ścian wielościanu nie zawiera się w tej płaszczyźnie oraz do części wspólnej wielościanu i tej płaszczyzny należą co najmniej trzy niewspółliniowe punkty, to tę część wspólną nazywamy **przekrojem płaskim wielościanu**. Przekroje wielościanów są wielokątami o bokach wyznaczonych przez ściany wielościanu i płaszczyznę sieczną. Zastanówmy się, jakimi wielokątami są przekroje płaskie prostopadłościanów.

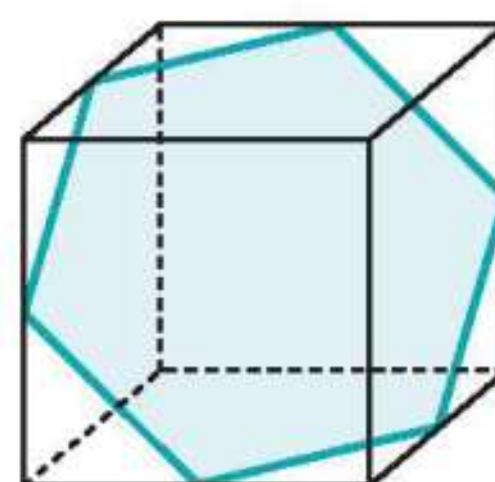
trójka



czworokąt (trapez)



pięciokąt



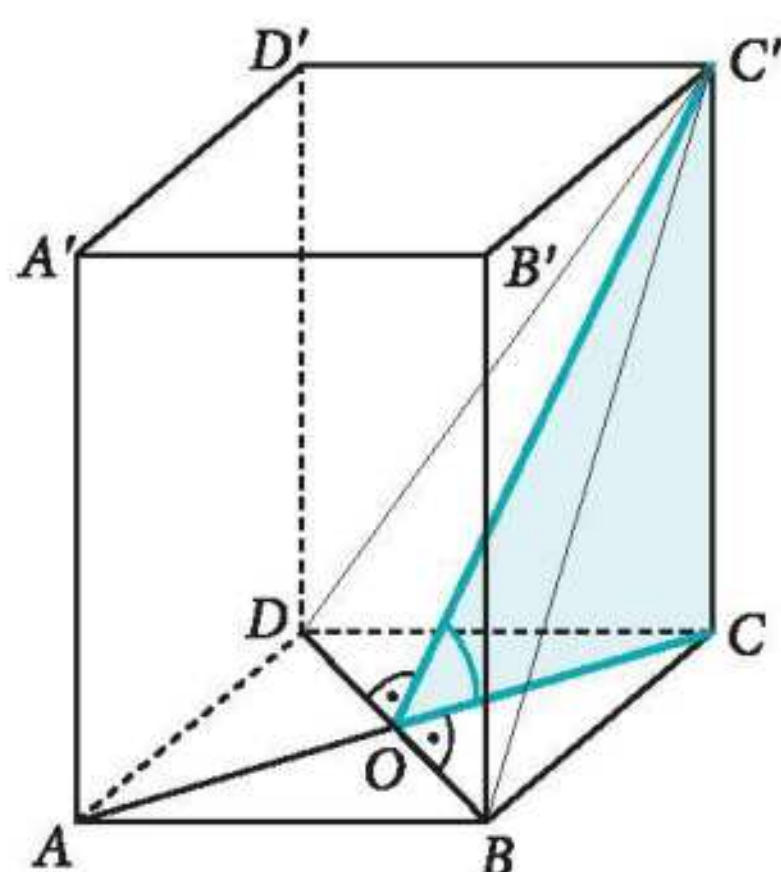
sześciokąt

Prostopadłościan $ABCD A' B' C' D'$ o podstawie kwadratowej przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki B , D i C' .

- Zaznaczymy kąt α między otrzymanym przekrojem a płaszczyzną podstawy $ABCD$ prostopadłościanu.
- Przyjmujemy, że krawędź podstawy prostopadłościanu ma długość a , a jego wysokość jest równa h . Wyznamy $\operatorname{tg} \alpha$.
- Przyjmujemy, że krawędź podstawy prostopadłościanu ma długość 4 cm, a jego wysokość jest równa 12 cm. Obliczmy pole otrzymanego przekroju.

Rozwiązanie

- a) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Przypomnijmy: Używamy w podręczniku zwrotów typu „bok a wielokąta” zamiast „bok wielokąta o długości a ”, podobnie „wysokość równa 3”, a nie „długość wysokości równa 3”, „przekątne są równe” zamiast „przekątne mają jednakową długość” itp.

Zauważmy, że:

- ściany boczne są przystającymi prostokątami,
- $|DC'| = |BC'|$, więc przekrojem jest równoramienny trójkąt DBC' .



Płaszczyzna przekroju przecina podstawę $ABCD$ wzdłuż prostej DB . Aby wyznaczyć szukany kąt, należy poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do tej prostej.

- W równoramiennym trójkącie DBC' prowadzimy wysokość $C'O$. Punkt O jest środkiem odcinka DB (przekątnej kwadratu $ABCD$).
- W kwadracie przekątne są równe i przecinają się pod kątem prostym w punkcie, który jest środkiem każdej z nich. Zatem odcinek OC – jako połowa przekątnej AC – również jest prostopadły do prostej DB .

Prosta DB jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych – OC i OC' . Jest więc prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste. Szukanym kątem α jest zatem kąt $C'OC$.

Odp.: $\alpha = \sphericalangle C'OC$

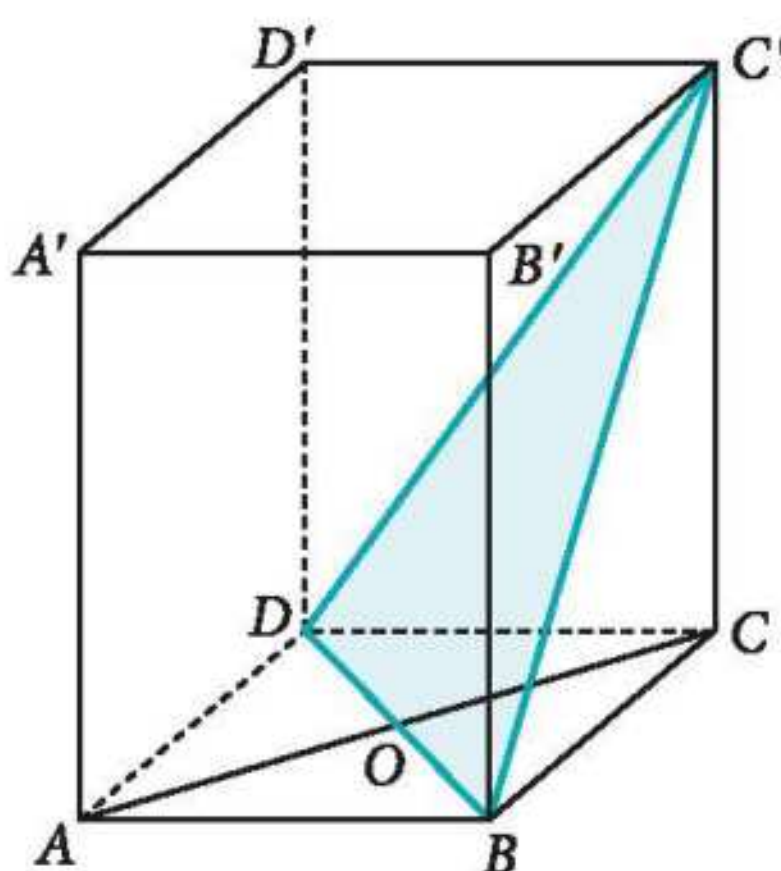
b) $\alpha = \sphericalangle C'OC$, zatem $\operatorname{tg} \alpha$ wyznaczymy z trójkąta prostokątnego $C'OC$.

$$|OC| = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \quad \leftarrow \text{połowa przekątnej kwadratu}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|C'C|}{|OC|} = \frac{2h}{a\sqrt{2}} = \frac{h\sqrt{2}}{a}$$

Odp.: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h\sqrt{2}}{a}$

c) Trójkąt DBC' jest równoramienny, zatem jego pole $P = \frac{1}{2}|DB| \cdot |OC'|$.



$$|DB| = 4\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

$\leftarrow$ przekątna kwadratu

$$|OC'| = \sqrt{12^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{144 + 8} = 2\sqrt{38} \text{ [cm]}$$

$\leftarrow$ twierdzenie Pitagorasa
w trójkącie OCC'

Zatem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{38} = 8\sqrt{19} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Odp.: $P = 8\sqrt{19} \text{ cm}^2$

Zadania

4.1. Podaj liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków

- a) sześcianu.
- b) graniastosłupa trójkątnego.
- c) graniastosłupa pięciokątnego.
- d) graniastosłupa sześciokątnego.
- e) graniastosłupa siedmiokątnego.

4.2. Pewien graniastosłup ma 11 ścian. Ile ma krawędzi?

4.3. Określ liczbę wierzchołków i krawędzi graniastosłupa, który ma

- a) 10 ścian.
- b) 32 ściany.
- c) 106 ścian.

4.4. Suma liczb ścian, krawędzi i wierzchołków pewnego graniastosłupa wynosi 44. Co to za graniastosłup?

4.5. Narysuj prostopadłościan i wszystkie jego przekątne. Ile ich jest?

4.6. Ile przekątnych ma graniastosłup o podstawie

- a) pięciokątnej?
- b) sześciokątnej?

4.7. Narysuj sześcián, a w nim jedną z jego przekątnych.

- a) Zaznacz kąt nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy.
- b) Oblicz długość przekątnej sześcianu o krawędzi 5 cm.

4.8. Wyznacz kąt, jaki tworzy przekątna sześcianu z wychodzącą z tego samego wierzchołka przekątną ściany bocznej.

4.9. Oblicz długości wszystkich przekątnych równoległoscianu prostego, w którym każda krawędź ma długość 10 cm i jeden z kątów podstawy ma miarę 60° .

4.10. Narysuj trzy różne siatki sześcianu o krawędzi 1 cm.

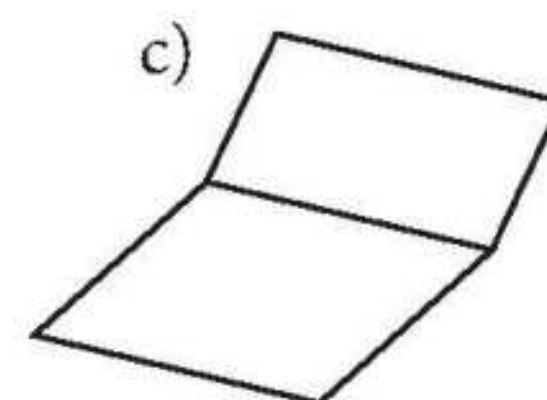
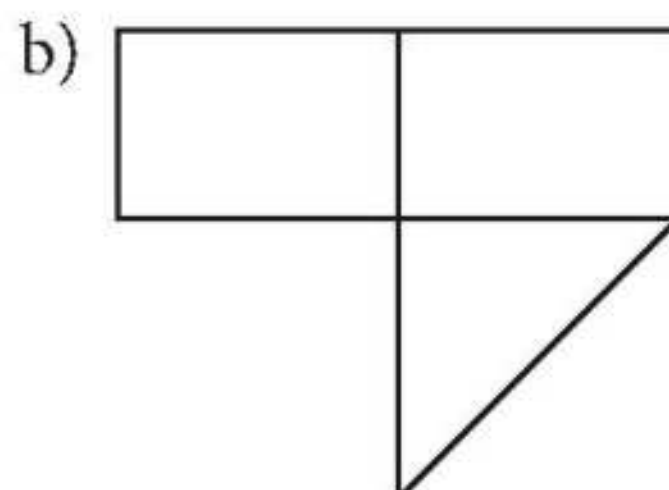
4.11. Narysuj siatkę graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa

- a) podwojonej krawędzi podstawy.
- b) potrojonej wysokości podstawy.

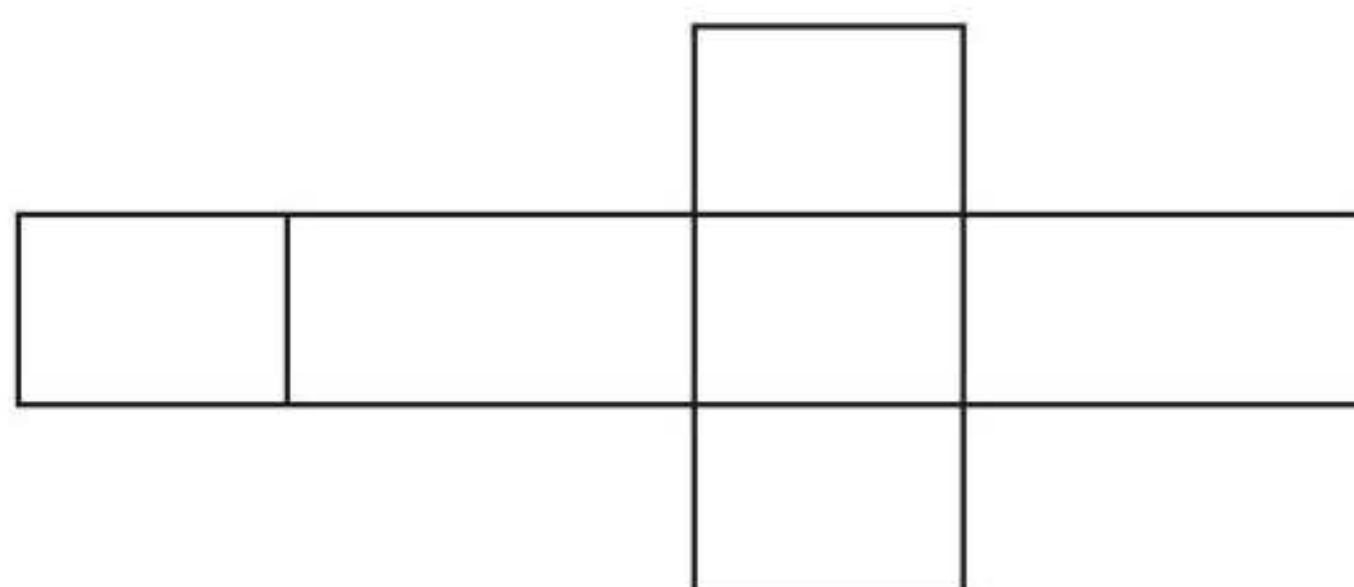
4.12. Narysuj siatkę graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego o wszystkich krawędziach długości 2 cm.

4.13. Narysuj siatkę graniastosłupa prostego, którego krawędź boczna ma długość 5 cm, a podstawą jest romb o kącie ostrym 60° i boku 3 cm.

4.14. Przerysuj figurę i uzupełnij ją tak, aby otrzymać siatkę graniastosłupa.



D 4.15. Czy narysowana figura jest siatką graniastosłupa? Odpowiedź uzasadnij.



4.16. Wysokość graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego jest równa 8. Środek symetrii podstawy jest oddalony od każdego z jej wierzchołków o 6. Oblicz długości przekątnych tego graniastosłupa.

4.17. Dany jest prostopadłościan $ABCD A'B'C'D'$ o podstawie kwadratowej $ABCD$, niebędący sześciannem. Narysuj przekrój tego prostopadłościanu płaszczyzną poprowadzoną przez

- a) wierzchołki A, C oraz środek krawędzi DD' .
- b) środki trzech krawędzi bocznych.
- ✱ c) wierzchołki D, B oraz środek krawędzi $B'C'$.

4.18. Prostopadłościan $ABCD A'B'C'D'$ o podstawie kwadratowej przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki B, D i C' . Krawędź podstawy prostopadłościanu ma długość $12\sqrt{2}$, jego wysokość jest równa 16, a α jest kątem między otrzymanym przekrojem a płaszczyzną podstawy $ABCD$. Wyznacz $\cos \alpha$.

4.19. Podstawę prostopadłościanu stanowi kwadrat o boku 6 cm, a wysokość prostopadłościanu jest równa 9 cm. Prostopadłościan ten przecięto płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i przechodzącą przez jeden z wierzchołków drugiej podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju. Rozważ wszystkie możliwości.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Pewien graniastosłup ma 2040 krawędzi. Wskaż liczbę wierzchołków tego graniastosłupa.

- A. 680 B. 682 C. 1020 D. 1360

2. Wskaż długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach $3 \times 6 \times 8$.

- A. 12 B. $4\sqrt{6}$ C. $\sqrt{109}$ D. 10,1

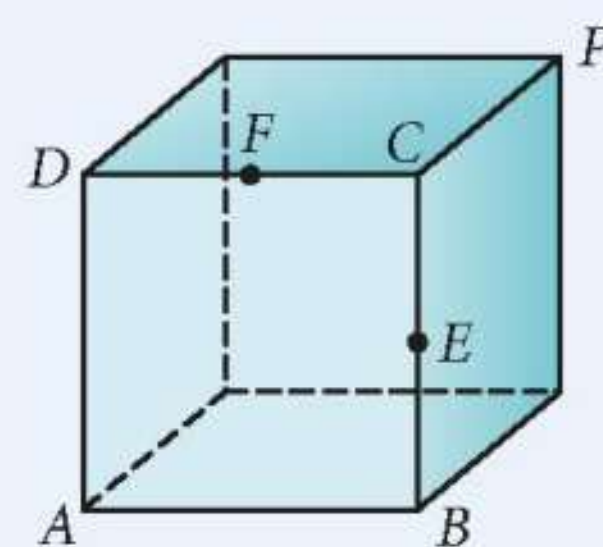
3. Sześciąt $ABCD A' B' C' D'$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną BD i wierzchołek C' . Wskaż podaną z dokładnością do 1° miarę kąta nachylenia otrzymanego przekroju do płaszczyzny $ABCD$.

- A. 35° B. 45° C. 55° D. 60°

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Punkty E i F są środkami krawędzi BC i CD sześciatu przedstawionego na rysunku. Przekrój sześciatu płaszczyzną wyznaczoną przez punkty E , F i P jest

- A. trapezem.
B. trójkątem równoramiennym.
C. trójkątem prostokątnym.



5. Wysokość graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego jest równa 8. Środek symetrii podstawy jest oddalony o 6 od każdego z jej boków. Wyznacz cosinusy kątów nachylenia przekątnych tego graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

6. Sześciąt o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy. Kąt nachylenia otrzymanego przekroju do płaszczyzny podstawy wynosi α . Oblicz pole P przekroju. Rozważ wszystkie możliwości.

7. Prostopadłościan o podstawie kwadratowej przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków podstawy. W przekroju otrzymano romb o kącie ostrym α . Wyznacz cosinus kąta β nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy prostopadłościanu.

5. Ostrosłupy

Umiejętności:

- rozpoznawanie w ostrosłupach kątów między: odcinkami, odcinkami i płaszczyznami, ścianami; obliczanie miar tych kątów
- stosowanie trygonometrii do obliczania: długości odcinków, miar kątów oraz pól powierzchni

Przypomnimy i uporządkujemy najważniejsze wiadomości o **ostrosłupach** omawiane podczas nauki w szkole podstawowej.

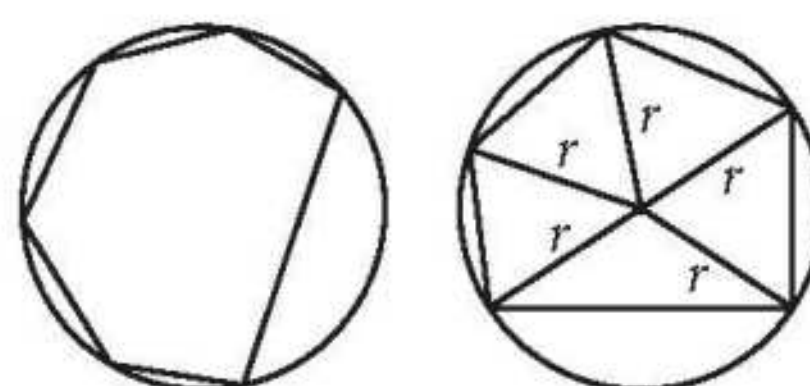
Zacniemy jednak od wprowadzenia definicji rozszerzających pojęcia trójkąta wpisanego w okrąg i trójkąta opisanego na okręgu na dowolny wielokąt. Są one potrzebne do opisywania niektórych własności ostrosłupów.

Definicja

Okrąg, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki wielokąta, nazywamy **okręgiem opisanym na tym wielokącie**.

W takiej sytuacji mówimy również, że dany **wielokąt jest wpisany w okrąg**.

Zauważmy, że środek okręgu opisanego na wielokącie jest równo oddalony (o promień) od każdego z jego wierzchołków. Leży więc na symetralnej każdego boku takiego wielokąta.



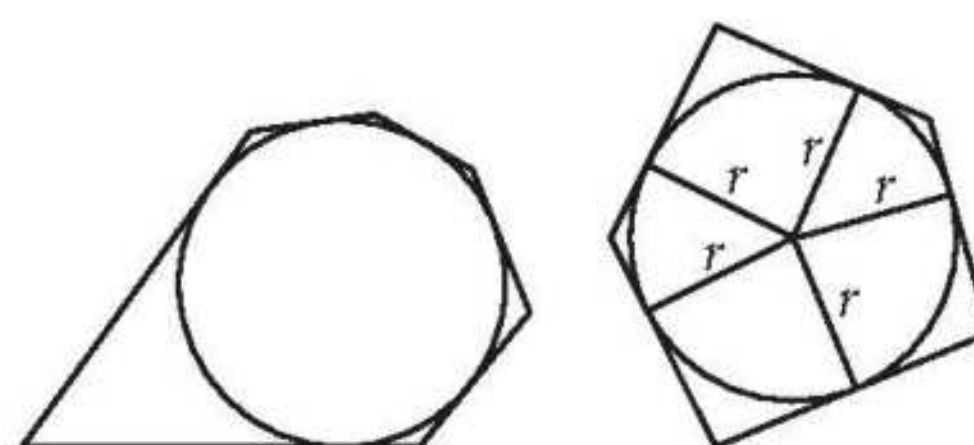
Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg.

Definicja

Okrąg, który jest styczny do każdego boku wielokąta, nazywamy **okręgiem wpisanym w ten wielokąt**.

W takiej sytuacji mówimy również, że dany **wielokąt jest opisany na okręgu**.

Zauważmy, że środek okręgu wpisanego w wielokąt jest równo oddalony (o promień) od każdego boku tego wielokąta. Leży więc na dwusiecznej każdego z kątów wewnętrznych takiego wielokąta.



W każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg.

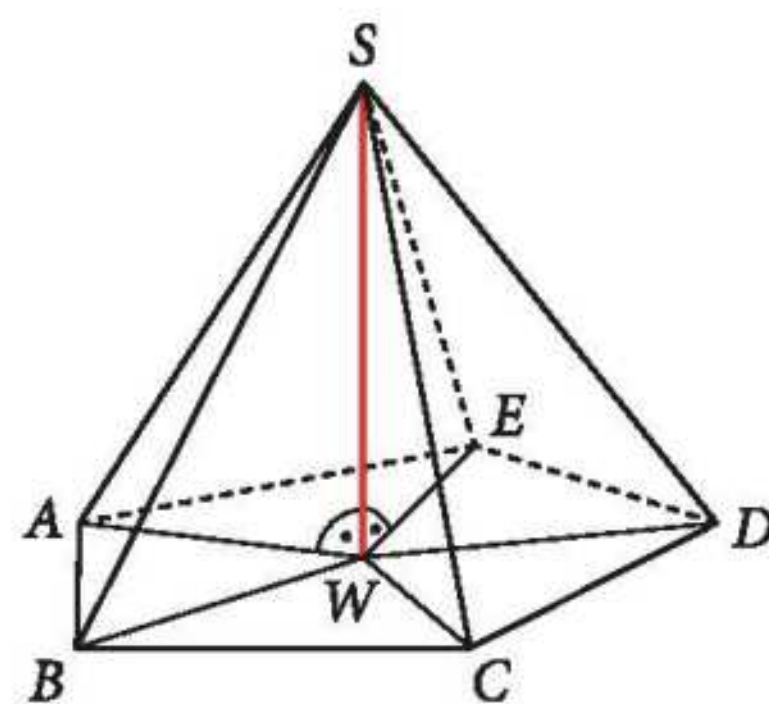
Ostrosłupy

Definicja

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego jedną ścianą (zwaną podstawą) jest dowolny wielokąt wypukły, a pozostałe ściany (zwane bocznymi) są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

W narysowanym obok ostrosłupie:

- pięciokąt $ABCDE$ jest podstawą,
- AB, BC, CD, DE, EA są krawędziami podstawy,
- ABS, BCS, CDS, DES, EAS są ścianami bocznymi,
- AS, BS, CS, DS, ES są krawędziami bocznymi,
- A, B, C, D, E, S są wierzchołkami,
- kąty ASB, BSC, CSD, DSE, ESA są kątami płaskimi przy wierzchołku ostrosłupa.

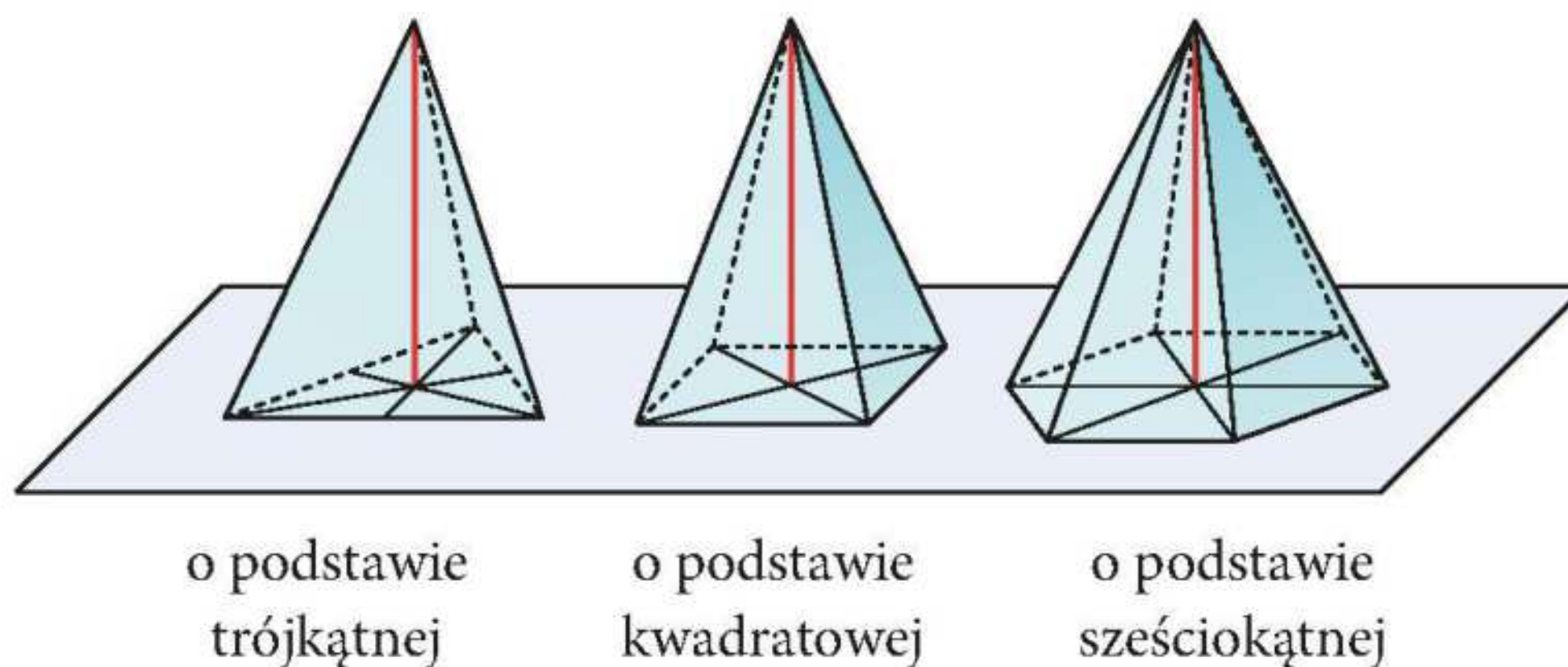


Punkt W jest rzutem prostokątnym wierzchołka S na płaszczyznę podstawy. Odcinek SW nazywamy wysokością ostrosłupa, a punkt W – **spodkiem wysokości**.

Definicja

Ostrosłupem prawidłowym nazywamy ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny i którego spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

Przykłady ostrosłupów prawidłowych:



Ostrosłup o podstawie trójkątnej ma cztery ściany – dlatego nazywamy go **czworościanem**.



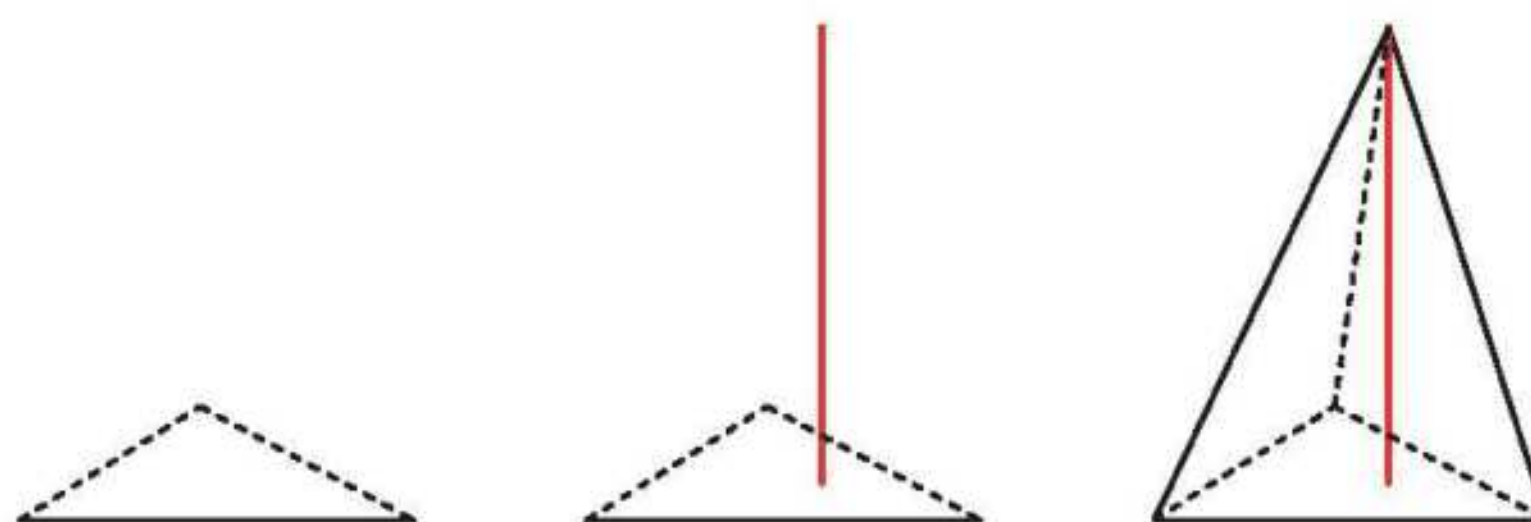
Rysowanie ostrosłupów

Podczas omawiania problemów dotyczących wielościanów istotna jest umiejętność zrobienia czytelnego rysunku wielościanu i poprawnego zaznaczenia jego własności.

Przykład 1

Przyjrzyjmy się sposobom rysowania najczęściej spotykanych ostrosłupów.

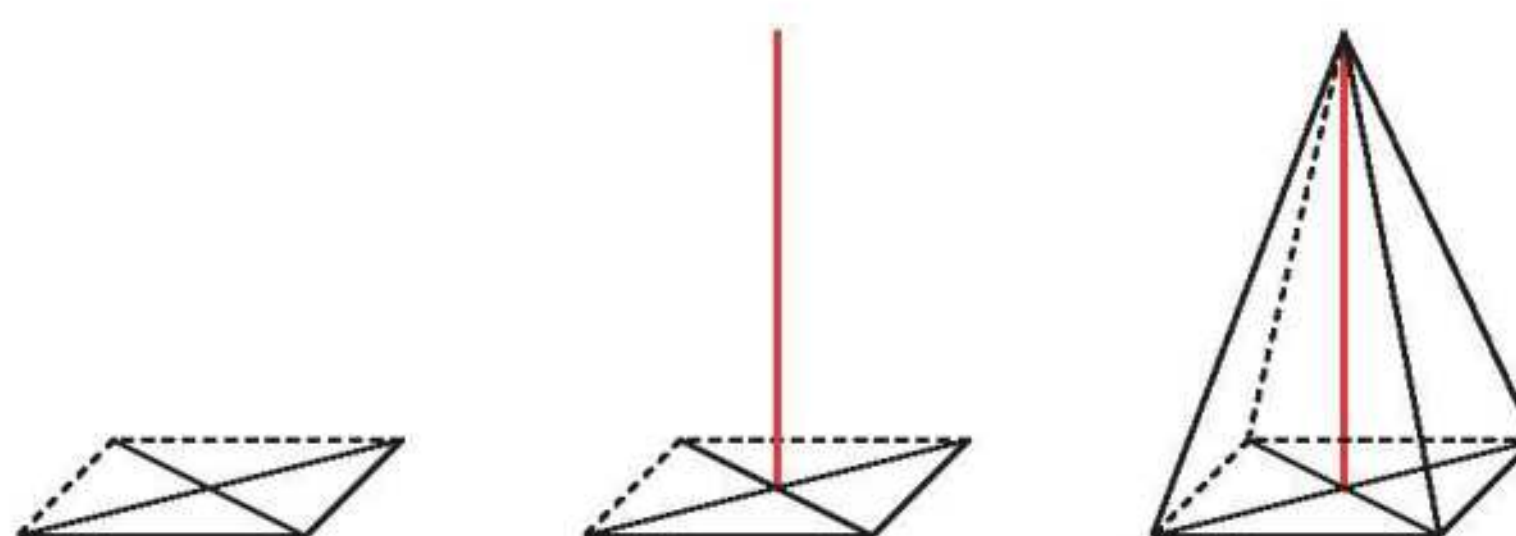
- czworościan



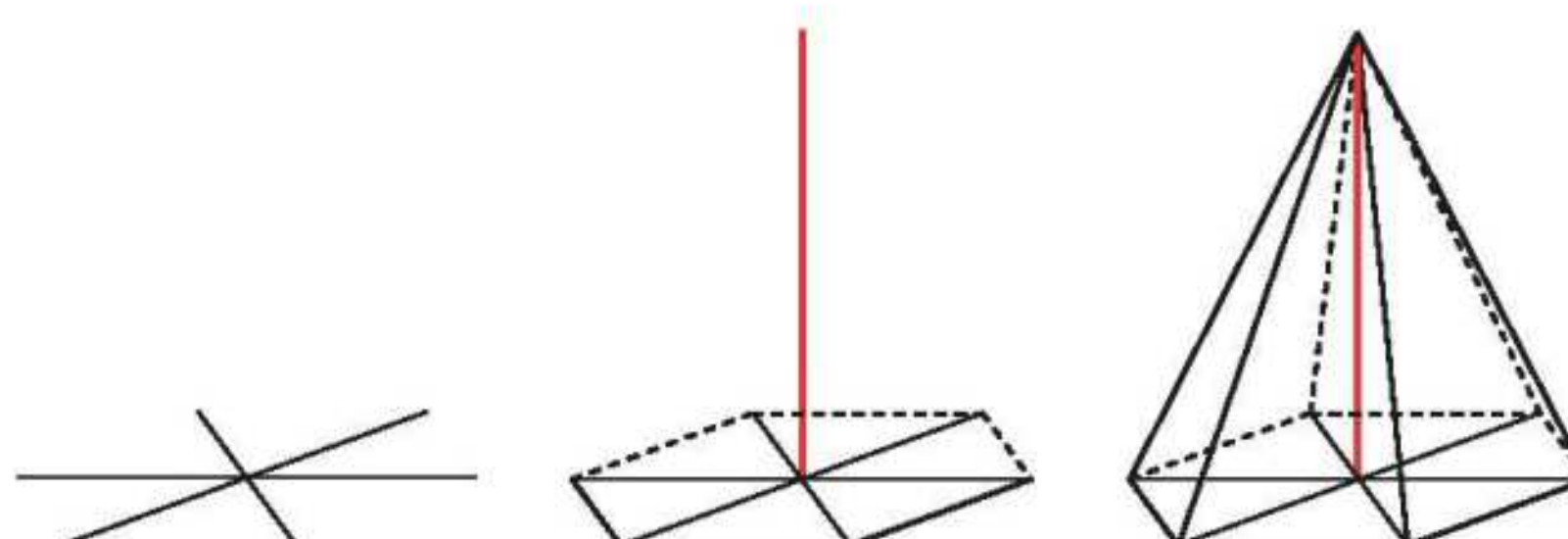
- czworościan prawidłowy



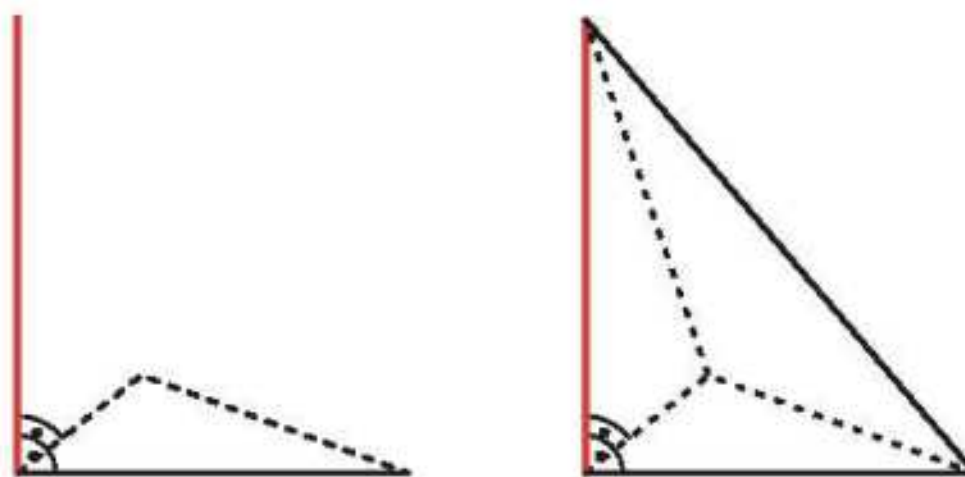
- ostrosłup prawidłowy o podstawie czworokątnej



- ostrosłup prawidłowy o podstawie sześciokątnej



- ostrosłup o podstawie trójkątnej, którego jedna krawędź boczna jest prostopadła do płaszczyzny podstawy

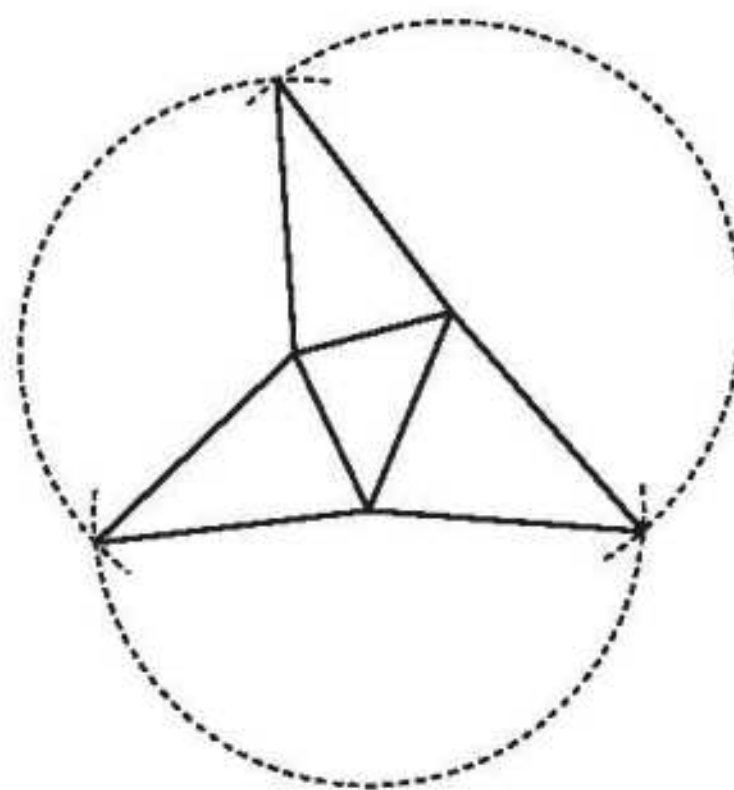
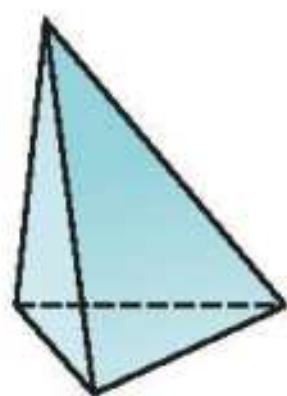


Przykład 2 ◀ zad. 5.9–5.11

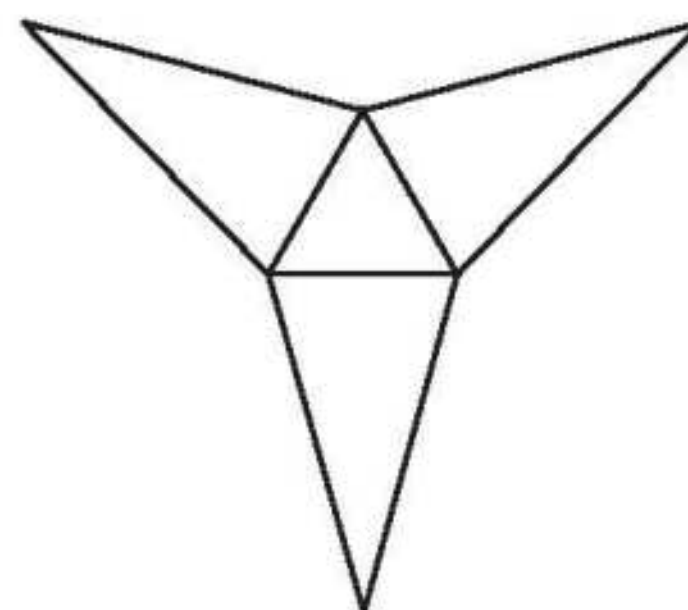
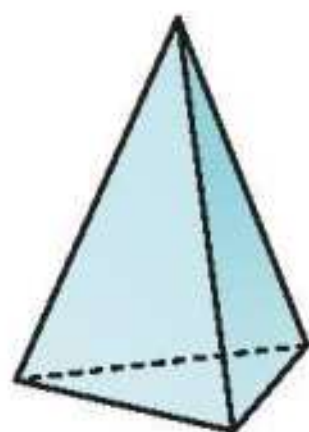
Podobnie jak w wypadku graniastosłupów, możemy sporządzić siatki ostrosłupów.

Rozwiązanie

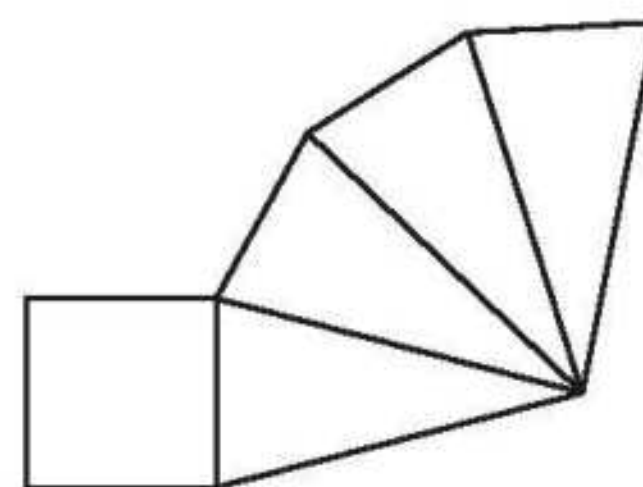
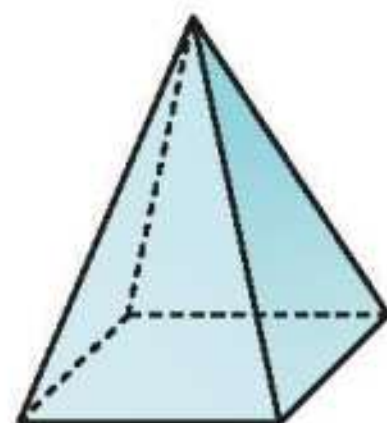
- czworościan



- czworościan prawidłowy



- ostrosłup prawidłowy czworokątny



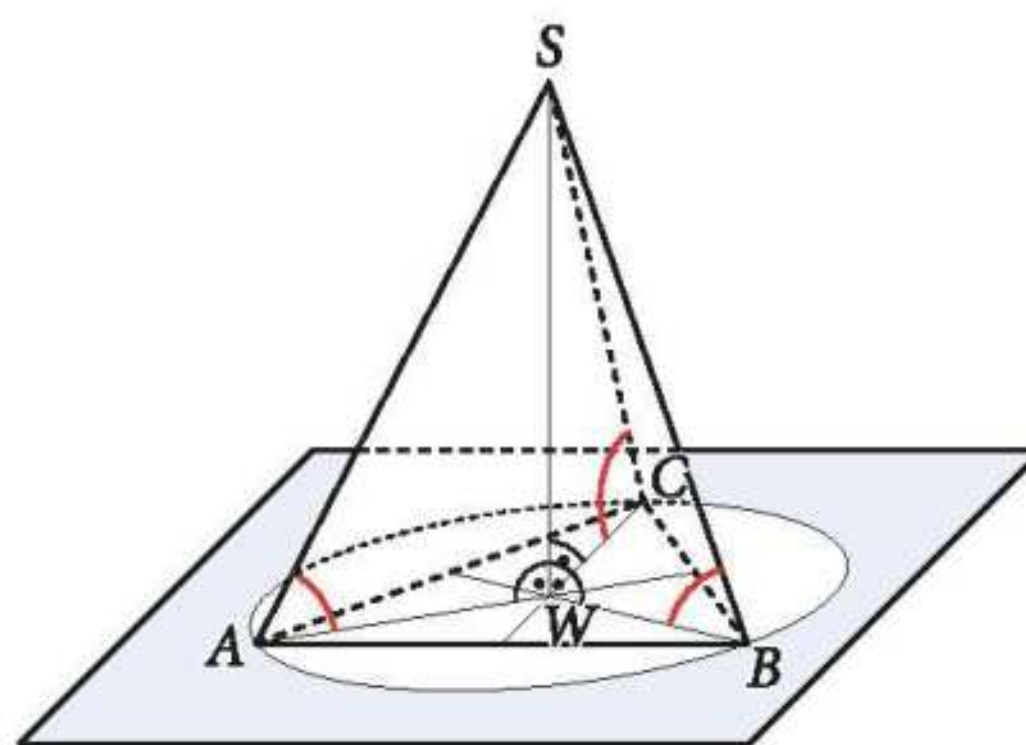
Własności ostrosłupów

Przyjmijmy, że $ABCS$ jest czworościanem prawidłowym.

I. Zgodnie z definicją punkt W – spodek wysokości – jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC .

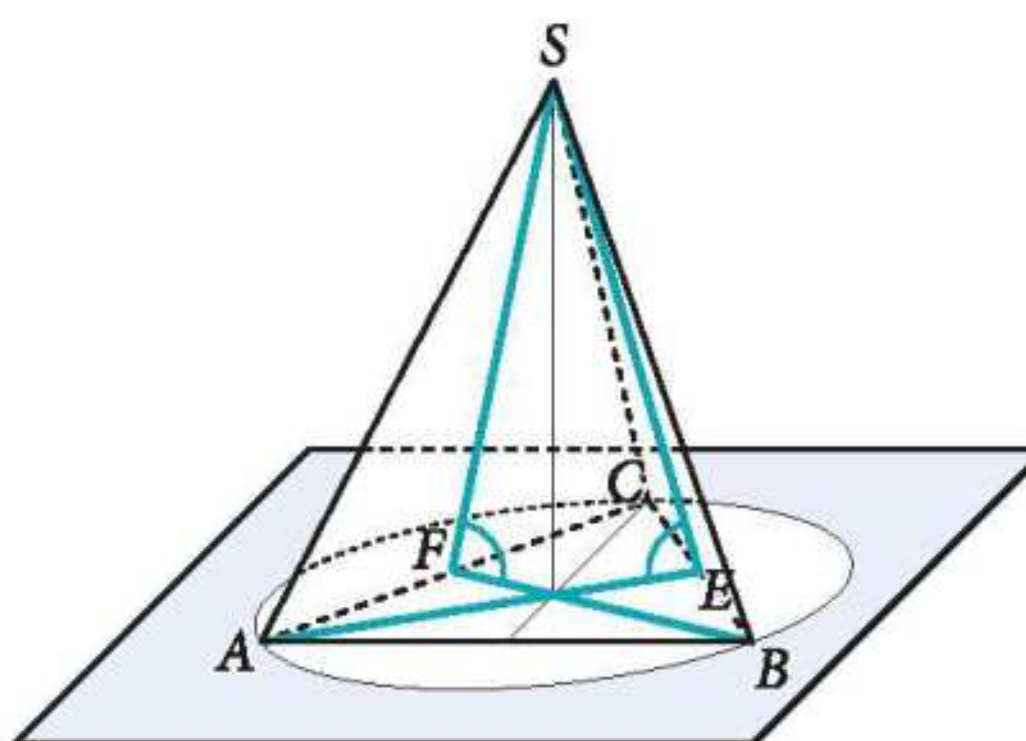
Trójkąty AWS , BWS i CWS są przystającymi trójkątami prostokątnymi (cecha bkb). Z tego faktu wynika, że:

- $|AS| = |BS| = |CS|$,
- $\sphericalangle WAS = \sphericalangle WBS = \sphericalangle WCS$, czyli kąty nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy są równe,
- ściany boczne ostrosłupa są przystającymi trójkątami równoramiennymi (cecha bbb).

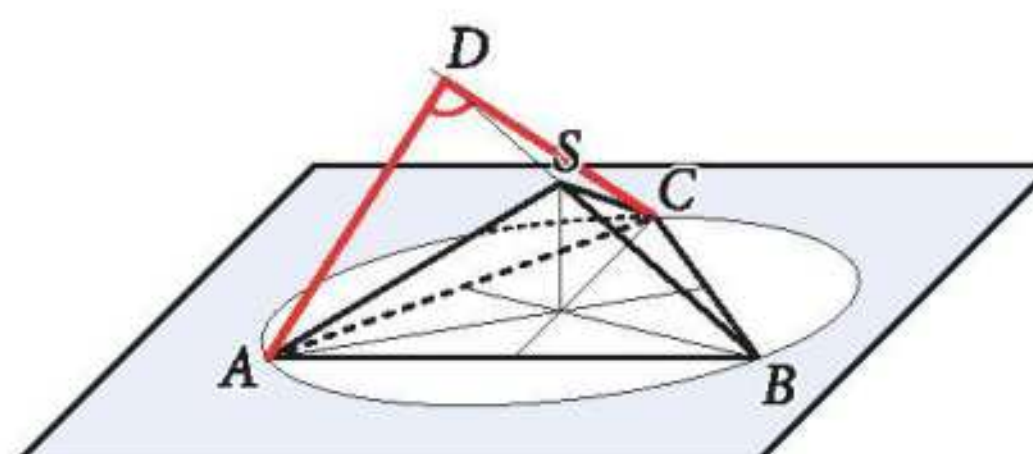
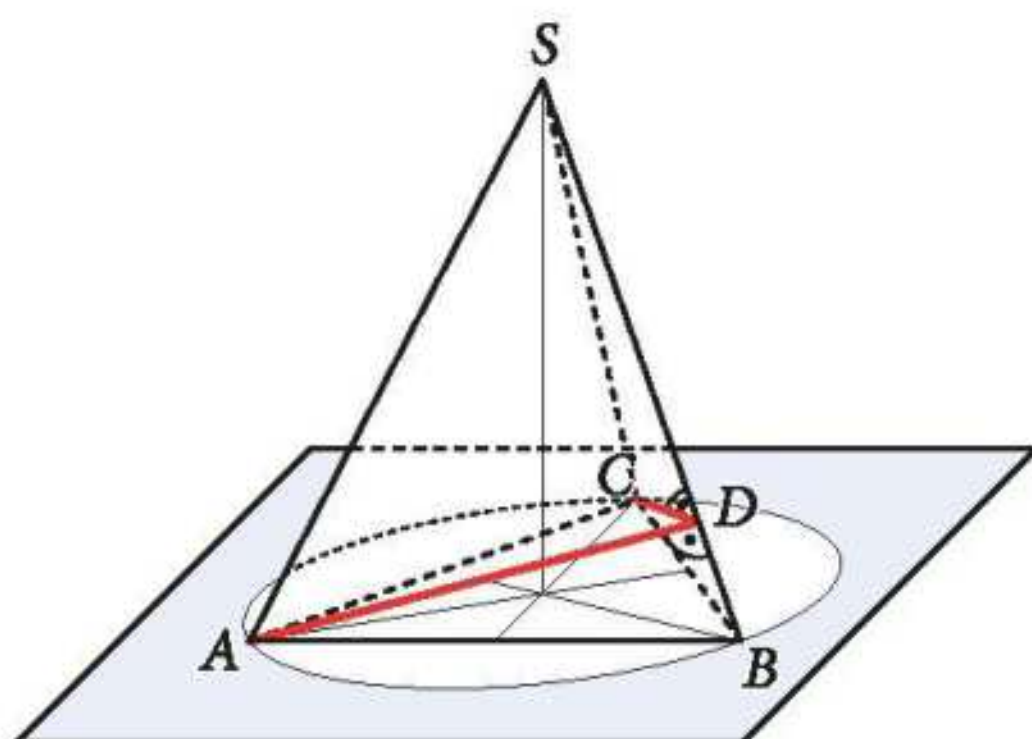


II. Jeżeli punkt E jest środkiem boku BC , to $SE \perp BC$ (SE jest wysokością w równoramiennym trójkącie BCS) oraz $AE \perp BC$ (AE jest wysokością w równobocznym trójkącie ABC). Zatem kąt AES jest kątem nachylenia ściany bocznej BCS do płaszczyzny podstawy.

Jeśli F jest środkiem boku AC , to kąt BFS jest kątem nachylenia ściany bocznej ACS do płaszczyzny podstawy. Trójkąty AES i BFS są przystające (bbb), zatem $\sphericalangle AES = \sphericalangle BFS$. Inaczej mówiąc, **kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy są równe**.



III. Aby wyznaczyć kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi, np. ABS i BCS , trzeba poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do krawędzi BS . Mogą ją wyznaczyć wysokości poprowadzone z wierzchołków A (w trójkącie ABS) i C (w trójkącie BCS). Trójkąty ABS i BCS są przystające, więc obydwie wysokości „trafią” w ten sam punkt (na rysunku po lewej stronie oznaczony D). Można udowodnić, że w ostrosłupie prawidłowym **kąty dwuścienne między sąsiednimi ścianami są równe**.



Zauważmy, że punkt D nie musi należeć do odcinka BS – jak na rysunku po prawej stronie.

Powyższe rozumowanie przeprowadziliśmy dla czworościanu prawidłowego. Można je uogólnić dla dowolnego ostrosłupa prawidłowego.

Twierdzenie

W ostrosłupie prawidłowym:

- wszystkie krawędzie boczne są równe i nachylone do płaszczyzny podstawy pod takim samym kątem,
- ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi,
- kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy są równe,
- kąty dwuścienne między sąsiednimi ścianami bocznymi są równe.

Prawdziwe są również poniższe twierdzenia.

Twierdzenie

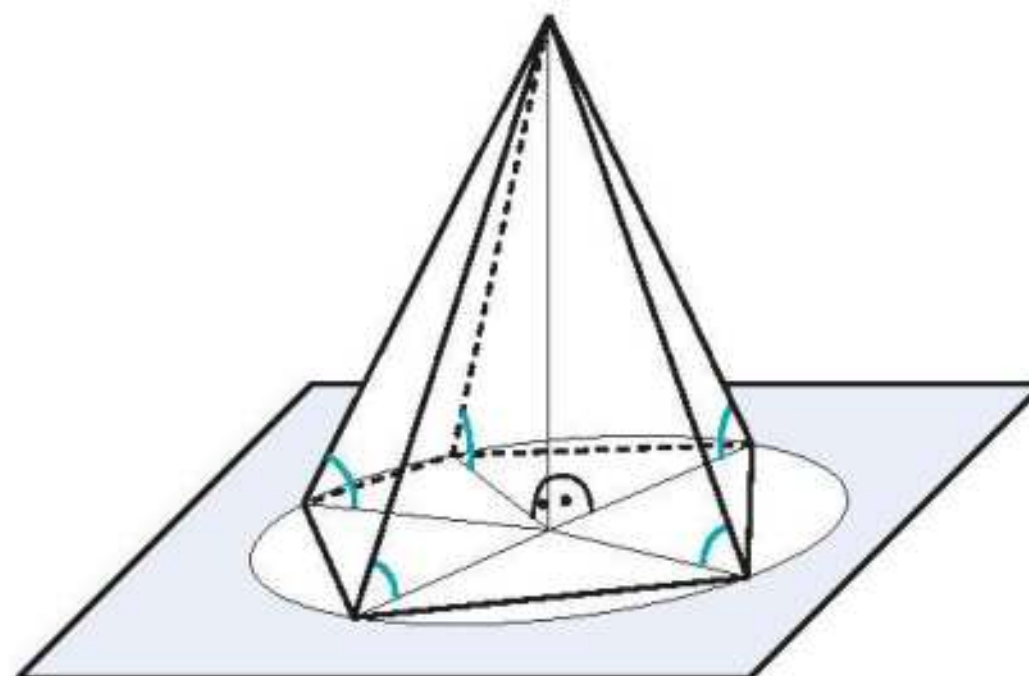
Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny i wszystkie krawędzie boczne są równe, to ostrosłup ten jest prawidłowy.

Twierdzenie

Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny i wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem, to ostrosłup ten jest prawidłowy.

Charakterystyczną grupę ostrosłupów tworzą te z nich, które co prawda nie mają w podstawie wielokąta foremnego, ale taki, na którym można opisać okrąg, a ponadto środek tego okręgu jest spodkiem wysokości ostrosłupa. Można wykazać, że równoważne są następujące trzy warunki (tzn. jeżeli spełniony jest jeden z nich, to spełnione są również dwa pozostałe):

- wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są równe,
- wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem,
- na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg, którego środkiem jest spodek wysokości ostrosłupa.



Przykład 3 ◀ zad. 5.17

Wyznamy z dokładnością do 1° miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, w którym krawędź podstawy ma długość 6, a wysokość ostrosłupa jest równa 10.

Rozwiązanie

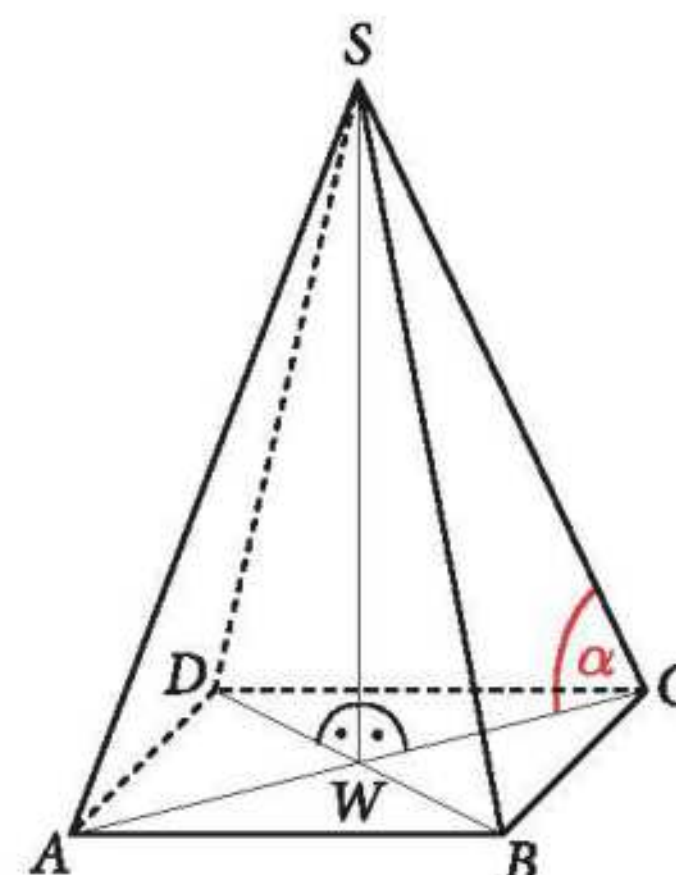
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku 6. Szukany kąt α jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym WCS , w którym połowa przekątnej kwadratu $|WC| = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, a bok WS jest wysokością ostrosłupa. Kąt α wyznaczmy za pomocą funkcji trygonometrycznej.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|WS|}{|WC|} = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2,357$$

Z tablic odcytujemy, że $\alpha \approx 67^\circ$.

Odp.: 67°

**Przykład 4** ◀ zad. 5.19

Kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy trójkątnego ostrosłupa prawidłowego jest równy 70° . Wysokość ostrosłupa jest równa 12. Obliczmy pole P podstawy tego ostrosłupa z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny, więc do obliczenia pola wystarczy znaleźć bok tego trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Spodek wysokości ostrosłupa jest punktem przecięcia środkowych podstawy.

Zatem:

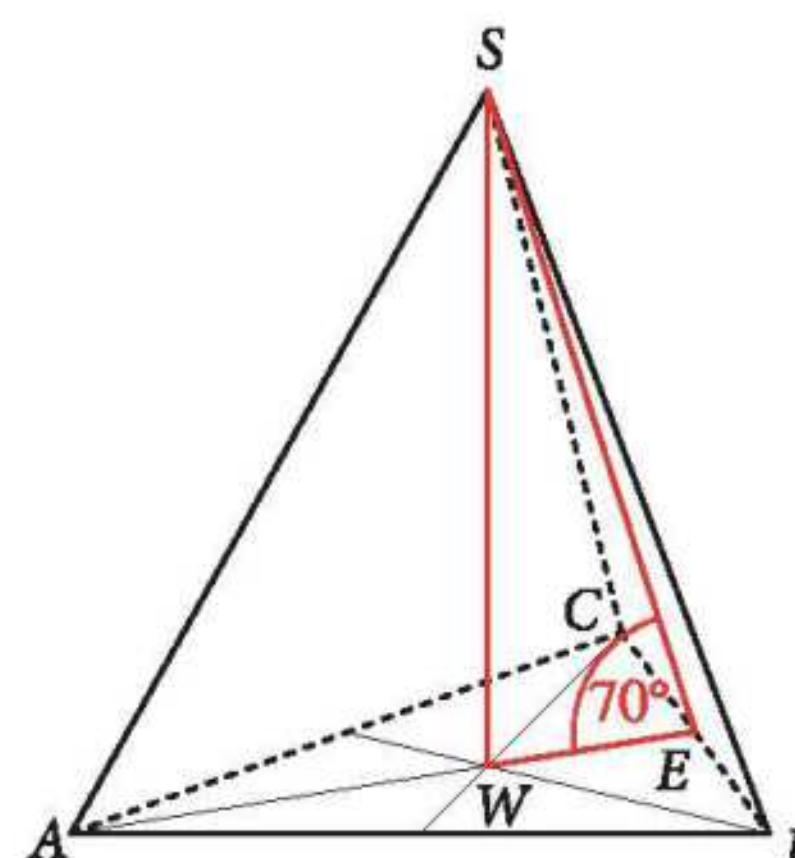
$$|WE| = \frac{1}{3} \cdot |AE| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

gdzie a oznacza długość boku podstawy.

Długość odcinka WE obliczymy za pomocą funkcji trygonometrycznej.

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{|WS|}{|WE|}$$

$$|WE| = \frac{|WS|}{\operatorname{tg} 70^\circ} \approx \frac{12}{2,7475} \approx 4,3676$$



Mamy więc $\frac{a\sqrt{3}}{6} \approx 4,3676$.

$$a \approx \frac{4,3676 \cdot 6}{\sqrt{3}}$$

$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \approx \frac{(4,3676 \cdot 6)^2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 4} \approx 99,1$$

Odp.: $P = 99,1$

W **trójkącie równobocznym** wysokości są równocześnie środkowymi boków. Jeżeli bok trójkąta oznaczmy a , wysokość h , pole P , to

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

W **dowolnym trójkącie** środkowe przecinają się w jednym punkcie (środku ciężkości), który dzieli je w stosunku $2 : 1$, licząc od wierzchołka.

Przykład 5

Jolka ma wykonać z drutu szkielet ostrosłupa o następujących własnościach:

- podstawą jest prostokątny trójkąt równoramienny o przeciwprostokątnej 16 cm,
- krawędź boczna, której koniec stanowi wierzchołek kąta prostego podstawy, jest prostopadła do płaszczyzny podstawy,
- pozostałe dwie krawędzie są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° .

Obliczymy, jaką długość powinien mieć drut potrzebny do wykonania zadania.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Kąt CAB jest prosty. Mamy obliczyć sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa.

Zauważmy, że:

1. prostokątny trójkąt równoramienny ABC (podstawa ostrosłupa) jest połową kwadratu o przekątnej $|BC| = 16$, zatem:

$$16 = |AC| \cdot \sqrt{2}$$

czyli $|AC| = |AB| = 8\sqrt{2}$ [cm],

2. ściana boczna ACS jest połową trójkąta równobocznego, ponieważ $\sphericalangle SAC = 90^\circ$ i $\sphericalangle ACS = 60^\circ$ (to samo można powiedzieć o ścianie ABS), stąd:

$$|CS| = 2 \cdot |AC| = 16\sqrt{2}$$
 [cm]

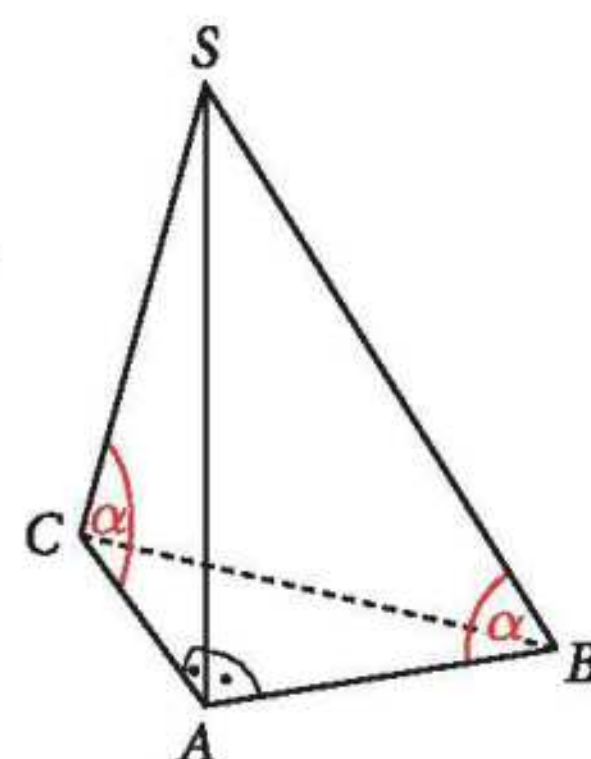
$$|AS| = |AC| \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{6}$$
 [cm]

Suma długości wszystkich krawędzi jest więc równa:

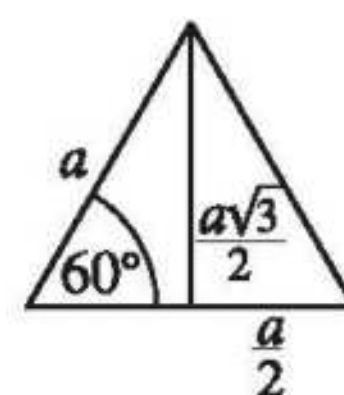
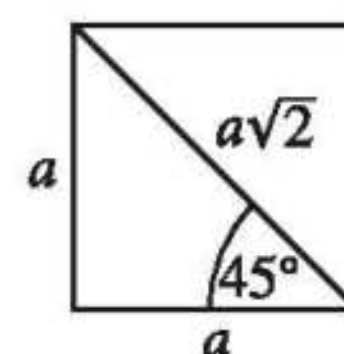
$$16 + 2 \cdot 8\sqrt{2} + 2 \cdot 16\sqrt{2} + 8\sqrt{6} \approx 103,5$$
 [cm]

Zauważmy, że do wykonania takiego szkieletu trzeba przynajmniej jedną krawędź odciąć – pozostałe boki można pozaginać z jednego kawałka drutu.

Odp.: Potrzebny kawałek drutu powinien mieć prawie 104 cm długości.



Przypomnijmy:



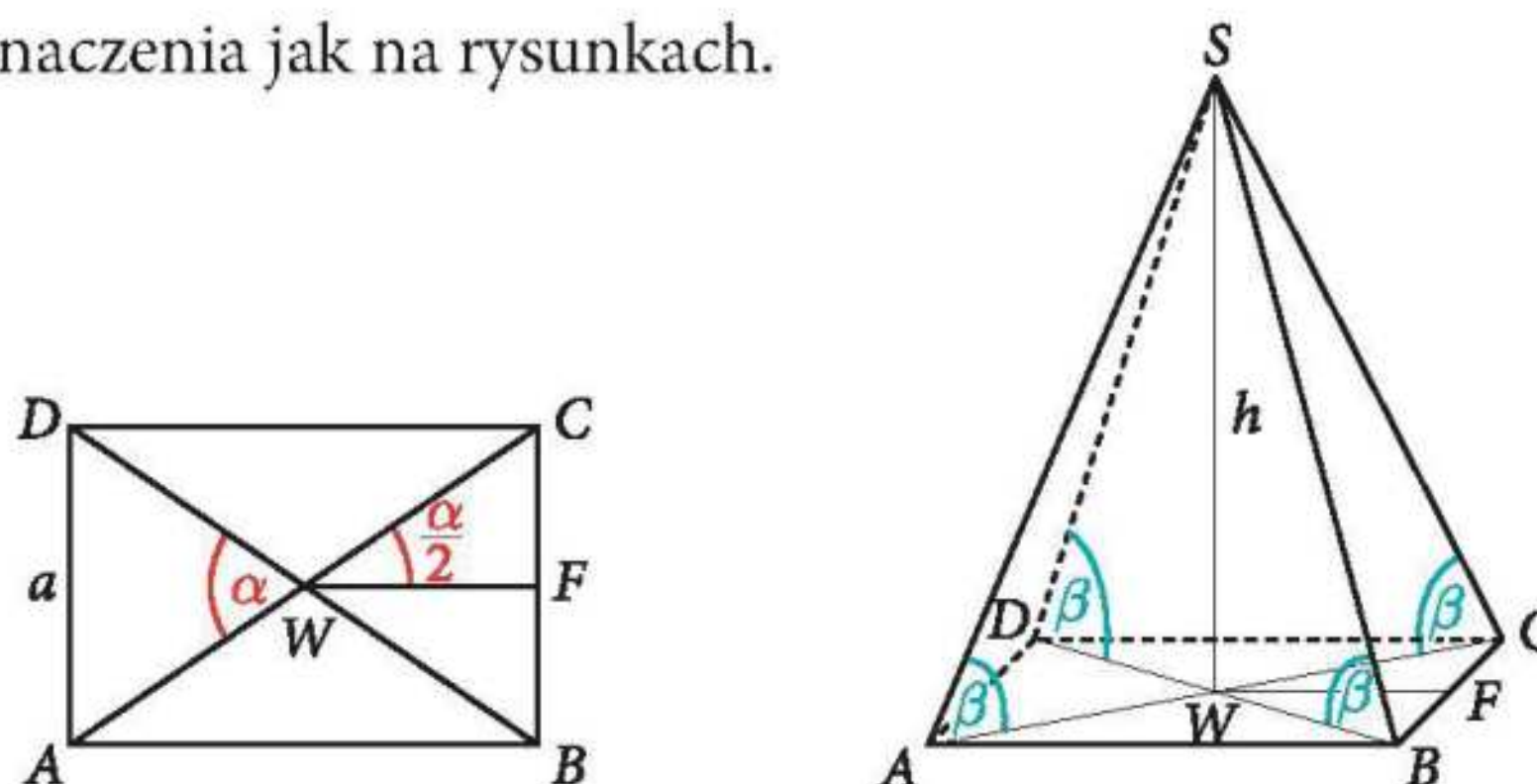
Przykład 6 zad. 5.21

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, w którym krótszy bok ma długość a , a przekątne przecinają się pod kątem ostrym α . Wysokość ostrosłupa jest równa h , a spodek wysokości jest punktem przecięcia przekątnych podstawy. Wyznamy kąty nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy.

Rozwiązanie

Jeżeli podstawa jest prostokątem, to można na niej opisać okrąg (na każdym prostokącie można opisać okrąg). Ponadto jeśli spodek wysokości jest punktem przecięcia przekątnych prostokąta (czyli środkiem okręgu opisanego na tym prostokącie), to krawędzie boczne ostrosłupa są równej długości i tworzą równe kąty z płaszczyzną podstawy.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach.



Dane są trzy wielkości: α , a , h . Za ich pomocą mamy wyznaczyć kąt β .

W prostokątnym trójkącie SWC długość boku WS jest dana, więc wystarczy, że wyznaczmy długość jeszcze jednego boku.

Trójkąt BCW jest równoramienny ($|BW| = |CW|$). Jeżeli poprowadzimy w nim wysokość WF, to:

$$|FC| = \frac{a}{2}, \quad \sphericalangle FWC = \frac{\alpha}{2}, \quad \sin \sphericalangle FWC = \frac{|FC|}{|WC|}$$

Zatem:

$$|WC| = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Możemy teraz wyznaczyć tangens kąta β w trójkącie SWC:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|WS|}{|WC|} = \frac{2h \sin \frac{\alpha}{2}}{a}$$

Odp.: Krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod takim kątem β ,

$$\text{że } \operatorname{tg} \beta = \frac{2h \sin \frac{\alpha}{2}}{a}.$$

Wyznaczenie kąta ostrego najczęściej polega na wyznaczeniu wartości jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Przykład 7

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędź podstawy ma długość a , zaś krawędź boczna jest od niej dwa razy dłuższa. Obliczmy cosinus kąta α między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ostrosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

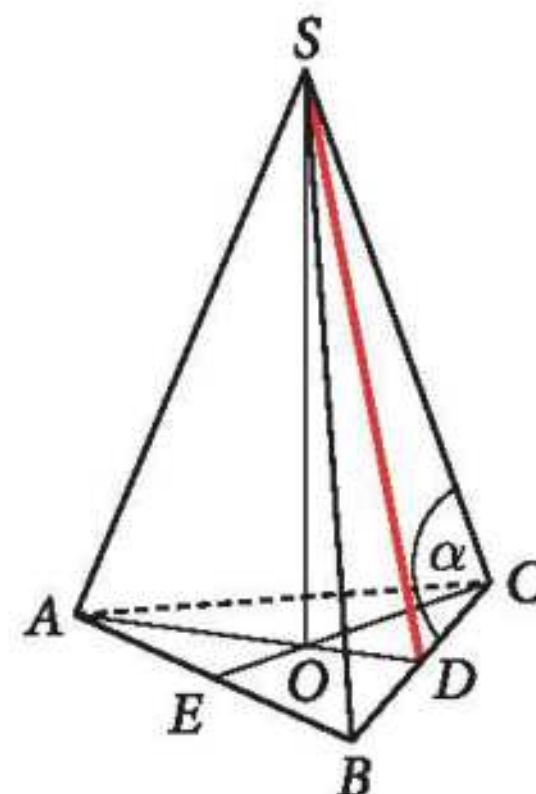
Punkt O jest spodkiem wysokości ostrosłupa.

Zgodnie z danymi w zadaniu mamy:

$$|AB| = |BC| = |AC| = a$$

$$|AS| = |BS| = |CS| = 2a$$

Ostrosłup jest prawidłowy, zatem D jest środkiem krawędzi BC , a odcinek SD jest wysokością równoramiennego trójkąta BCS .



$$\cos \alpha = \frac{|DC|}{|SC|} = \frac{\frac{1}{2}a}{2a} = \frac{1}{4}$$

Odp.: $\cos \alpha = \frac{1}{4}$

Wielościany foremne

Graniastosłupy i ostrosłupy są wielościanami najczęściej omawianymi podczas szkolnej nauki. Bardzo ciekawą grupę wielościanów stanowią wielościany foremne.

Definicja

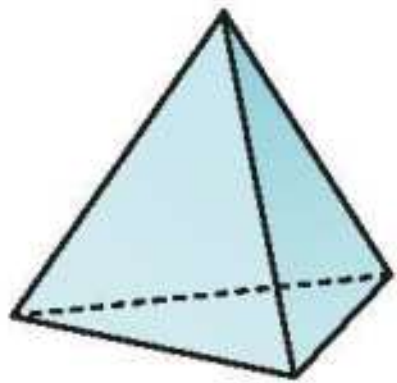
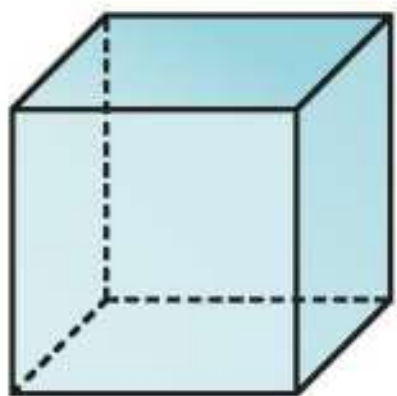
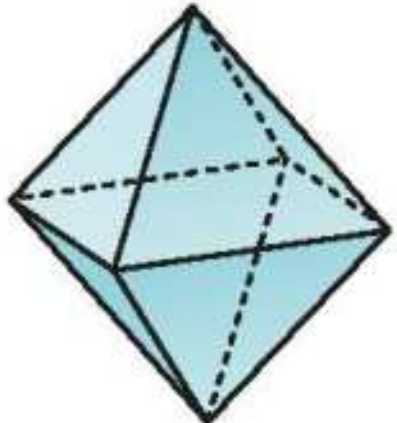
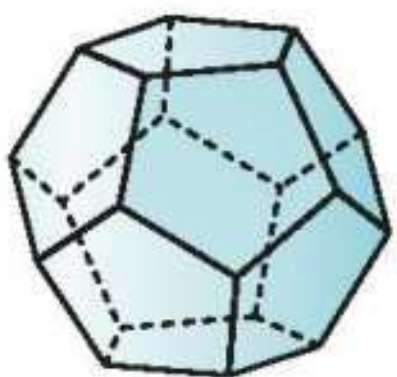
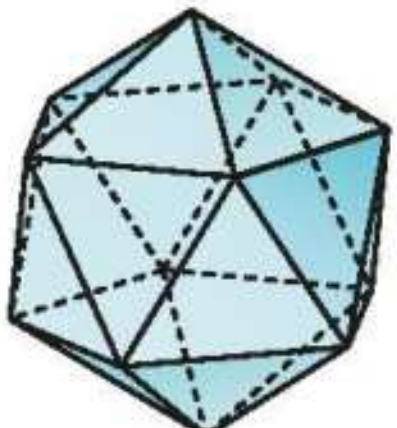
Wielościanem foremnym nazywamy wielościan wypukły, w którym wszystkie ściany są wielokątami foremnymi o tej samej liczbie boków i w którego wierzchołkach zbiega się taka sama liczba krawędzi.

W wielościanie foremnym wszystkie wypukłe kąty dwuścienne utworzone przez sąsiednie ściany mają równe miary.

Istnieje tylko pięć wielościanów foremnych.

Wielościany foremne nazywane są bryłami platońskimi. Według Platona (428–347 p.n.e.) cały materialny świat zbudowany jest z czterech składników – żywiołów, z których każdy ma swój (foremny) odpowiednik matematyczny: ogień – czworościan, powietrze – ośmiościan, ziemia – sześciąt, woda – dwudziestościan. Piąty wielościan foremny – dwunastościan – odkryty przez ucznia Platona, Teajtetosa, został przypisany duchowi (według innych źródeł – wszechświatowi).



Wielościany foremne		
nazwa	rysunek	ściany
czworościan foremny		trójkąty równoboczne
sześcian		kwadraty
ośmiościan foremny		trójkąty równoboczne
dwunastościan foremny		pięciokąty foremne
dwudziestościan foremny		trójkąty równoboczne

Na koniec podajemy wzór, który sformułował i udowodnił Leonhard Euler (1707–1783) – szwajcarski matematyk, fizyk i astronom.

Twierdzenie

W wielościanie wypukłym liczba wierzchołków w , liczba ścian s i liczba krawędzi k spełniają równość (**wzór Eulera**):

$$w + s = k + 2$$

Przykład 8 ◀ zad. 5.22

Obliczymy, ile krawędzi i wierzchołków ma dwudziestościan foremny.

Rozwiązanie

Każda z dwudziestu ścian ma trzy krawędzie, ale każda krawędź jest częścią wspólną dwóch ścian. Zatem liczba krawędzi jest równa:

$$\frac{20 \cdot 3}{2} = 30$$

Podobną metodą możemy wyznaczyć liczbę wierzchołków. Możemy również skorzystać ze wzoru Eulera.

$$w = k + 2 - s$$

$$w = 30 + 2 - 20$$

$$w = 12$$

Odp.: $k = 30$, $w = 12$

Zadania

5.1. Podaj liczbę ścian s , krawędzi k i wierzchołków w

- a) czworościanu.
- b) ostrosłupa, którego podstawą jest trapez.
- c) ostrosłupa siedmiokątnego.

5.2. Jaki wielokąt jest podstawą ostrosłupa, który ma

- a) 31 wierzchołków?
- b) 14 ścian?
- c) 24 krawędzie?

5.3. Jaki ostrosłup ma

- a) 101 ścian?
- b) 42 krawędzie?
- c) 18 wierzchołków?

5.4. Ile ścian ma ostrosłup o 10 krawędziach?

5.5. Iloczyn liczby ścian i liczby krawędzi pewnego ostrosłupa jest równy 84. Ile wierzchołków ma ten ostrosłup?

5.6. Narysuj ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego wszystkie krawędzie mają jednakową długość a .

- a) Zaznacz kąt α nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.
- b) Oblicz wysokość h tego ostrosłupa dla $a = 4$ cm.
- c) Jaką miarę ma kąt α ?

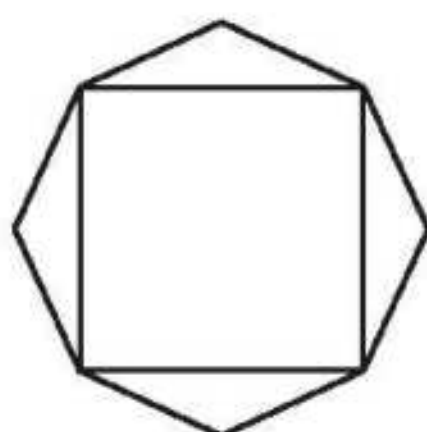
5.7. Narysuj ostrosłup prawidłowy trójkątny i zaznacz kąt nachylenia wysokości ostrosłupa do ściany bocznej.

5.8. Narysuj czworościan foremny i zaznacz kąt między jego ścianami.

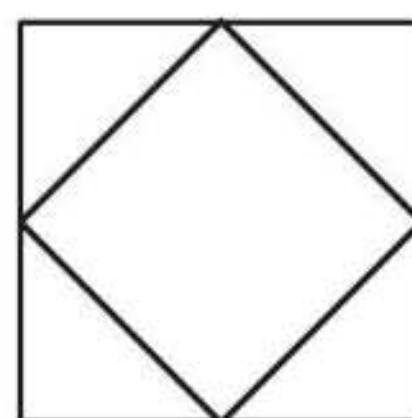
5.9. Narysuj siatkę czworościanu foremnego o krawędzi 3 cm.

5.10. Wyjaśnij, dlaczego podana figura nie jest siatką ostrosłupa czworokątnego.

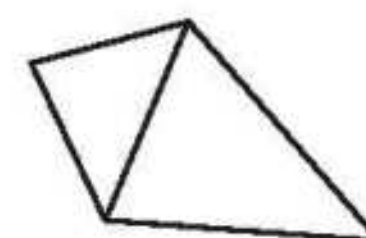
a)



b)



5.11. Przerysuj figurę przedstawioną na rysunku obok i uzupełnij ją tak, aby otrzymać siatkę ostrosłupa.



5.12. Dany jest ostrosłup czworokątny, którego podstawą jest kwadrat o boku długości 4 cm. Jedna ze ścian bocznych, będąca trójkątem równoramiennym o ramieniu równym 3 cm, jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Narysuj siatkę tego ostrosłupa.

5.13. Wysokość ostrosłupa prawidłowego n -kątnego jest równa 24 cm, a promień okręgu wpisanego w podstawę jest równy 7 cm. Oblicz wysokość ściany bocznej opuszczoną z wierzchołka tego ostrosłupa.

5.14. Wysokość ostrosłupa prawidłowego n -kątnego jest równa 8 cm, a promień okręgu opisanego na podstawie jest równy 6 cm. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

5.15. Oblicz wysokość czworościanu foremnego o krawędzi 6 cm.

5.16. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o wysokości 12 cm ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem 45° . Oblicz długości krawędzi tego ostrosłupa.

5.17. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym promień okręgu opisanego na podstawie wynosi 10 cm, a wysokość 30 cm. Wyznacz (z dokładnością do 1°)

a) kąt α nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

b) kąt β nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

5.18. Wysokość ostrosłupa prawidłowego 100-kątnego jest równa 24 cm, a promień okręgu wpisanego w podstawę jest równy 7 cm. Wyznacz kąt nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy z dokładnością do 1° .

5.19. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° , a wysokość jest równa 20. Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa oraz wyznacz tangens kąta α nachylenia jego ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

5.20. Pan Karol postanowił zbudować dom w kształcie piramidy o podstawie kwadratowej. Słyszał, że najlepiej mieszka się w piramidach, w których kąt nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podłogi jest równy 60° . Przez pomyłkę zbudował jednak dom, w którym to nie ściany, lecz krawędzie ścian były nachylone do podłogi pod kątem 60° . Oblicz (z dokładnością do 1°), jaki kąt nachylenia ścian do płaszczyzny podstawy uzyskał w wyniku tej pomyłki.



✱ **5.21.** Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny, którego dłuższa podstawa ma długość $2a$, a krótsza podstawa i ramiona mają długość a . Wszystkie krawędzie boczne mają długość b . Wyznacz cosinusy kątów nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy.

5.22. Oblicz liczbę krawędzi k i wierzchołków w dwunastościanu foremnego.



5.23. Na dziedzińcu paryskiego Luwru, jednego z najsłynniejszych muzeów świata, stoi piramida w kształcie prawidłowego ostrosłupa czworokątnego. Jej budowę zakończono w 1989 roku. Ściany piramidy zbudowane są z 603 szklanych tafli w kształcie rombu i 70 tafli trójkątnych. Piramida ma 21,65 m wysokości, a długość boku jej podstawy wynosi 35,42 m. Wyznacz



- długość krawędzi bocznej (wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku).
- kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy (z dokładnością do 1°).

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. W pewnym ostrosłupie liczba ścian jest o 6 mniejsza od liczby krawędzi. Wskaż liczbę wierzchołków tego ostrosłupa.

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

2. Wysokość czworościanu foremnego jest równa $4\sqrt{6}$. Wskaż długość krawędzi tego czworościanu.

- A. 10 B. 12 C. $6\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{2}$

3. Ile ścian ma ostrosłup o podstawie n -kątnej?

- A. $2n$ B. $n - 1$ C. $n + 1$ D. $n + 2$

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

W ostrosłupie $ABCDW$ o podstawie $ABCD$

- A. prosta DB jest skośna do prostej AW .
B. prosta DB jest skośna do prostej AC .
C. prosta DB jest skośna do prostej CW .

5. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego 100-kątnego ma długość 10 cm, a promień okręgu opisanego na podstawie jest równy 6 cm. Wyznacz kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa (z dokładnością do 1°).

6. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz cosinus kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

7. Dany jest ostrosłup czworokątny prawidłowy o krawędzi podstawy a . Jedna z krawędzi bocznych ma długość b i jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Wyznacz tangensy kątów nachylenia pozostałych krawędzi bocznych ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

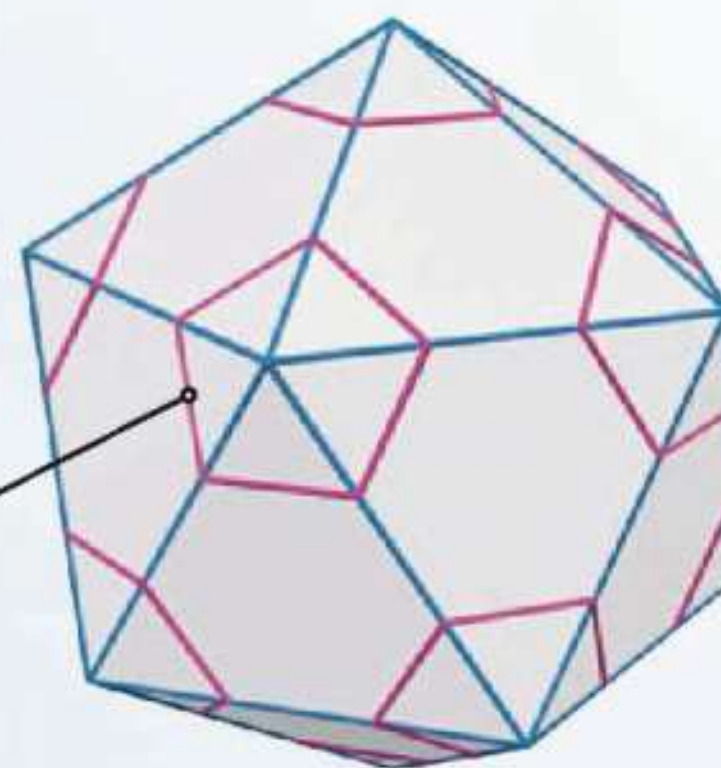
Jak zrobić kulę

Siatka kuli nie istnieje, co sprawia, że przy produkcji kulistych przedmiotów, takich jak piłki, pojawia się problem – w jaki sposób pociąć materiał, by stworzyć warstwę okrywającą kulę? Bardzo pomocne okazują się wielościany.

Od dwudziestościanu do piłki nożnej

Dwudziestościan foremny to bryła, której powierzchnię tworzy 20 przystających trójkątów równobocznych. Ma 12 wierzchołków i 30 krawędzi. Obcinamy wszystkie naroża tej bryły.

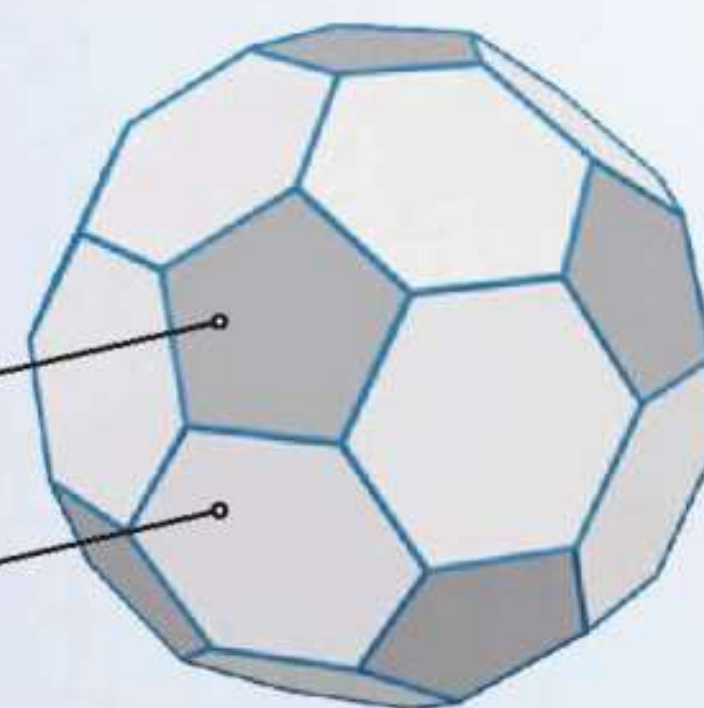
Linie cięcia prowadzimy tak, by przecinały krawędzie w $\frac{1}{3}$ ich długości od najbliższego wierzchołka.



W ten sposób otrzymujemy **dwudziestościan ścięty**: bryłę, której ściany to 20 sześciokątów foremnych i 12 pięciokątów foremnych.

Pięciokąty powstają po obcięciu naroży.

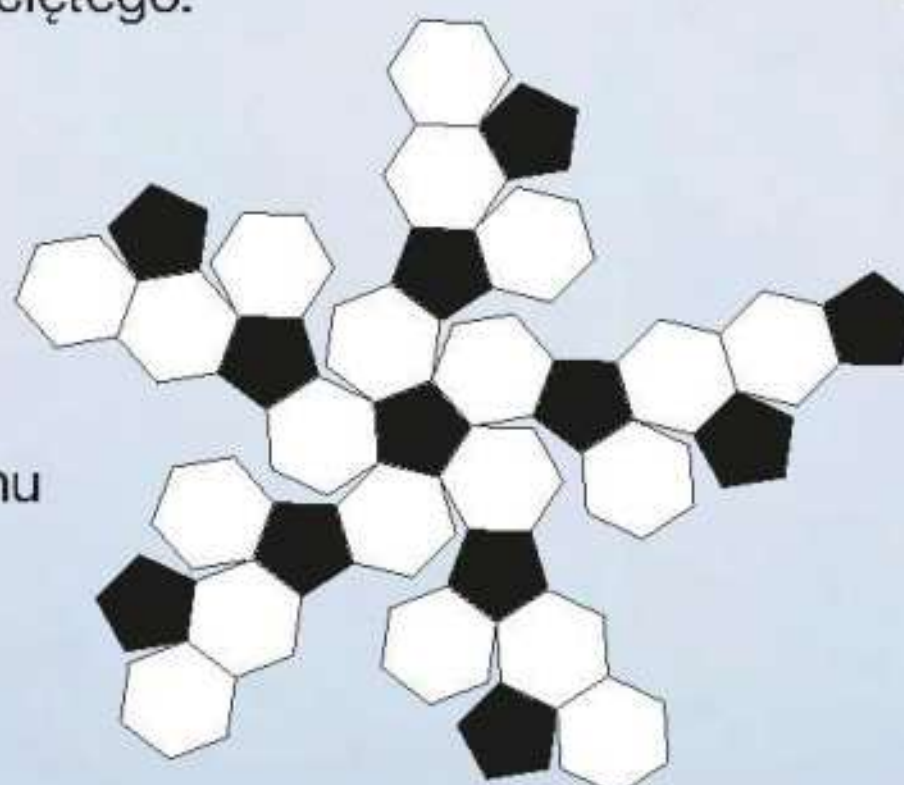
Sześciokąty to pozostałe części ścian dwudziestościanu foremnego.



Siatkę dwudziestościanu ściętego wykorzystuje się jako szablon do uszycia tradycyjnej **piłki do gry w piłkę nożną**. Zewnętrzna warstwa takiej piłki składa się z białych i czarnych paneli (łatek): pierwsze to sześciokąty, drugie – pięciokąty. Po nadmuchaniu piłki panele się wybrzuszą, dzięki czemu piłka jest kulista, co ją odróżnia od modelu dwudziestościanu ściętego.



siatka
dwudziestościanu
ściętego



Inne szablony

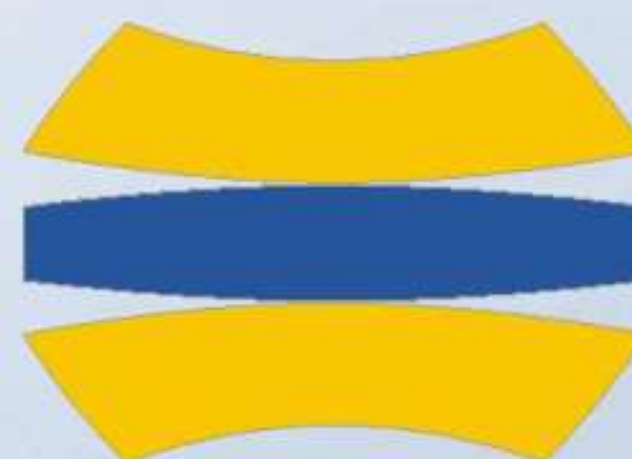
Wierzchnie warstwy piłek wycina się z różnych szablonów. Niektóre ich kształty pokazano na ilustracji.



Piłka tenisowa jest pokryta dwoma kawałkami filcu.



Piłkę baseballową obszywa się dwoma kawałkami skóry.



Szablon piłki do siatkówki to sześć paneli złożonych z trzech kawałków skóry.

Kopuła geodezyjna

Kopuła geodezyjna to wielościan przypominający kształtem kulę. Ścianami takiego wielościanu są trójkąty równoramienne, układające się w pięciokąty i sześciokąty. Im większa ich liczba, tym bardziej taki wielościan przypomina powierzchnię kuli. Kopuły geodezyjne wykorzystuje się w architekturze – konstrukcje tego typu są niezwykle wytrzymałe i stabilne, a dodatkowo nie wymagają wewnętrznych podpór.

Stacja badawcza wybudowana w 1974 r. na biegunie południowym.



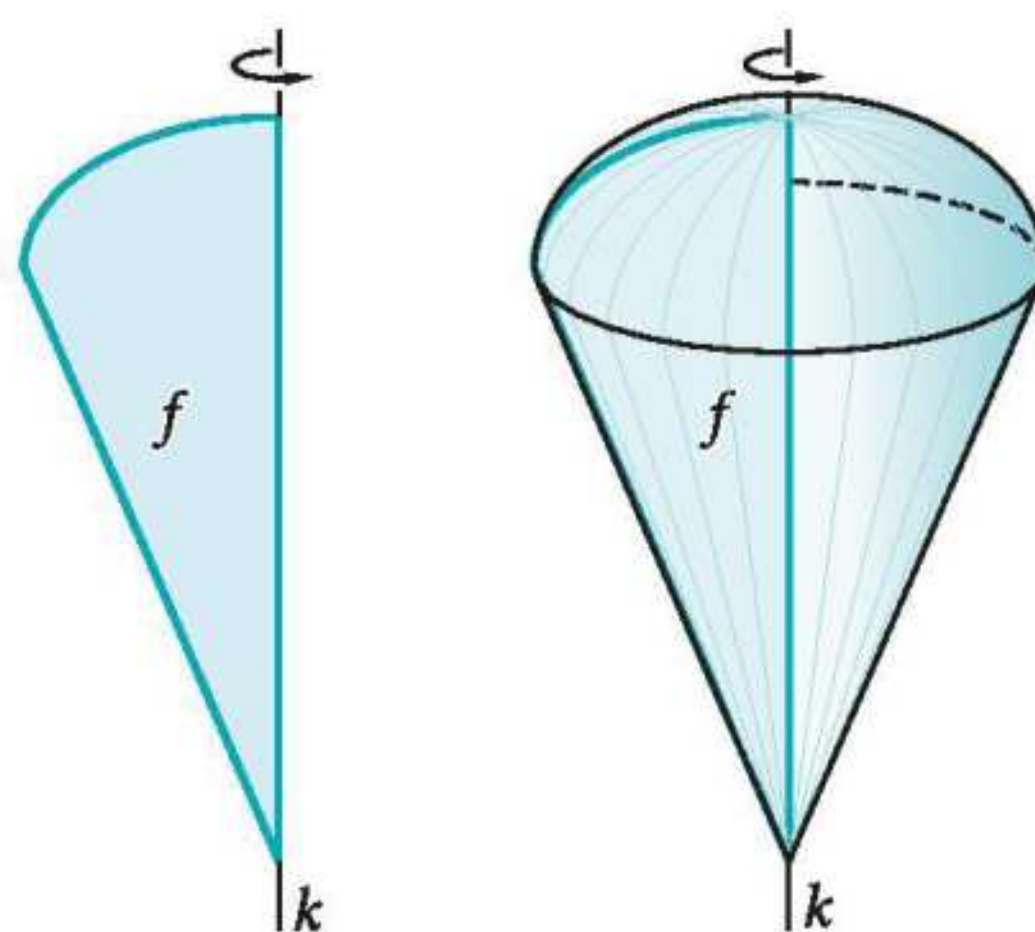
6. Bryły obrotowe

Umiejętności:

- rozpoznawanie w walcach i w stożkach kąta między odcinkami oraz kąta między odcinkami i płaszczyznami (np. kąta rozwarcia stożka, kąta między tworzącą a podstawą), obliczanie miar tych kątów
- stosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków oraz miar kątów

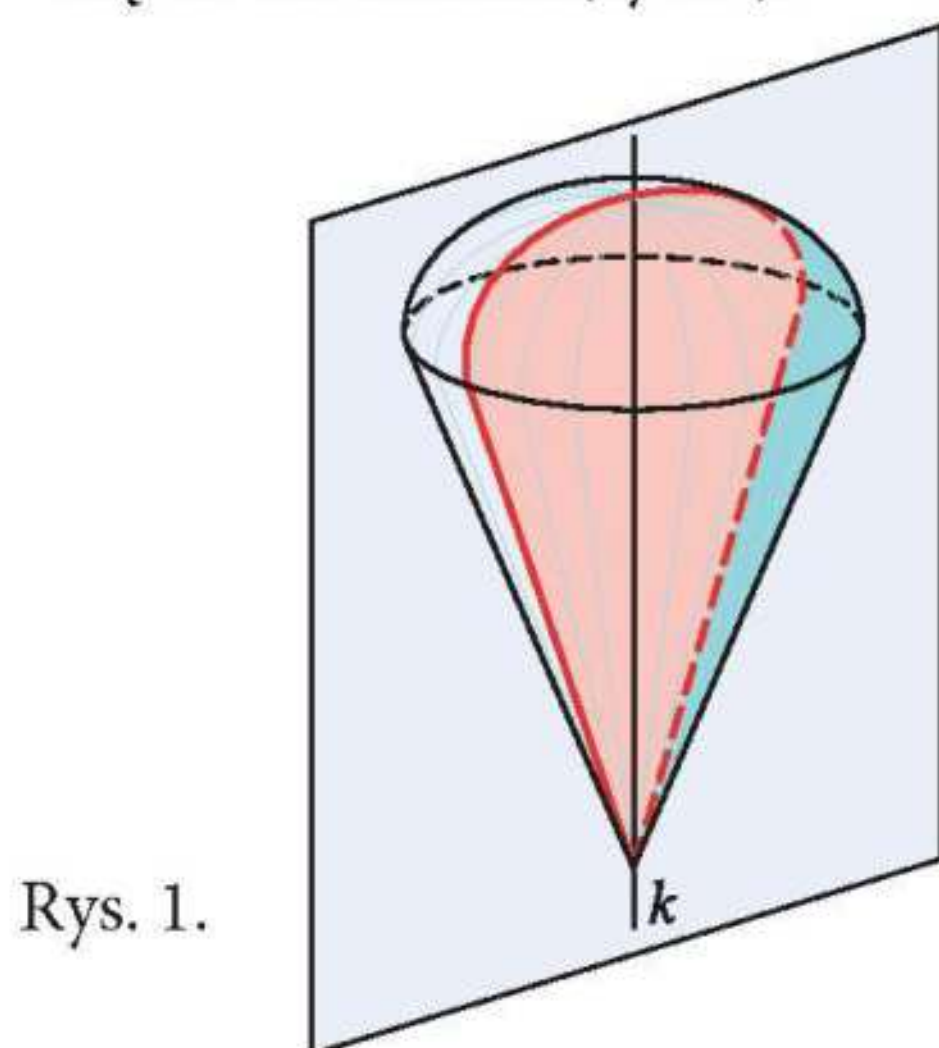
W tym temacie uporządkujemy wiadomości o bryłach obrotowych.

Jeżeli figurę płaską f obracamy w przestrzeni o kąt pełny wokół prostej k zawartej w płaszczyźnie figury f , to otrzymaną w ten sposób figurę przestrzenną nazywamy **bryłą obrotową**, a prostą k – **osią obrotu**.

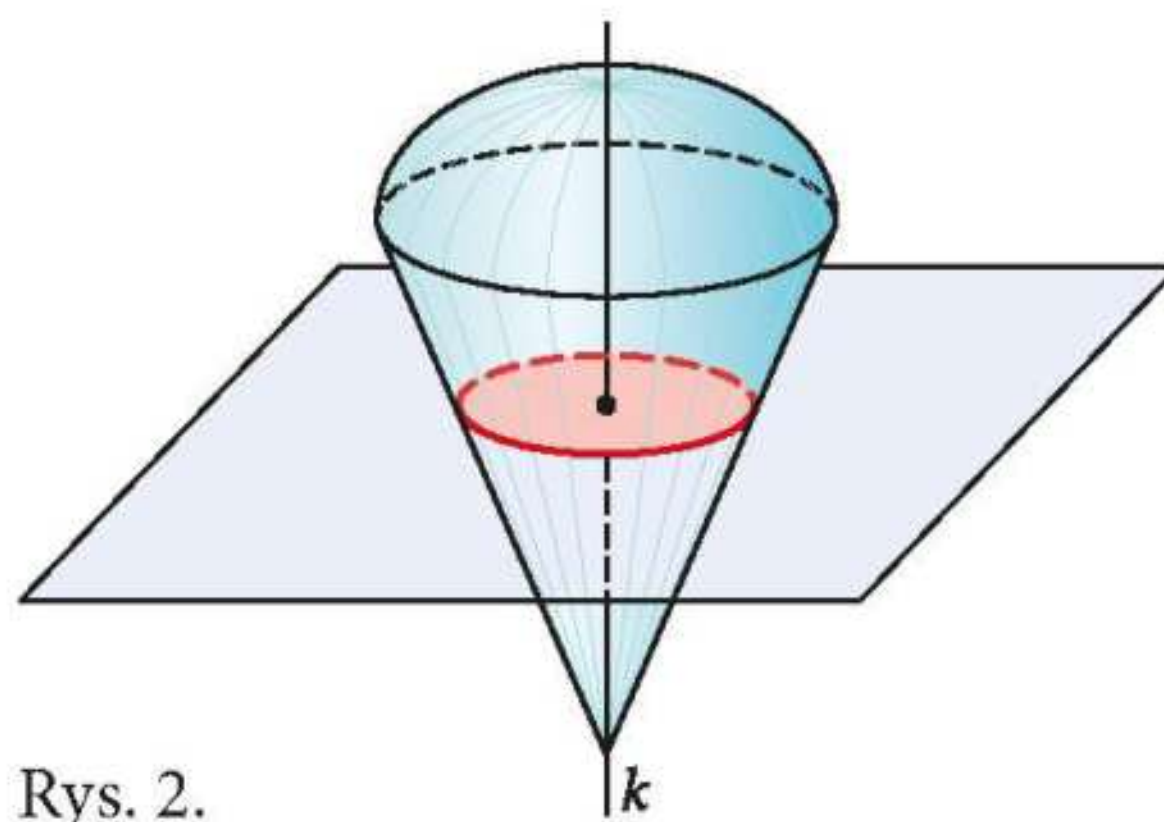


Jeżeli bryłę przetniemy jakąś płaszczyzną, to część wspólną tych figur nazywamy **przekrojem płaskim**. W tym podręczniku będziemy się zajmować następującymi rodzajami przekrojów brył obrotowych:

- przekrojem osiowym**, czyli częścią wspólną tej bryły z płaszczyzną zawierającą oś obrotu (rys. 1),
- przekrojem poprzecznym**, czyli częścią wspólną tej bryły z płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu (rys. 2).



Rys. 1.



Rys. 2.

Omówimy teraz najważniejsze własności brył obrotowych: walca, stożka i kuli.

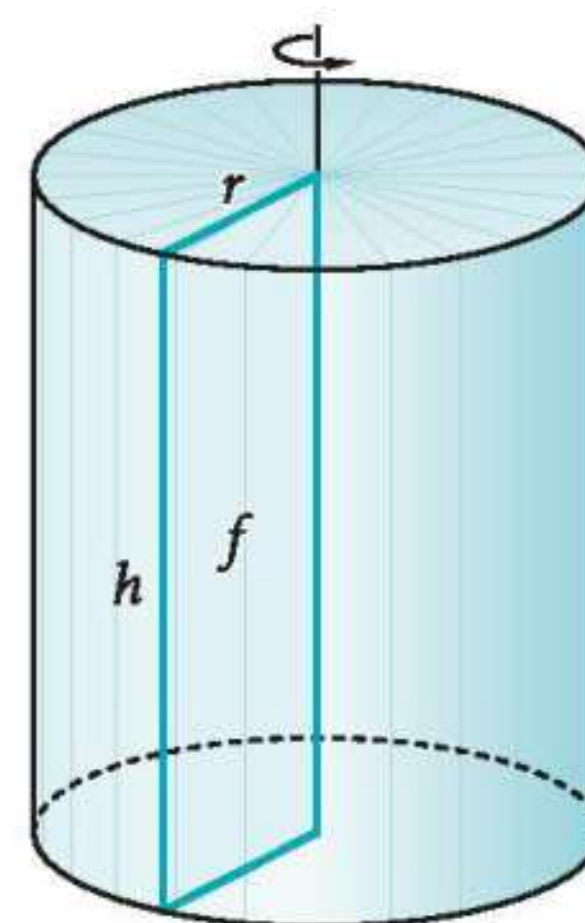
Walec

Definicja

Walcem nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z jego boków.

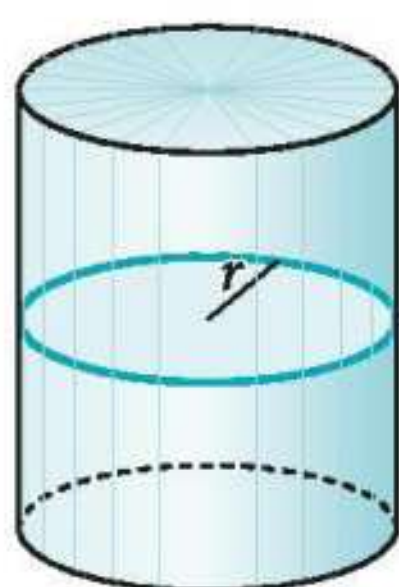
Dwa koła powstałe przez obrót prostokątnych do osi obrotu boków prostokąta nazywamy **podstawami** walca.

Bok prostokąta równoległy do osi obrotu i niemający z nią punktów wspólnych nazywamy **tworzącą** walca, a drugi bok – **promieniem r podstawy** walca. **Wysokością h** walca jest każdy odcinek łączący punkt płaszczyzny jednej podstawy z jego rzutem prostokątnym na płaszczyznę drugiej podstawy (każda tworząca to również wysokość walca). Suma wszystkich tworzących walca stanowi jego **powierzchnię boczną**.

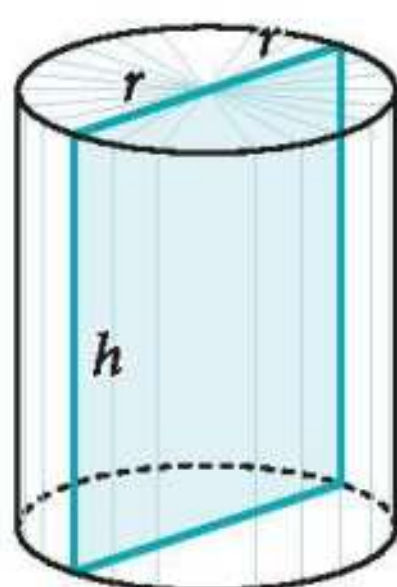


Pojęcia „promień” (podobnie jak pojęcia „wysokość”) używać będziemy w dwóch znaczeniach – również zamiast „długość promienia”. Nie powinno być z tym kłopotu, bo z kontekstu na ogół jasno wynika, czy „promień” oznacza odcinek czy liczbę.

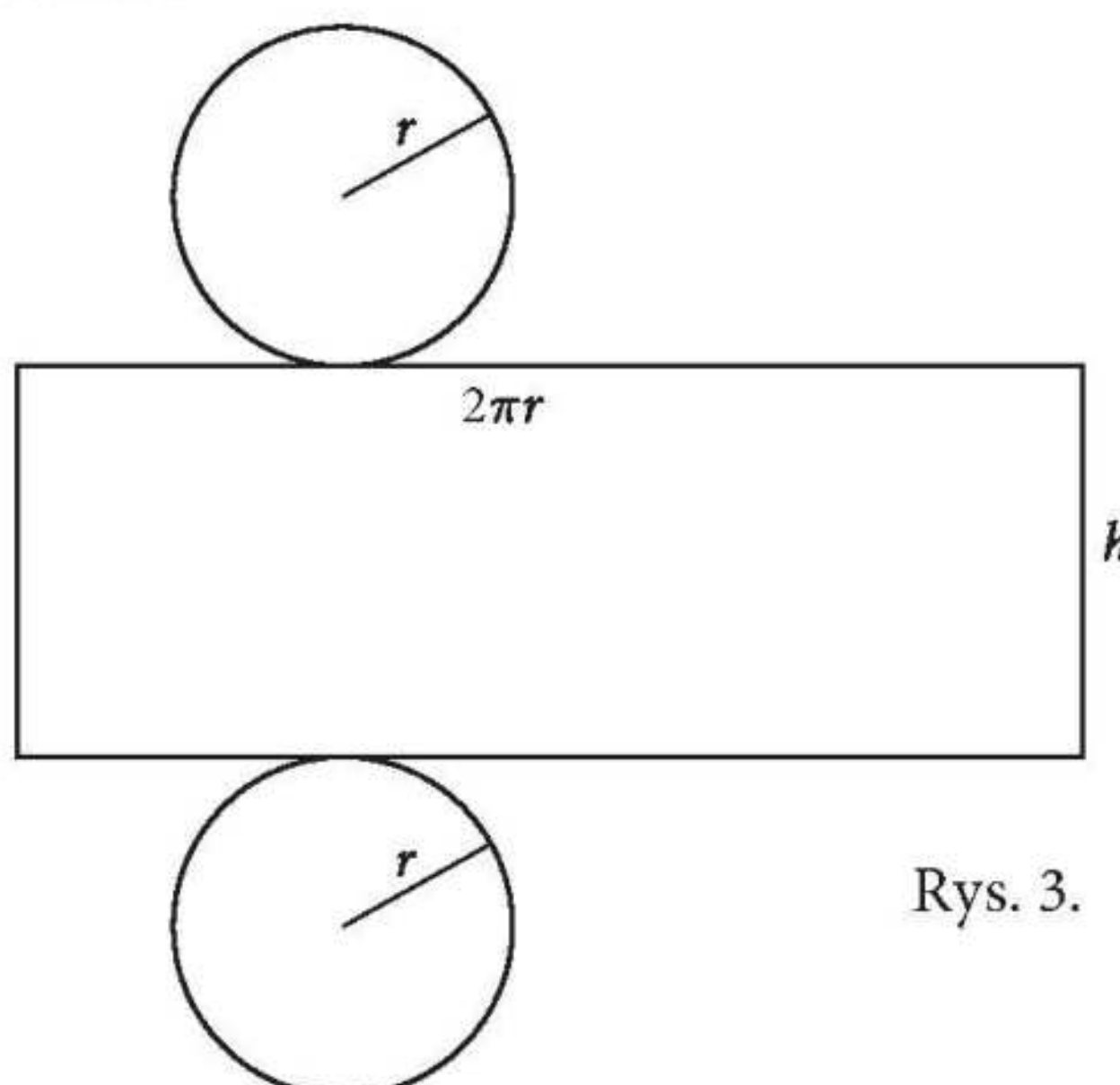
Przekrojem poprzecznym walca jest koło o promieniu r (rys. 1).
Przekrojem osiowym walca jest prostokąt o bokach h i $2r$ (rys. 2).
Na rysunku 3 przedstawiona jest siatka walca.



Rys. 1.



Rys. 2.



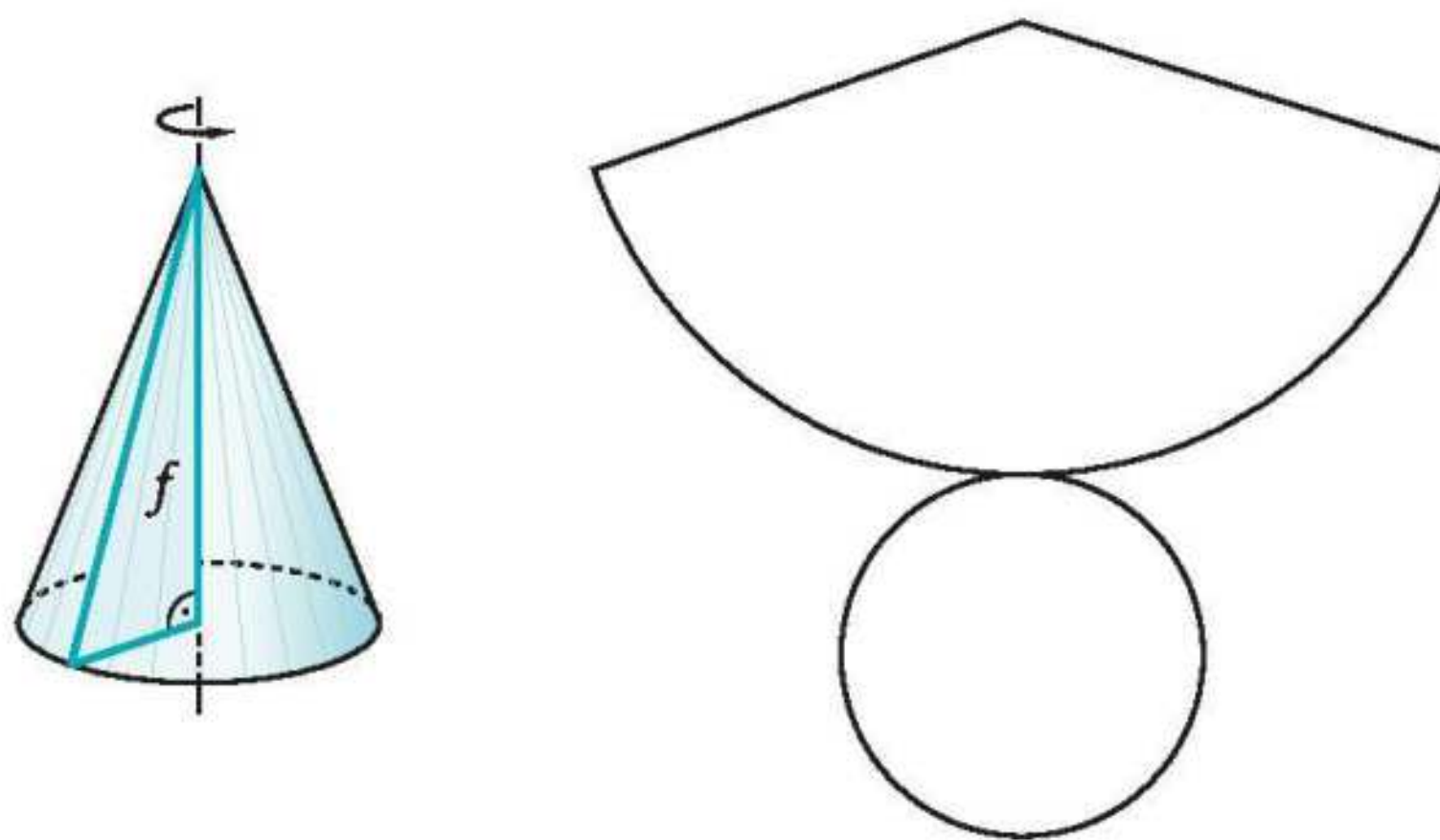
Rys. 3.

Stożek

Definicja

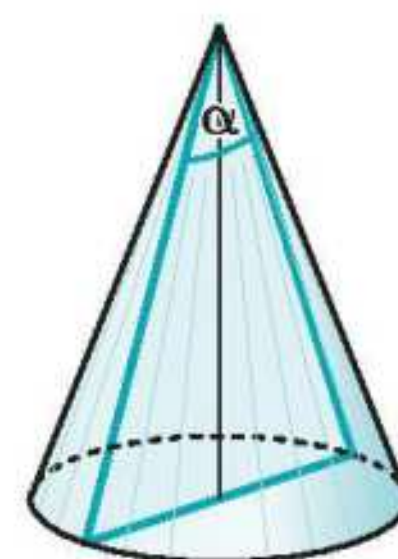
Stożkiem nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z jego przyprostokątnych.

Koło powstałe w wyniku obrotu drugiej przyprostokątnej nazywamy **podstawą** stożka, a ten wierzchołek trójkąta, który nie należy do podstawy – **wierzchołkiem** stożka. Powierzchnia otrzymana w wyniku obrotu przeciwprostokątnej stanowi **powierzchnię boczną** stożka. Każdy odcinek łączący wierzchołek stożka z podstawą i zawarty w powierzchni bocznej nazywamy **tworzącą** stożka.

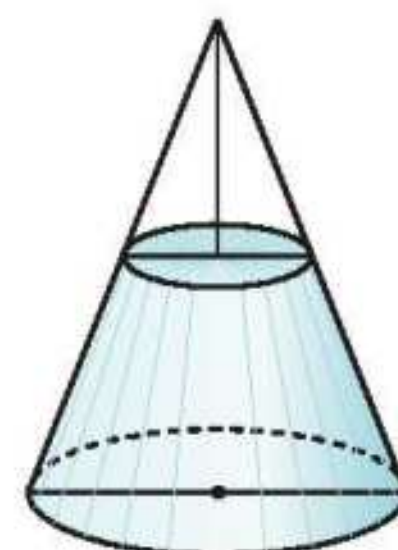


Rzutem prostokątnym wierzchołka stożka na płaszczyznę podstawy jest środek podstawy. **Wysokością** stożka nazywamy odcinek łączący wierzchołek ze środkiem podstawy. Tak samo nazywamy również długość tego odcinka.

Przekrój osiowy stożka to trójkąt równoramienny. Kąt α między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia stożka**. Przekroje osiowe stożka są trójkątami przystającymi.



Przekrojem poprzecznym stożka jest koło. Część stożka zawartą między jego podstawą a przekrojem poprzecznym nazywamy **stożkiem ściętym**. Przekrojem osiowym stożka ściętego jest trapez równoramienny. Wysokością stożka ściętego nazywamy wysokość tego trapezu.



Kula

Definicja

Kulą nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót półkola dookoła prostej zawierającej jego średnicę.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

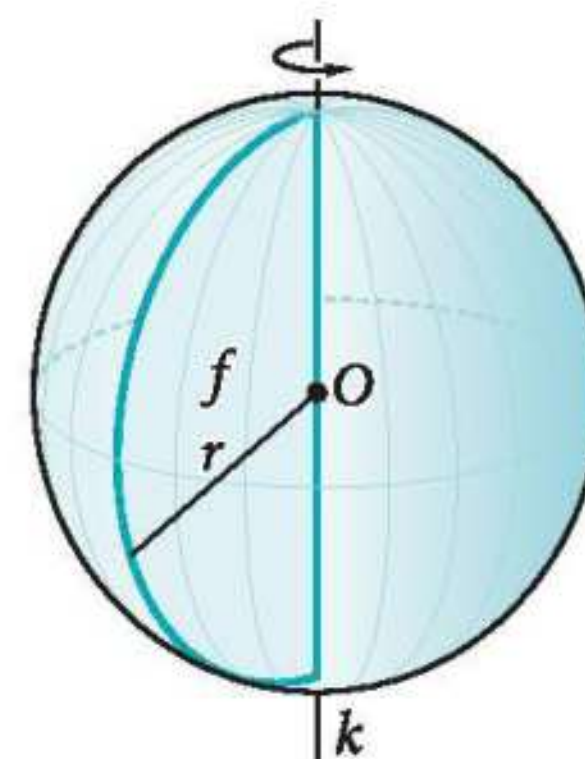
O – środek kuli,

r – promień kuli,

k – oś obrotu.

Zatem O jest środkiem średnicy obracanego półkola.

Średnica ta ma długość $2r$.



Bezpośrednio z definicji wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Kula o środku O i promieniu r jest zbiorem punktów przestrzeni oddalonych od punktu O co najwyżej o r .

Powierzchnię kuli, którą tworzą punkty oddalone od środka o r , nazywamy **sferą**. Sfera powstaje przez obrót półokręgu dookoła prostej zawierającej średnicę tego półokręgu.

Prawdziwe jest poniższe twierdzenie, które podajemy bez dowodu.

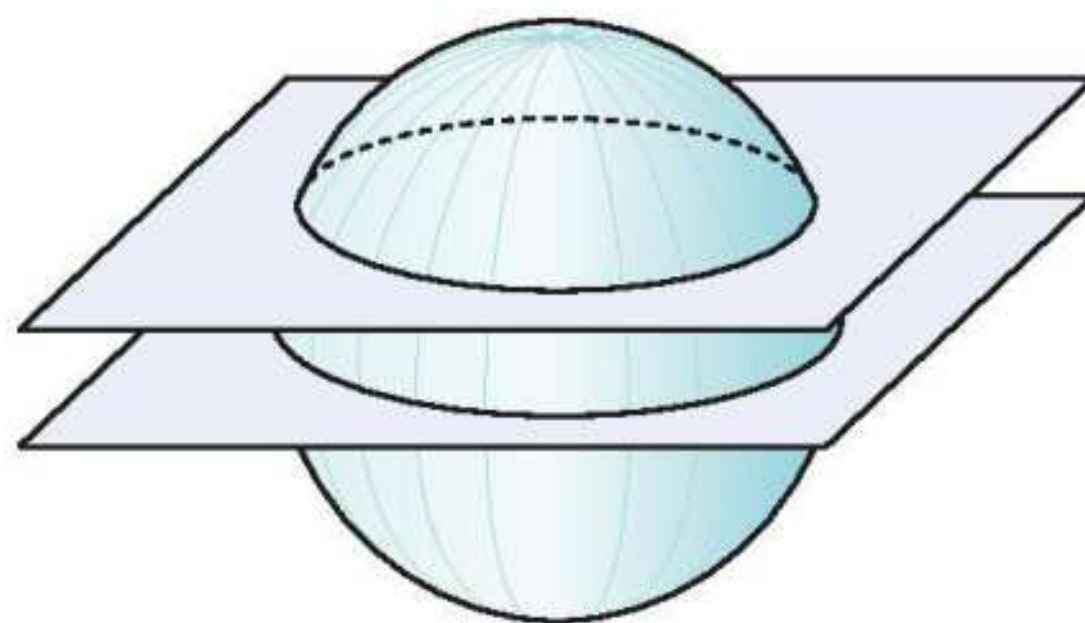
Twierdzenie

Sfery nie da się tak rozciąć, aby można ją było rozłożyć na płaszczyźnie. Dlatego nie istnieje siatka kuli.

Każdy odcinek łączący dwa punkty sfery nazywamy **cięciwą** kuli, a cięciwę przechodzącą przez środek kuli – jej **średnicą**. Każda średnica kuli ma długość równą $2r$, a odległość między dwoma dowolnymi punktami kuli nie jest większa od długości jej średnicy.

Jeżeli płaszczyzna i kula mają punkty wspólne, to częścią wspólną tej płaszczyzny i kuli jest albo koło, albo zbiór jednopunktowy.

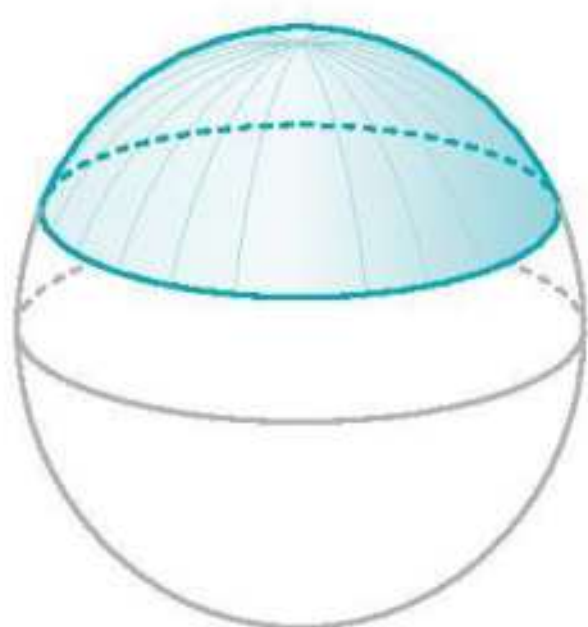
Każdy przekrój kuli przechodzący przez jej środek nazywamy **kołem wielkim**.



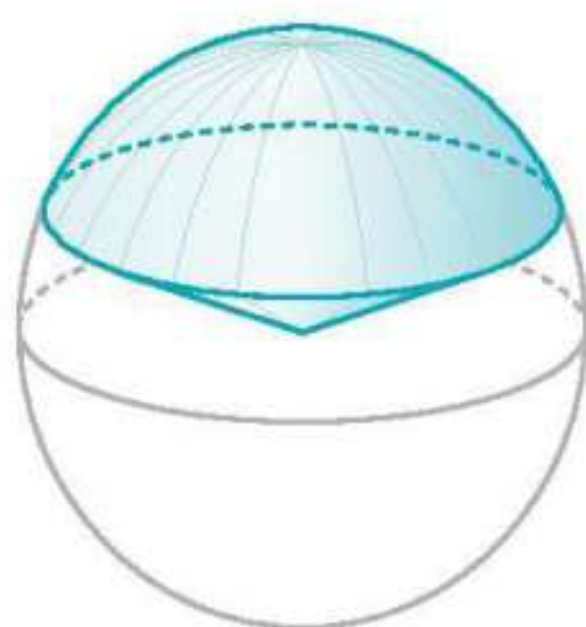
Każdą z dwóch części kuli, na które dzieli ją koło będące jej przekrojem, nazywamy **odcinkiem kuli**. Płaszczyzna przekroju dzieli sferę na dwie części. Są to **czasze**.

Wycinek kuli to część kuli ograniczona sferą i powierzchnią boczną stożka o wierzchołku w środku tej kuli i tworzącej o długości r .

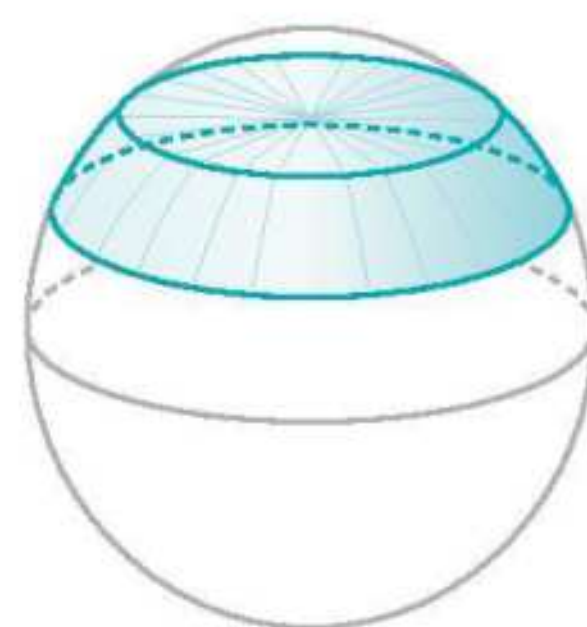
Warstwą kuli nazywamy część kuli zawartą między dwiema równoległymi, przecinającymi kulę płaszczyznami.



odcinek kuli



wycinek kuli



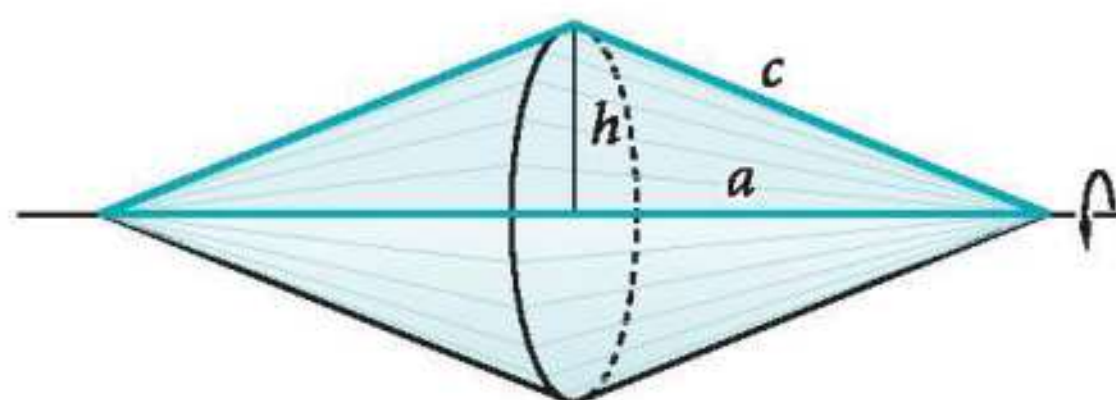
warstwa kuli

Przykład 1

Narysujemy bryłę, która powstaje w wyniku obrotu danej figury wokół danej prostej.

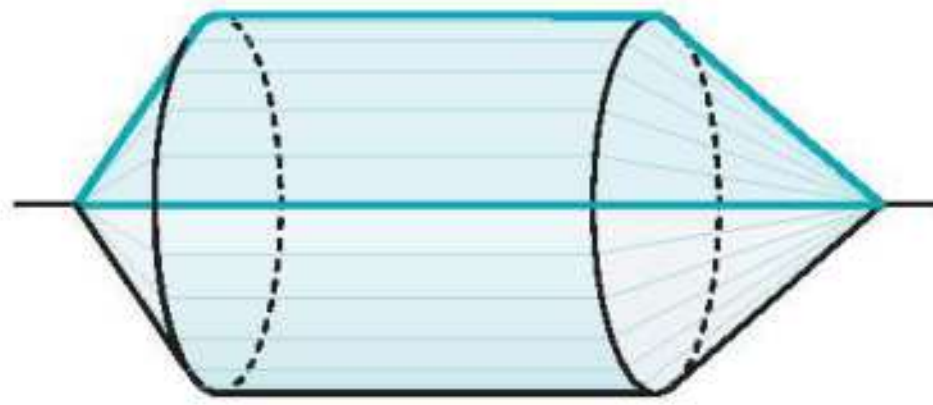
Rozwiązanie

a) Trójkąt równoramienny obraca się dookoła prostej zawierającej podstawę.



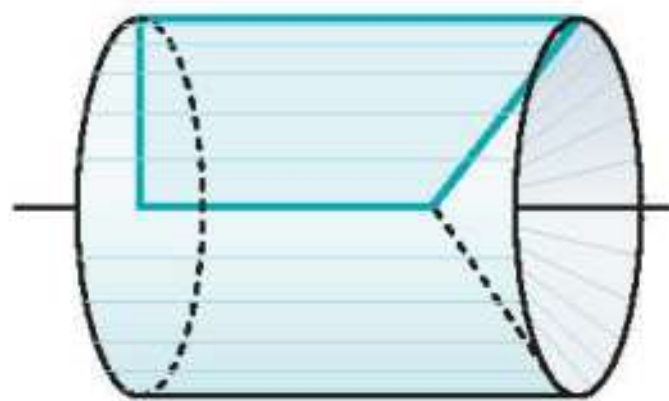
Otrzymana bryła to dwa przystające, sklejone podstawami stożki, w których h (wysokość trójkąta) jest promieniem podstawy, a (połowa podstawy trójkąta) to wysokość stożka, a c (ramię trójkąta) jest jego tworzącą.

- b) Trapez, który przy dłuższej podstawie ma kąty ostre, obraca się dookoła prostej zawierającej dłuższą podstawę.



Otrzymujemy bryłę złożoną z dwóch stożków i walca.

- c) Trapez prostokątny obraca się dookoła prostej zawierającej krótszą podstawę.



Otrzymujemy walec z wydrążonym stożkiem.

Przykład 2 ◀ zad. 6.2

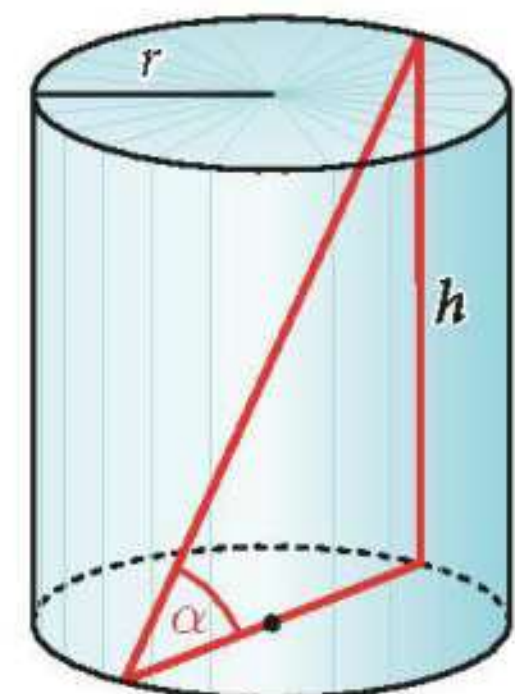
Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 75^\circ$. Promień podstawy walca jest równy 3. Obliczmy wysokość walca (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Mamy:

$$\frac{h}{2r} = \operatorname{tg} 75^\circ, \text{ czyli } h = 2r \cdot \operatorname{tg} 75^\circ \approx 6 \cdot 3,7321 \approx 22,4.$$

Odp.: $h = 22,4$



Przykład 3 ◀ zad. 6.3

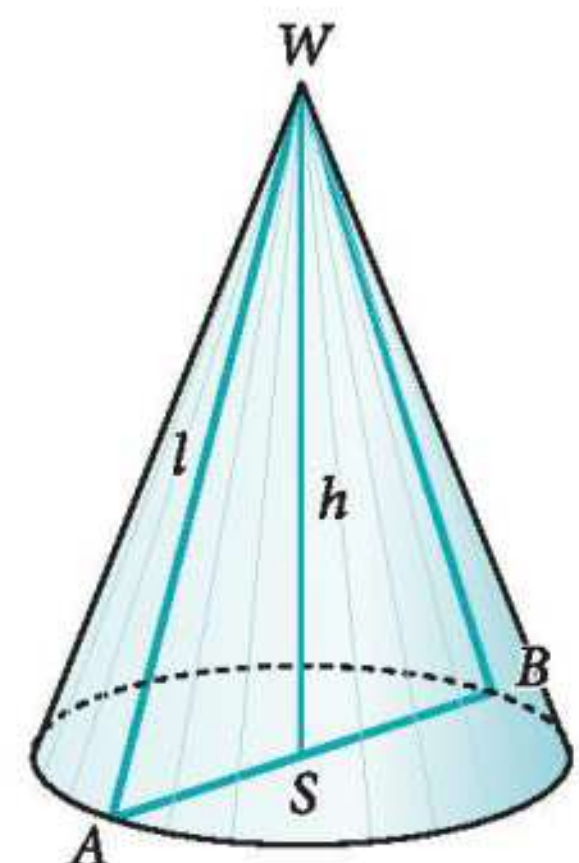
Kąt rozwarcia stożka o promieniu podstawy 4 jest równy 70° . Obliczmy długość tworzącej i wysokość tego stożka (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoramienny, w którym kąt przy wierzchołku jest równy 70° . Zatem w prostokątnym trójkącie ASW mamy:

$$\sphericalangle AWS = 35^\circ \text{ i } |AS| = 4$$



Szukane wielkości wyznaczamy, korzystając z funkcji trygonometrycznych.

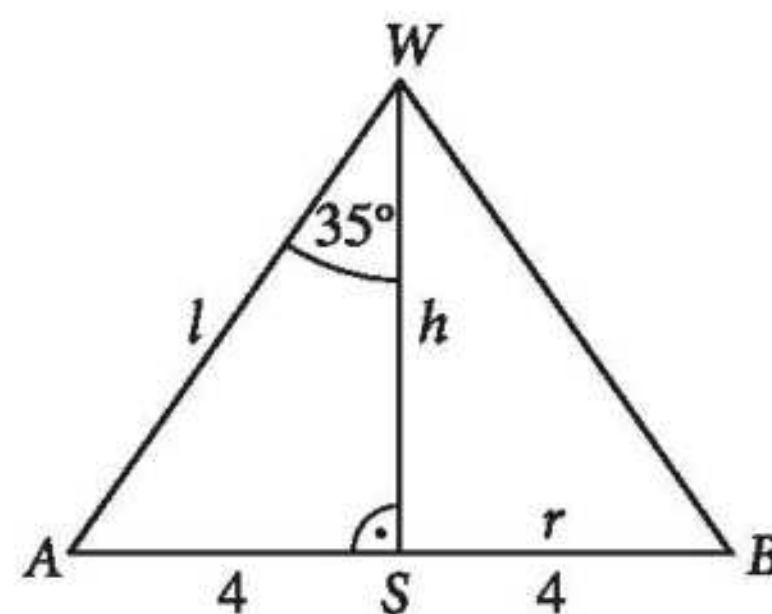
$$\frac{4}{l} = \sin 35^\circ$$

$$l = \frac{4}{\sin 35^\circ} \approx \frac{4}{0,5736} \approx 6,97350 \approx 7,0$$

$$\frac{4}{h} = \operatorname{tg} 35^\circ$$

$$h = \frac{4}{\operatorname{tg} 35^\circ} \approx \frac{4}{0,7002} \approx 5,7$$

Odp.: $l = 7,0$, $h = 5,7$



Przykład 4 ◀ zad. 6.4

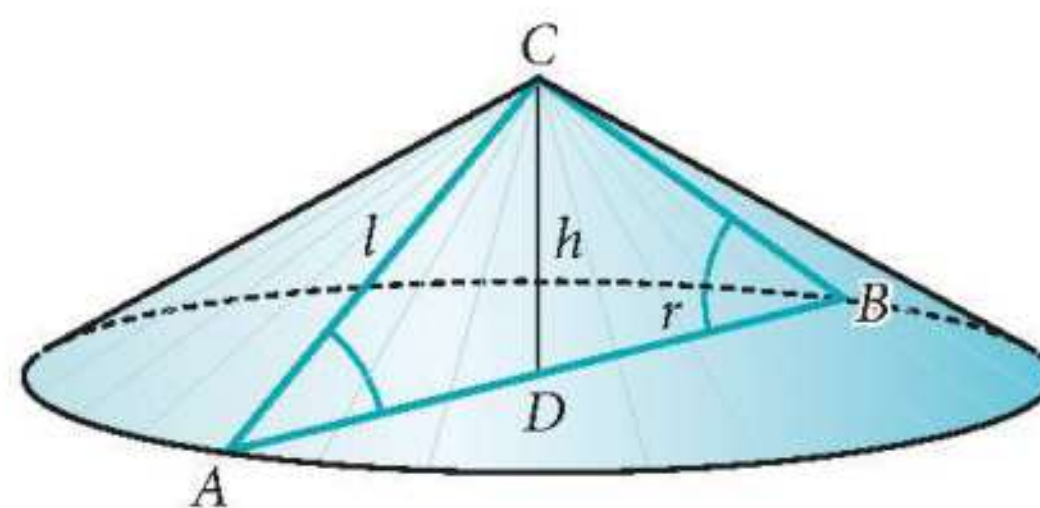
Tworząca stożka ma 24 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Obliczymy promień podstawy r i wysokość h tego stożka.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Zatem $l = |AC| = |BC| = 24$ cm.

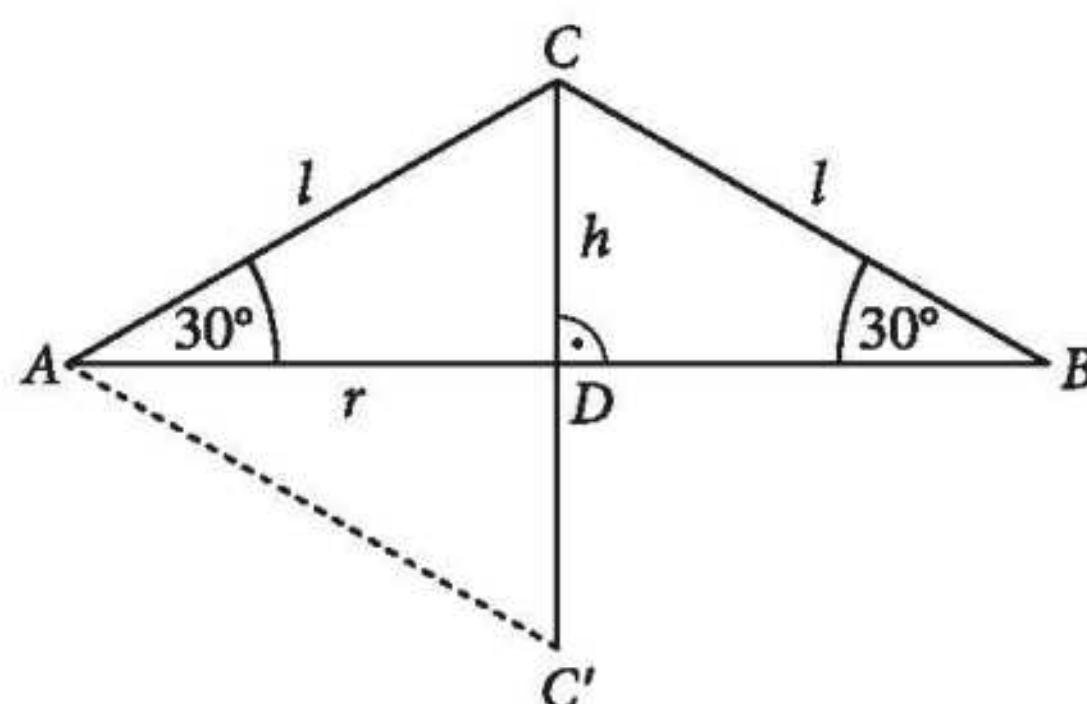
Kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy jest kątem DAC przy podstawie przekroju osiowego stożka.



Trójkąt ADC jest połową trójkąta równobocznego $AC'C$ o boku l (rys. obok). Promień podstawy stożka jest w tym trójkącie wysokością, czyli:

$$r = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

Wysokość stożka to połowa boku trójkąta $AC'C$. Zatem $h = \frac{l}{2} = 12$ [cm].



Odp.: $r = 12\sqrt{3}$ cm, $h = 12$ cm

Zadania

6.1. Przekrojem osiowym walca jest prostokąt o wymiarach 10×6 . Oblicz kąt α nachylenia przekątnej tego przekroju do płaszczyzny podstawy walca (z dokładnością do 1°).

6.2. Tworząca walca tworzy z przekątną jego przekroju osiowego dany kąt α . Długość przekątnej przekroju osiowego wynosi 10. Oblicz promień r i wysokość h walca.

a) $\alpha = 30^\circ$ b) $\alpha = 45^\circ$ c) $\alpha = 27^\circ$ (wyniki podaj z dokładnością do 0,01)

6.3. Kąt rozwarcia stożka ma miarę α , a wysokość stożka jest równa h . Oblicz promień r i tworzącą l stożka.

a) $\alpha = 60^\circ$, $h = 12\sqrt{3}$

b) $\alpha = 120^\circ$, $h = 7$

c) $\alpha = 90^\circ$, $h = 10$

d) $\alpha = 80^\circ$, $h = 12$ (wyniki podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku)

e) $\alpha = 30^\circ$, $h = 18$ (wyniki podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku)

6.4. Oblicz promień podstawy r i wysokość h stożka, którego tworząca o długości 24 cm jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod danym kątem.

a) 60°

b) 45°

6.5. Podstawa stożka jest kołem o obwodzie 16π . Wysokość tego stożka jest równa 20. Oblicz kąt rozwarcia stożka oraz kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy (z dokładnością do 1°).

6.6. Trójkąt równoboczny obrócono wokół jednego z jego boków. Jaką bryłę otrzymano? Jaka figura jest przekrojem osiowym tej bryły?

6.7. Trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm i ramionach długości 5 cm obrócono dookoła

a) podstawy.

b) ramienia.

Oblicz promień wspólnej podstawy otrzymanych w ten sposób stożków.

6.8. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu 147 dm^2 . Oblicz pole podstawy i wysokość stożka.

6.9. Półkole o promieniu 18 cm zwinięto w stożek. Oblicz wysokość i kąt rozwarcia stożka.

6.10. Narysuj bryłę powstałą w wyniku obrotu rombu (niebędącego kwadratem) dookoła prostej zawierającej bok tego rombu.

6.11. Narysuj i opisz bryłę, którą otrzymamy w wyniku obrotu trapezu prostokątnego (niebędącego prostokątem) dookoła prostej zawierającej

a) dłuższą podstawę.

b) dłuższe ramię.

6.12. W wyniku obrotu półkola dookoła prostej zawierającej jego średnicę otrzymano kulę. Oblicz promień tej kuli, wiedząc, że obwód półkola wynosi

a) $10(\pi + 2)$.

b) $12 + 6\pi$.

6.13. Pan Jacenty stoi u podnóża góry w kształcie niemal idealnego stożka i pragnie jak najszybciej znaleźć się dokładnie po jej przeciwnej stronie. Góra wznosi się na wysokość 300 m, a promień jej podstawy ma 2 km. Pan Jacenty po płaskim terenie porusza się z prędkością 4 km/h, wchodzi pod górę z prędkością 2 km/h, a schodzi z prędkością 5 km/h. Sprawdź, czy powinien wejść na szczyt prostą drogą i zejść, czy obejść górę dookoła.



Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Tworząca stożka o promieniu podstawy 1 ma długość 2. Wskaż miarę kąta rozwarcia stożka.

- A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°

2. Jaką bryłę otrzymamy w wyniku obrotu trapezu prostokątnego (niebędącego prostokątem) wokół krótszego ramienia?

- A. sumę dwóch stożków C. kulę z wydrążonym stożkiem
B. sumę walca i stożka D. stożek ścięty

3. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest półkolem. Wskaż miarę kąta rozwarcia stożka.

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

W wyniku obrotu trójkąta wokół jednego z jego boków możemy otrzymać

- A. sumę dwóch stożków.
B. stożek z wydrążonym stożkiem.
C. sumę walca i stożka.

5. Oblicz wysokość stożka, którego tworząca ma długość 17 cm, a podstawą jest koło o polu $200,96 \text{ cm}^2$. W obliczeniach przyjmij $\pi \approx 3,14$.

6. Trapez równoramienny $ABCD$ ($AB \parallel DC$), w którym: $BD \perp AD$, $|AD| = 5$ i $\sphericalangle ABD = 30^\circ$, obrócono wokół jego osi symetrii. Oblicz promienie dolnej i górnej podstawy oraz wysokość otrzymanego w ten sposób stożka ściętego.

7. Siatkę stożka stanowi ćwiartka koła o promieniu R i koło o promieniu r .

Wyznacz $\frac{R}{r}$.

7. Pola powierzchni i objętości brył

Umiejętności:

- stosowanie własności podobieństwa do obliczania długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości
- stosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości

Podobieństwo w przestrzeni

Podobieństwo w przestrzeni definiuje się jak podobieństwo na płaszczyźnie.

Definicja

- **Podobieństwo** w skali k ($k > 0$) jest przekształceniem przestrzeni o tej własności, że dla dowolnych punktów A , B i ich obrazów A' , B' zachodzi równość $|A'B'| = k \cdot |AB|$.
- Figura (bryła) F jest podobna do figury (bryły) F' , co zapisujemy symbolicznie $F \sim F'$, gdy istnieje takie podobieństwo P przestrzeni, w którym $P(F) = F'$.

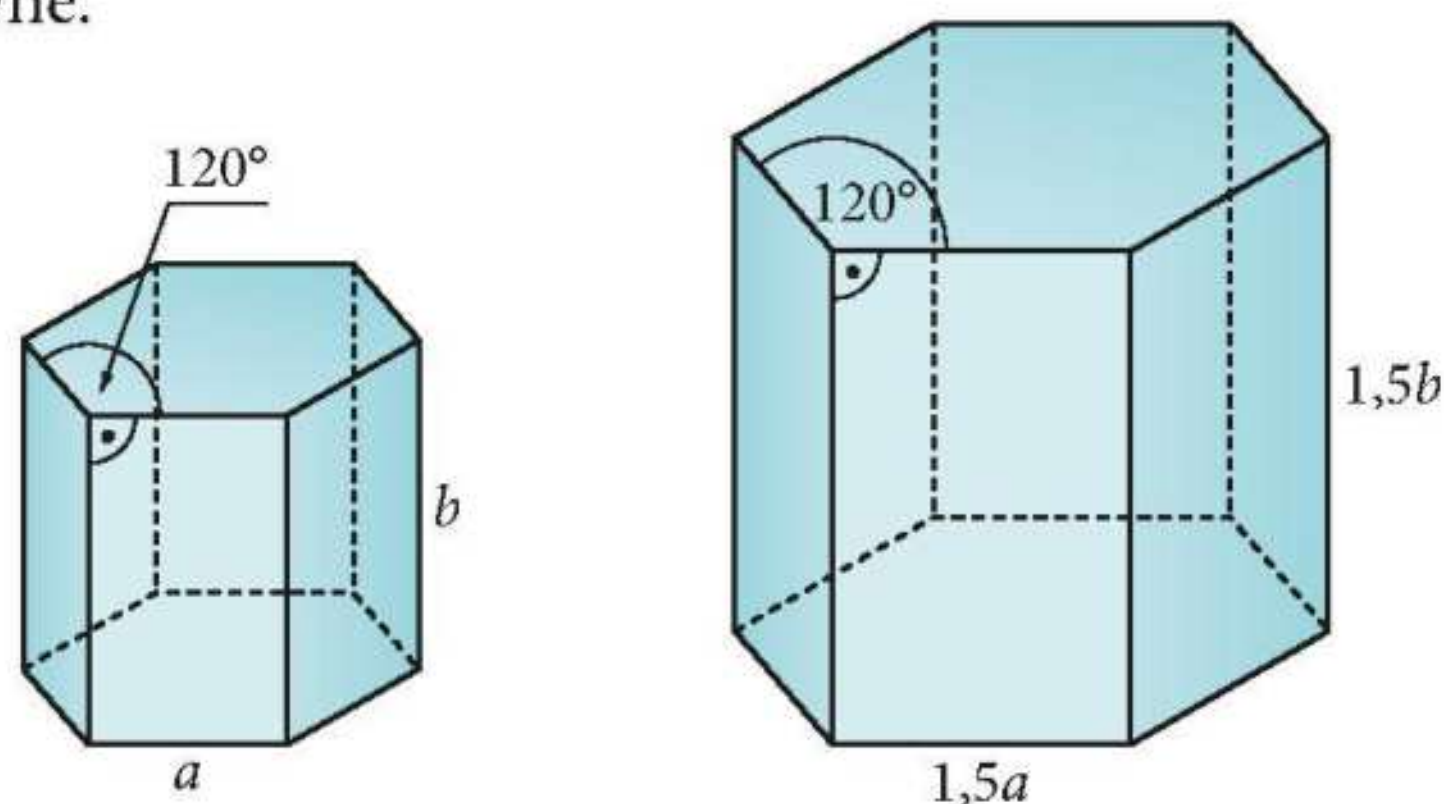
Mówiąc pogładowo, podobieństwo proporcjonalnie zwiększa lub zmniejsza figury w przestrzeni.

Bryły podobne w skali $k = 1$ są przystające.

Oto najważniejsze własności podobieństwa w przestrzeni. Podajemy je bez dowodów.

- Podobieństwo zachowuje współliniowość punktów, czyli przekształca prostą na prostą.
- Podobieństwo nie zmienia kątów, zatem odpowiednie kąty (płaskie oraz dwusienne) w bryłach podobnych są równe.
- W podobieństwie obrazem prostych równoległych są proste równoległe, tzn. jeżeli proste a i b są równoległe, a ich obrazami są proste a_1 i b_1 , to $a_1 \parallel b_1$ (ale niekoniecznie $a_1 \parallel a$).
- Jeżeli figura (bryła) F jest podobna do figury (bryły) F' w skali k , to figura (bryła) F' jest podobna do figury (bryły) F w skali $\frac{1}{k}$.

- Jeżeli $F \sim F'$ i $F' \sim F''$, to $F \sim F''$.
- Dwa wielościany są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy w obu wielościanach odpowiednie krawędzie są proporcjonalne oraz odpowiednie kąty płaskie i kąty dwuściennie są równe.



Przykład 1

Podamy przykłady figur podobnych oraz skale ich podobieństwa.

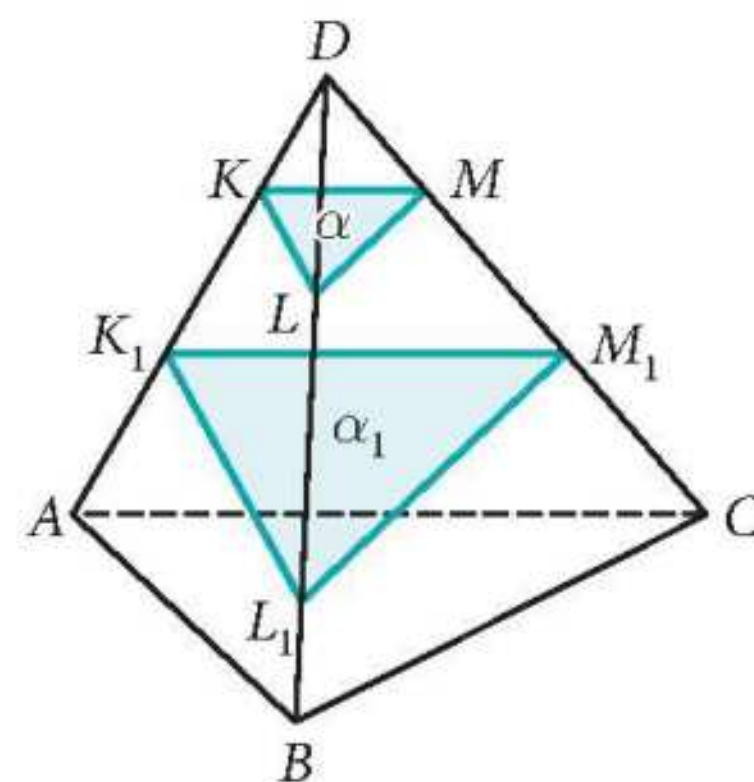
Figury	Skala podobieństwa
dwa odcinki w przestrzeni	stosunek długości tych odcinków
dwa sześciany	stosunek długości krawędzi tych sześcianów
dwa wielościany foremne o tej samej liczbie ścian	stosunek długości krawędzi tych wielościanów
dwie kule	stosunek promieni tych kul
dwa stożki o takim samym kącie rozwarcia	stosunek promieni podstaw tych stożków

- Zauważmy, że skalą podobieństwa stożków o takim samym kącie rozwarcia jest również stosunek ich wysokości lub stosunek długości ich tworzących.
- Jeżeli przekształcimy przez podobieństwo o skali 2 prostopadłościan o wymiarach $3 \times 4 \times 10$, to otrzymamy prostopadłościan o wymiarach $6 \times 8 \times 20$.

Przykład 2

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Płaszczyzny α i α_1 przecinają ostrosłup $ABCD$ i są równoległe. Zatem przekroje, czyli trójkąty KLM oraz $K_1L_1M_1$, są podobne.



Pola powierzchni i objętości brył

W szkole podstawowej wprowadzone zostały wzory na obliczanie pól powierzchni i objętości podstawowych wielościanów. Zbierzemy je w tabeli i uzupełnimy o analogiczne wzory dotyczące brył obrotowych. Wyprowadzenie większości tych wzorów wymaga bardziej zaawansowanej wiedzy matematycznej, dlatego podajemy je bez dowodów.

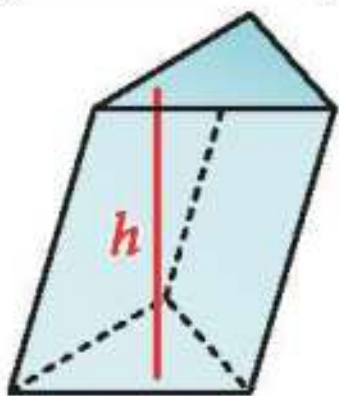
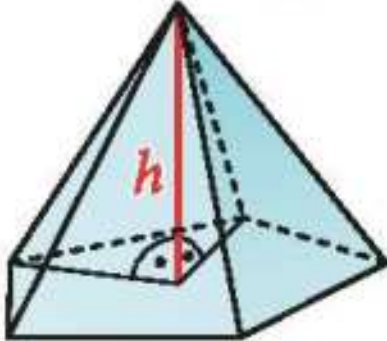
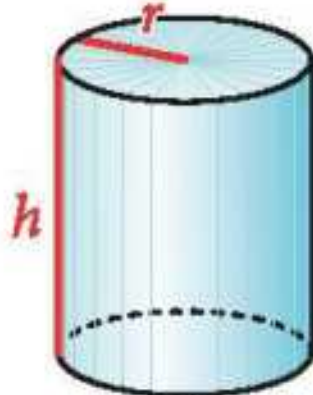
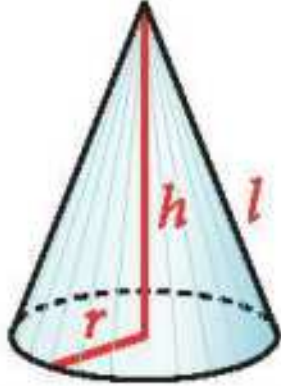
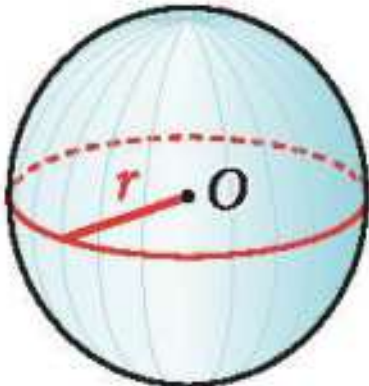
Przypomnijmy najczęściej spotykane oznaczenia:

P_p – pole podstawy,	r – promień podstawy (promień kuli),
P_b – pole powierzchni bocznej,	h – wysokość graniastosłupa, ostrosłupa,
P_c – pole powierzchni całkowitej,	walca, stożka,
V – objętość,	l – tworząca walca, stożka.

W poprzednich tematach rysowaliśmy siatki różnych figur przestrzennych. Warto na nie spojrzeć, aby przyswoić sobie następujące uwagi.

- W każdym **graniastosłupie** ściany boczne są równoległobokami. Suma pól tych ścian jest polem P_b powierzchni bocznej. Pole wielokąta leżącego w podstawie graniastosłupa jest polem podstawy P_p . Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe $P_c = P_b + 2P_p$.
- W każdym **ostrosłupie** ściany boczne są trójkątami. Pole P_b powierzchni bocznej jest sumą pól tych trójkątów. Podstawę ostrosłupa może tworzyć dowolny wielokąt. Jego pole jest polem podstawy P_p . Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe $P_c = P_b + P_p$.
- Jeżeli rozetniemy powierzchnię boczną **walca** wzdłuż jego tworzącej i rozplaszczymy ją, to otrzymamy prostokąt. Jeden z boków tego prostokąta ma długość równą wysokości walca, a drugi ma długość równą obwodowi podstawy walca. Pole powierzchni bocznej walca jest równe $P_b = 2\pi r \cdot h$, pole podstawy walca jest równe $P_p = \pi r^2$. Pole powierzchni całkowitej walca jest równe $P_c = 2\pi r h + 2\pi r^2$ albo krócej: $P_c = 2\pi r(h + r)$.
- Powierzchnią boczną **stożka** jest wycinek koła o promieniu l . Długość łuku tego wycinka jest równa obwodowi podstawy stożka, czyli $2\pi r$. Pole powierzchni bocznej stożka jest równe $P_b = \pi r l$, pole podstawy stożka jest równe $P_p = \pi r^2$. Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe $P_c = \pi r l + \pi r^2$ lub inaczej $P_c = \pi r(l + r)$.

Pole powierzchni **kuli**, czyli pole sfery, jest równe $P = 4\pi r^2$, a objętość kuli jest równa $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Bryła	Pole powierzchni całkowitej	Objętość
graniastosłup 	$P_c = P_b + 2P_p$	$V = P_p \cdot h$
ostrosłup 	$P_c = P_b + P_p$	$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$
walec 	$P_b = 2\pi rh$ $P_p = \pi r^2$ $P_c = 2\pi r(r + h)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
stożek 	$P_b = \pi rl$ $P_p = \pi r^2$ $P_c = \pi r(r + l)$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$
kula 	$P_c = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Jeżeli bryła F' jest podobna w skali k do bryły F o polu powierzchni P_F i objętości równej V_F , to:

- pole powierzchni bryły F' jest równe $P_{F'} = k^2 \cdot P_F$; mówimy – stosunek pól powierzchni brył podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa tych brył,
- objętość bryły F' jest równa $V_{F'} = k^3 \cdot V_F$; mówimy – stosunek objętości brył podobnych jest równy sześciannowi skali podobieństwa tych brył.

Na przykład jeśli zbudujemy model pomnika warszawskiej Syrenki w skali 1 : 10, to pochłonie on 1000 razy mniej materiału niż oryginał.

Przykład 3 ◀ zad. 7.3

Obliczmy pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości $h = 5$ i krawędzi podstawy $a = 3$.

Rozwiązanie

Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny o boku $a = 3$.

Pole podstawy jest równe:

$$P_p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

Powierzchnia boczna składa się z trzech identycznych prostokątów o wymiarach 3×5 , zatem:

$$P_b = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$$

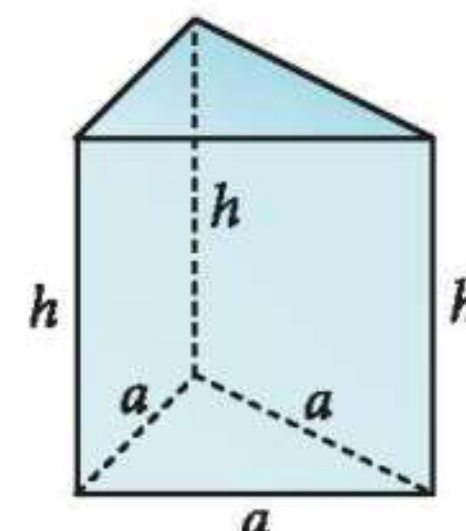
Pole powierzchni całkowitej jest równe:

$$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} + 45 = \frac{9\sqrt{3}}{2} + 45$$

Wysokość graniastosłupa $h = 5$, więc jego objętość jest równa:

$$V = P_p \cdot h = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = \frac{45\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Odp.: } P_c = 45 + \frac{9\sqrt{3}}{2}, \quad V = \frac{45\sqrt{3}}{4}$$

**Przykład 4** ◀ zad. 7.5

Obliczmy objętość i pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym wysokość $h = 7$, a okrąg opisany na podstawie ma promień $r = 4$.

Rozwiązanie

Podstawą graniastosłupa jest sześciokąt foremny.

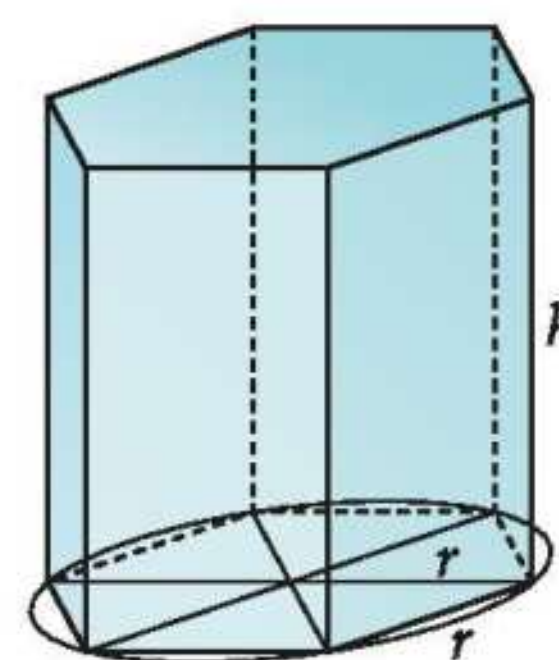
Bok sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg jest równy promieniowi okręgu. Taki sześciokąt jest sumą sześciu trójkątów równobocznych.

$$P_p = 6 \cdot \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

$$V = P_p \cdot h = 24\sqrt{3} \cdot 7 = 168\sqrt{3}$$

$$P_c = 6 \cdot rh + 2P_p = 6 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 24\sqrt{3} = 24(7 + 2\sqrt{3})$$

$$\text{Odp.: } V = 168\sqrt{3}, \quad P_c = 24(7 + 2\sqrt{3})$$




Przykład 5 zad. 7.7

Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Przekątna tego prostopadłościanu ma długość $8\sqrt{2}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Obliczmy pole powierzchni całkowitej i objętość prostopadłościanu.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$ABCD$ jest kwadratem.

$$|AM| = 8\sqrt{2}, \quad \sphericalangle MAC = 60^\circ$$

Dla prostopadłościanu o podstawie kwadratowej:

$$P_c = 2a^2 + 4ah$$

$$V = a^2h$$

Do obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej potrzebne są więc:

a – długość krawędzi podstawy (bok kwadratu $ABCD$),

h – wysokość prostopadłościanu.

Zauważmy, że:

- AC jest przekątną kwadratu $ABCD$, czyli $|AC| = a\sqrt{2}$,
- trójkąt ACM jest połową trójkąta równobocznego o boku $|AM| = 8\sqrt{2}$.

W trójkącie ACM :

$$|AC| = \frac{1}{2}|AM| = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$h = \frac{|AM|\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6}$$

Do obliczenia długości a wykorzystamy związek $|AC| = a\sqrt{2}$:

$$4\sqrt{2} = a\sqrt{2}$$

$$a = 4$$

Podstawiamy wyznaczone wielkości do wzorów.

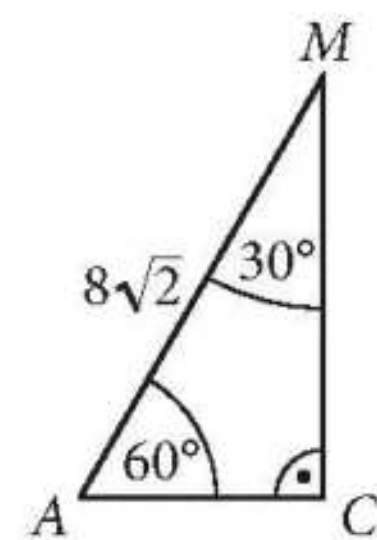
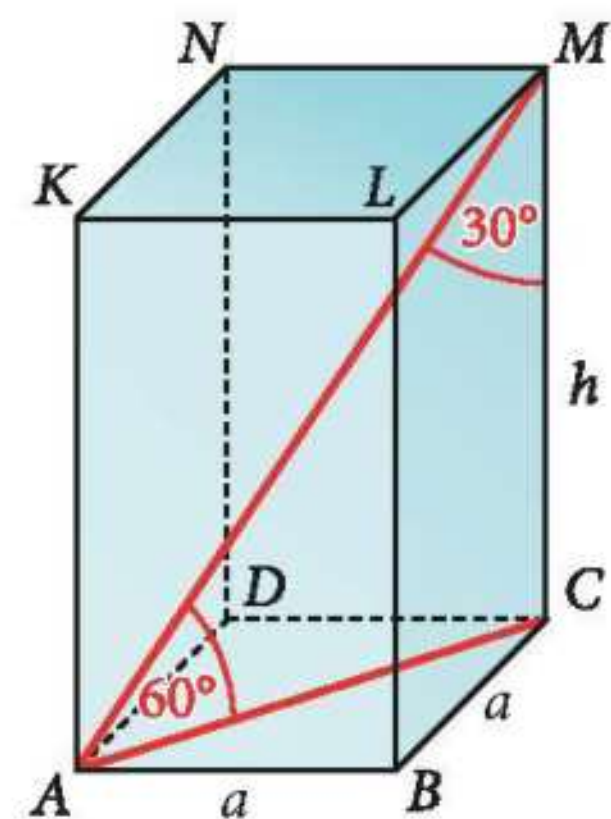
$$P_p = a^2 = 16$$

$$P_b = 4ah = 4 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{6} = 64\sqrt{6}$$

$$P_c = P_b + 2P_p = 64\sqrt{6} + 32 = 32(1 + 2\sqrt{6})$$

$$V = P_p \cdot h = 16 \cdot 4\sqrt{6} = 64\sqrt{6}$$

Odp.: $P_c = 32(1 + 2\sqrt{6})$, $V = 64\sqrt{6}$



Przykład 6

Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym 60° . Dłuższa przekątna graniastosłupa, o długości 4, tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30° . Obliczmy objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$ABCD$ jest rombem o kącie ostrym 60° .

$$|AC'| = 4, \quad \angle C'AC = 30^\circ$$

Do obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej potrzebne są: długość boku rombu, np. $|AB|$, oraz wysokość prostopadłościanu, np. $|CC'|$.

Zauważmy, że:

- trójkąt ACC' jest połową trójkąta równobocznego (kąty 90° , 30° i 60°) o boku $|AC'| = 4$, czyli:

$$|CC'| = \frac{1}{2} |AC'| = 2 \quad \leftarrow \text{połowa boku}$$

$$|AC| = \frac{|AC'| \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \quad \leftarrow \text{wysokość trójkąta równobocznego}$$

- trójkąty ADB i DBC są równoboczne, czyli:

$$|AS| = \frac{1}{2} |AC| = \sqrt{3} \quad \text{i} \quad |AS| = \frac{|AB| \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Zatem } |AB| = \frac{2|AS|}{\sqrt{3}} = 2.$$

Pole podstawy graniastosłupa jest równe:

$$P_p = 2 \cdot \frac{|AB|^2 \sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$$

W graniastosłupie mamy wysokość CC' równą 2. Zatem objętość jest równa:

$$V = P_p \cdot |CC'| = 2\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$$

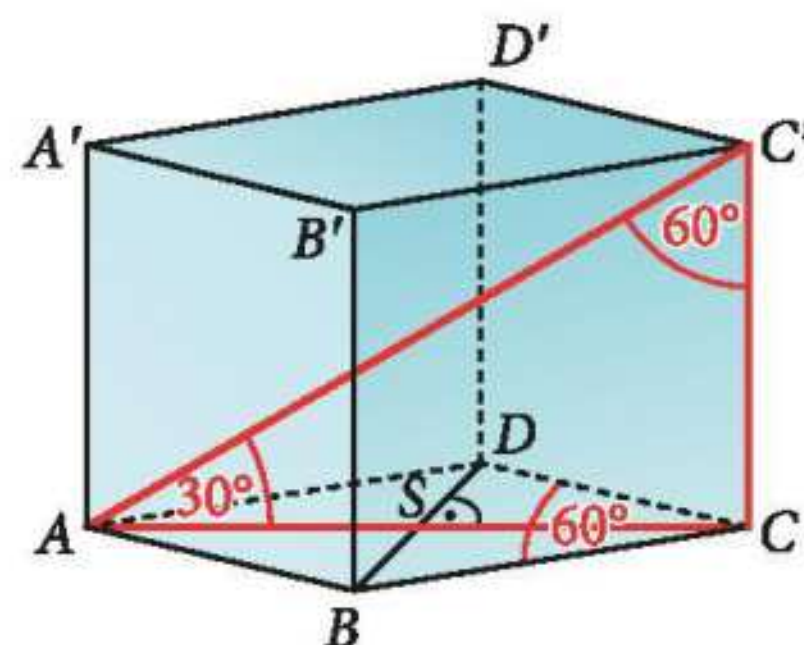
Ścianami bocznymi graniastosłupa są kwadraty o wymiarach 2×2 , czyli:

$$P_b = 4 \cdot 2^2 = 16$$

a pole powierzchni całkowitej jest równe:

$$P_c = 16 + 2 \cdot 2\sqrt{3} = 16 + 4\sqrt{3} = 4(4 + \sqrt{3})$$

Odp.: $V = 4\sqrt{3}$, $P_c = 4(4 + \sqrt{3})$



Przykład 7 ◀ zad. 7.12

Obliczmy objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy $a = 6$ i wysokości $h = 4$.

Rozwiązanie

Podstawą tego ostrosłupa jest kwadrat o boku $a = 6$.

$$P_p = a^2 = 36$$

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48$$

Powierzchnię boczną tworzą cztery identyczne trójkąty równoramienne o podstawie $a = 6$ i nieznaney wysokości. Aby wyznaczyć tę wysokość, oznaczoną na rysunku literą H , skorzystamy z własności trójkąta prostokątnego ABC , którego wierzchołek B jest środkiem krawędzi podstawy.

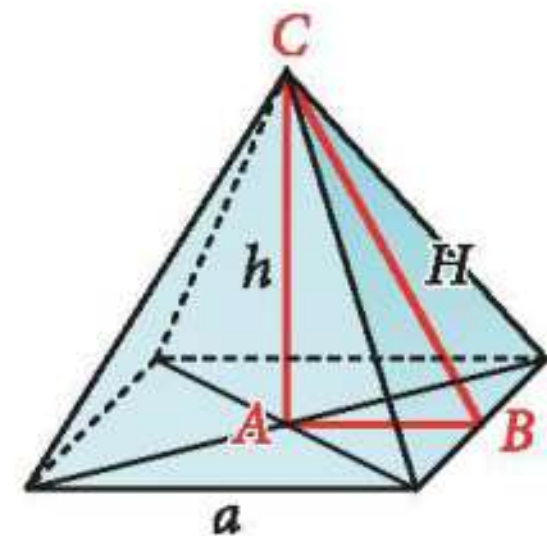
$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2 \quad \leftarrow \text{na mocy twierdzenia Pitagorasa}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = H^2, \quad 3^2 + 4^2 = H^2, \quad \text{czyli } H = 5.$$

Pole jednej ściany bocznej jest równe $\frac{1}{2} a \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa: $P_c = 4 \cdot 15 + 36 = 96$

Odp.: $V = 48$, $P_c = 96$

**Przykład 8** ◀ zad. 7.13

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość d , a krawędź boczna ostrosłupa jest 5 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Obliczmy pole powierzchni bocznej i objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $ABCD$ o boku a , ścianami bocznymi są cztery przystające trójkąty równoramienne. Punkt E jest środkiem krawędzi podstawy.

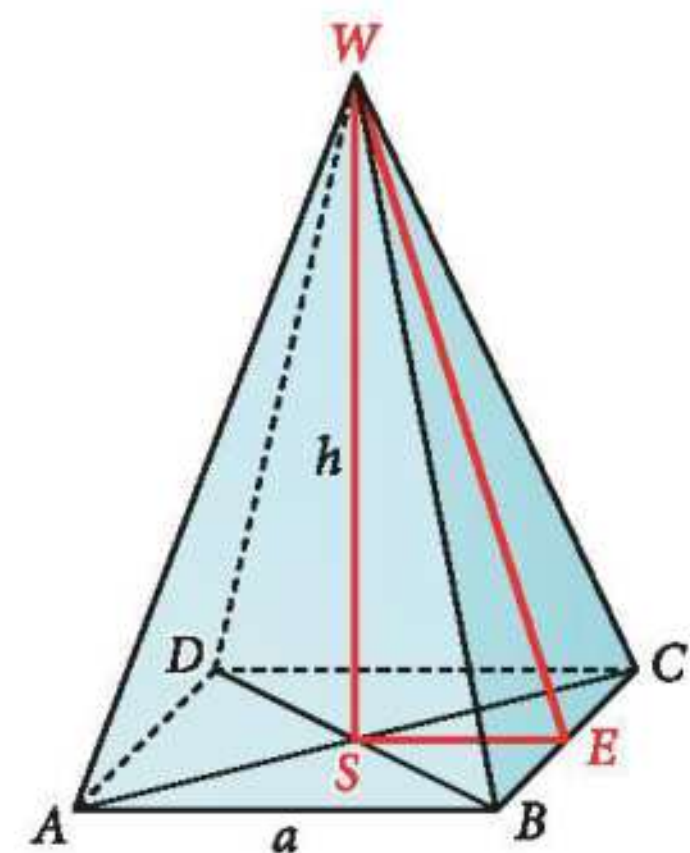
$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot |WE| = 2a \cdot |WE|$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$$

Do obliczenia pola powierzchni bocznej i objętości potrzebne są więc trzy wielkości: a , h i $|WE|$. Wyznamy je w kolejnych krokach.

Krok 1: Wyznamy a .

Odcinek AC o długości d jest przekątną kwadratu, więc: $d = a\sqrt{2}$, czyli $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$.



Krok 2: Wyznaczamy h .

Krawędź boczna ostrosłupa jest 5 razy dłuższa od a . Zatem $|BW| = \frac{5d}{\sqrt{2}}$.

W trójkącie prostokątnym WSB :

$$h^2 = |BW|^2 - |SB|^2 = \frac{25d^2}{2} - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{49}{4}d^2$$

$$h = \frac{7}{2}d$$

Krok 3: Wyznaczamy wysokość $|WE|$ ściany bocznej.

W trójkącie prostokątnym WSE :

$$|WE|^2 = h^2 + |SE|^2$$

$$|WE|^2 = \frac{49}{4}d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}d^2 + \frac{d^2}{8} = \frac{99}{8}d^2$$

$$|WE| = \sqrt{\frac{99}{8}}d = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{11}{2}}d$$

Teraz możemy obliczyć objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2}{2} \cdot \frac{7}{2}d = \frac{7}{12}d^3$

oraz jego pole powierzchni bocznej: $P_b = 2 \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}d = \frac{3\sqrt{11}}{2}d^2$.

Odp.: $P_b = \frac{3\sqrt{11}}{2}d^2$, $V = \frac{7}{12}d^3$

Przykład 9 ◀ zad. 7.22

Obwód podstawy walca jest równy 12π . Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 40° . Obliczymy pole powierzchni całkowitej i objętość walca. Wyniki zaokrąglimy do pierwszego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Obwód podstawy walca jest równy $2\pi r = 12\pi$. Zatem $r = 6$, a średnica AB ma długość 12. W prostokątnym trójkącie ABC

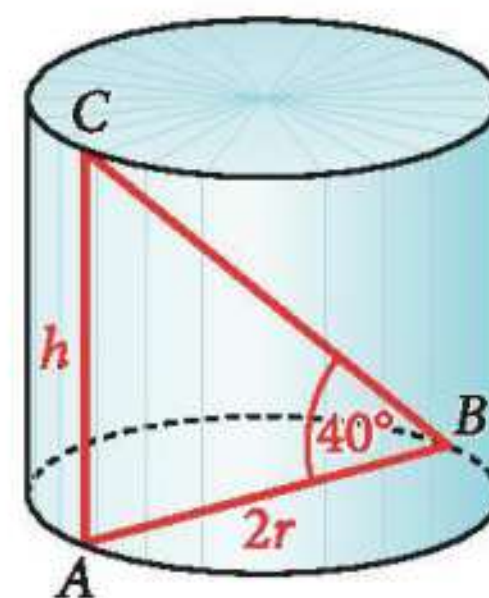
mamy więc $\frac{|AC|}{|AB|} = \operatorname{tg} 40^\circ$, czyli:

$$h = |AC| = |AB| \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \approx 12 \cdot 0,8391 = 10,0692$$

$$P_c = 2\pi r (r + h) \approx 12\pi (6 + 10,0692) \approx 605,8$$

$$V = \pi r^2 h \approx \pi \cdot 36 \cdot 10,0692 \approx 1138,8$$

Odp.: $P_c \approx 605,8$, $V \approx 1138,8$



Przykład 10 ◀ zad. 7.28

Półkole o promieniu 12 cm zwinięto w stożek.
Obliczmy objętość i kąt rozwarcia tego stożka.

Rozwiązanie

Promień półkola jest tworzącą stożka, a obwód podstawy jest długością łuku półkola.

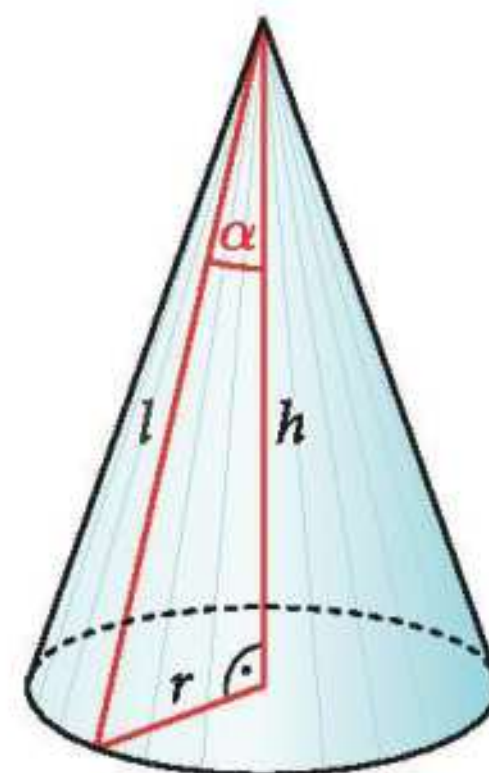
Jeżeli oznaczymy literą r promień podstawy stożka (w cm), a literą l – jego tworzącą (w cm), to $l = 12$ oraz $2\pi r = \pi \cdot 12$.
Zatem:

$$r = 6, \quad h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot 36 \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

$l = 2r$, więc przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym i kąt rozwarcia stożka $2\alpha = 60^\circ$.

Odp.: $V = 72\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$, kąt rozwarcia stożka jest równy 60° .

**Przykład 11** ◀ zad. 7.32

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 15 i 20 obraca się dookoła przeciwprostokątnej. Obliczmy objętość i pole powierzchni całkowitej powstałej bryły.

Rozwiązanie

Otrzymana bryła jest sumą dwóch stożków sklejonych podstawami. Zauważmy, że w obracającym trójkącie:

- przeciwprostokątna AB jest sumą $h_1 + h_2$ wysokości obydwu stożków,
- wysokość CD poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest promieniem r wspólnej podstawy,
- przyprostokątne są tworzącymi l_1, l_2 .

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

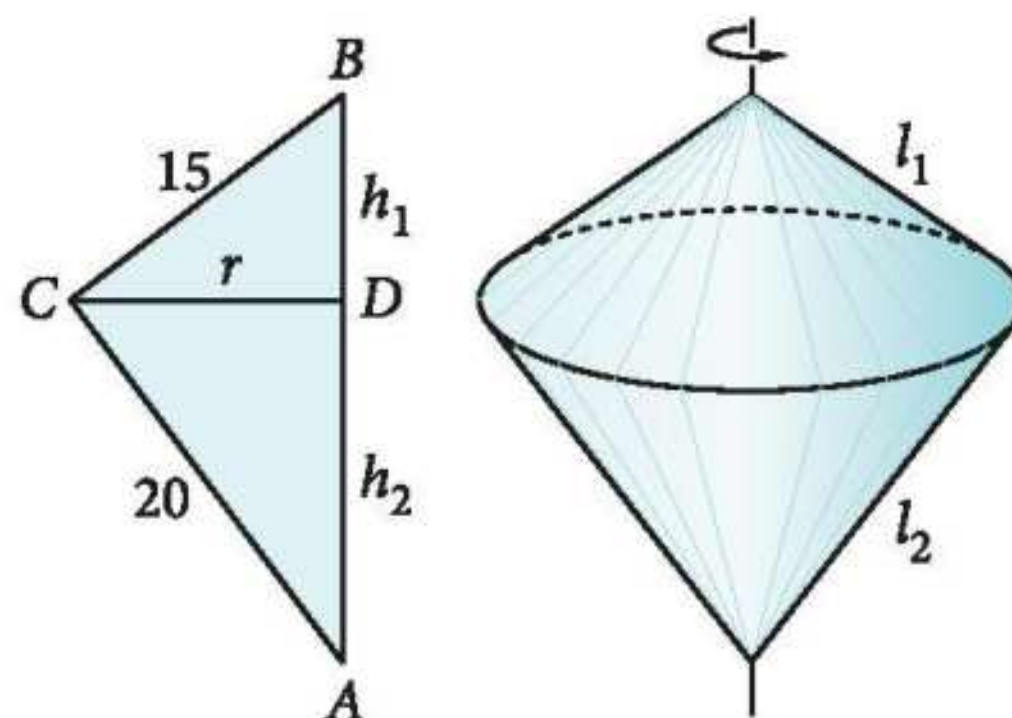
Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC :

$$|AB| = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$$

Z porównania pola trójkąta ABC obliczanego na dwa sposoby mamy:

$$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot |CD|$$

Zatem $|CD| = 12 = r$.



Objętość V bryły jest sumą objętości obydwu stożków:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi \cdot 144 \cdot 25 = 1200\pi$$

Pole powierzchni całkowitej P_c bryły jest sumą pól powierzchni bocznych obydwu stożków:

$$P_c = \pi r l_1 + \pi r l_2 = \pi r (l_1 + l_2) = 12\pi \cdot 35 = 420\pi$$

Odp.: $V = 1200\pi$, $P_c = 420\pi$

Zadania

7.1. Dwie krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$ i $b = 20$. Pole powierzchni całkowitej bryły jest równe 350. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

7.2. Do zbiornika w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 6 dm wleto 100 litrów wody, która wypełniła $\frac{2}{3}$ pojemności zbiornika. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

7.3. Krawędź boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa krawędzi podstawy. Objętość tego graniastosłupa wynosi $16\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

7.4. Podstawa graniastosłupa jest trójkątem prostokątnym, w którym przeciwprostokątna ma długość 8 cm, a jeden z kątów ostrych ma 30° . Powierzchnia boczna tego graniastosłupa po rozwinięciu na płaszczyznę jest kwadratem. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa.

7.5. Oblicz objętość i pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym wysokość jest równa 5, a okrąg wpisany w podstawę ma promień 3.

7.6. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu S , wiedząc, że sześcian o krawędzi krótszej o 5 cm ma objętość mniejszą o 665 cm^3 niż sześcian S .

7.7. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Przekątna tego prostopadłościanu ma długość 12 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

7.8. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość $\sqrt{2}$ dm. Przekątna ściany bocznej tworzy z płaszczyzną sąsiedniej ściany bocznej kąt 30° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

 **7.9.** Podstawa graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego jest wpisana w koło o promieniu $2\sqrt{3}$. Najdłuższa przekątna tego graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 70° . Oblicz objętość graniastosłupa (z dokładnością do całości).

7.10. Wysokość prostopadłościanu jest równa 20, a jego podstawą jest kwadrat o boku długości $5\sqrt{2}$. Prostopadłościan przecięto płaszczyzną wyznaczoną przez wychodzące z jednego wierzchołka przekątną podstawy i przekątną ściany bocznej.

- Wyznacz z dokładnością do 1° kąt nachylenia otrzymanego przekroju do płaszczyzny podstawy.
- Oblicz pole otrzymanego przekroju.
- Oblicz objętości brył, na które płaszczyzna sieczna podzieliła prostopadłościan.

 **7.11.** Podstawą graniastosłupa jest równoległobok o bokach długości a i b oraz kącie α między nimi. Krawędź boczna graniastosłupa ma długość c i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β . Wyznacz objętość V graniastosłupa.

7.12. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 12 i wysokości 2.

7.13. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a , a krawędź boczna ostrosłupa jest 2 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

7.14. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy jest równa $10\sqrt{6}$, a kąt między poprowadzonymi z wierzchołka ostrosłupa wysokościami przeciwległych ścian bocznych ma miarę 120° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

7.15. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym miara kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równa 60° . Wysokość ostrosłupa ma $6\sqrt{3}$ cm. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

7.16. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 24 cm, a miara kąta między krawędzią boczną i wysokością ostrosłupa jest równa 30° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

 **7.17.** Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 20, a kąt płaski ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę 64° . Oblicz objętość tego ostrosłupa (z dokładnością do całości).

- ✱ **7.18.** Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 16 i 12. Każda krawędź boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość ostrosłupa.
-  ✱ **7.19.** Podstawą ostrosłupa jest romb o boku 16 i kącie ostrym 60° . Jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa przechodzących przez wierzchołek kąta rozwartego rombu jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Krawędzie boczne ostrosłupa przechodzące przez wierzchołki kątów ostrych rombu tworzą kąt 48° . Oblicz objętość ostrosłupa (z dokładnością do całości).
-  ✱ **7.20.** Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o kącie ostrym α . Każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość b i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β . Oblicz objętość ostrosłupa (z dokładnością do całości) dla $\alpha = 20^\circ$, $b = 3$ dm, $\beta = 46^\circ$.
- ✱ **7.21.** W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a . Płaszczyzna przechodząca przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
-  **7.22.** Wysokość walca jest równa 7. Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 68° . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca. Wyniki zaokrąglaj do pierwszego miejsca po przecinku.
-  **7.23.** Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem, w którym przekątna o długości 12,4 cm tworzy z bokiem równym wysokości walca kąt 33° . Oblicz objętość walca (z dokładnością do 1 cm^3).
- 7.24.** Prostokąt o polu równym 800 cm^2 obraca się dookoła jednego z boków. Objętość otrzymanej bryły jest równa $16\,000\pi \text{ cm}^3$. Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły.
- 7.25.** Stosunek pola powierzchni bocznej walca do jego pola powierzchni całkowitej jest równy $2:3$. Wyznacz stosunek wysokości tego walca do promienia jego podstawy.
- 7.26.** Pole powierzchni bocznej walca jest równe 60π , a jego pole powierzchni całkowitej wynosi 78π . Oblicz objętość tego walca.
-  **7.27.** Tworząca stożka ma długość 12 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 25° . Oblicz objętość stożka (z dokładnością do całości).

7.28. Objętość stożka jest równa $240\pi \text{ cm}^3$, a pole jego przekroju osiowego wynosi 180 cm^2 . Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka (z dokładnością do 1 cm^2).

7.29. Kula i stożek mają równe objętości. Promień kuli jest równy 5 cm , a promień podstawy stożka jest równy 8 cm . Oblicz wysokość stożka.

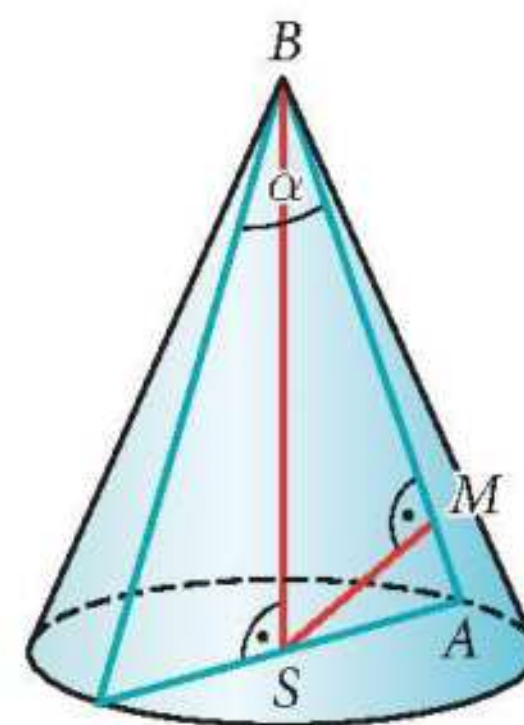
7.30. Chociaż spadło niewiele śniegu, Maciek postanowił ulepić bałwana. Według niego idealny bałwan powinien składać się z trzech kul o średnicach w stosunku $5 : 4 : 3$ oraz mieć wysokość $1,2 \text{ m}$. Oblicz, z ilu m^2 ogródka musi pochodzić śnieg potrzebny na bałwana. Przyjmij, że warstwa śniegu możliwego do wykorzystania ma grubość 1 cm .



7.31. Stopiono 1000 mosiężnych kulek o promieniu 1 cm każda i z otrzymanego stopu wykonano stożek o wysokości 10 cm . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

7.32. Trapez prostokątny o wysokości 2 cm , dłuższej podstawie równej 5 cm i kącie ostrym o mierze 45° obraca się dookoła prostej zawierającej krótszą podstawę. Oblicz objętość otrzymanej w ten sposób bryły.

D **7.33.** Wykaż, że stosunek objętości stożka o promieniu SM i wysokości MB do objętości stożka przedstawionego na rysunku jest równy $\cos^3 \frac{\alpha}{2}$.



7.34. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym poprowadzono płaszczyznę równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta dzieli wysokość ostrosłupa w stosunku $3 : 1$, licząc od wierzchołka. Oblicz stosunek objętości brył, na które ta płaszczyzna podzieliła ostrosłup.

7.35. Ostrosłup pięciokątny o polu podstawy S podzielono płaszczyzną równoległą do podstawy na dwie części o jednakowych objętościach. Wyznacz pole tej części płaszczyzny, która jest zawarta wewnątrz ostrosłupa.

7.36. Stożek o wysokości H podzielono dwiema płaszczyznami równoległymi do podstawy na trzy części o jednakowych objętościach. Wyznacz wysokość środkowej z tych części.

Prosto do matury



W każdym z zadań 1–3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Objętość walca otrzymanego w wyniku obrotu prostokąta o bokach a i $2a$ wokół krótszego boku jest równa V_1 , a objętość walca otrzymanego w wyniku obrotu tego samego prostokąta wokół dłuższego boku jest równa V_2 . Wskaż stosunek $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

2. Kula o promieniu 5 cm i stożek o promieniu podstawy 10 cm mają takie same objętości. Wskaż wysokość stożka.

- A. 5 cm B. 10 cm C. $\frac{25}{\pi}$ cm D. 2 cm

3. Stosunek objętości dwóch sześcianów jest równy 3. Wskaż stosunek długości krawędzi tych sześcianów.

- A. $\frac{1}{3}$ B. $3\sqrt{3}$ C. $\sqrt[3]{3}$ D. 27

4. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Istnieje kula, której objętość wyraża się liczbą

- A. mniejszą niż jej pole powierzchni.
B. równą jej polu powierzchni.
C. większą niż jej pole powierzchni.

5. Oblicz z dokładnością do całości pole powierzchni całkowitej i objętość stożka, w którym kąt rozwarcia ma 70° , a wysokość jest równa 10.

6. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 4,2 dm. Wierzchołek górnej podstawy połączono ze środkami krawędzi dolnej podstawy odcinkami zawartymi w sąsiednich ścianach bocznych. Odcinki te tworzą kąt 50° . Oblicz objętość (z dokładnością do 1 dm^3) i pole powierzchni całkowitej (z dokładnością do 1 dm^2) tego graniastosłupa.

7. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez prostokątny, którego podstawy mają długości 3 cm i 8 cm. Krótsza przekątna graniastosłupa jest równa 12 cm i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

8. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–19 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Ile jest płaszczyzn przechodzących przez punkt A i prostopadłych do danej prostej k takiej, że $A \notin k$?

- A. zero B. jedna C. dwie D. nieskończenie wiele

2. Proste PA i PB są prostopadłe i nachylone do płaszczyzny π pod kątem 45° . Punkt P jest oddalony od płaszczyzny π o 3 cm. Odległość między punktami A i B leżącymi na płaszczyźnie π jest równa

- A. $3\sqrt{2}$ cm. B. 4 cm. C. $6\sqrt{2}$ cm. D. 6 cm.

3. Krysia przesypała piasek z wypełnionej foremki sześciennej o krawędzi 5 cm do foremki w kształcie stożka o wysokości i promieniu podstawy równych 5 cm. Jaką część stożkowej foremki wypełnił przesypany piasek?

- A. $\frac{1}{3}$ B. 1 C. $\frac{3}{\pi}$ D. Piasku było za dużo, więc się wysypał.

4. W pewnym gospodarstwie stoi zbiornik na deszczówkę. Zbiornik ma kształt prostopadłościanu o wysokości 0,5 m. Ile czasu musi padać deszcz dający 20 mm opadu na godzinę, aby zbiornik całkowicie się zapełnił?

- A. 7 godzin B. 5 godzin C. 25 godzin D. 50 godzin

5. Objętość sześcianu jest równa 343 cm^3 . Wskaż pole powierzchni tego sześcianu.

- A. 126 cm^2 B. 294 cm^2 C. $343\sqrt{2} \text{ cm}^2$ D. 360 cm^2

6. Dzieci mają w ogrodzie plastikowy basen. Podłogą basenu jest koło o średnicy 2 m, a jego ściany są prostopadłe do podłogi. Niestety wodę do tego basenu trzeba nalewać dziesięciolitrowym wiadrem. Jaka będzie wysokość słupa wody po wlaniu 20 wiader? Wybierz najlepsze przybliżenie wyniku.

- A. 64 cm B. 6,4 cm C. 10 cm D. 12 cm

7. Przyjmijmy, że pomarańcza jest kulą o średnicy 7 cm. Wyciśnięty sok stanowi 60% objętości owocu. Ile pomarańczy trzeba zużyć, aby otrzymać 0,5 litra soku?

- A. 4 C. 6
B. 5 D. 7



8. Które z podanych zdań jest fałszywe?

- A. Ostrosłup trójkątny jest czworościanem.
- B. Czworościan foremny jest ostrosłupem prawidłowym trójkątnym.
- C. Czworościan, który ma wszystkie krawędzie równe, jest foremny.
- D. Ostrosłup prawidłowy trójkątny jest czworościanem foremnym.

9. V_1 jest objętością kuli o promieniu r_1 , V_2 jest objętością kuli o promieniu r_2 i $V_2 = 3V_1$. Zatem

- A. $\frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{3}$.
- B. $r_2 = 3r_1 \sqrt[3]{3}$.
- C. $r_2^3 - r_1^3 = 3r_1^3$.
- D. $r_2 = r_1 \sqrt{3}$.

10. Suma odległości dowolnego punktu sześcianu o krawędzi 5 cm od wszystkich ścian sześcianu jest równa

- A. 15 cm.
- B. 20 cm.
- C. 25 cm.
- D. 30 cm.

11. Wskaż liczbę przekątnych graniastosłupa o podstawie pięciokątnej.

- A. 5
- B. 10
- C. 15
- D. 20

12. Wskaż liczbę krawędzi graniastosłupa o 12 ścianach.

- A. 24
- B. 30
- C. 32
- D. 36

13. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna o długości a tworzy z podstawą kąt 60° . Wskaż objętość tego ostrosłupa.

- A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$
- B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$
- C. $\frac{1}{3}a^3$
- D. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$

14. Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej czworościanu foremnego do płaszczyzny podstawy jest równy

- A. $\frac{1}{2}$.
- B. $\frac{1}{3}$.
- C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15. Czworościan ma pięć krawędzi o długości l cm, a szóstą o długości 10 cm. Zatem l jest

- A. równe 5.
- B. mniejsze od 5.
- C. równe $2\sqrt{3}$.
- D. większe od 5.

16. Kąt rozwarcia stożka, którego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest półkołem, jest równy

- A. 45° .
- B. 30° .
- C. 60° .
- D. 90° .

17. V_a oznacza objętość sześcianu o krawędzi a , zaś V_{3a} – objętość sześcianu o krawędzi $3a$. Zatem

- A. $V_{3a} = 3V_a$.
- B. $V_{3a} = 9V_a$.
- C. $V_a = \frac{1}{18}V_{3a}$.
- D. $V_{3a} = 27V_a$.

18. Krawędzie czworościanu są przekątnymi ścian pewnego sześcianu o krawędzi a . Zatem wysokość tego czworościanu wynosi

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. D. $3\sqrt{3}a$.

19. Stosunek pól powierzchni dwóch ośmiościanów foremnych jest równy $1 : 4$. Stosunek objętości tych ośmiościanów jest równy

- A. $1 : 2$. B. $1 : 8$. C. $1 : 16$. D. $1 : 64$.

W zadaniach 20–31 oceń prawdziwość podanych zdań.

20. Płaszczyzna jest wyznaczona jednoznacznie przez

- A. dwie różne proste. B. trzy niewspółliniowe punkty. C. prostą i punkt.

21. Punkty A , B , C i D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Skośne są zatem proste

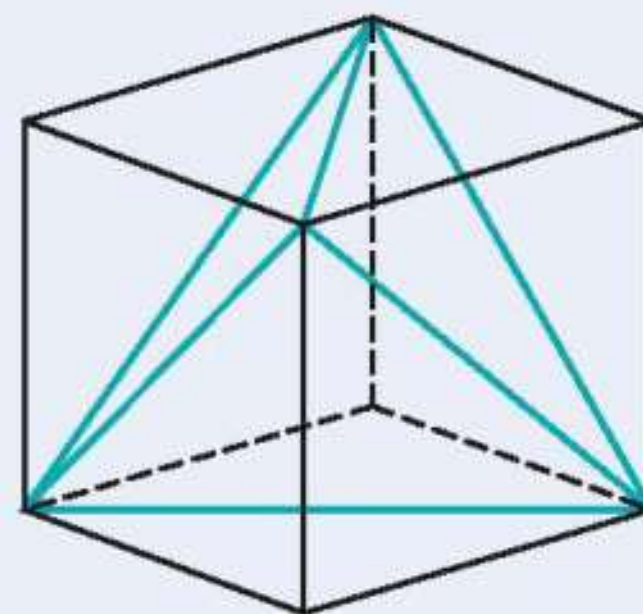
- A. AB i CA . B. BC i AD . C. AC i BD .

22. Każdy wielościan wypukły ma mniej

- A. wierzchołków niż krawędzi.
B. ścian niż wierzchołków.
C. ścian niż krawędzi.

23. Cztery wierzchołki sześcianu o krawędzi 1 cm łączymy nitką każdy z każdym, jak na rysunku, i otrzymujemy szkielet pewnego wielościanu T .

- A. Wielościan T jest czworościanem foremnym.
B. Objętość wielościanu T jest równa $\frac{1}{4}\text{ cm}^3$.
C. Pole powierzchni wielościanu T jest równe $2\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

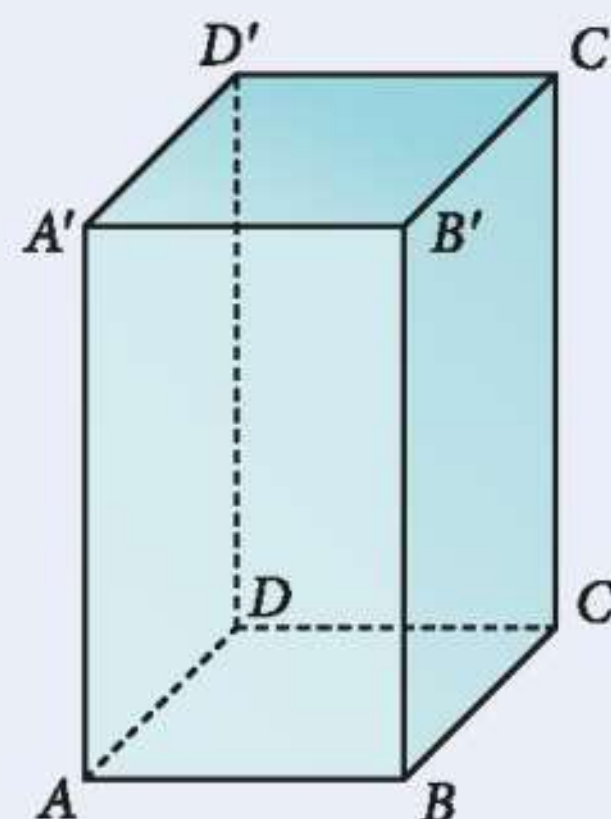


24. Drewnianą, pomalowaną kostkę sześcienną rozpiłowano na 125 przystających sześcianików. Wśród nich

- A. 27 jest niepomalowanych.
B. 36 ma pomalowane dokładnie dwie ściany.
C. 81 ma pomalowaną co najwyżej jedną ścianę.

25. Na rysunku przedstawiono prostopadłościan $ABCD A' B' C' D'$.

- A. Prosta DC' jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$.
B. Prosta DC jest prostopadła do płaszczyzny $ADD'A'$.
C. Prosta DC' jest równoległa do płaszczyzny $ABBA'$.

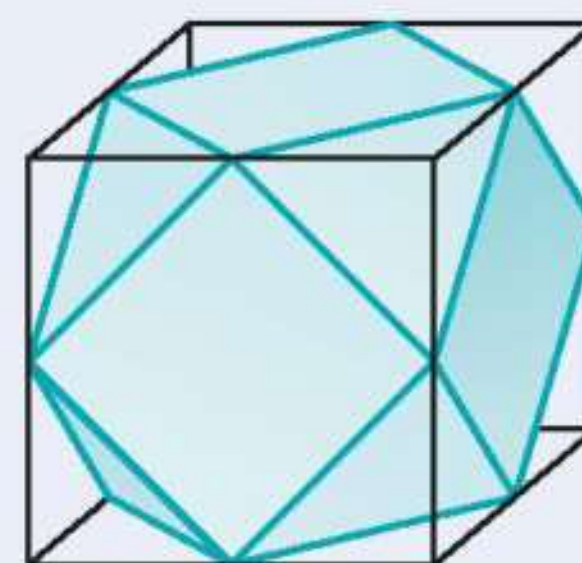


26. W pewnym czworościanie cztery krawędzie mają długość a i dwie długość b , gdzie $a \neq b$.

- A. Każda ze ścian tego czworościanu jest trójkątem równoramiennym.
- B. Co najwyżej jedna ze ścian tego czworościanu jest trójkątem równobocznym.
- C. Każda ze ścian tego czworościanu może być trójkątem nierównobocznym.

27. Z kostki sześciennej odcięto we wszystkich narożach takie same ostrosłupy jak na rysunku. Otrzymany w ten sposób wielościan ma

- A. 12 wierzchołków.
- B. 24 krawędzie.
- C. 14 ścian.



28. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny.

- A. Kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi tego graniastosłupa ma miarę 120° .
- B. Ten graniastosłup ma 12 przekątnych.
- C. Kąt nachylenia przekątnej tego graniastosłupa do płaszczyzny podstawy jest nie większy niż 60° .

29. Istnieje ostrosłup prawidłowy sześciokątny o polu powierzchni całkowitej 1514, który ma

- A. objętość mniejszą niż $\frac{1}{1514}$.
- B. pole powierzchni bocznej równe 514.
- C. pole podstawy równe 514.

30. Dany jest n -kątny ostrosłup prawidłowy ($n > 3$).

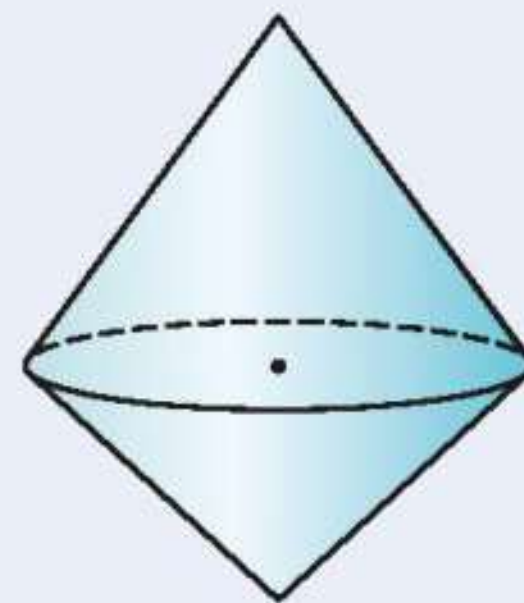
- A. Spodek wysokości tego ostrosłupa może być jednym z wierzchołków podstawy tej bryły.
- B. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod takim samym kątem.
- C. Ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi.

31. Punkt O jest spodkiem wysokości ostrosłupa trójkątnego, w którym wszystkie krawędzie boczne tworzą z płaszczyzną podstawy kąty o równych miarach.

- A. Punkt O jest punktem przecięcia środkowych trójkąta w podstawie.
- B. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa są tej samej długości.
- C. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

- 32.** Oblicz stosunek długości krawędzi sześcianu do długości jego przekątnej.
- 33.** Oblicz cosinus kąta między przekątną sześcianu a płaszczyzną jego podstawy.
- 34.** Wymiary prostopadłościanu są w stosunku $1 : 2 : 3$. Najkrótsza krawędź ma długość $\sqrt{2}$. Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu.
- 35.** Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego każda krawędź ma długość 6.
- 36.** Przekątna podstawy prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest dwa razy dłuższa od wysokości tego prostopadłościanu. Wyznacz kąt, który tworzy płaszczyzna przechodząca przez przekątną podstawy i jeden wierzchołek prostopadłościanu z płaszczyzną podstawy tego prostopadłościanu.
- 37.** Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadrat o boku a . Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi. W tym ostrosłupie wyznacz
- jego wysokość.
 - kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy (z dokładnością do 1°).
 - kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.
- 38.** Promień kuli i promień podstawy stożka są równe 2. Objętości tych brył są równe. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.
- 39.** Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy jest cztery razy krótsza od wysokości, jest równa 256. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.
- 40.** Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka o kącie rozwarcia 90° i średnicy podstawy równej 18.
- 41.** Średnica podstawy stożka jest trzy razy dłuższa od jego wysokości. Objętość bryły jest równa 144π . Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.
- 42.** Stosunek długości tworzących stożków połączonych wspólną podstawą (zob. rysunek) jest równy $3 : 5$, a pole powierzchni bocznej mniejszego stożka wynosi 18. Oblicz pole powierzchni całej bryły.
- 43.** Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoboczny o boku a . Objętość i pole powierzchni bocznej tego stożka wyrażają się taką samą liczbą. Oblicz wartość a .



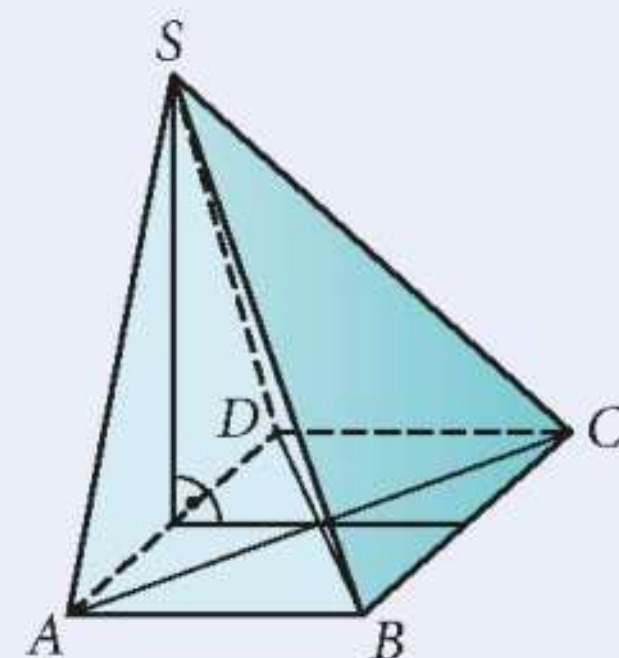
Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

-  **44.** W prostopadłościanie przekątne ścian bocznych wychodzące z tego samego wierzchołka tworzą kąt 50° . Każda z tych przekątnych ma długość 5 dm. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość prostopadłościanu (z dokładnością do całości).
- 45.** Do prostopadłościennego naczynia z wodą wpadła metalowa kostka sześcienna o krawędzi długości 2 cm. O ile milimetrów podniósł się poziom wody, jeśli z naczynia nie wylała się ani kropla, a podstawa naczynia ma wymiary $10\text{ cm} \times 20\text{ cm}$?
- 46.** W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\sin \alpha = 0,4$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.
-  **47.** Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią podstawy o długości 12 kąt o mierze 61° . Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa (z dokładnością do całości).
- 48.** Sześcián $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi $5\sqrt{2}$ przecięto płaszczyzną wyznaczoną przez punkty A , C i środek krawędzi $A'D'$. Oblicz pole przekroju.
- 49.** Krótsza przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $4\sqrt{3}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.
- 50.** Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prostego, w którym podstawa jest rombem o przekątnych długości 12 cm i 16 cm, a przekątna ściany bocznej ma długość 15 cm.
-  **51.** Pionowy przekrój poprzeczny wału ochronnego ma kształt trapezu równoramiennego, którego górna podstawa jest równa 5 m, a ramiona o długości 6 m są nachylone do poziomu pod kątem 60° . Oblicz dolną szerokość wału. Ile metrów sześciennych ziemi potrzeba do usypania takiego wału o długości 1 km (z dokładnością do 1 m^3)?
-  **52.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ściany bocznej opuszczona z wierzchołka ostrosłupa jest równa 10, a kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy ma miarę 63° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa (z dokładnością do całości).
- 53.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o objętości $2\sqrt{26}$ jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz krawędź podstawy.

54. Dany jest czworościan foremny o krawędzi długości a .

- Wyznacz objętość V i pole P_c powierzchni całkowitej czworościanu.
- Wyznacz cosinus kąta α między sąsiednimi ścianami tego czworościanu. Podaj miarę tego kąta z dokładnością do 1° .

55. Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest prostokąt. Ściana ADS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy, $|AB| = 4$, $|BC| = 6$, $|AS| = |DS| = 2\sqrt{21}$. Wyznacz kąt nachylenia krawędzi CS do płaszczyzny podstawy.



56. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej c . Wszystkie krawędzie boczne mają długość b . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

57. Podstawą ostrosłupa jest trapez prostokątny o podstawach 12 i 6. Wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

58. Obracając prostokąt dookoła jednego boku, otrzymujemy walec o objętości V_1 , a obracając go dookoła drugiego boku, otrzymujemy walec o objętości V_2 . Wyznacz pole tego prostokąta. Wykonaj obliczenia dla $V_1 = 1,44\pi$ i $V_2 = 1,2\pi$.

59. Promień podstawy walca jest równy r , a przekątna przekroju osiowego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Wyznacz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.

60. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej stożka o kącie rozwarcia 2α i promieniu podstawy równym r .

61. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 i 8 obrócono najpierw wokół krótszej, a następnie wokół dłuższej przyprostokątnej. Oblicz stosunek pól powierzchni i stosunek objętości powstałych stożków.

✶ **62.** Wyznacz stosunek pól powierzchni kuli i sześcianu mających równe objętości.

63. Poprowadzono płaszczyznę równoległą do podstawy stożka, dzielącą wysokość tego stożka w stosunku $2 : 3$, licząc od wierzchołka. W ten sposób otrzymano dwie bryły. Wyznacz stosunek objętości tych brył.



Dowody w matematyce

2

1. Dowody w geometrii

Umiejętności:

- dowodzenie twierdzeń z zakresu geometrii płaszczyzny

Od początku nauki w szkole średniej spotykamy się z dowodami – zarówno wartych zapamiętania ogólnych faktów matematycznych (np. twierdzenie Pitagorasa lub wzory skróconego mnożenia), jak i mniej ogólnych, podawanych często w postaci zadań typu „Udowodnij (...)”. Ten dział w całości poświęcimy dowodzeniu – omówimy kolejno dowodzenie własności figur geometrycznych oraz dowody w arytmetyce i w algebrze. Uzupełnimy również poznane już twierdzenia o obowiązujące dowody, które zostały wcześniej pominięte.

Przypomnijmy:

Twierdzenie matematyczne to zdanie orzekające prawdziwe, które **można udowodnić**, wykorzystując pojęcia pierwotne, znane definicje, aksjomaty oraz wcześniej udowodnione twierdzenia.

- **Pojęcie pierwotne** – pojęcie niedefiniowane w danej teorii, uznawane za intuicyjnie zrozumiałe.
- **Aksjomat** – w danej teorii stwierdzenie intuicyjnie oczywiste, które przyjmuje się bez dowodu.
- Zdanie zbudowane na wzór twierdzenia, ale nieudowodnione, nazywane jest **hipotezą**.

Większość twierdzeń rozpatrywanych podczas nauki w szkole średniej ma postać:

Jeżeli założenie, to teza.

Założenie opisuje warunki, w których twierdzenie może być stosowane.

Teza to prawdziwe wnioski wynikające z założeń.

Dowód twierdzenia to proces polegający na logicznym wnioskowaniu (dedukcji), prowadzący do wykazania, że podane zdanie jest prawdziwe.

Niektóre twierdzenia mają postać:

A wtedy i tylko wtedy, gdy B.

Udowodnienie tak sformułowanego twierdzenia polega na wykazaniu prawdziwości dwóch zdań:

Jeżeli A, to B. oraz **Jeżeli B, to A.**

Aby udowodnić własności figur, warto:

I. wykonać czytelny rysunek, czyli:

← zobacz przykłady 1, 4

- wprowadzić wygodne oznaczenia,
- oznaczyć znane kąty, boki itp.,
- wyróżnić równe odcinki, kąty,
- użyć różnych kolorów lub rodzajów linii,



II. uzupełnić dany rysunek przydatnymi elementami, aby: ← zobacz przykłady 1, 4

- pokazać podane zależności,
- zastosować odpowiednie twierdzenia,

III. zastosować poznane definicje i twierdzenia, ← zobacz podane przykłady

IV. wykonać potrzebne przekształcenia i obliczenia. ← zobacz przykłady 2, 3

Fakty, z których najczęściej będziemy korzystać w dowodach geometrycznych, to:

- własności kątów (kąty: wierzchołkowe, przyległe, utworzone przez prostą przecinającą proste równoległe; suma kątów w wielokącie; kąty w kole; kąt między styczną a cięciwą),
- nierówność trójkąta,
- cechy przystawania trójkątów, cechy podobieństwa trójkątów,
- twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do niego,
- twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do niego,
- twierdzenie o dwusiecznej, twierdzenie o środkowych w trójkącie,
- twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów,
- wzory na pola i obwody figur.

Przykład 1

Wykażemy, że jeżeli w trójkącie dwa boki są różnej długości, to naprzeciw dłuższego boku leży większy kąt.

Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$|CB| > |CA|$$

Teza

$$\sphericalangle A > \sphericalangle B$$

Dowód

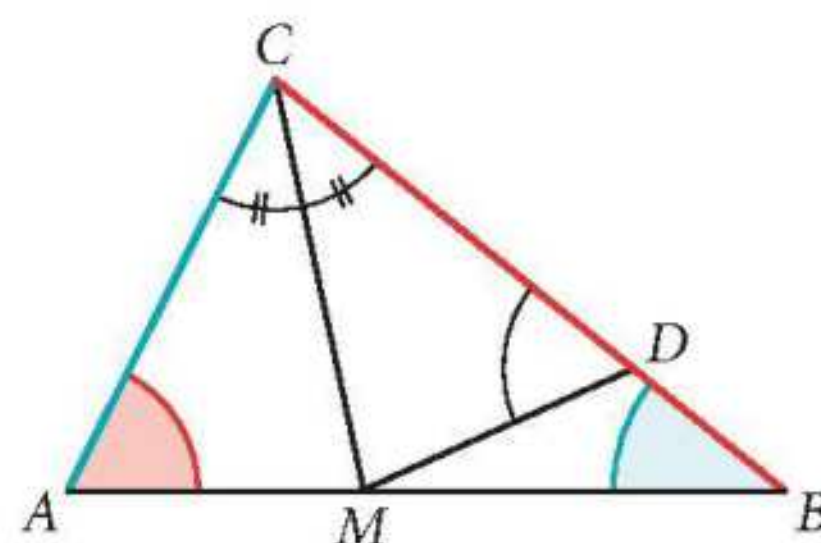
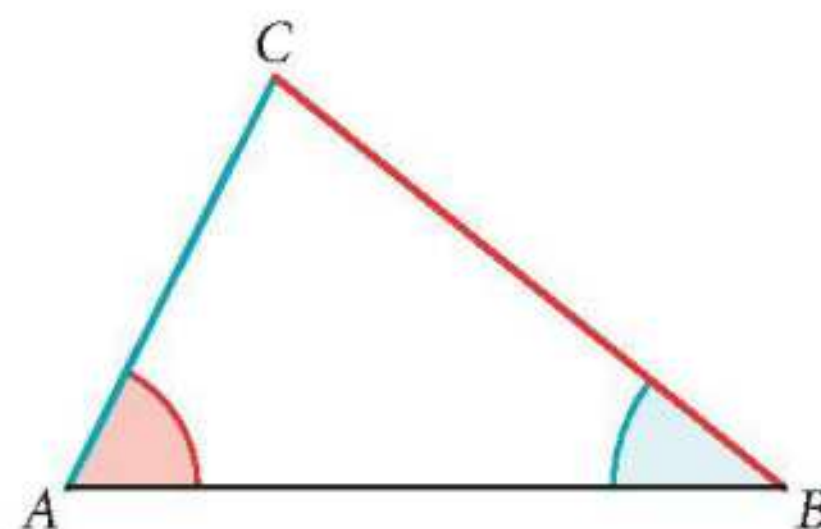
Prowadzimy dwusieczną CM , a na półprostej CB odkładamy odcinek CD tak, żeby $|CD| = |CA|$.

Punkt D należy do boku BC trójkąta i jest różny od wierzchołka B , ponieważ $|CB| > |CA|$.

Trójkąty AMC i DMC (zob. rysunek) są przystające na mocy cechy bkb, zatem:

$$\sphericalangle MAC = \sphericalangle MDC$$

← odpowiednie kąty w trójkątach przystających



Kąt MDC jest kątem zewnętrznym w trójkącie MBD .

$$\sphericalangle MDC = \sphericalangle DMB + \sphericalangle B$$

← twierdzenie o kącie zewnętrznym trójkąta

$$\sphericalangle A = \sphericalangle DMB + \sphericalangle B$$

← $\sphericalangle MDC = \sphericalangle A$

Zatem $\sphericalangle A > \sphericalangle B$.

Koniec dowodu

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Udowodnimy teraz twierdzenie, które podaliśmy w drugiej klasie bez dowodu. Jest ono często stosowane w celu sprawdzenia, czy trójkąt o danych bokach jest prostokątny, ostrokątny, czy rozwartokątny.

W starożytnym Egipcie i Babilonie ok. 4000 lat temu to twierdzenie było wykorzystywane jako sposób wyznaczania kąta prostego.

Twierdzenie

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli w trójkącie suma kwadratów długości dwóch boków jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to kąt leżący naprzeciw tego boku jest prosty.

Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Teza

$$\sphericalangle ACB = 90^\circ$$

Dowód

Dowód twierdzenia odwrotnego przeprowadzimy, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa.

Założmy, że dany trójkąt ABC ma boki długości a , b , c spełniające warunek $a^2 + b^2 = c^2$.

Zbudujmy trójkąt $A'B'C'$, w którym:

$$|B'C'| = a, |A'C'| = b, \sphericalangle A'C'B' = 90^\circ$$

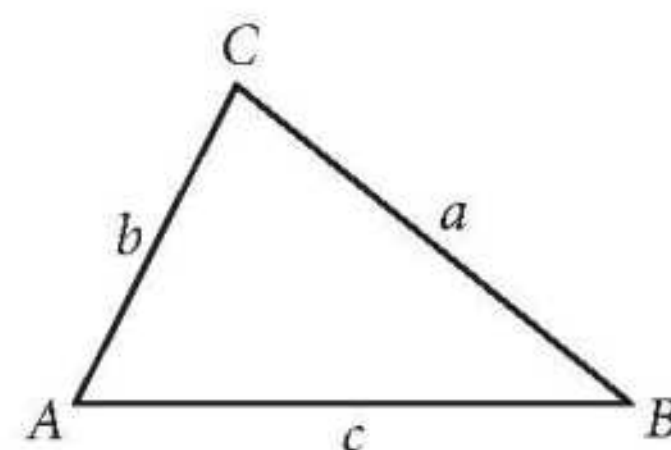
Na mocy twierdzenia Pitagorasa trzeci bok trójkąta $A'B'C'$ ma długość c , zatem:

$$\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$$

← cecha bbb przystawiania trójkątów

czyli $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Koniec dowodu



Zauważmy, że twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do niego moglibyśmy sformułować jako jedno twierdzenie:

Trójkąt o bokach a , b , c takich, że $a \leq b \leq c$, jest prostokątny o kącie prostym leżącym naprzeciw boku c **wtedy i tylko wtedy, gdy** $a^2 + b^2 = c^2$.

Przykład 2

Sprawdźmy, czy trójkąt o bokach długości 11, 60 i 61 jest prostokątny.

Rozwiązanie

Liczby 11, 60, 61 spełniają nierówność trójkąta, więc trójkąt o bokach podanej długości istnieje.

W trójkącie prostokątnym dwa kąty są ostre, czyli najdłuższym bokiem może być tylko przeciwprostokątna. Wystarczy więc sprawdzić, czy zachodzi równość

$$11^2 + 60^2 = 61^2.$$

$$11^2 + 60^2 = 121 + 3600 = 3721 = 61^2$$

Zatem, na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, badany trójkąt jest prostokątny.

Długość łuku i pole wycinka kołowego

Przypomnijmy:

- Obwód L koła o promieniu r jest równy $L = 2\pi r$.
- Pole P koła o promieniu r jest równe $P = \pi r^2$.
- Wycinkiem kołowym nazywamy każdą z dwóch części, na które dzieli koło dwa niepokrywające się promienie.

Wyprowadzenie wzorów na obwód i pole koła wymaga bardziej zaawansowanego aparatu matematycznego, niż przewiduje to podstawa programowa szkoły ponadpodstawowej. Również bez dowodu podamy dwa twierdzenia, które prowadzą do wyznaczenia długości łuku oraz pola wycinka kołowego w kole o promieniu r .

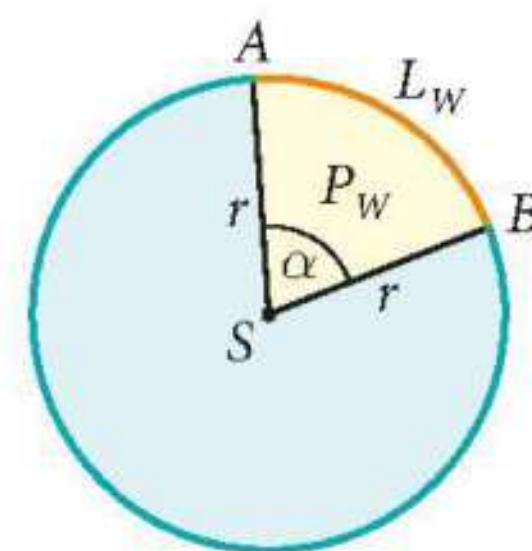
Twierdzenie 1

Długość łuku okręgu jest proporcjonalna do kąta środkowego odpowiadającego temu łukowi.

Twierdzenie 2

Pole wycinka kołowego jest proporcjonalne do kąta środkowego odpowiadającego temu wycinkowi.

- Niech L_W oznacza długość łuku AB wyznaczonego w kole o promieniu r przez kąt środkowy α wyrażony w stopniach (zob. rysunek).



Zauważmy, że jeżeli mamy w tym kole kilka wycinków wyznaczonych przez kąty środkowe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, o łukach odpowiednio $L_{W_1}, L_{W_2}, L_{W_3}, \dots$, to na mocy twierdzenia 1 zachodzą równości:

$$\frac{L_{W_1}}{L_{W_2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \frac{L_{W_1}}{L_{W_3}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \quad \frac{L_{W_2}}{L_{W_3}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \text{ itd.}$$

W szczególnym przypadku:

$$\frac{L_W}{\pi r} = \frac{\alpha}{180^\circ} \quad \leftarrow \text{kąt środkowy o mierze } 180^\circ \text{ wyznacza półokrąg}$$

i stąd długość L_W łuku AB jest równa:

$$L_W = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r$$

Wzór na długość łuku często podawany jest też w postaci:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

- Niech P_W oznacza pole wycinka kołowego wyznaczonego w kole o promieniu r przez kąt środkowy α wyrażony w stopniach (zob. rysunek).

Podobnie jak poprzednio skorzystamy z równości stosunków wielkości proporcjonalnych:

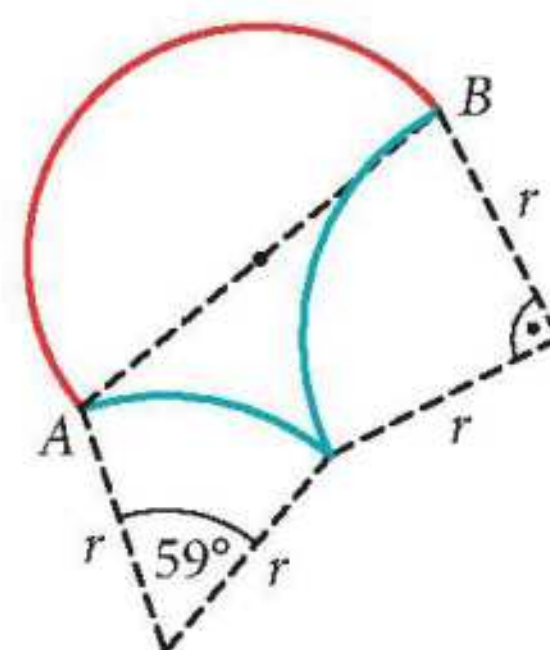
$$\frac{P_W}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360^\circ} \quad \leftarrow \text{kąt środkowy o mierze } 360^\circ \text{ wyznacza okrąg}$$

i stąd pole P_W wycinka kołowego wyznaczonego przez kąt środkowy α wynosi:

$$P_W = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Przykład 3

Wykażemy, że linia czerwona (półokrąg o promieniu 2,5 cm) łącząca punkty A i B jest dłuższa od sumy dwóch niebieskich łuków wyznaczonych przez kąty 59° i 90° w okręgach o promieniach 2,8 cm (zob. rysunek).



Dowód

Długość (w cm) czerwonego półokręgu jest równa $L_1 = 2,5\pi$.

Długość (w cm) łuku wyznaczonego przez kąt 90° , czyli jedna czwarta obwodu koła o promieniu 2,8 cm, wynosi $L_2 = 1,4\pi$.

Długość (w cm) łuku wyznaczonego przez kąt 59° wynosi:

$$L_3 = \frac{59}{180} \pi \cdot 2,8 = \frac{59}{90} \cdot 1,4\pi$$

Długość (w cm) niebieskiej linii równa się:

$$L_2 + L_3 = 1,4\pi + \frac{59}{90} \cdot 1,4\pi = 1,4\pi \left(1 + \frac{59}{90} \right) = 1,4\pi \cdot \frac{149}{90}$$

Porównamy wielkości L_1 i $L_2 + L_3$. W tym celu zbadamy ich iloraz:

$$\frac{L_2 + L_3}{L_1} = \frac{1,4\pi \cdot 149}{90 \cdot 2,5\pi} = \frac{2086}{2250} < 1$$

Zatem $L_2 + L_3 < L_1$.

Koniec dowodu

Związki miarowe w wielokątach

Przykład 4

W kwadracie $ABCD$ punkty E i F są odpowiednio środkami boków AB i BC . Wykażemy, że odcinki DE i DF dzielą przekątną AC na trzy równe części.

Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

- $ABCD$ jest kwadratem.
- $|AE| = |EB|$
- $|BF| = |FC|$

Teza

$$|AM| = |MN| = |NC|$$

Dowód

Prowadzimy przekątną DB i jej punkt przecięcia z AC oznaczamy literą K , jak na rysunku.

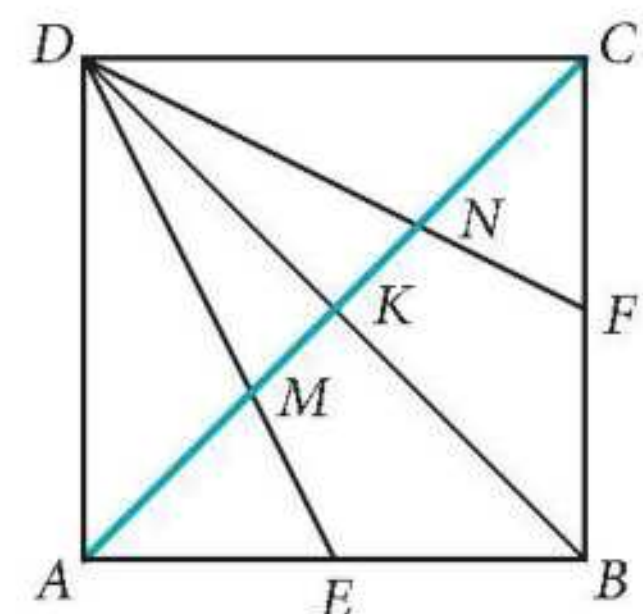
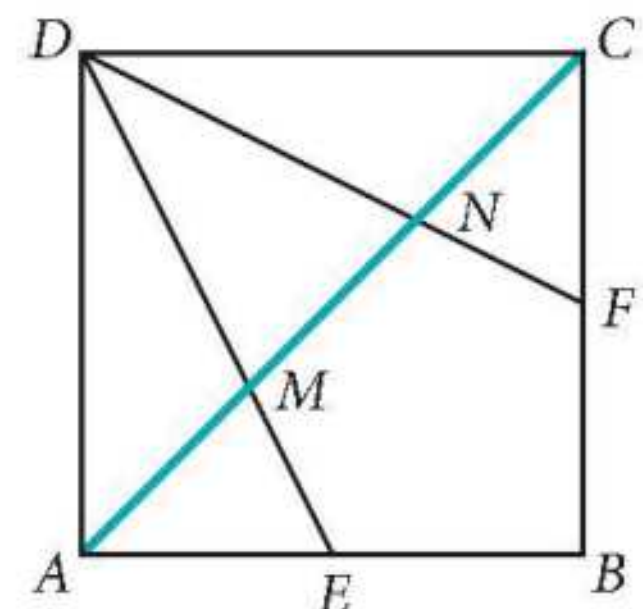
$$|AM| = |NC| \text{ i } |MK| = |KN| \quad \leftarrow \text{prosta } BD \text{ jest osią symetrii kwadratu } ABCD$$

W trójkącie ABD punkt K jest środkiem boku BD . Zatem odcinki AK oraz DE są w tym trójkącie środkowymi i przecinają się w punkcie M . Oznacza to, że:

$$|AM| = 2|MK| \quad \leftarrow \text{twierdzenie o punkcie przecięcia środkowych trójkąta}$$

co, wobec równości $|MK| = |KN|$, kończy dowód.

Koniec dowodu



Przypomnijmy twierdzenie udowodnione w podręczniku do klasy drugiej (s. 204).

Twierdzenie

W trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego jest równy iloczynowi długości odcinków, na które ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$$

Wykorzystamy następujące proporcje, aby wyprowadzić kolejne związki miarowe dotyczące trójkąta prostokątnego:

- $\frac{b}{c} = \frac{p}{b}$ ← z podobieństwa trójkątów DAC i CAB
- $\frac{a}{c} = \frac{q}{a}$ ← z podobieństwa trójkątów DCB i CAB

Stąd:

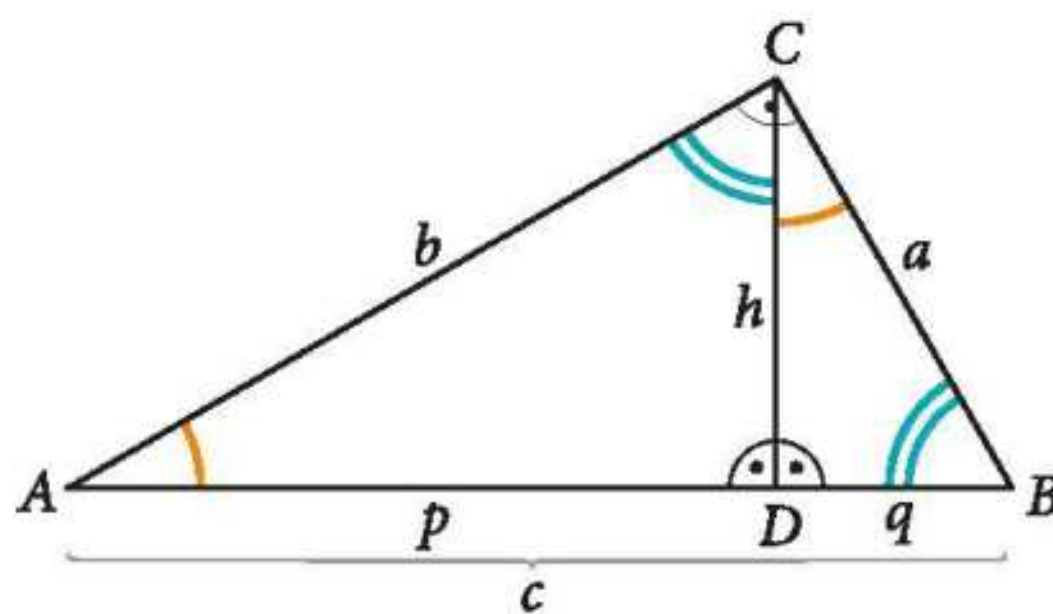
- $b^2 = c \cdot p$
- $a^2 = c \cdot q$

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Jeśli odcinek CD jest wysokością trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym BCA , to:

$$|AC|^2 = |AB| \cdot |AD| \text{ i } |BC|^2 = |AB| \cdot |DB|$$

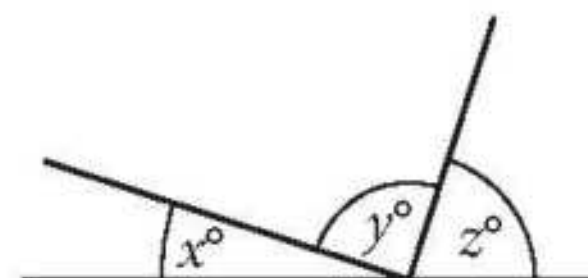


D

Zadania

1.1. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $|AB| = |AD|$ i $|BC| = |DC|$. Wykaż, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$.

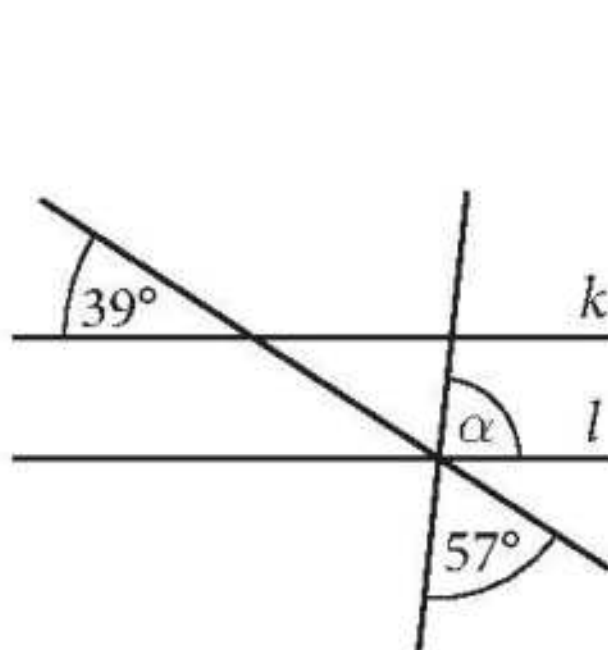
1.2. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wiadomo, że $\frac{y}{x} = 5$ i $\frac{z}{x} = 4$. Wykaż, że $z = 72$.



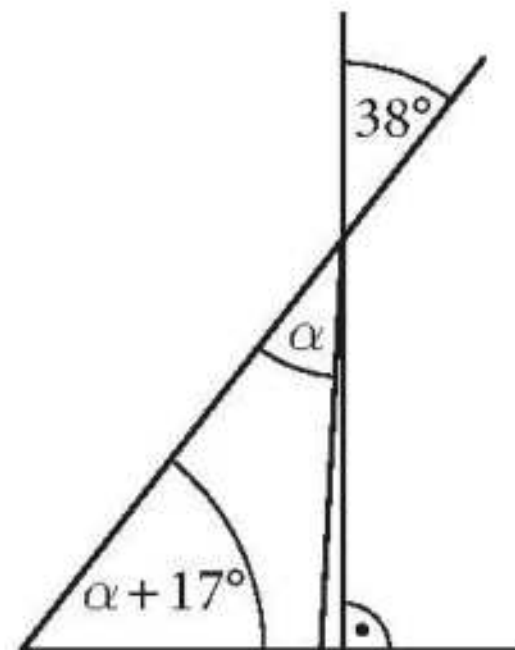
1.3. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1. Proste k i l są równoległe. Udowodnij, że $\alpha = 84^\circ$.

1.4. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 2. Wykaż, że $\alpha = 35^\circ$.

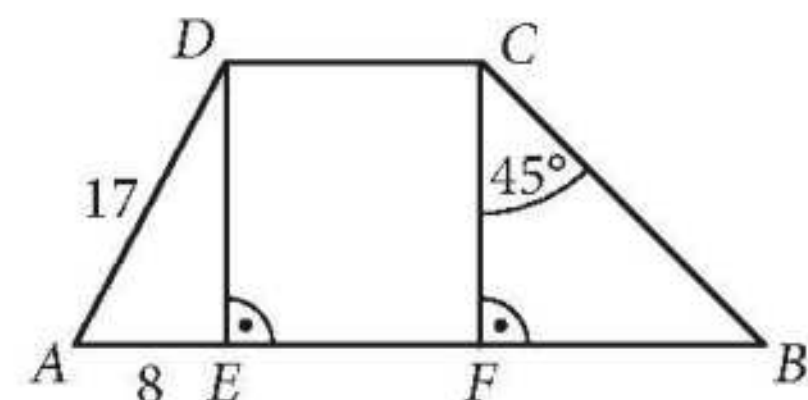
1.5. Dany jest trapez $ABCD$ ($AB \parallel DC$). Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 3. Wykaż, że $|BC| = 15\sqrt{2}$.



Rys. 1.



Rys. 2.

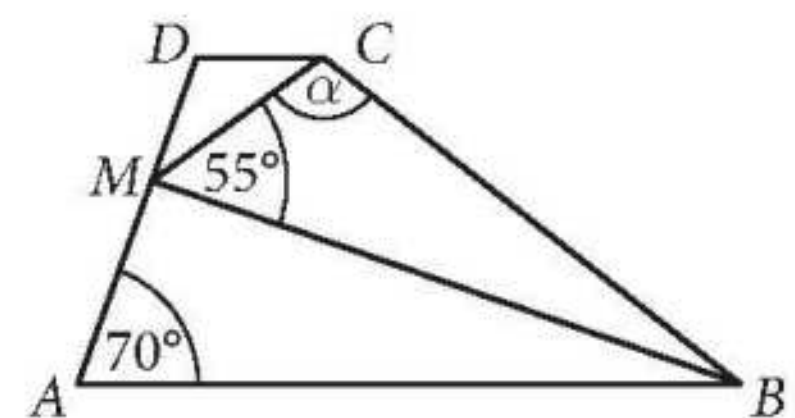


Rys. 3.

1.6. Wykaż, że w czworokącie o bokach równej długości przeciwległe kąty są równe.

1.7. W trójkącie ABC poprowadzono środkową BM , a następnie na półprostej BM wyznaczono taki punkt D (różny od punktu B), że $|BM| = |MD|$. Udowodnij, że $|BC| = |AD|$.

1.8. W trapezie $ABCD$ ($AB \parallel DC$), w którym $\sphericalangle BAD = 70^\circ$, poprowadzono odcinek BM tak, że $|MD| = |DC|$ (zob. rysunek). Odcinek BM jest zawarty w dwusiecznej kąta ABC , a $\sphericalangle BMC = 55^\circ$. Wykaż, że $\alpha = 105^\circ$.



1.9. W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono dwusieczne BD i $B'D'$. Wiadomo, że $|BD| = |B'D'|$, $\sphericalangle BDC = \sphericalangle B'D'C'$ i $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

1.10. Wykaż, że dwa wierzchołki trójkąta są jednakowo oddalone od prostej, która zawiera środkową poprowadzoną do boku łączącego te wierzchołki.

✶ **1.11.** Wykaż, że w trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego równa jest połowie przeciwprostokątnej i dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty równoramienne.

1.12. Wysokość trójkąta zawiera się w dwusiecznej jednego z jego kątów wewnętrznych. Wykaż, że trójkąt ten jest równoramienny.

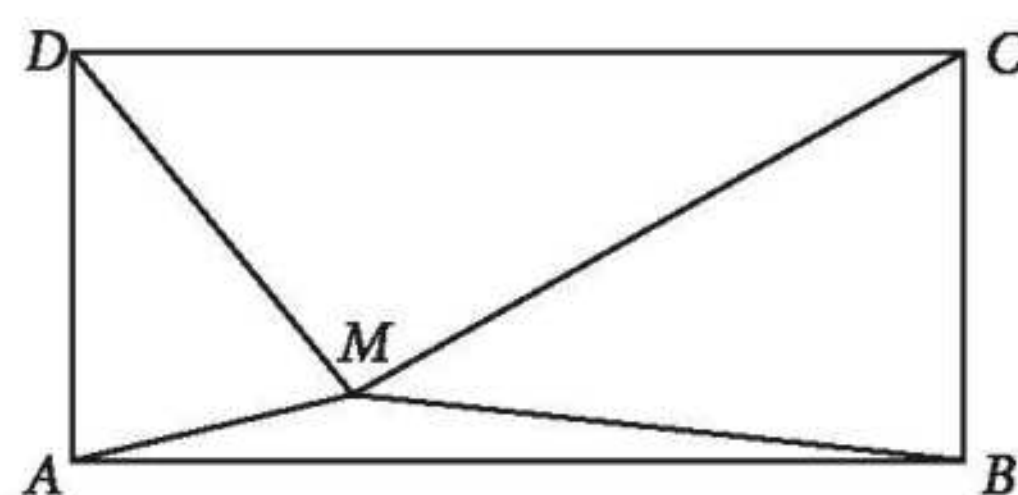
1.13. Wykaż, że czworokąt jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

1.14. W trójkącie ABC , w którym miara kąta B jest dwa razy większa od miary kąta A , poprowadzono dwusieczną BD . Udowodnij, że trójkąt BDC jest podobny do trójkąta ABC .

✱ **1.15.** Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 7$, $|AC| = 3$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że $|AE| = \frac{21\sqrt{3}}{10}$.

1.16. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC|$, wysokość CD jest równa podstawie. Wykaż, że $\cos \sphericalangle A = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

1.17. Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ jak na rysunku. Udowodnij, że $|AM|^2 + |CM|^2 = |BM|^2 + |DM|^2$.

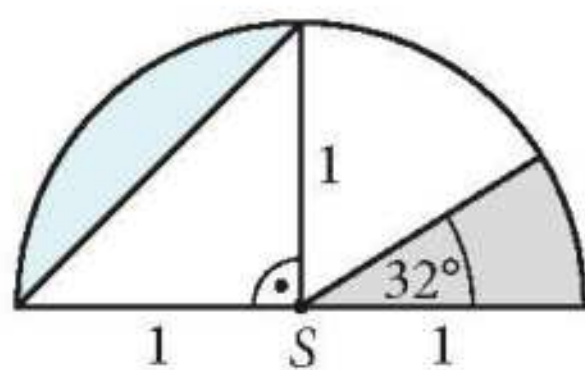


1.18. Promień półkola (rys. 1) jest równy 1. Wykaż, że pole niebieskiej figury jest większe od pola figury szarej.

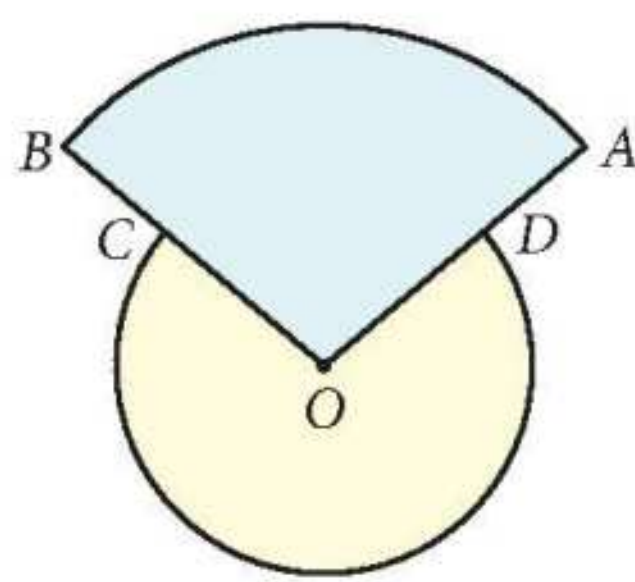
1.19. Dane są dwa wycinki kołowe (rys. 2) o promieniach $|OA| = \sqrt{13}$ i $|OD| = \sqrt{5}$. Kąt wypukły AOB ma miarę 100° . Wykaż, że

- polo obu wycinków są równe.
- długość łuku wycinka AOB jest mniejsza od długości łuku wycinka COD .

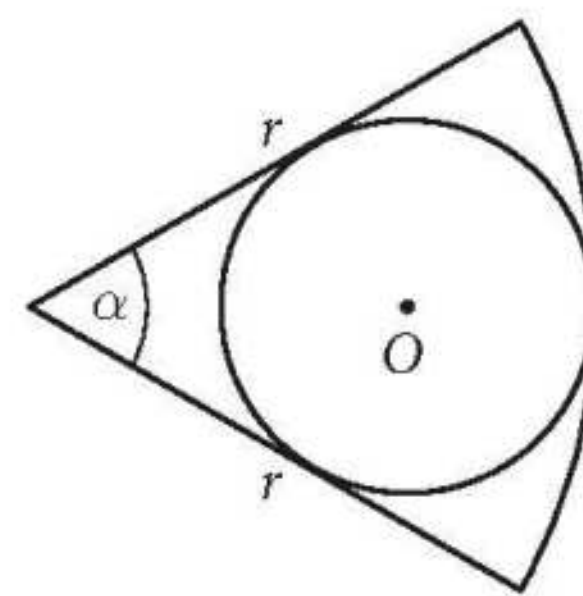
✱ **1.20.** W wycinek koła o promieniu r wpisano koło o promieniu $\frac{r}{3}$ (rys. 3). Wykaż, że $\alpha = 60^\circ$.



Rys. 1.



Rys. 2.

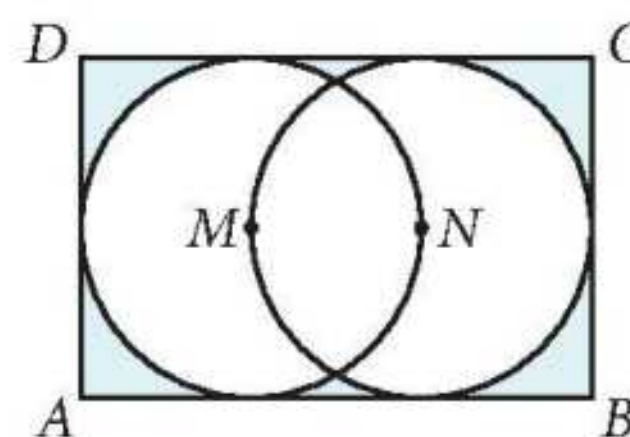


Rys. 3.

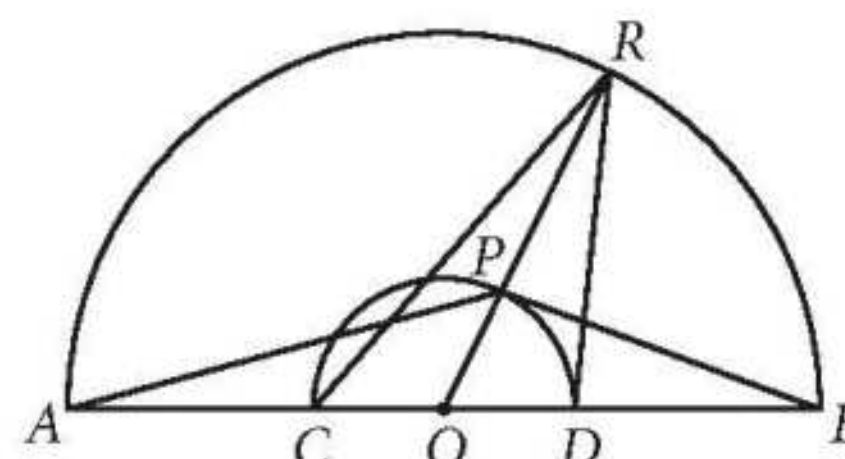
- ✱ **1.21.** Dwa koła, każde o polu równym S , są zawarte w prostokącie $ABCD$ tak jak na rysunku. Udowodnij, że pole

a) prostokąta $ABCD$ jest równe $\frac{6S}{\pi}$.

b) zamalowanego obszaru jest równe $\frac{(36 - 8\pi - 3\sqrt{3})S}{6\pi}$.

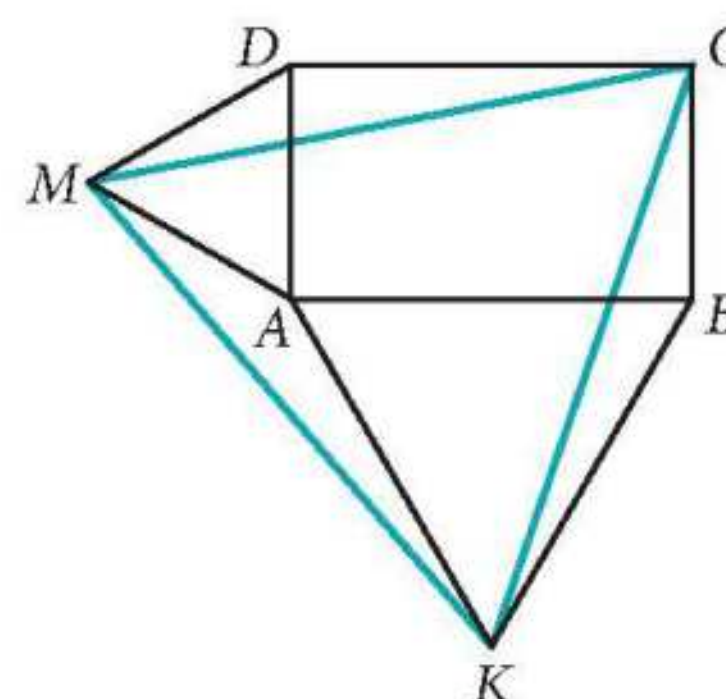


- ✱ **1.22.** Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe). Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt R leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $\angle APB + \angle CRD = 180^\circ$.



- 1.23.** Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu wewnętrznego trójkąta od jego wierzchołków jest większa od połowy obwodu tego trójkąta.

- ✱ **1.24.** Na dwóch bokach prostokąta $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne ADM i BAK , jak na rysunku. Wykaż, że trójkąt MKC jest równoboczny.



- ✱ **1.25.** Przekątna BD trapezu $ABCD$ jest prostopadła do ramienia AD i zawiera się w dwusiecznej kąta ABC . Wykaż, że pole trójkąta ABD jest dwa razy większe od pola trójkąta BCD .

- 1.26.** Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie M . Wykaż, że $|MA| \cdot |MD| = |MB| \cdot |MC|$.

- 1.27.** Niech w trójkącie prostokątnym a i b oznaczają długości jego przyprostokątnych, c oznacza długość przeciwprostokątnej, r – promień okręgu wpisanego w ten trójkąt, R – promień okręgu opisanego na tym trójkącie. Wykaż, że

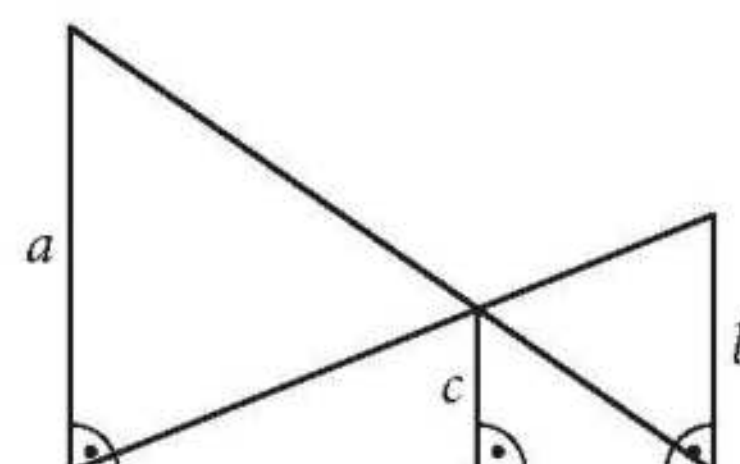
a) $r = \frac{a+b-c}{2}$.

b) $2r + 2R = a + b$.

- ✱ **1.28.** Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie o boku a . Wykaż, że suma kwadratów odległości punktu P od wierzchołków tego kwadratu ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu.

- 1.29.** Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Wykaż, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.



POLSKA SZKOŁA MATEMATYCZNA

Kiedy w 1918 r. Polska odzyskała niepodległość, jedną z dziedzin wymagających odbudowania była nauka. Z ogromnym sukcesem udało się to polskiej matematyce, która przebojem dołączyła do światowej elity. Dziś o matematykach i ich ogromnych osiągnięciach z tamtego okresu mówi się: **polska szkoła matematyczna**.

Warszawa i Lwów

Największy wpływ na sukces polskiej szkoły matematycznej miały dwa środowiska naukowe, działające na uniwersytetach w Warszawie i we Lwowie. Pierwsze było skupione wokół matematyków: Wacława Sierpińskiego, Zygmunta Janiszewskiego i Stefana Mazurkiewicza, drugie – wokół Hugona Steinhausa i Stefana Banacha.



Stefan
Mazurkiewicz



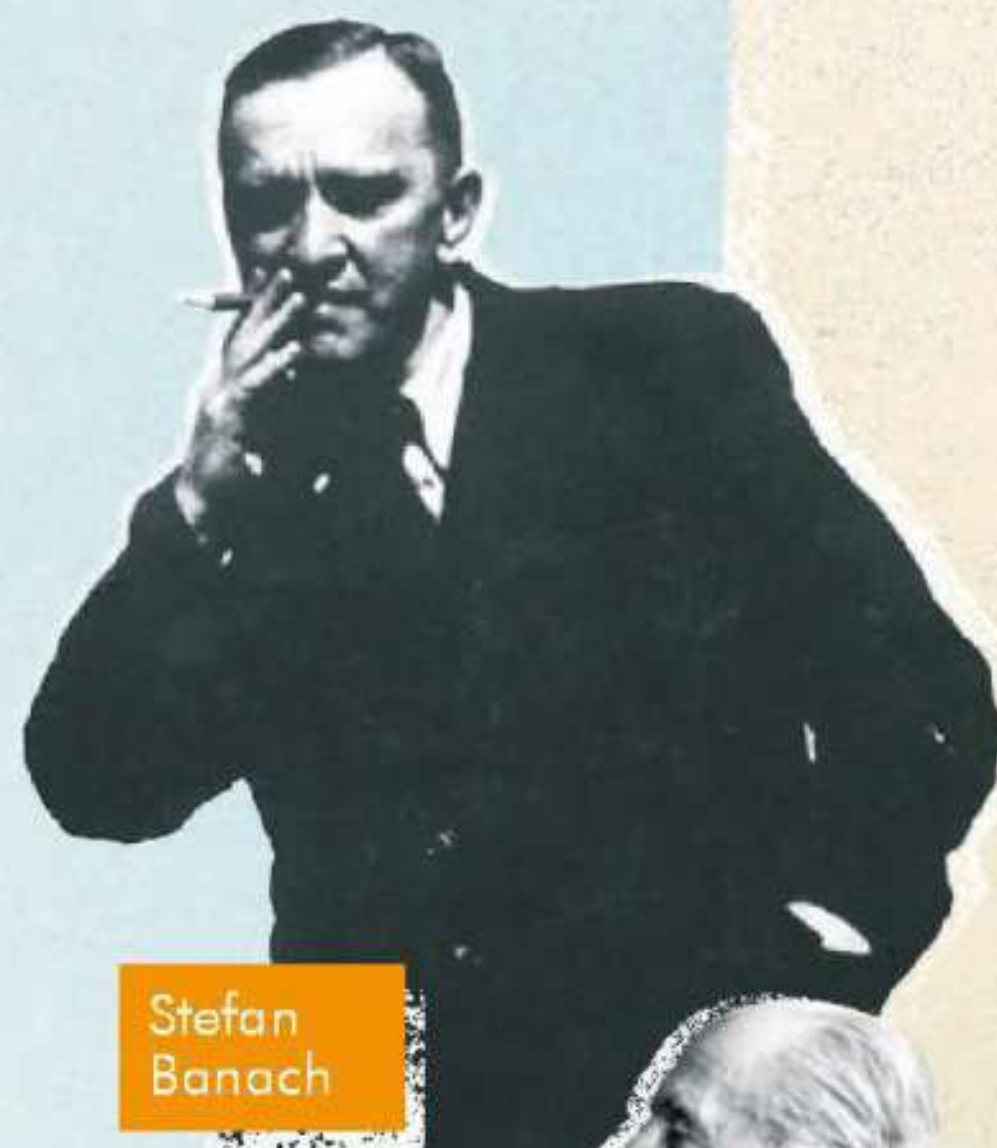
Wacław
Sierpiński



Zygmunt
Janiszewski

Kierunek ich działania nakreślił w 1917 r. Zygmunt Janiszewski w artykule „O potrzebach matematyki w Polsce”. Zgodnie z jego wytycznymi naukowcy zajmowali się głównie nowo odkrytymi obszarami matematyki. Jako pierwsi na świecie założyli czasopismo matematyczne o wąskiej specjalizacji. „**Fundamenta Mathematicae**”, wydawane od 1920 r. w Warszawie, poświęcone było głównie **teorii mnogości**. Lwowskie czasopismo „**Studia Mathematica**”, wydawane od 1929 r., uznano za najważniejsze miejsce prezentowania dokonań z zakresu nowoczesnej **analizy funkcjonalnej**.

Środowisko lwowskich matematyków słynęło z jeszcze innej rzeczy – niepowtarzalnej atmosfery i aury niezwykłości. Matematyczne dyskusje odbywano często nie w salach wykładowych, ale we lwowskich kawiarniach, przy poczęstunku, kawie i trunkach.



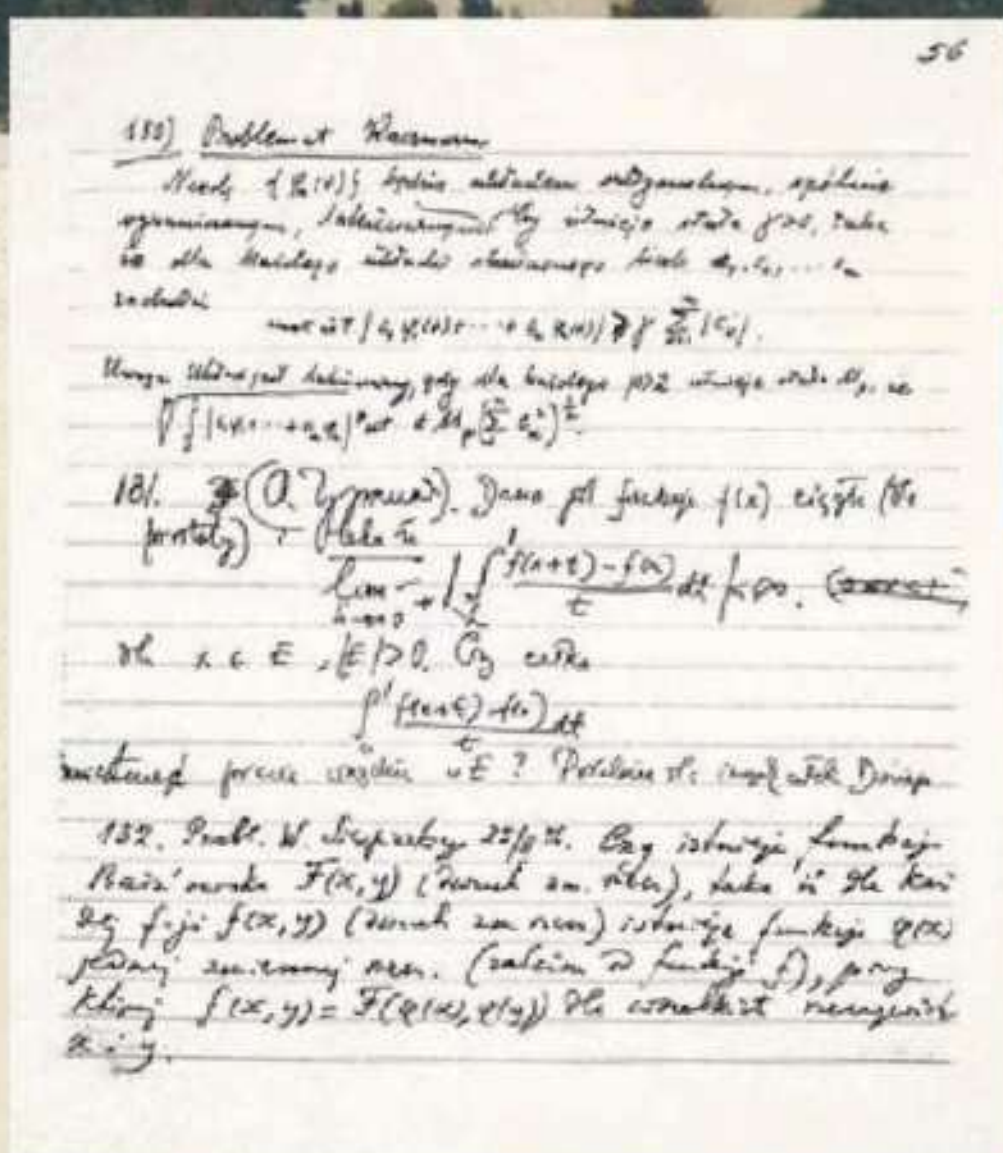
Stefan
Banach



Hugo
Steinhaus

Księga szkocka

Do historii przeszła szczególnie Café Szkocka. Początkowo matematycy zapisywali swoje rozważania ołówkiem na marmurowych blatach stolików i serwetkach. Po wyczyszczeniu blatu przez obsługę kawiarni wszystkie zapiski ginęły bezpowrotnie. Żona Stefana Banacha kupiła więc zeszyt i do tego zeszytu, nazwanego *Księgą szkocką*, przeniosła się dyskusja. Wpisywano tam matematyczne problemy, które pojawiały się w trakcie kawiarnianych spotkań. Za ich rozwiązanie często przewidywana była nagroda.



Café Szkocka

strona z Księgi szkockiej

Przykładowe nagrody



2 małe piwa



mała kawa



10 dag kawioru



obiad u George'a



żywa gęś

Problemy i twierdzenia

Przy każdym wpisie w *Księdze szkockiej* widnieje nazwisko jego autora. Na przykład tytuł poniższego fragmentu pochodzi od nazwisk dwóch matematyków: Hermana Auerbacha i Stanisława Mazura.

Twierdzenie Auerbach - Mazur

Jeżeli z rogu bilardu o współmiernych bokach wychodzi kula pod kątem 45° , to po skończonej liczbie odbić dojdzie do jednego z trzech pozostałych rogów.

Dla wyjaśnienia dodajmy, że dwa odcinki nazywamy współmiernymi, jeżeli istnieje trzeci odcinek mieszczący się całkowitą liczbę razy w każdym z tych dwóch odcinków.



Stanisław Mazur

Per Enflo

Problemami zapisanymi w *Księdze szkockiej* matematycy zajmują się nawet dziś. Żywą gęś z rąk Stanisława Mazura odebrał w 1972 r. Szwed Per Enflo za rozwiązanie problemu sformułowanego przez Mazura w 1936 r.



2. Dowody w algebrze

Umiejętności:

- dowodzenie twierdzeń z zakresu algebry

Aby rozwiązać zadanie na dowodzenie dotyczące podzielności liczb, nierówności lub innych zależności między liczbami czy wyrażeniami algebraicznymi, warto:

- I. zapisać precyzyjnie założenie i tezę, ← zobacz podane przykłady
- II. zastosować poznane definicje i twierdzenia, ← zobacz podane przykłady
- III. sprawdzić prawdziwość tezy w rozłącznych przypadkach, wyczerpujących wszystkie możliwości, ← zobacz przykłady 4, 6
- IV. przekształcić tezę równoważnie, ← zobacz przykład 9
- V. zastosować dowód nie wprost. ← zobacz przykłady 8, 10

Fakty, z których najczęściej będziemy korzystać w dowodach algebraicznych, to:

- cechy podzielności liczb,
- własności działań w zbiorze liczb rzeczywistych (w tym: potęgowania, pierwiastkowania, logarytmowania); wzory skróconego mnożenia,
- własności liczb (naturalnych, całkowitych, wymiernych, niewymiernych),
- własności ciągu arytmetycznego, geometrycznego,
-  twierdzenie Bézouta, twierdzenie o całkowitych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Podzielność w zbiorze liczb całkowitych

Przykład 1

Wykażemy, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $7 \cdot 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ jest podzielna przez 19.

Założenie

$n \in \mathbb{Z}$

Teza

Liczba $7 \cdot 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ jest podzielna przez 19.

Dowód

$$7 \cdot 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 7 \cdot 3^n + 3^n \cdot 3 + 3^n \cdot 3^2 = 3^n (7 + 3 + 3^2) = 3^n \cdot 19$$

3^n jest liczbą całkowitą, bo $n \in \mathbb{Z}$, zatem podana liczba jest podzielna przez 19.

Koniec dowodu

Liczba $n \in \mathbb{Z}$ jest **podzielna** przez liczbę $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $k \in \mathbb{Z}$ taka, że $n = m \cdot k$.

Przykład 2

Udowodnimy, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

Założenie

$$n \in \mathbb{Z}$$

Teza

Liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

Dowód

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$$

Liczba $n(n-1)(n+1)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych. Zatem:

- co najmniej jedna z nich jest parzysta,
- dokładnie jedna z nich jest podzielna przez 3.

Iloczyn liczb podzielnych przez 2 i przez 3 jest liczbą podzielną przez 6.

Koniec dowodu**Przykład 3**

Udowodnimy, że różnica czwartych potęg dwóch kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest podzielna przez 16.

Założenie

$$k \in \mathbb{Z}$$

Teza

Istnieje takie $p \in \mathbb{Z}$, że:

$$(2k-1)^4 - (2k+1)^4 = 16p$$

Dowód

$$\begin{aligned} (2k-1)^4 - (2k+1)^4 &= \\ &= \left[(2k-1)^2 \right]^2 - \left[(2k+1)^2 \right]^2 = && \leftarrow \text{stosujemy wzór na różnicę kwadratów} \\ &= \left[(2k-1)^2 - (2k+1)^2 \right] \cdot \left[(2k-1)^2 + (2k+1)^2 \right] = \\ &= \left[(4k^2 - 4k + 1) - (4k^2 + 4k + 1) \right] \cdot \left[(4k^2 - 4k + 1) + (4k^2 + 4k + 1) \right] = \\ &= -8k(8k^2 + 2) = 16k(-4k^2 - 1) \end{aligned}$$

$k(-4k^2 - 1)$ jest liczbą całkowitą, bo $k \in \mathbb{Z}$. Zatem szukane p istnieje i $p = k(-4k^2 - 1)$.

Koniec dowodu

Dwie kolejne liczby nieparzyste dla $n \in \mathbb{Z}$ możemy zapisać na wiele sposobów: $2n+1$, $2n+3$ lub $2n+3$, $2n+5$ itd. Na ogół z powodów rachunkowych najwygodniejsza postać to $2n-1$ i $2n+1$.

**Przykład 4**

Udowodnimy, że różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych nieparzystych jest podzielna przez 8.

Założenie

a i b są liczbami całkowitymi nieparzystymi.

Teza

Różnica kwadratów $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 8.

Dowód

Niech $a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ i $b = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (2k + 1)^2 - (2m + 1)^2 = && \leftarrow \text{wzór na różnicę kwadratów} \\ &= (2k + 1 - 2m - 1)(2k + 1 + 2m + 1) = \\ &= (2k - 2m)(2k + 2m + 2) = 2(k - m) \cdot 2(k + m + 1) = 4(k - m)(k + m + 1) \end{aligned}$$

Aby wykazać podzielność otrzymanego iloczynu przez 8, wystarczy udowodnić, że jeden z czynników $(k - m)$, $(k + m + 1)$ jest liczbą parzystą.

Zauważmy, że:

- jeśli obie liczby k i m są parzyste lub obie są nieparzyste, to liczba $k - m$ jest parzysta,
- jeśli jedna spośród liczb k i m jest parzysta, a druga nieparzysta, to liczba $k + m + 1$ jest parzysta.

Zatem liczba $4(k - m)(k + m + 1)$ jest podzielna przez 8.

Koniec dowodu **Różnica potęg**

Znamy wzory skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i różnicę sześcianów:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

Uogólnieniem tych zależności jest wzór na **różnicę n -tych potęg**, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Dla każdej dodatniej liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$



Na przykład dla $n = 5$ powyższy wzór ma postać:

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

Jeśli zastosujemy wzór na różnicę n -tych potęg dla liczb całkowitych a , b , to otrzymamy następujący wniosek.

Wniosek

Dla dowolnych różnych liczb całkowitych a i b liczba $a^n - b^n$ jest podzielna przez $a - b$.

Przykład 5

Udowodnimy, że liczba $49^{12} - 256^6$ jest podzielna przez 3.

Dowód

$$49^{12} - 256^6 = (7^2)^{12} - (4^4)^6 = 7^{24} - 4^{24}$$

Liczba $7^{24} - 4^{24}$ jest podzielna przez $7 - 4 = 3$.

Koniec dowodu

Dzielenie z resztą

W szkole podstawowej było omawiane dzielenie z resztą. Przypomnijmy, że na przykład równość:

$$17 = 5 \cdot 3 + 2$$

można odczytać w następujący sposób:

reszta z dzielenia liczby 17 przez 3 jest równa 2

lub

reszta z dzielenia liczby 17 przez 5 jest równa 2.

Reszta z dzielenia nie może być większa od dzielnika, zatem równość:

$$19 = 5 \cdot 3 + 4$$

oznacza, że reszta z dzielenia liczby 19 przez 5 jest równa 4,

ale

nie oznacza, że reszta z dzielenia liczby 19 przez 3 jest równa 4.

Dzielenie z resztą możemy wykonywać również w zbiorze liczb całkowitych. Przyjęto zasadę, że reszta jest w takim przypadku liczbą nieujemną mniejszą od wartości bezwzględnej dzielnika.

Jeżeli na przykład chcemy wyznaczyć resztę z dzielenia liczby -17 przez 3 , to korzystamy z równości:

$$-17 = (-6) \cdot 3 + 1$$

Zatem **reszta z dzielenia liczby -17 przez 3 jest równa 1 .**

Uogólnieniem tych rozważań jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb całkowitych a i b , $b \neq 0$ (a – dzielna, b – dzielnik), istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych q i r (q – iloraz, r – reszta) takich, że:

$$a = q \cdot b + r, \text{ gdzie } r \geq 0 \text{ i } r < |b|$$

Z powyższego twierdzenia będziemy korzystać, zapisując liczby całkowite w odpowiednich postaciach. Na przykład każdą liczbę całkowitą n , która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3 , można zapisać w postaci $n = 5k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 6

Udowodnimy, że kwadrat liczby całkowitej niepodzielnej przez 3 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3 .

Założenie

n jest liczbą całkowitą niepodzielną przez 3 .

Teza

n^2 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1 .

Dowód

Skoro liczba całkowita n nie jest podzielna przez 3 , to są dwie możliwości:

- $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$

Wtedy $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$.

- $n = 3m + 2$, $m \in \mathbb{Z}$

Wtedy $n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$.

W obydwu przypadkach liczbę n^2 można przedstawić w postaci $3p + 1$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$, co oznacza, że reszta z dzielenia liczby n^2 przez 3 jest równa 1 .

Koniec dowodu

Liczby wymierne i niewymierne

Przykład 7

Wykażemy bez użycia kalkulatora, że $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ jest liczbą wymierną.

Dowód

Zapiszemy różnicę pod pierwiastkiem w postaci kwadratu i skorzystamy z zależności $\sqrt{a^2} = |a|$.

$$\begin{aligned}\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} &= \sqrt{4 - 4\sqrt{5} + 5} = \\ &= \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2 \quad \leftarrow 2 - \sqrt{5} < 0\end{aligned}$$

Zatem dana liczba:

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -2$$

jest całkowita, czyli jest wymierna.

Koniec dowodu

Przykład 8

Udowodnimy, że liczba $\log_3 7$ jest niewymierna.

Dowód nie wprost

Przypuśćmy, że teza jest fałszywa, czyli że liczba $\log_3 7$ jest wymierna.

Zauważmy, że $\log_3 7 > \log_3 3 = 1$, zatem liczba $\log_3 7$ jest dodatnia. Istnieją zatem takie liczby naturalne dodatnie n i k , że $\log_3 7 = \frac{n}{k}$.

$$\begin{aligned}3^{\frac{n}{k}} &= 7 && \leftarrow \text{z definicji logarytmu} \\ 3^n &= 7^k && \leftarrow \text{z własności działań na potęgach}\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równość dwóch liczb naturalnych: 3^n oraz 7^k .

Lewa strona tej równości jest podzielna przez 3, zatem prawa również. Ale gdyby liczba 7^k była podzielna przez 3, to również liczba 7 byłaby podzielna przez 3.

Otrzymaliśmy sprzeczność, co dowodzi, że liczba $\log_3 7$ jest niewymierna.

Koniec dowodu

Metoda **dowodzenia nie wprost** (lub **sprowadzania do niedorzeczności**) polega na sprawdzeniu, co by było, gdyby podana teza była fałszywa. Jeśli w toku rozumowania okaże się, że oznaczałoby to fałszywość założeń, to wnioskujemy, że teza jest prawdziwa.



Nierówności

Przykład 9

Wykażemy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 5 > 0$.

Założenia

$$x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$$

Teza

$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 5 > 0$$

Dowód

Przekształcamy równoważnie lewą stronę nierówności:

$$\begin{aligned} L &= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 + 4y + 4 + 1 = \\ &= (x - y)^2 + (y + 2)^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

Pierwsze dwa składniki otrzymanej sumy są nieujemne, zatem lewa strona nierówności jest dodatnia.

Koniec dowodu

Przykład 10

Wykażemy, że dla liczb rzeczywistych x, y takich, że $xy > 9$, prawdziwa jest nierówność $x^2 + y^2 \geq 18$.

Założenia

$$x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, xy > 9$$

Teza

$$x^2 + y^2 \geq 18$$

Dowód (I sposób)

Zauważmy, że:

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$$

Z założenia $xy > 9$, zatem $2xy > 18$. Ponadto $(x - y)^2 \geq 0$.

Mamy więc $x^2 + y^2 \geq 18$.

Koniec dowodu

Dowód (II sposób, nie wprost)

Przypuśćmy, że dla liczb $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ prawdziwy jest układ nierówności:

$$xy > 9 \text{ i } x^2 + y^2 < 18$$

Wykażemy, że jest to niemożliwe.

Skoro $xy > 9$, to $-2xy < -18$.



✂ Zatem $\begin{cases} x^2 + y^2 < 18 \\ -2xy < -18 \end{cases}$. Po dodaniu stronami tych nierówności otrzymujemy:

$$x^2 - 2xy + y^2 < 0$$

$$(x - y)^2 < 0$$

Ostatnia nierówność jest fałszywa – otrzymaliśmy sprzeczność, co dowodzi, że podane w zadaniu twierdzenie jest prawdziwe.

Koniec dowodu

D

Zadania

- 2.1.** Wykaż, że liczba $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.
- 2.2.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $3 \cdot 2^{4n} + 4^{2n+1} + 4^{2n+2}$ jest podzielna przez 23.
- 2.3.** Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych zwiększona o 1 jest liczbą podzielną przez 3.
- ✱ **2.4.** Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.
- 2.5.** Udowodnij, że iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 24.
- 2.6.** Udowodnij, że jeżeli przy dzieleniu przez 7 jedna liczba daje resztę 5, a druga resztę 4, to iloczyn tych liczb przy dzieleniu przez 7 daje resztę 6.
- 2.7.** Udowodnij, że jeśli liczba całkowita przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4.
- ✱ **2.8.** Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2, liczba całkowita b przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3. Udowodnij, że różnica czwartych potęg liczb a i b jest podzielna przez 5.
- 2.9.** Udowodnij, że suma kwadratów dwóch liczb całkowitych niepodzielnych przez 3 jest liczbą niepodzielną przez 3.
- 2.10.** Wykaż, że liczba $1918^{10} - 1795^{10}$ jest podzielna przez 123.
- 2.11.** Wykaż, że liczba $25^{21} - 64^7$ jest podzielna przez 3.
- 2.12.** Udowodnij, że jeżeli $x - y = 3$ i $x^2 + y^2 = 13$, to $xy = 2$.
- 2.13.** Udowodnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

- 2.14.** Udowodnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a + b = 2c$, to $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$.
- 2.15.** Liczby dodatnie a i b spełniają warunek $4a^2 + 2a = 9b^2 + 3b$. Udowodnij, że $2a = 3b$.
- 2.16.** Udowodnij bez użycia kalkulatora, że $\sqrt{16 + 6\sqrt{7}} + \sqrt{32 - 10\sqrt{7}}$ jest liczbą całkowitą.
- 2.17.** Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{2}$ jest niewymierna.
- 2.18.** Wykaż, że liczba $\log 17$ jest niewymierna.
- ✱ **2.19.** Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50} + 1} + \sqrt{2^{50} - 1} < 2^{26}$.
- 2.20.** Wykaż, że jeżeli $a + b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.
- 2.21.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x , y , z prawdziwa jest nierówność $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$.
- 2.22.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x , y prawdziwa jest nierówność $4x^2 + 2y^2 - 4xy + 2y + 1 \geq 0$.
- 2.23.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x , y prawdziwa jest nierówność $4x^2 + 9y^2 - 12x - 12y + 14 > 0$.
- 2.24.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x , y prawdziwa jest nierówność $9x^2 + y^2 + 30x + 14y + 74 \geq 0$.
- 2.25.** Wykaż, że dla liczb rzeczywistych x , y takich, że $xy < -12$, prawdziwa jest nierówność $x^2 + y^2 \geq 24$.
- ✱ **2.26.** Wykaż, że dla dodatnich liczb rzeczywistych x , y takich, że $xy > 3$, prawdziwa jest nierówność $x^4 + y^4 \geq 18$.
- ✱ **2.27.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x , y prawdziwa jest nierówność $\frac{|x| + |y|}{2} \geq \sqrt{|xy|}$.
- 2.28.** Wykaż, że jeżeli $A = 3^{4\sqrt{2}+2}$ i $B = 3^{2\sqrt{2}+3}$, to $B = 9\sqrt{A}$.
- 2.29.** Dane są takie dodatnie liczby a i b , że $\log_2(8a) = 10$ i $\log_4 \frac{16}{b} = 3$. Wykaż, że $\log_2(ab) = 5$.
- 2.30.** Iloraz ciągu geometrycznego wynosi $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Wykaż, że w tym ciągu każdy wyraz a_n , $n \geq 2$, jest równy różnicy dwóch sąsiadujących z nim wyrazów.

Powtórzenie

3



1. Liczby, wyrażenia algebraiczne

Definicje

- Liczbę naturalną k , która ma tylko dwa różne dzielniki: samą siebie oraz 1, nazywamy **liczbą pierwszą**.
Dwie liczby naturalne nazywamy **względnie pierwszymi**, jeżeli ich jedynym wspólnym dzielnikiem jest 1.
- Zbiór liczb wymiernych: $Q = \left\{ x: x = \frac{p}{q} \text{ i } p \in \mathbf{Z} \text{ i } q \in \mathbf{Z} - \{0\} \right\}$
- Liczbę rzeczywistą, która nie jest wymierna, nazywamy liczbą niewymierną.
- Przedziały liczbowe ograniczone ($a < b$):
 - domknięty $\langle a; b \rangle = \{x: a \leq x \leq b \text{ i } a, b \in \mathbf{R}\}$
 - otwarty $(a; b) = \{x: a < x < b \text{ i } a, b \in \mathbf{R}\}$
 - lewostronnie domknięty $\langle a; b) = \{x: a \leq x < b \text{ i } a, b \in \mathbf{R}\}$
 - prawostronnie domknięty $(a; b] = \{x: a < x \leq b \text{ i } a, b \in \mathbf{R}\}$
- Przedziały liczbowe nieograniczone:
 - otwarty $(-\infty; b) = \{x: x < b \text{ i } b \in \mathbf{R}\}$
 - otwarty $(a; \infty) = \{x: x > a \text{ i } a \in \mathbf{R}\}$
 - lewostronnie domknięty $\langle a; \infty) = \{x: x \geq a \text{ i } a \in \mathbf{R}\}$
 - prawostronnie domknięty $(-\infty; b] = \{x: x \leq b \text{ i } b \in \mathbf{R}\}$
- $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dla $a \neq 0$ i $n \in \mathbf{N}$
- Jeżeli n jest dodatnią liczbą parzystą oraz $a \geq 0$ i $b \geq 0$, to $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.
Jeżeli n jest liczbą nieparzystą większą od 1, to $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.
- Jeżeli $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, to $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.
- Jeżeli $a > 0$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, to $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$.
- Wartością bezwzględną** $|a|$ liczby a nazywamy odległość odpowiadającego jej punktu na osi liczbowej od punktu o współrzędnej 0, mierzoną w odcinkach jednostkowych.
- $|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$

- **1 procent** pewnej **wielkości** to 0,01 tej wielkości: $1\% \cdot w = \frac{1}{100} \cdot w$.
- **Średnią arytmetyczną** dwóch liczb rzeczywistych a i b nazywamy liczbę $\frac{a+b}{2}$.
- **Średnią geometryczną** dwóch nieujemnych liczb rzeczywistych a i b nazywamy liczbę $\sqrt{a \cdot b}$.

Twierdzenia

- Dla dowolnych liczb całkowitych a i b , $b \neq 0$ (a – dzielna, b – dzielnik), istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych q i r (q – iloraz, r – reszta) takich, że $a = q \cdot b + r$, gdzie $r \geq 0$ i $r < |b|$.

- **Własności działań na potęgach**

Jeżeli a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, a p i r dowolnymi liczbami wymiernymi, to:

$$a^p \cdot a^r = a^{p+r}$$

$$\frac{a^p}{a^r} = a^{p-r}$$

$$(a^p)^r = a^{p \cdot r}$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

- **Własności działań na pierwiastkach**

Jeżeli n jest liczbą naturalną większą od 1 i k jest liczbą naturalną, to:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ gdy } b \neq 0$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

Dla n będącego liczbą parzystą zakładamy, że liczby a i b są nieujemne.

- **Własności wartości bezwzględnej** (dla $a \in \mathbf{R}$ i $b \in \mathbf{R}$):

$$|a| = |-a|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ dla } b \neq 0$$

$$|a - b| = |b - a|$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a| \text{ dla dodatnich liczb naturalnych } n$$



- Odległość między punktami odpowiadającymi na osi liczbom a i b wyraża się wzorem $|a - b|$.

- **Wzory skróconego mnożenia**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

kwadrat sumy

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

kwadrat różnicy



$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

sześcián sumy

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

sześcián różnicy

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

różnica kwadratów



$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

różnica sześciánów

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

różnica n -tych potęg

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe.
- Zasady stosowane podczas przybliżania liczb rzeczywistych:
 - jeżeli pierwsza z odrzuconych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest mniejsza od 5, to ostatnią zachowaną cyfrę pozostawiamy bez zmian (**przybliżenie z niedomiarem**),
 - jeżeli pierwsza z odrzuconych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest większa od 5 lub równa 5, to ostatnią zachowaną cyfrę zwiększamy o 1 (**przybliżenie z nadmiarem**).
- **Zaokrąglenie liczby naturalnej do n miejsc znaczących** polega na pozostawieniu jej pierwszych n cyfr i zastąpieniu pozostałych zerami, z tym że do ostatniej cyfry stosujemy reguły przybliżania. Podobnie zaokrąglamy liczby dziesiętne. Na przykład zaokrągleniem liczby 675,3527:
 - do dwóch cyfr znaczących jest liczba 680,
 - do trzech cyfr znaczących jest liczba 675.
 Przy zaokrąglaniu do cyfr po przecinku mówimy o przybliżeniach z dokładnością – do jednego miejsca po przecinku: 675,4, do dwóch miejsc po przecinku: 675,35 itd.

Liczby dziesiętne mniejsze od 1 zaokrąglamy podobnie, np. zaokrągleniem liczby 0,0004526 do jednego miejsca znaczącego jest liczba 0,0005, do dwóch miejsc znaczących – liczba 0,00045.

Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.21 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Ile razy liczba $0,514^2$ jest mniejsza od liczby 514^2 ?

- A. 100 000 razy B. 1 000 000 razy C. 1000 razy D. 10 000 razy

1.2. Różnica między dwiema liczbami jest równa 5, a różnica między ich kwadratami to 95. Ile wynosi suma tych liczb?

- A. 90 B. 25 C. 19 D. 24

1.3. Wskaż iloczyn równy wyrażeniu $3x^2 + 24xy + 48y^2$.

- A. $(3x + 4y)^2$ C. $(\sqrt{3}x + 4y)^2$
B. $(3x + 4\sqrt{3}y)^2$ D. $3(x + 4y)^2$

1.4. Wskaż wyrażenie, które otrzymamy po wykonaniu działań i redukcji wyrazów podobnych w wyrażeniu $2(x - 3) - [3(2x - 1) - 4]$.

- A. $-1 - 3x$ B. $4 - 4x$ C. $-3 - 4x$ D. $1 - 4x$

1.5. Zosia jest o p lat starsza od Jasia. Ile lat ma Jaś, jeżeli razem mają m lat?

- A. $2(m - p)$ B. $\frac{m + p}{2}$ C. $\frac{p - m}{2}$ D. $\frac{m - p}{2}$

1.6. W domowej bibliotece Karola 15% stanowią książki przyrodnicze. Ile tomów liczy księgozbiór Karola, jeżeli oprócz książek przyrodniczych ma on jeszcze 748 książek?

- A. 1270 B. 880 C. ponad 4980 D. 930

1.7. Najlżejsza z trzech drewnianych belek waży 63 kg, a najcięższa 84 kg. Która z podanych liczb nie może być średnią masą (w kg) tych trzech belek?

- A. 69 B. 72 C. 75,5 D. 76

1.8. Masę Ziemi równą $5,975 \cdot 10^{27}$ g można wyrazić w kilogramach jako

- A. $597,5 \cdot 10^{25}$. B. $59,75 \cdot 10^{24}$. C. $597,5 \cdot 10^{26}$. D. $5975 \cdot 10^{21}$.

1.9. Która z podanych liczb jest równa liczbie $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{75}}{\sqrt{3}}$?

- A. $2\sqrt{3}$ B. 4 C. $\sqrt{22}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

1.10. Która z podanych liczb jest równa liczbie $5^{\frac{7}{3}}$?

- A. $5 \cdot \sqrt[3]{5}$ B. $25 \cdot \sqrt[3]{5}$ C. $5 \cdot \sqrt[3]{5^2}$ D. $5^7 \cdot 5^{\frac{1}{3}}$

1.11. Która z podanych liczb nie należy do zbioru rozwiązań nierówności $-3x \geq -10$?

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $3\frac{2}{3}$ C. $2\frac{1}{3}$ D. 2

1.12. O liczbach x, y wiadomo, że $xy < 0$ i $x > y$. Który z podanych warunków jest prawdziwy?

- A. $x < 0$ B. $x - y < 0$ C. $xy + y > 0$ D. $y < 0$

1.13. Dwadzieścioro dziewcząt stanowi 62,5% liczby wszystkich uczniów w klasie. Ilu chłopców jest w tej klasie?

- A. 9 B. 12 C. 16 D. 32

1.14. Wskaż zależność fałszywą.

- A. $\sqrt{(-237)^2} = 237$ C. $-13^2 = 169$
B. $2\sqrt[5]{-32} = -4$ D. $-3\sqrt[3]{-27} = 9$

1.15. Wskaż iloczyn równy wyrażeniu $5x^2 + 30xy + 45y^2$.

- A. $(5x + 3y)^2$ B. $5(x + 2y)^2$ C. $(\sqrt{5}x + 3y)^2$ D. $5(x + 3y)^2$

1.16. O ile zwiększy się pole powierzchni prostokątnego boiska, jeżeli dwukrotnie zwiększymy jego wymiary (długość i szerokość)?

- A. o 100% B. o 200% C. o 300% D. o 400%

1.17. Która z wymienionych liczb jest najmniejsza?

- A. $\left[(\sqrt{5})^2\right]^{\frac{1}{3}}$ B. $(\sqrt{5})^{2\frac{1}{3}}$ C. $(5\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}$ D. $\sqrt{5 \cdot 5^{\frac{1}{3}}}$

1.18. Jurki liczą o 25% więcej mieszkańców niż Jaśki. O ile procent mniej mieszkańców mają Jaśki niż Jurki?

- A. o 20% B. o 25% C. o 75% D. o 80%

1.19. Średnia arytmetyczna dwóch liczb, z których jedną jest $\sqrt{7}$, wynosi $\sqrt{5}$. Wskaż drugą liczbę.

- A. $2\sqrt{5} - \sqrt{7}$ B. $2\sqrt{7} - \sqrt{5}$ C. $2\sqrt{35}$ D. $2\sqrt{5} + \sqrt{7}$

1.20. W pewnej fabryce liczba kobiet stanowi 35% liczby wszystkich zatrudnionych. Mężczyzn jest o 252 więcej niż kobiet. Wskaż liczbę pracowników tej fabryki.

- A. 842 B. 752 C. 840 D. 954

1.21. Liczby $a, b, c \in \mathbf{R}$ spełniają warunek $a(b - c) = 0$.

- A. Wynika stąd, że $a = 0$.
- B. Wynika stąd, że $b = 0$.
- C. Wynika stąd, że $b = c$.
- D. Z podanego warunku nie można wywnioskować żadnej z równości wymienionych w punktach A, B, C.

W zadaniach 1.22–1.25 oceń prawdziwość podanych zdań.

1.22. Dane są liczby $a, b \in \mathbf{R}$, gdzie $a < 0$.

- A. $b - a = -(a - b)$
- B. $(-a)^2 = a^2 - 2a^2$
- C. $a > -a$

1.23. Dane są liczby $a, b, c \in \mathbf{R}$ takie, że $0 < a < b < c$. Zachodzi nierówność

- A. $\frac{b}{a} < \frac{b}{c}$.
- B. $\frac{c-a}{b-c} < \frac{b-a}{b-c}$.
- C. $ac > ab$.

1.24. Liczba

- A. $\sqrt{2\sqrt{32}}$ jest wymierna.
- B. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ jest równa liczbie $\sqrt{2} + 1$.
- C. $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ należy do przedziału $(3,7; 3,8)$.

1.25. Suma kilku kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest równa 0.

- A. Liczba wszystkich składników rozpatrywanej sumy jest parzysta.
- B. Średnia arytmetyczna tych liczb jest równa 0.
- C. Iloczyn tych liczb jest równy 0.

1.26. Wskaż **dwa** wyrażenia równe wyrażeniu $2x^2 - 24xy + 72y^2$.

- A. $(2x - 6y)^2$
- B. $(2x - 6\sqrt{2}y)^2$
- C. $2(x - 6y)^2$
- D. $2(x - 4y)^2$
- E. $(\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y)^2$
- F. $\sqrt{2}(x - 6y)^2$

1.27. Rozwinięcie dziesiętne liczby a jest równe $2,13131313\dots$ **Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1 albo 2.**

Liczba a jest

A.	wymierna,	ponieważ	1.	jej rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone.
B.	niewymierna,		2.	jej rozwinięcie dziesiętne jest okresowe.

1.28. Znajdź wszystkie liczby całkowite $a \neq 1$, dla których wartość wyrażenia $\frac{a+2}{a-1}$ jest liczbą całkowitą.

1.29. Podaj przykład liczby należącej do przedziału $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$, która ma rozwinięcie dziesiętne

- a) skończone.
- b) nieskończone okresowe.
- c) nieskończone nieokresowe.

1.30. Wśród pięciu kolejnych liczb całkowitych środkową liczbą jest 2010. Ile jest równa suma tych liczb?

1.31. Dane są liczby:

$$m = 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} \cdot \left[6,4 - 3\frac{3}{5} \cdot 0,(3) \right] : 13$$

$$n = 15,2 + 3,2 \cdot \left(1,25 \cdot 7 - \frac{4}{5} \cdot 1,25 \right) : 6,2 - 1\frac{1}{5}$$

Sprawdź, ile razy jedna z liczb m i n jest większa od drugiej.

1.32. Zapisz wyrażenie w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy.

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|
| a) $a^2 + 24a + 144$ | c) $1 - 4x + 4x^2$ |
| b) $k^2 - 2\sqrt{6}km + 6m^2$ | d) $\frac{1}{4}y^2 + 4yz + 16z^2$ |

1.33. Zapisz wyrażenie w postaci iloczynu.

- | | |
|----------------------|----------------------------|
| a) $a^2 - 225$ | c) $m^2 - 2mp + p^2 - k^2$ |
| b) $0,25b^2 - 25d^4$ | d) $x^2 + 4xy + 3y^2$ |

1.34. Usuń niewymierność z mianownika wyrażenia $\frac{3-5\sqrt{2}}{2-3\sqrt{2}}$.

1.35. Uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

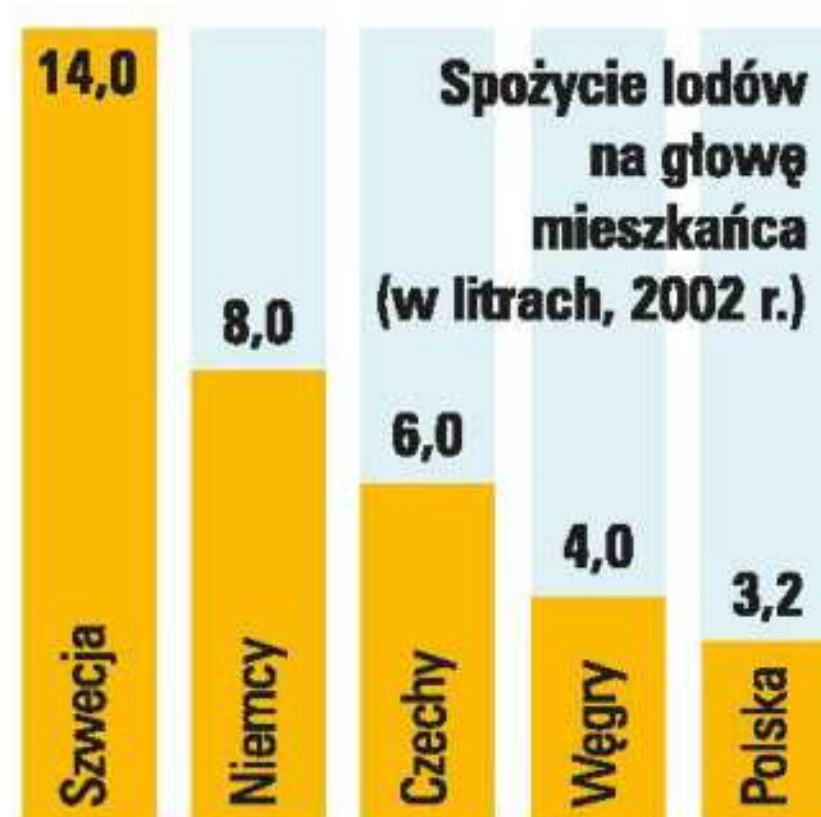
$$3\sqrt{2}, \quad 3\frac{1}{5}, \quad 2\sqrt{5}, \quad 2\sqrt{3}$$

1.36. Tętno zdrowego człowieka wynosi 12 uderzeń serca w ciągu 10 sekund. W jakim czasie naliczymy 150 uderzeń serca?

- 1.37.** Na podstawie diagramu określ
- jaki procent sumy wszystkich podanych kwot odliczeń stanowiły odliczenia na odpłatne studia.
 - o ile procent podatników więcej skorzystało z ulgi na zakup przyrządów i pomocy naukowych niż z ulgi na kształcenie i doskonalenie zawodowe.
 - które dane przedstawione na wykresie są sprzeczne.

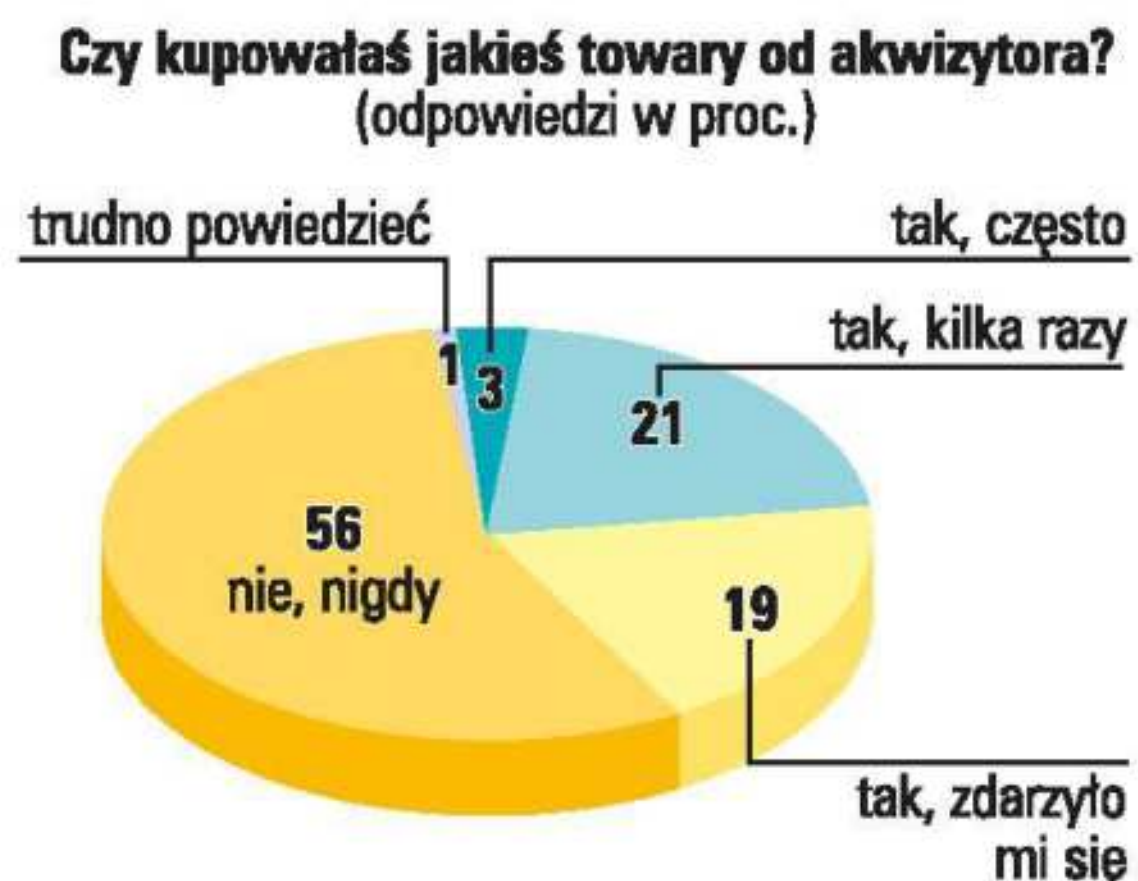


- 1.38.** Na podstawie diagramu odpowiedz na podane pytanie.



- O ile procent więcej lodów spożył rocznie Niemiec od Węgry?
- O ile procent mniej lodów zjadł Węgier od mieszkańca Niemiec?
- Jaki procent rocznego spożycia lodów przez Szweda stanowiło spożycie lodów przez Polaka?

1.39. O ile punktów procentowych liczniejsza jest grupa osób, które nigdy nie robiły zakupów u akwizytorów, od grupy osób, które takiego zakupu dokonały co najmniej dwa razy?



1.40. Drużyna przegrała 4 z 20 rozegranych meczów. Remisów nie było. Jaki procent liczby rozegranych meczów wygrała ta drużyna?

1.41. Pewien towar po podwyżce o 20%, a następnie obniżce o 36 zł, kosztuje 900 zł. Jaka była cena tego towaru przed zmianami?

1.42. W poczcie elektronicznej Magdy spam stanowi 10% wśród 1600 wiadomości. Ile spamu powinna usunąć, aby pozostały stanowił 4% wszystkich wiadomości?

1.43. Pan Stanisław, właściciel 75% akcji firmy, sprzedał $\frac{1}{5}$ swojej własności za 60 000 zł. Jaka jest wartość wszystkich akcji firmy?

 **1.44.** Czas obrotu Marsa wokół własnej osi jest o 2,6% dłuższy od czasu obrotu Ziemi wokół jej osi. Jak długo trwa obrót Marsa?

1.45. Honorata ma o 60% więcej pocztówek niż jej brat Paweł. O ile procent mniej pocztówek ma Paweł?

1.46. Długość każdego z boków prostokąta zwiększono o 70%. O ile procent wzrosło pole prostokąta?

1.47. Długość boku trójkąta zmniejszono o 30%, a wysokość opuszczoną na ten bok zwiększono o 30%. Czy pole trójkąta się zmieniło? Jeśli tak, to o ile procent?

1.48. Praca domowa z matematyki składała się z dwóch zadań obowiązkowych i trzeciego dodatkowego. Nauczycielka, chcąc zachęcić uczniów 32-osobowej klasy do rozwiązywania trudniejszych zadań, poinformowała, że rozwiązanie zadania dodatkowego zwalnia z obowiązku wykonania zadań pierwszego i drugiego. Ilu uczniów rozwiązało trzecie zadanie, jeżeli tylko pierwsze zadanie zrobiło 3 uczniów, tylko drugie – 5, a pierwsze i drugie – 15 uczniów?

1.49. Wyznacz liczbę, której 0,25% wynosi $\frac{8 \cdot 4\frac{1}{4} - \left[11,2 : 9\frac{1}{3} + \left(-2\frac{1}{3} \right) : \frac{5}{3} \right]}{14 : 2\frac{2}{9} + 8\frac{2}{5} \cdot 1\frac{2}{7}}$.

1.50. Oblicz.

a) $\left(\frac{2^{15} - 8^4}{4^7} + 2^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}$

b) $\left(12^{\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}} \right)^{-2}$

1.51. Oblicz.

a) $\frac{\left(\frac{3}{5} \right)^{-3} \cdot 5^{-2}}{2 \cdot \left(\frac{3}{8} \right)^{-1} - 3^4 \cdot \left(4\frac{1}{2} \right)^{-3}}$

b) $\left[\left(11 - 2 \cdot 10^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(11 + (2^3 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$

1.52. Oblicz wartość wyrażenia $a^{-\frac{3}{2}}b \cdot (ab^{-2})^{-\frac{1}{2}} \left[(a^{-1})^{-\frac{2}{3}} \right]^3$ dla $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

1.53. Zakładamy, że $a > 0$ i $b > 0$. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $\left[\frac{\sqrt[3]{a^{-2} \cdot b} \cdot \sqrt{a \cdot b^{-1}}}{\sqrt[4]{a \cdot b^2}} \right]^{-2}$ oraz oblicz jego wartość dla $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $b = \sqrt{2}$.

1.54. Oblicz.

a) $\frac{1}{4} + \left\{ 1 + \left[4 \cdot (1 + 3^{-1})^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1}$

d) $\frac{2\sqrt{5} - 10}{5\sqrt{45} - 4\sqrt{20} - \sqrt{500}}$

b) $\frac{3^{-2} \cdot 81^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^{-1}}{\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[3]{9^{-\frac{3}{2}}} \cdot \sqrt{27}}$

e) $\left| \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7} + 5}{\sqrt{7} + 3} \right)^2} - \sqrt{(\sqrt{7} - 5)^2} \right|$

c) $\frac{5^{-2} \cdot 125^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^2}{5^{-3} \cdot \sqrt[3]{25^{-\frac{3}{2}}}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{-54} - \sqrt[3]{-16} - \sqrt[3]{-\frac{1}{4}}}{\sqrt[3]{1 - 4\frac{3}{8}} - \sqrt[7]{6 - 7}}$

1.55. Która z liczb jest mniejsza: $m = 3\sqrt{2} - 1$ czy $n = 2\sqrt{2} + 1$?

1.56. Zbadaj, czy liczby $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ i $(5 + 2\sqrt{6})^{-\frac{1}{2}}$ są równe czy różne.

2. Funkcje. Funkcja liniowa

Definicje

- Funkcję $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją liniową zmiennej x** . Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** tej funkcji.
- Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy:
 - **oznaczonym**, jeżeli ma dokładnie jedno rozwiązanie; jego wykresem są dwie proste przecinające się,
 - **nieoznaczonym**, jeżeli ma nieskończenie wiele rozwiązań; jego wykresem jest jedna prosta,
 - **sprzecznym**, jeżeli nie ma rozwiązania; jego wykresem są proste równoległe niepokrywające się.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Współczynnik a występujący we wzorze funkcji $f(x) = ax + b$ jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej będącej wykresem tej funkcji do osi x .
- Funkcja $f(x) = ax + b$ jest:
 - rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 0$,
 - malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 0$,
 - stała dla $a = 0$.
- Każda funkcja postaci $f(x) = ax + b$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą, jest monotoniczna.
- Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$, gdzie $x \in \mathbf{R}$:
 - ma jedno miejsce zerowe, gdy $a \neq 0$,
 - ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b = 0$,
 - nie ma miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.
- Wykresem równania postaci $ax + by = c$ z niewiadomymi x, y takiego, że współczynniki a i b nie są jednocześnie równe 0, jest prosta, przy czym:
 - jeżeli $b \neq 0$, to jest to wykres funkcji liniowej o wzorze $f(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$,
 - jeżeli $b = 0$, to jest to prosta prostopadła do osi x i przecinająca ją w punkcie $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$.

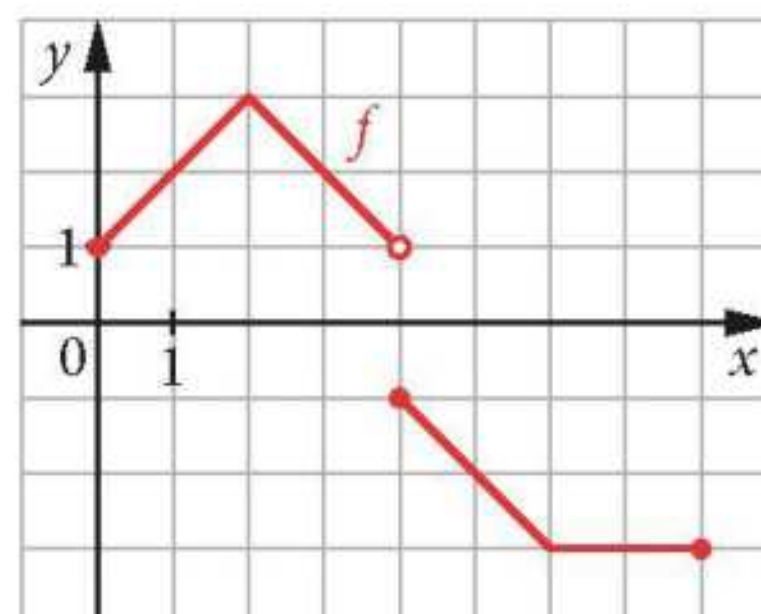
Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.13 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Wskaż liczbę miejsc zerowych funkcji $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(1-x)(2+x)}$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2.2. Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono na rysunku obok. Dziedziną tej funkcji jest przedział $\langle 0; 8 \rangle$. Wskaż przedział, w którym funkcja f jest malejąca.



- A. $\langle 0; 2 \rangle$ C. $\langle 4; 8 \rangle$
B. $\langle 2; 6 \rangle$ D. $\langle 6; 8 \rangle$

2.3. Wskaż wzór funkcji, której wykres przechodzi przez punkt $(-3, 5)$.

- A. $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ C. $f(x) = -\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$
B. $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ D. $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

2.4. Wskaż wzór funkcji rosnącej, której miejsce zerowe jest liczbą dodatnią.

- A. $f(x) = (\sqrt{5} - 2)x + \sqrt{5} - 2$ C. $f(x) = (\sqrt{5} - 2)x + \sqrt{5} - 3$
B. $f(x) = (\sqrt{5} - 3)x + \sqrt{5} - 2$ D. $f(x) = (\sqrt{5} - 3)x + \sqrt{5} - 3$

2.5. Wskaż wartość k , dla której miejscem zerowym funkcji $f(x) = 2x + k - 1$ jest liczba 3.

- A. $k = -5$ B. $k = -1$ C. $k = 1$ D. $k = 5$

2.6. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $\frac{x+3}{2} - \frac{5-2x}{3} < 2x$.

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{5}; \infty\right)$ C. $\left(-\infty; -\frac{1}{13}\right)$ D. $\left(-\frac{1}{13}; \infty\right)$

2.7. Liczby x, y spełniają warunki: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$ oraz $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$. Wskaż wartość y .

- A. $\frac{2}{3}$ B. 2 C. 3 D. $\frac{5}{6}$

2.8. O liczbach x, y wiadomo, że $x > 0$ i $y > 0$ oraz $\frac{x-y}{3} = \frac{11}{2,5}$. Która z podanych zależności jest prawdziwa?

- A. $y < x$ B. $y > x$ C. $y = x$ D. $y \geq x$

2.9. Liczba $x = \frac{1}{m+3}$. Ile jest równe $\frac{3}{x}$?

- A. $\frac{3}{m+3}$ B. $\frac{m+3}{3}$ C. $3(m+3)$ D. $3m+1$

2.10. Wskaż parę liczb (x, y) spełniającą układ równań $\begin{cases} x - 2y = -7 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$.

- A. $(1, 4)$ B. $(-3, 2)$ C. $(-1, 3)$ D. $(-7, 0)$

2.11. Wskaż układ równań, który nie ma rozwiązań.

- A. $\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 14 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$
 B. $\begin{cases} 3x - 3y = 7 \\ x - y = 14 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

2.12. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$ z niewiadomymi x, y jest para liczb $(1, -1)$. Wskaż wartość współczynnika m .

- A. $m = -2$ B. $m = -1$ C. $m = 2$ D. $m = 1$

2.13. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $|2 - x| < 3$.

- A. $(-\infty; -1)$ B. $(-\infty; 1)$ C. $(-5; 1)$ D. $(-1; 5)$

W zadaniach 2.14–2.16 oceń prawdziwość podanych zdań.

2.14. Dane jest równanie $(m - 1)x + m = 0$ z niewiadomą x .

- A. Dla $m = 1$ równanie jest tożsamościowe.
 B. Dla $m = 1$ równanie jest sprzeczne.
 C. Dla $m = \sqrt{2}$ równanie ma jedno rozwiązanie.

2.15. Dane jest równanie $kx - m = 2 + x$ z niewiadomą x .

- A. Dla $k = 0$ i $m = 1$ rozwiązaniem równania jest liczba 1.
 B. Dla $k = 1$ i $m = -2$ równanie jest tożsamościowe.
 C. Dla $k = 1$ i $m = 1$ równanie jest sprzeczne.

2.16. Dany jest układ równań liniowych z niewiadomymi x i y :

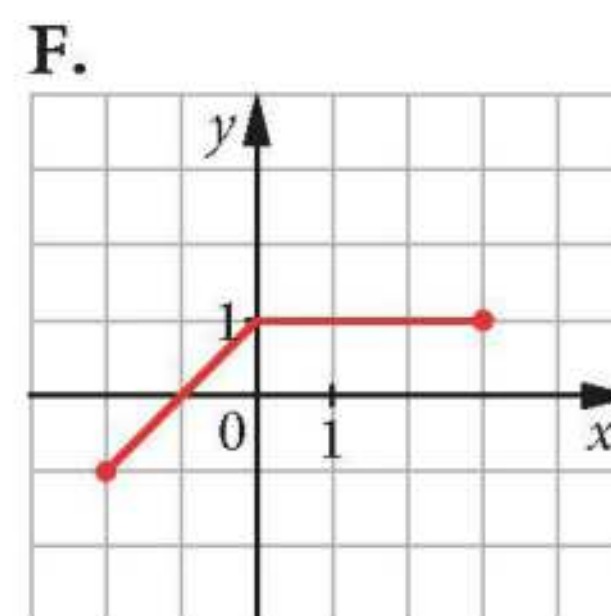
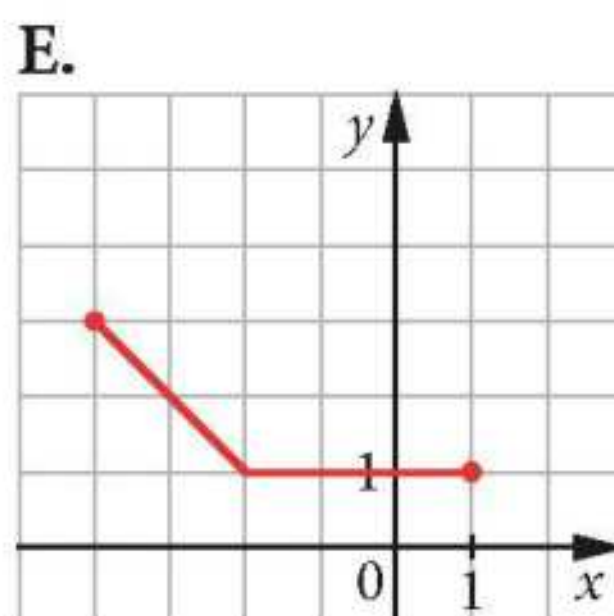
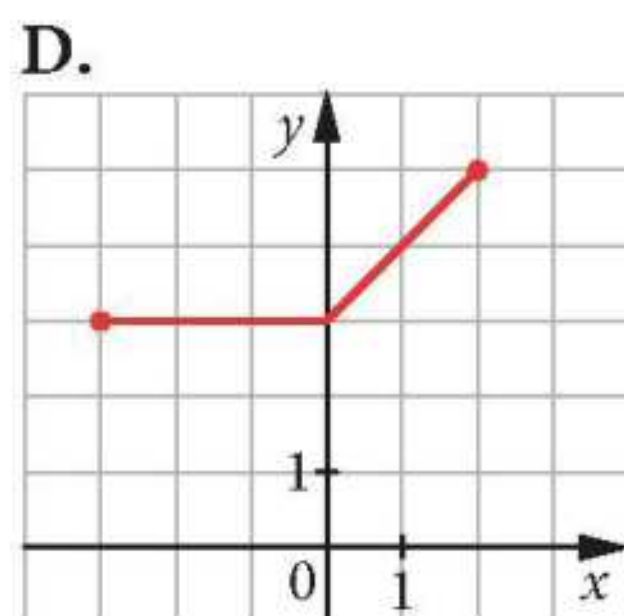
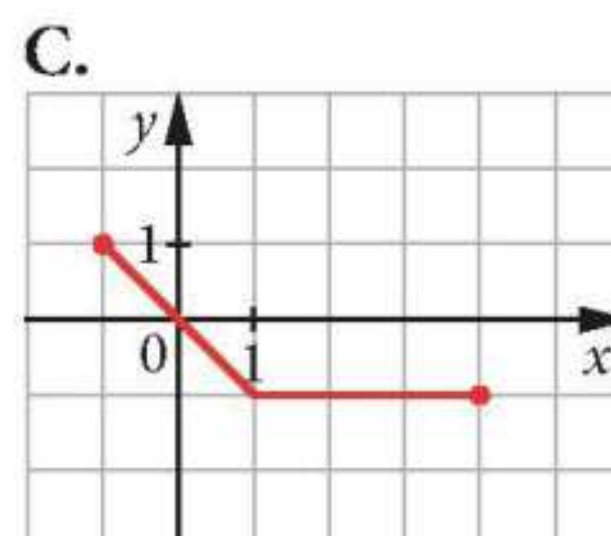
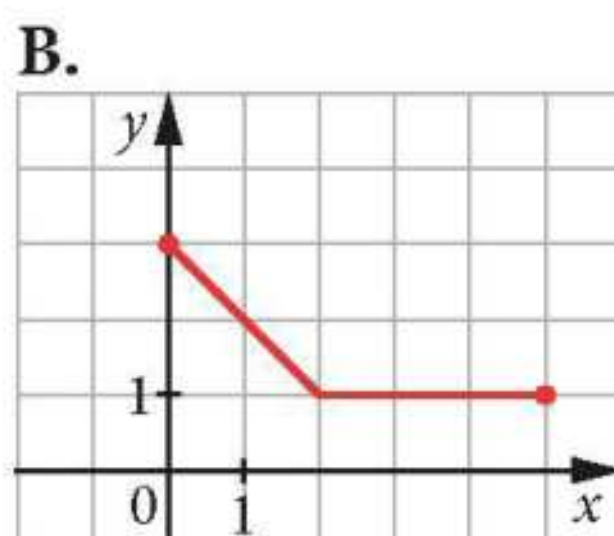
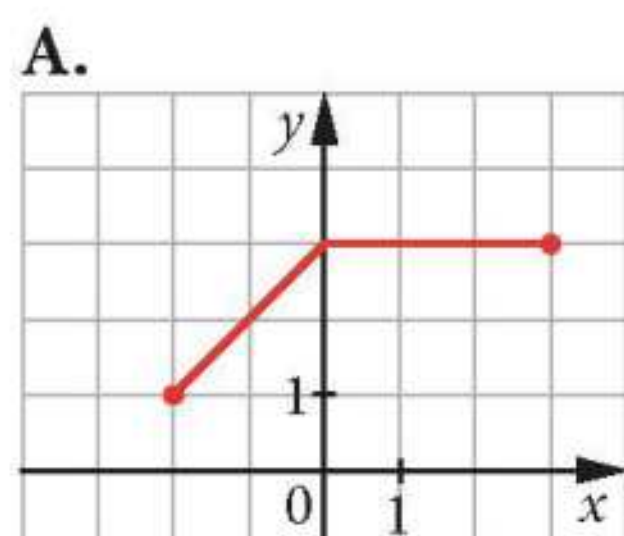
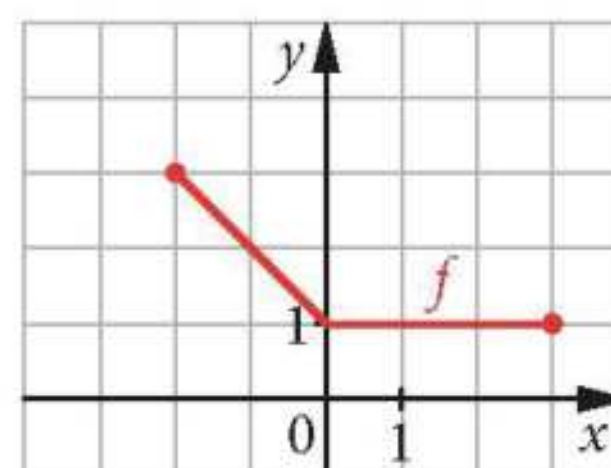
$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ mx + 4y = 2m - 4 \end{cases}$$

- A. Dla $m = -1$ rozwiązaniem tego układu jest para liczb o przeciwnych znakach.
 B. Dla $m = 6$ ten układ jest nieoznaczony.
 C. Dla $m = 1$ rozwiązaniem tego układu jest para liczb $(2, -1)$.

2.17. Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono na rysunku obok. Dziedziną tej funkcji jest przedział $\langle -2; 3 \rangle$. Funkcje g oraz h są określone następująco:

$$g(x) = f(x - 2) \text{ i } h(x) = f(-x) + 2$$

Na rysunkach A–F przedstawiono wykresy różnych funkcji, w tym wykresy funkcji g oraz h . Dla każdej z funkcji g oraz h wskaż rysunek, na którym jest jej wykres.



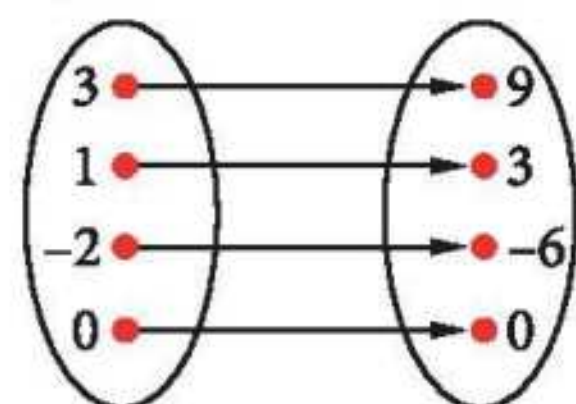
2.18. Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.

Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$ jest zbiór

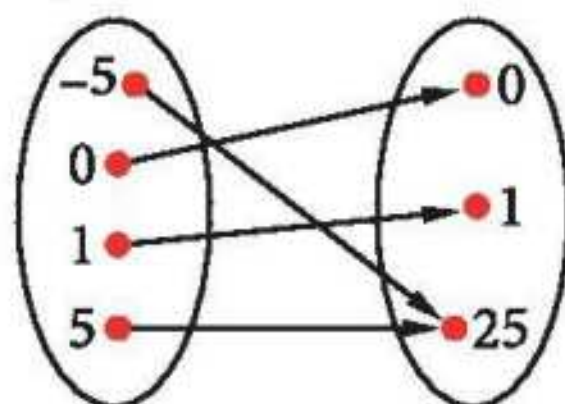
A.	$\mathbb{R} - \{1\}$,	ponieważ	1.	$f(x) = \frac{1}{x}$.
B.	$\mathbb{R} - \{0\}$,		2.	$x^2 - x = 0$ dla $x = 0$ lub $x = 1$.
C.	$\mathbb{R} - \{0, 1\}$,		3.	$x - 1 = 0$ dla $x = 1$.

2.19. Czy podany diagram przedstawia funkcję? Jeśli tak, określ jej dziedzinę i zbiór wartości oraz podaj przykład wzoru opisującego podaną zależność.

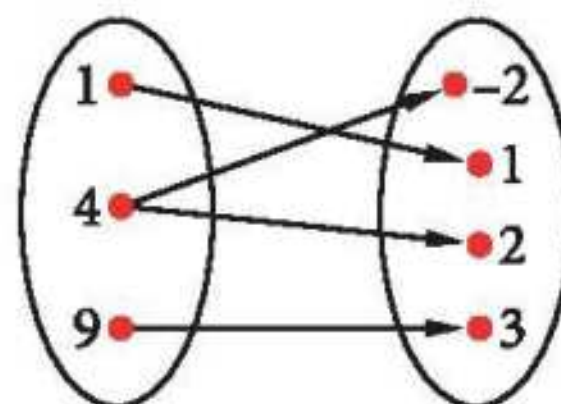
a)



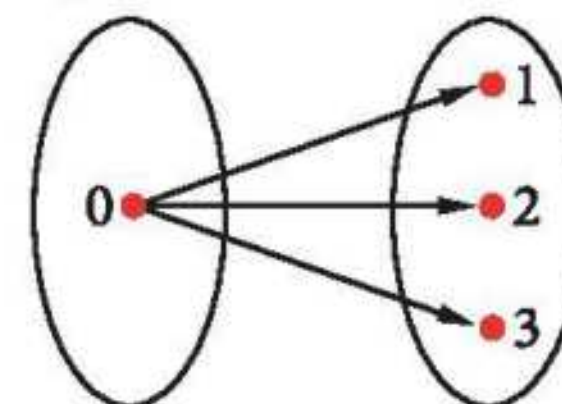
b)



c)



d)



2.20. Sporządź wykres funkcji, która każdej liczbie naturalnej mniejszej od 6 przyporządkowuje wartość dwukrotnie większą od tej liczby i pomniejszoną o 1. Napisz wzór tej funkcji, określ jej dziedzinę i zbiór wartości.

2.21. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4x + 4}$

e) $f(x) = \sqrt{3x - 1} + \frac{2}{x^2 - 6x + 9}$

b) $f(x) = \sqrt{2 + 4x}$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{4x - 8}}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{5 - x}}$

g) $f(x) = \sqrt{x + 3} - \frac{3x - 1}{\sqrt{6 - x}}$

d) $f(x) = \sqrt{x + 3} - 2\sqrt{4 - x}$

h) $f(x) = \frac{x + 7}{\sqrt{x^2 - 10x + 25}} - \frac{2x}{\sqrt{x + 5}}$

2.22. Dany jest zbiór $A = \{-3, -2, 0, \sqrt{2}, 2, 3\}$ i funkcja $f(x) = \frac{3 - x}{x + 2}$. Oblicz wartość funkcji f dla tych liczb ze zbioru A , które należą do jej dziedziny.

2.23. Dany jest wzór funkcji f i jej zbiór wartości ZW . Wyznacz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które mogą tworzyć dziedzinę tej funkcji.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $ZW = \{-2, 0, 1\}$

b) $f(x) = -\frac{2}{x + 3}$, $ZW = \left\{-1, -\frac{2}{3}, 2\right\}$

c) $f(x) = 2^x - 1$, $ZW = \{0, 1, 7\}$

d) $f(x) = x^2$, $ZW = \{0, 1, 2\}$

2.24. Sprzedawca oferował rękawiczki, których ceny w zależności od gatunku materiału były równe: 40 zł, 52 zł, 68 zł, 84 zł i 120 zł. Pewnego dnia zmienił ceny, obniżając każdą o 15%, a następnie dodając 5 zł. Napisz wzór funkcji opisującej zmianę cen rękawiczek. Podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

2.25. Każdej dodatniej liczbie naturalnej można przyporządkować liczbę jej naturalnych dzielników. Narysuj wykres tej funkcji, przyjmując, że jej dziedziną jest zbiór wszystkich dodatnich liczb naturalnych nie większych od 15. Jaką wartość ma funkcja dla argumentów będących liczbami pierwszymi? Podaj największą wartość i najmniejszą wartość tej funkcji w rozpatrywanym zbiorze.

2.26. Dany jest graniastosłup prawidłowy n -kątny. Wysokość tego graniastosłupa wynosi 1, a suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa 60. Podaj wzór i określ dziedzinę funkcji, która liczbie n przyporządkowuje długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

2.27. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f .

a) $f(x) = \frac{4x^2 - 12x + 9}{x - 1}$

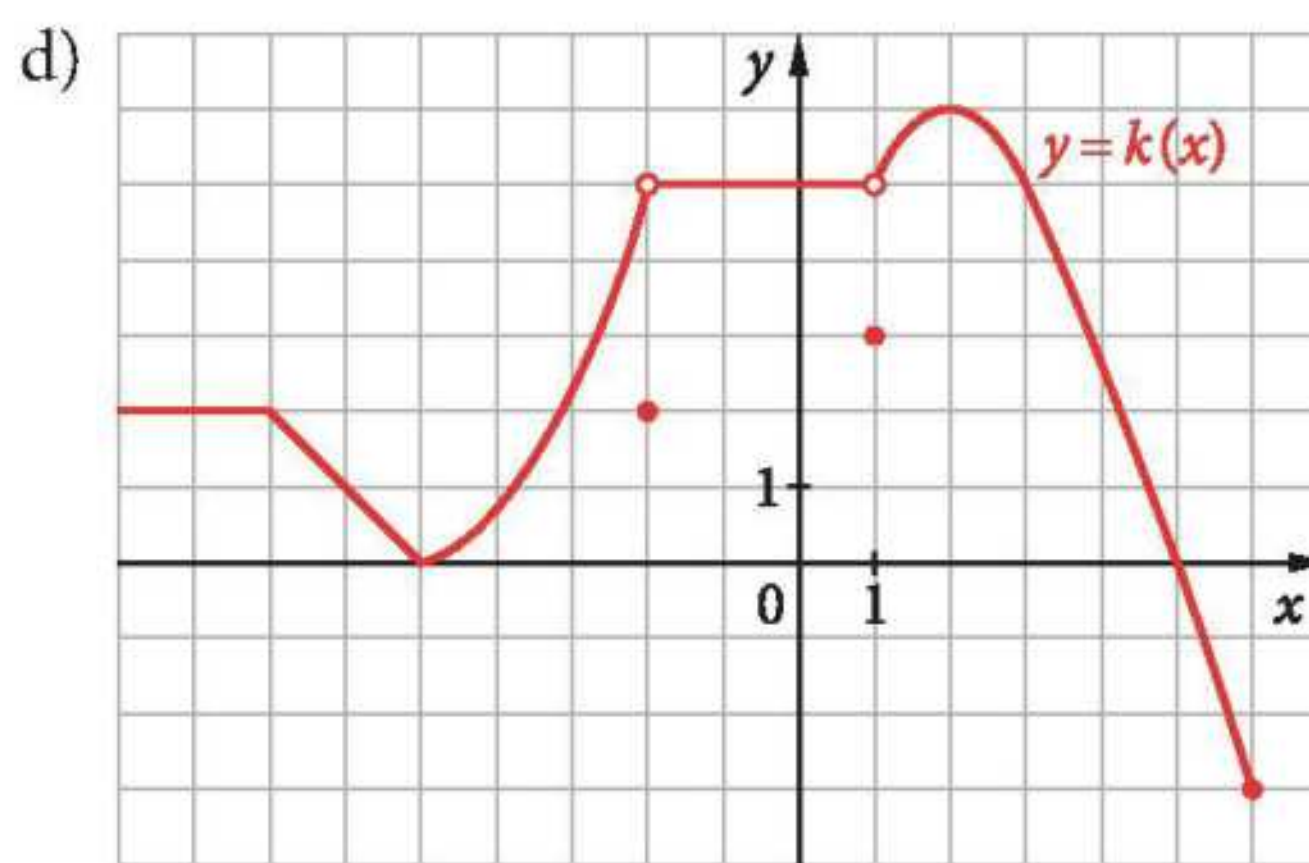
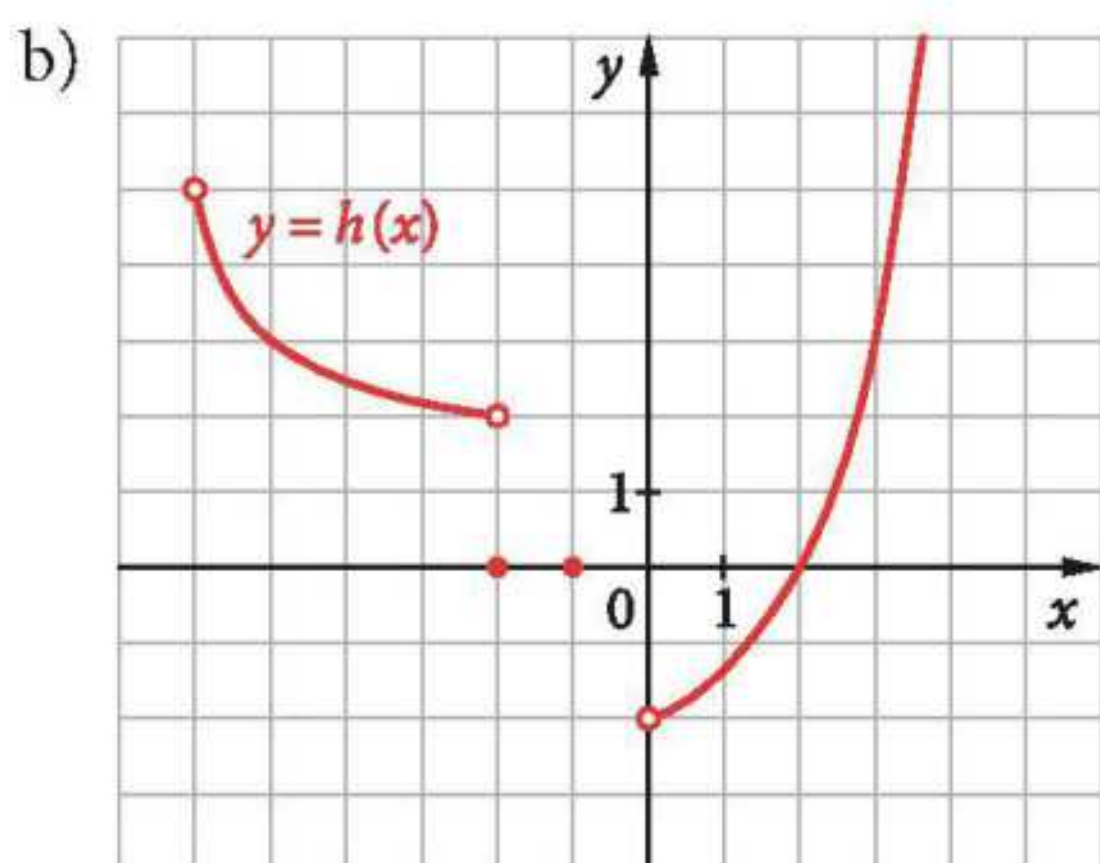
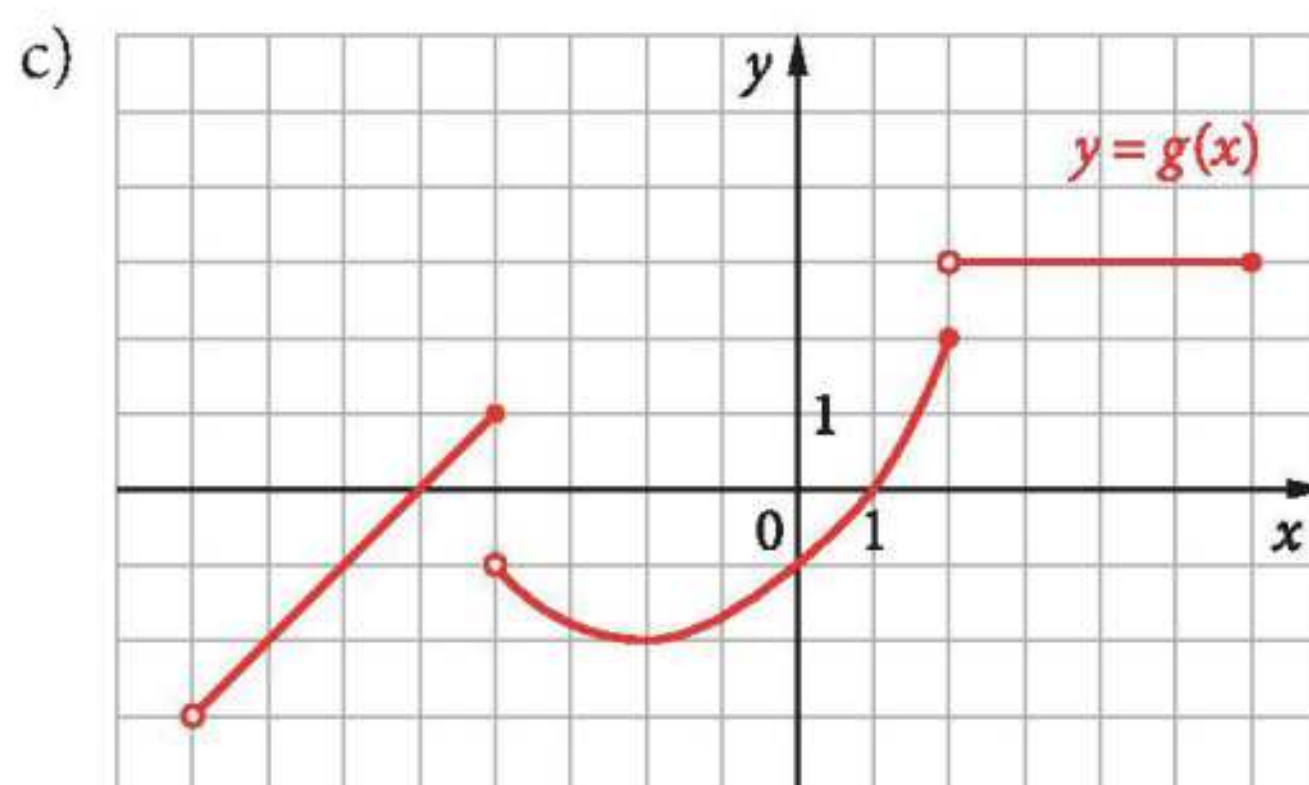
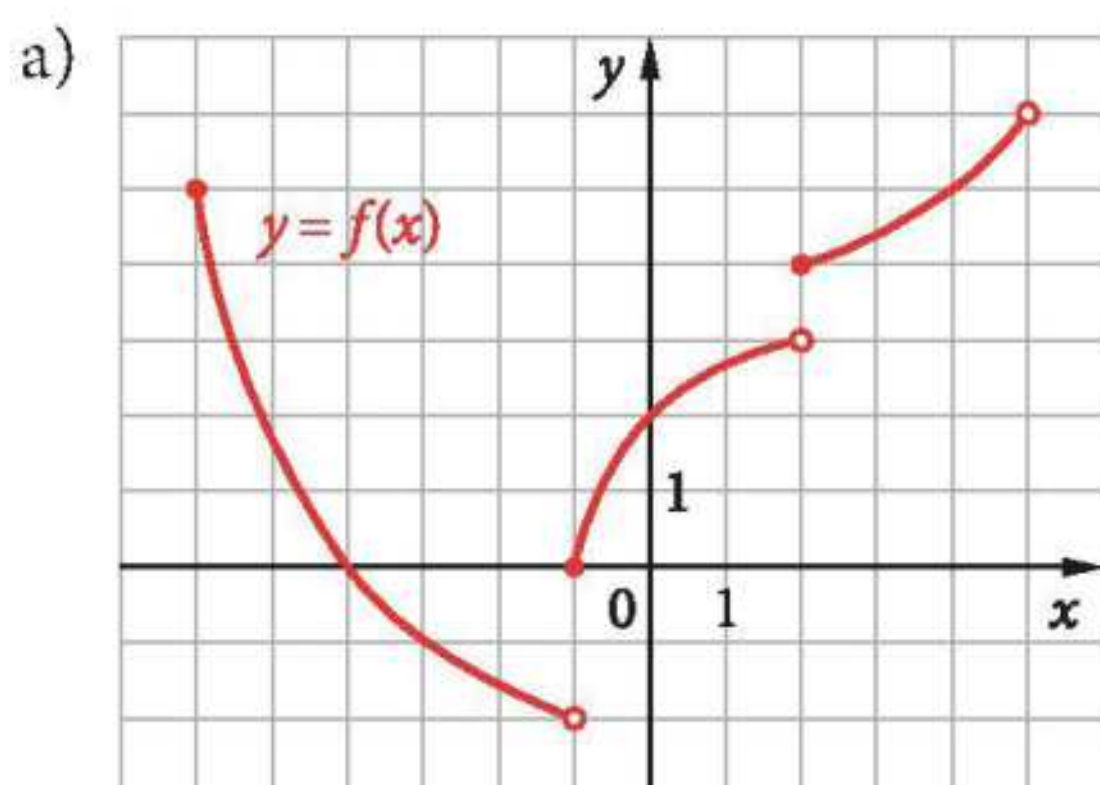
b) $f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x - 3}$

c) $f(x) = (x - 1)(x + 2)\sqrt{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3, x \in \mathbb{N}$

2.28. Odczytaj z podanego wykresu:

- dziedzinę funkcji,
- zbiór wartości funkcji,
- najmniejszą wartość i największą wartość funkcji,
- miejsca zerowe funkcji,
- zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne),
- przedziały monotoniczności funkcji,
- wartości funkcji dla argumentów $-6, 0$ i 2 ,
- liczbę rozwiązań równania $y = m$ w zależności od wartości m .



2.29. Skorzystaj z wykresów funkcji z poprzedniego zadania i podaj

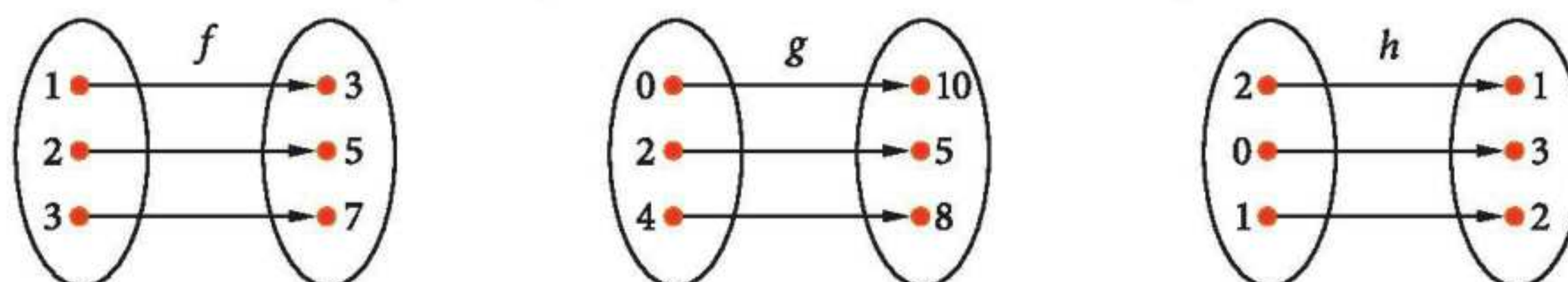
- dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x - 2) + 3$.
- liczbę rozwiązań równania $-h(x) - 2 = m$ w zależności od wartości m .
- przedziały monotoniczności funkcji $y = g(x + 1) - 2$.
- wartość najmniejszą i wartość największą funkcji $y = k(-x) + 1$.

2.30. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle -10; 8 \rangle$, a jej zbiorem wartości – przedział $\langle 0; 5 \rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x - 2) + 3$.

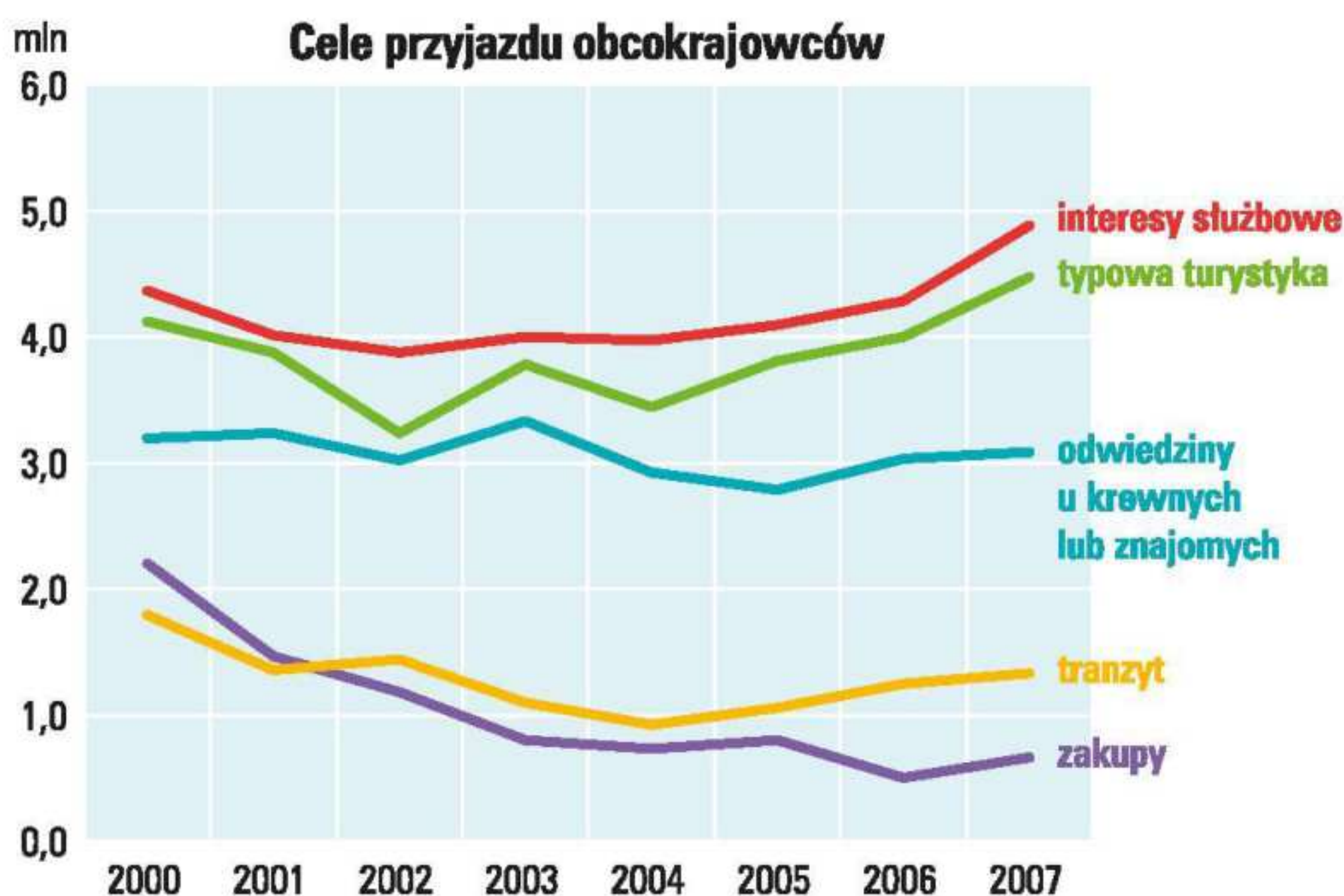
2.31. Funkcja $y = g(x)$ jest rosnąca w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 1; 5 \rangle$. Określ przedziały monotoniczności funkcji

a) $y = -g(x)$. b) $y = g(-x)$.

2.32. Sprawdź, czy funkcje przedstawione za pomocą diagramów są monotoniczne.

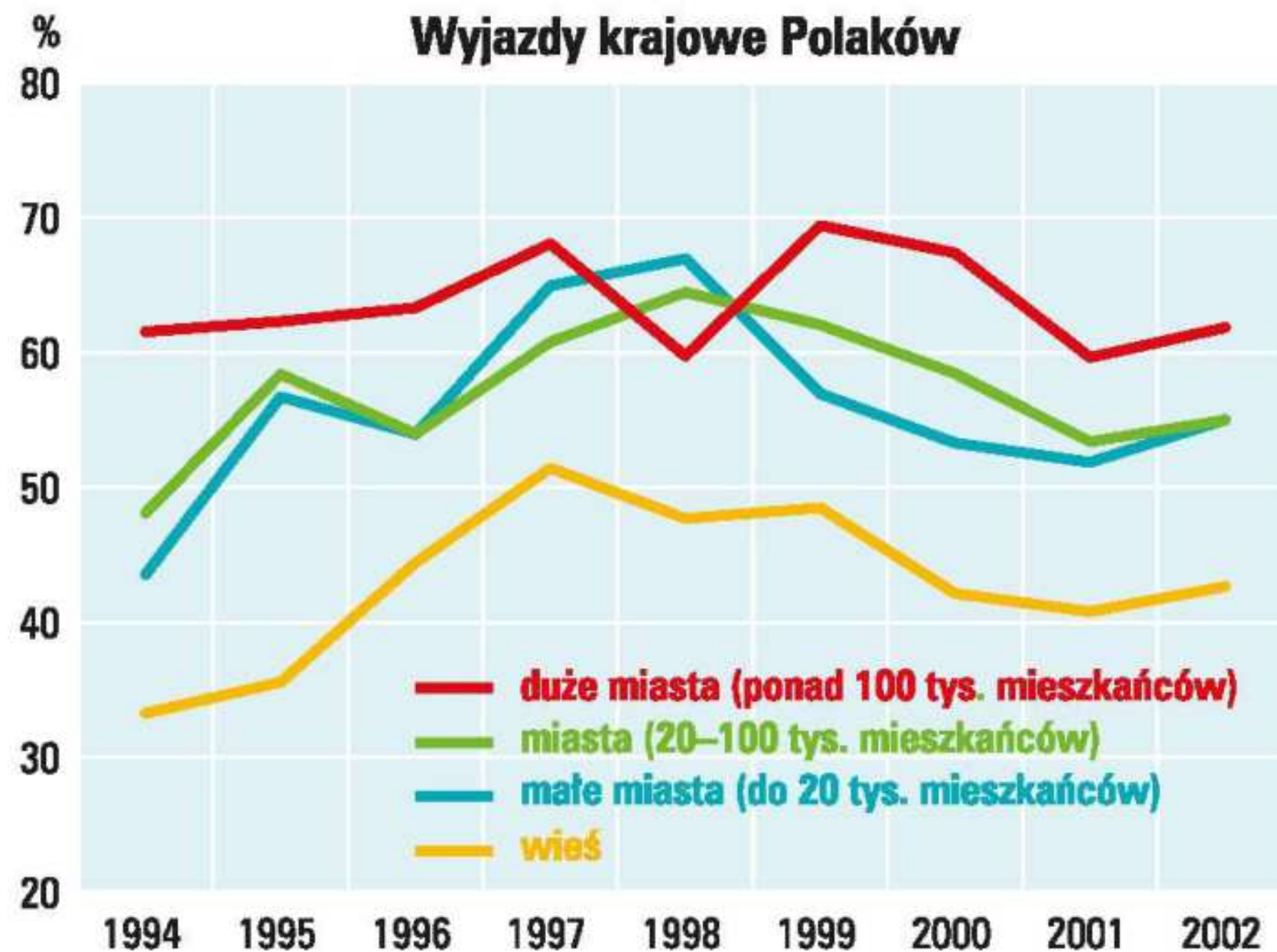


2.33. Na podstawie wykresu przedstawiającego cele przyjazdu obcokrajowców do Polski (źródło: badania i prognozy Instytutu Turystyki, marzec 2004) odpowiedz na pytania.

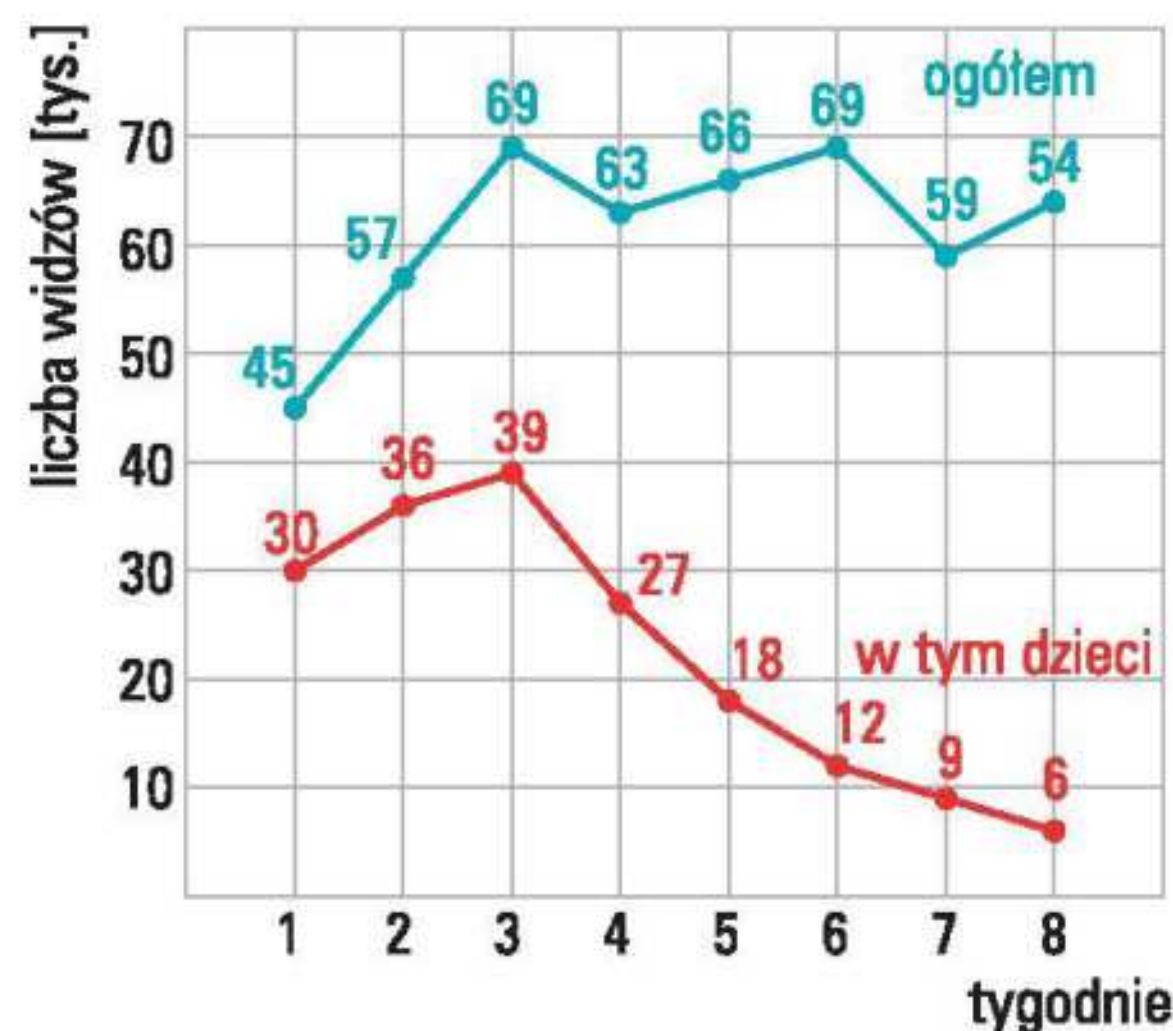


- Ile osób odwiedziło Polskę w 2003 r. w interesach służbowych?
- Która z danych funkcji jest monotoniczna i jaki jest rodzaj tej monotoniczności?
- Podaj prognozowaną na poszczególne lata od 2004 r. do 2007 r. liczbę obcokrajowców, którzy mieli odwiedzić Polskę w celu typowo turystycznym.
- W którym roku liczba obcokrajowców przejeżdżających przez Polskę tranzytem zrównała się z liczbą obcokrajowców robiących w Polsce zakupy? Oszacuj tę liczbę z dokładnością do 0,1 mln.
- Który z celów podróży do Polski jest najbardziej stabilny pod względem liczby przybyszów?

2.34. Na wykresie zaprezentowane jest uczestnictwo Polaków w wyjazdach krajowych (krótko- i długoterminowych) w zależności od miejsca zamieszkania (w procentach liczby mieszkańców). Scharakteryzuj na podstawie wykresu różnice między podanymi czterema kategoriami oraz ich wspólne cechy.



2.35. Na wykresie zilustrowano liczbę widzów animowanego filmu *Upiorny Jacuś*, zanotowaną w ciągu kolejnych ośmiu tygodni od dnia premiery.



- Ilu widzów obejrzało *Upiornego Jacusia* w badanym okresie?
- Sporządź wykres liczby dorosłych widzów tego filmu w kolejnych tygodniach.
- W którym tygodniu przewaga liczby widzów dorosłych nad liczbą dzieci była największa?
- Po ilu tygodniach od dnia premiery łączna liczba widzów dorosłych, którzy obejrzeli ten film, była równa łącznej liczbie dzieci, które go obejrzały?

2.36. Sporządź wykres przykładowej funkcji $y = f(x)$ spełniającej podane warunki.

- a) Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -3; 5 \rangle$, zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 3 \rangle$, miejscami zerowymi funkcji są liczby -1 i 3 .
- b) Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -4; 4 \rangle$, dla argumentu -2 funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą 0 , dla argumentu 4 funkcja przyjmuje wartość największą równą 5 .
- c) Dziedziną funkcji jest przedział $(0; 5)$, funkcja jest rosnąca w przedziale $(0; 3)$, funkcja jest malejąca w przedziale $\langle 3; 5 \rangle$, miejscem zerowym funkcji jest liczba 4 .
- d) Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -2; 4 \rangle$, zbiorem wartości jest przedział $(1; 5)$.
- e) Dziedziną funkcji jest przedział $(-1; 5)$, zbiorem wartości jest przedział $\langle -2; 2 \rangle$.

2.37. Odpłatność za kurs wynosi 150 złotych od każdego z 87 uczestników. Jaka byłaby odpłatność, gdyby uczestników było o 3 więcej, a suma wszystkich wpłat nie uległaby zmianie?

2.38. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego jej miejsce zerowe. Jaką miarę ma kąt nachylenia prostej, która jest wykresem tej funkcji, do osi x ? Wynik podaj z dokładnością do 1° .

- a) $f(x) = 2x - 3$
- b) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$

2.39. Naszkicuj wykres funkcji.

- a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ i $x \in \mathbf{N}$
- b) $f(x) = 2x - 5$, $x \in \mathbf{N}$ i $x \leq 5$
- c) $f(x) = -x + 1$ i $x \in \langle -2; 3 \rangle$
- d) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$, $x \in \mathbf{Z}$ i $x \in \langle -5; 5 \rangle$

2.40. Napisz wzór funkcji liniowej f , która spełnia podane warunki.

- a) $f(0) = 3$ i wykres jest nachylony do osi x pod kątem 135° .
- b) $f(-2) = 0$ i wykres jest nachylony do osi x pod kątem, którego tangens jest równy 2 .

2.41. Sporządź wykres i napisz wzór funkcji liniowej f , o której wiadomo, że

- a) jej wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych i punkt $(2, 4)$.
- b) jej wykres przecina osie układu współrzędnych w punktach $(-4, 0)$ i $(0, 2)$.
- c) jej dziedziną jest przedział $(-5; 4)$, a zbiorem wartości $\{3\}$.

2.42. Napisz wzór funkcji liniowej f , o której wiadomo, że jej wykres przecina oś rzędnych w punkcie o drugiej współrzędnej 2 i funkcja przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x > 6$.

2.43. Napisz wzór funkcji liniowej f , o której wiadomo, że

- a) jej miejscem zerowym jest 3 i $f(2) = -3$.
- b) $f(x) < 0$ dla $x \in (1; \infty)$ i $f(0) = 4$.
- c) $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; 2)$ i $f(1) = -1$.
- d) $f(x) > 0$ dla $x \in \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$ i $f(1) = 4$.

2.44. Dla jakich wartości m funkcja f jest rosnąca, a dla jakich malejąca?

- a) $f(x) = 3(2 - m)x + 7$
- b) $f(x) = -4(m + \sqrt{2})x + m - 3$

2.45. Napisz wzór funkcji liniowej g , której wykres jest równoległy do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt P .

- a) $f(x) = -0,5x + 5$, $P = (0, -1)$
- b) $f(x) = 0,4x - 7$, $P = (5, 2)$

2.46. Do wykresu funkcji liniowej $f(x) = ax - 8$ należy punkt $P = (-7, 13)$. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji.

2.47. Zaznacz część płaszczyzny, w której zawierają się wykresy funkcji $f(x) = ax + b$ dla

- a) $a = \frac{1}{3}$ i $b < -1$.
- b) $a = -3$ i $b \in (-3; 0)$.
- c) $a < 2$ i $b = 2$.

2.48. Rozwiąż równanie lub nierówność.

- a) $\frac{x+2}{6} - \frac{2x-3}{4} = 1$
- b) $\frac{3x+2}{2} - 2 = \frac{2(x+5)}{7}$
- c) $(x - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = 3$
- d) $\frac{x-3}{3} + \frac{x-1}{2} = \frac{5x-9}{6}$
- e) $14 + 3 \left\{ 1 - 2 \left[3 \left(x - \frac{1}{2} \right) + 1 \right] \right\} = 2$
- f) $\frac{x-5}{15} + 1 \leq \frac{2x-1}{20}$
- g) $(x+3)^2 - 2(x-1) < (x-5)(x+5) + 20$
- h) $(x-1)(\sqrt{2}-3) + \sqrt{2} \geq x\sqrt{2} + 9$

D 2.49. Wykaż, że liczba 3^{54} jest rozwiązaniem równania $243^{11} - 81^{14} + 7x = 9^{27}$.

2.50. Rozwiąż równanie $4^{23}x - 32^9x = 16^4 \cdot (4^4)^4$. Zapisz rozwiązanie tego równania w postaci 2^k , gdzie k jest liczbą całkowitą.

2.51. Rozwiąż układ równań.

- a) $\begin{cases} 1,5 - (x - y) = 0,5(y - x) + 2 \\ 2y - 4 = 4x \end{cases}$
- b) $\begin{cases} -2x + 3y = 8 \\ 26x - 39y = 104 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} \frac{3x-y}{2} - \frac{x+y}{4} = 4 \\ \frac{x-y}{2} + \frac{x+5y}{5} = 5 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} 7x - 3y = \frac{-5(x+y)}{2} - \frac{5y-25x}{3} \\ 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0 \end{cases}$

2.52. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} 2(x+1) - y = 3 \\ 2x + 3(y-2) = y - 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} (x+1)^2 - (y-2)^2 = x^2 - y^2 + 9 \\ (x-2)^2 - 4(y-2) = x^2 + 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3(x-2) + 2(y-1) = y - 7 \\ \frac{x+1}{3} + \frac{y-1}{2} = \frac{1}{3}(y+1) \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (x-1)^2 + 2x = (x-1)(x+1) - y \\ 3(x-y) - 2(x+y) = 10 + x \end{cases}$$

2.53. W 1999 r. w Polsce na 1000 mieszkańców przypadało 365 telefonów stacjonarnych i komórkowych. Oblicz, ile przypadało telefonów każdego rodzaju, jeżeli telefonów stacjonarnych było o 161 więcej niż komórkowych.

2.54. Państwo Mamutowie zarabiają razem 9200 zł miesięcznie, przy czym ich zarobki są w stosunku 12 : 11. O ile złotych różnią się ich pensje?

2.55. Działka pana Jacka ma kształt prostokąta o polu 800 m^2 . Prostokątna działka pana Artura ma pole powierzchni 1120 m^2 , jest o 8 m dłuższa i o 3 m szersza od działki pana Jacka. Oblicz wymiary obu działek.

2.56. W ogródku Michała znajduje się oczko wodne o pojemności $1,5 \text{ m}^3$, w którym jest 180 litrów wody. Michał postanowił napełnić je po brzegi, dolewając wodę w tempie 12 litrów na minutę. Napisz wzór funkcji V opisującej zależność ilości wody w tym oczku od czasu t napełniania go (w minutach). Określ dziedzinę tej funkcji. Po jakim czasie Michał zakończy pracę?

2.57. W pewnym państwie każdy obywatel płaci 20% podatku od rocznego dochodu powyżej 1000 euro. Kwota dochodu do 1000 euro włącznie jest nieopodatkowana. Podaj wzór i naszkicuj wykres funkcji $p(x)$, która rocznemu dochodowi przyporządkowuje należny podatek.

2.58. Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } |x - 3| = 5$$

$$\text{c) } |x + 11| = 0$$

$$\text{e) } |x - 1| = -3$$

$$\text{b) } |x + 5| = 11$$

$$\text{d) } |6 + x| = 2$$

$$\text{f) } |7 - x| = 3$$

2.59. Rozwiąż nierówność.

$$\text{a) } |x - 2| < 3$$

$$\text{c) } |x - 2| \geq -1$$

$$\text{e) } |x + 11| < -12$$

$$\text{b) } |x + 5| > 5$$

$$\text{d) } |4 - x| \leq 1$$

$$\text{f) } |21 + x| < 15$$



3. Funkcja kwadratowa, wielomiany i funkcje wymierne

Definicje

- Sumę algebraiczną $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, nazywamy **trójmianem kwadratowym**. Wyrażenie $b^2 - 4ac$ nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego i oznaczamy literą Δ .
- Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ i $x \in \mathbb{R}$, nazywamy **funkcją kwadratową zmiennej x w postaci ogólnej**.
- Funkcję $f(x) = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$ i $x \in \mathbb{R}$, nazywamy **funkcją kwadratową zmiennej x w postaci kanonicznej**.
- Funkcją wielomianową (wielomianem) stopnia n zmiennej x ($x \in \mathbb{R}$)** nazywamy funkcję postaci:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

gdzie n jest ustaloną dodatnią liczbą naturalną, współczynniki $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a_n \neq 0$.

Funkcję $W(x) = a_0$, gdzie $a_0 \neq 0$, nazywamy **wielomianem stopnia 0**.

Ponadto przyjmujemy, że funkcja $W(x) = 0$ dla każdego argumentu x jest **wielomianem zerowym** i nie ma stopnia.

- Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$** nazywamy taką liczbę a , dla której $W(a) = 0$.
- Wielomian $W(x)$ jest **podzielny** przez wielomian $P(x)$, jeżeli istnieje taki wielomian $Q(x)$, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$. Wielomian $P(x)$ nazywamy **dzielnikiem** wielomianu $W(x)$, a wielomian $Q(x)$ – **ilorazem** wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$.
- Funkcją wymierną zmiennej x** nazywamy funkcję postaci $f(x) = \frac{W(x)}{P(x)}$, gdzie W i P są wielomianami zmiennej x . Dziedziną funkcji f jest zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których $P(x) \neq 0$.

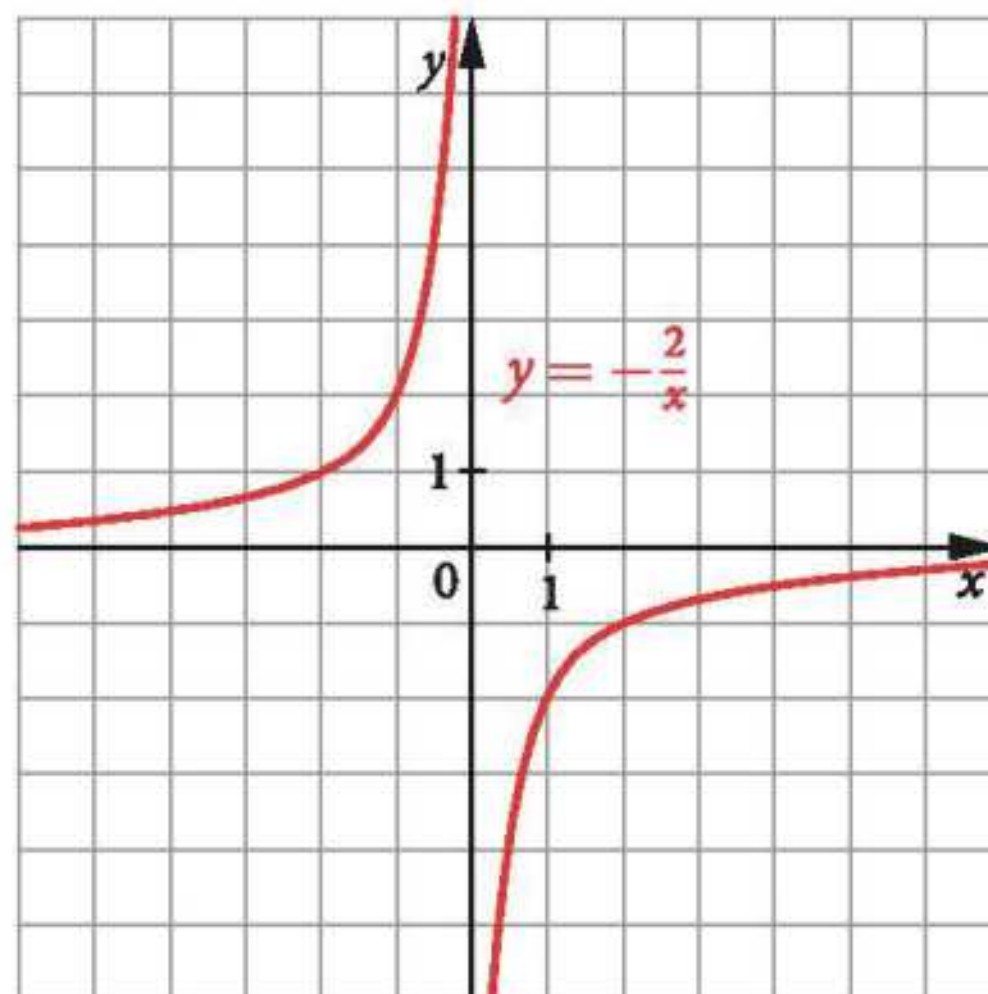
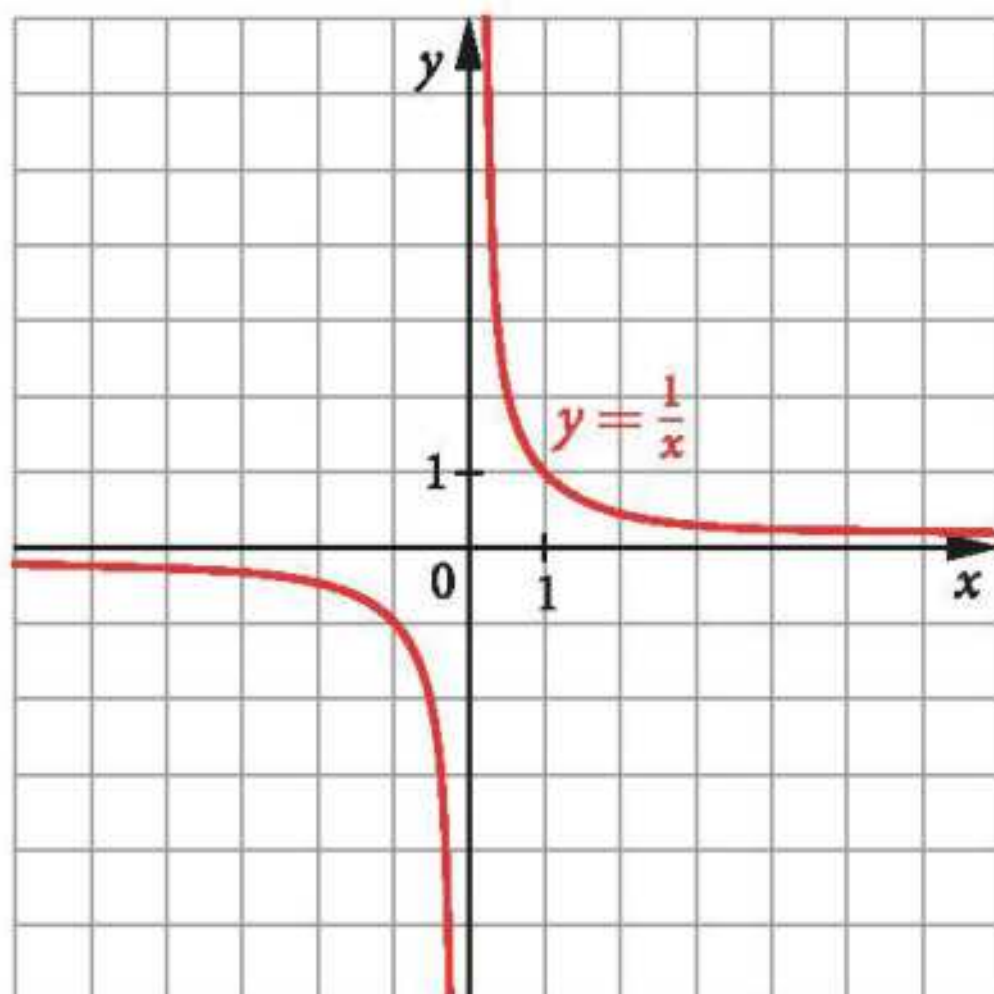
Twierdzenia

- Postacią kanoniczną funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, jest
$$f(x) = a \left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}.$$



- Wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, jest parabola, której wierzchołek ma współrzędne $x_w = \frac{-b}{2a}$, $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$.
- Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, można zapisać w **postaci iloczynowej**, gdy $\Delta \geq 0$:
 - jeżeli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$ i $x_0 = \frac{-b}{2a}$,
 - jeżeli $\Delta > 0$, to $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ i $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Wielomiany** W i Q są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają jednakowe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej.
- Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są niezerowymi wielomianami oraz stopień $P(x)$ nie jest większy od stopnia $W(x)$, to istnieją takie dwa wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, że:
$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$$
gdzie:
$$\text{stopień } Q = \text{stopień } W - \text{stopień } P$$
oraz stopień R jest mniejszy od stopnia P albo R jest wielomianem zerowym. Jeżeli R jest wielomianem zerowym, to wielomian W **jest podzielny** przez wielomian P .
- Twierdzenie Bézouta**

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.
- Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem wielomianu W , którego wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego tego wielomianu.
- Wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$, $x \neq 0$, jest hiperbola.



**Wnioski, uwagi, komentarze...**

- Jeżeli funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 , to pierwsza współrzędna x_w wierzchołka paraboli $y = ax^2 + bx + c$ jest ich średnią arytmetyczną: $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
- ✂ • Jeżeli $W(x) = (x - a)Q(x) + R$, to $W(a) = R$.

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.10 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wskaż argument, dla którego funkcja $f(x) = x^2 - 4x$ przyjmuje w przedziale $\langle -4; 1 \rangle$ wartość najmniejszą.

- A. $x = -2$ B. $x = 0$ C. $x = 1$ D. $x = -4$

3.2. Wskaż wartość współczynnika m paraboli $y = m - x^2$, która przecina oś x w punktach $x = \sqrt{3}$ oraz $x = -\sqrt{3}$.

- A. $m = 9$ B. $m = -3$ C. $m = 3$ D. Nie istnieje takie m .

3.3. Wskaż wartość m , dla której punkt $P = (-1, 3 + m)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = -3x^2$.

- A. $m = 6$ B. $m = -1$ C. $m = 0$ D. $m = -6$

3.4. Wskaż równanie paraboli symetrycznej względem osi y do paraboli $y = 5x^2 - x + 4$.

- A. $y = 5x^2 + x + 4$ C. $y = -5x^2 - x + 4$
B. $y = -5x^2 + x - 4$ D. $y = 5x^2 + x - 4$

3.5. Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = ax^2 + bx + \frac{3}{2}$ są liczby -1 oraz -3 . Wskaż wartości współczynników a i b tej funkcji.

- A. $a = 1, b = 4$ B. $a = \frac{1}{2}, b = 4$ C. $a = \frac{1}{2}, b = 2$ D. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$

3.6. Dana jest parabola $y = x^2 + kx$. Jakie wartości może przyjmować współczynnik k , aby parabola nie miała punktów wspólnych z osią x ?

- A. $k > 0$ B. $k = 0$ C. $k \leq -1$ D. Nie istnieje takie k .

3.7. Wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 6x + k$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Która prosta jest osią symetrii każdej z tych parabol?

- A. $y = -6$ B. $x = 6$ C. $x = -3$ D. $x = 3$

3.8. Wskaż dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - x}$.

- A. $\langle -2; 2 \rangle$ B. $\langle -2; 1 \rangle$ C. $(-\infty; 1)$ D. $(-\infty; 1)$

3.9. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $(x - 1)^2 < 4$.

- A. $(-\infty; 5)$ B. $(-\infty; 3)$ C. $(-1; 3)$ D. $(0; 3)$

3.10. Jeden pracownik wykonuje pewną pracę w ciągu 6 dni, a drugi tę samą pracę wykonuje w ciągu 12 dni. W jakim czasie wykonają tę pracę wspólnie?

- A. 3 dni B. 4 dni C. 9 dni D. 18 dni

W zadaniach 3.11, 3.12 oceń prawdziwość podanych zdań.

3.11. Zbiorem rozwiązań nierówności $2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 < 0$ jest

- A. przedział obustronnie domknięty.
B. zbiór jednoelementowy.
C. zbiór pusty.

3.12. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

- A. Wielomian $W(x)$ ma trzy pierwiastki.
B. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x - 1$.
C. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x + 1$.

3.13. Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1 albo 2.

Funkcja $f(x) = -x^2 + x - 1$

A.	przyjmuje w przedziale $(1; 2)$ wartość największą,	ponieważ	1.	dla funkcji f zachodzi warunek $\Delta < 0$.
	nie przyjmuje w przedziale $(1; 2)$ wartości największej,		2.	pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f nie należy do przedziału $(1; 2)$.

3.14. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = -2x^2 + c$.

- a) Naszkicuj kilka parabol $y = -2x^2 + c$ dla różnych wartości współczynnika c .
b) Dla jakich wartości współczynnika c miejscami zerowymi funkcji są liczby -2 i 2 ?
c) Dla jakich wartości współczynnika c funkcja nie ma miejsc zerowych?
d) Dla jakich wartości współczynnika c funkcja ma jedno miejsce zerowe?

3.15. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 + bx$.

- Naszkicuj kilka parabol $y = 2x^2 + bx$ dla różnych wartości współczynnika b .
- Dla jakich wartości współczynnika b jednym z miejsc zerowych funkcji jest -4 ?
- Dla jakich wartości współczynnika b funkcja ma dwa miejsca zerowe?
- Dla jakich wartości współczynnika b funkcja przyjmuje tylko wartości nieujemne?

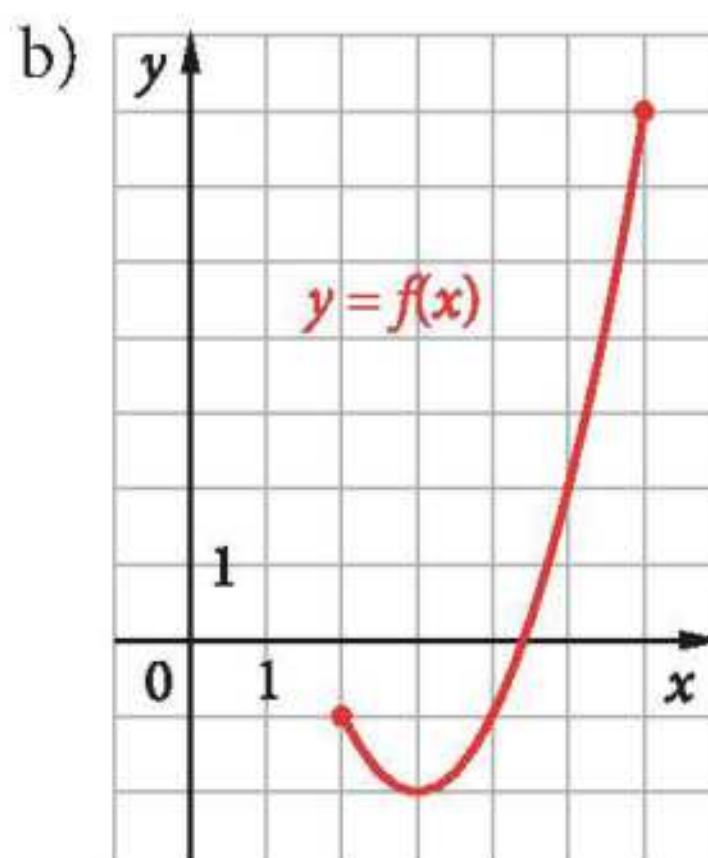
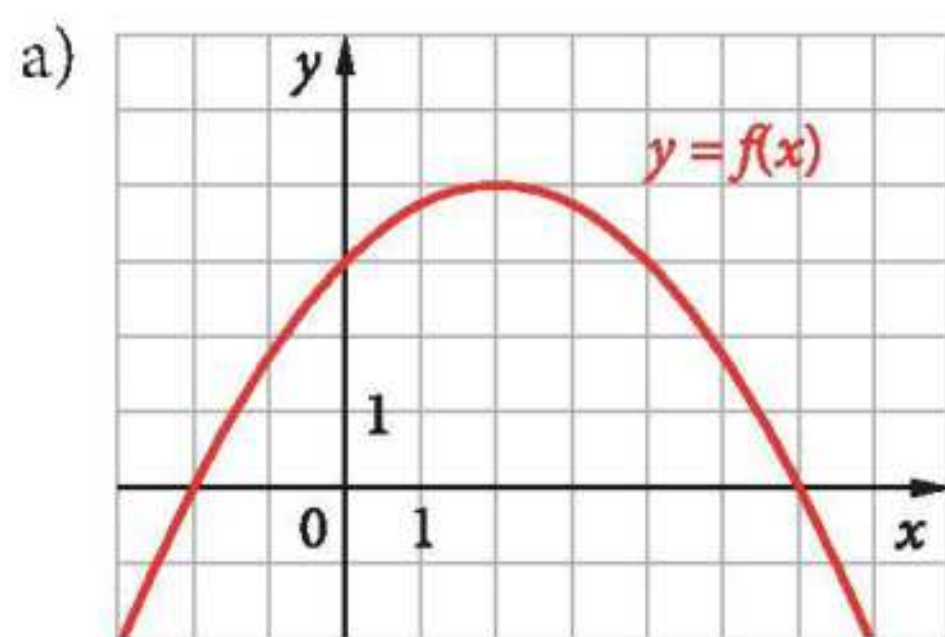
3.16. Dana jest funkcja kwadratowa w jednej z trzech postaci: ogólnej, kanonicznej lub iloczynowej. Określ, jaka to postać. O ile to możliwe, zapisz funkcję w dwóch pozostałych postaciach.

- | | |
|------------------------------------|---|
| a) $f(x) = -(x - 4)^2 + 1$ | d) $f(x) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 1)$ |
| b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ | e) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ |
| c) $f(x) = 3x^2 - 6x + 6$ | f) $f(x) = -2x^2 - 8x - 6$ |

3.17. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej własności.

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| a) $f(x) = (x + 1)^2 - 4$ | c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ |
| b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$ | d) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$ |

3.18. Na podstawie podanego wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ podaj jej wzór ogólny, dziedzinę oraz zbiór wartości.



3.19. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = -2x^2 + x - 1$.

3.20. Oblicz najmniejszą wartość funkcji i największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

- | | |
|---|--|
| a) $f(x) = 3x^2 - 6x - 4, \langle 0; 3 \rangle$ | b) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x, \langle 0; 1 \rangle$ |
|---|--|

3.21. Liczbę 22 rozłożono na dwa składniki. Oblicz największy iloczyn takich składników.

3.22. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć iloczyn dwóch liczb rzeczywistych różniących się o 6?

3.23. Z drutu o długości 60 cm zrobiono prostokątną ramkę. Jakie wymiary powinien mieć ten prostokąt, aby jego pole było możliwie największe?

3.24. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 i ramionach długości 5 wpisano prostokąt w ten sposób, że jeden bok prostokąta zawiera się w podstawie trójkąta. Jakie może być największe pole takiego prostokąta?

3.25. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 4x - 6 = 0$

b) $5x^2 = 3x$

c) $x^2 - 4x + 1 = 0$

d) $3x^2 + 7 = 5x$

e) $3(x - 1)^2 + 13 = 10x$

f) $2(3x + 5) + (x + 2)(x - 3) = 0$

3.26. Rozwiąż nierówność.

a) $-2x^2 + 5x + 3 < 0$

b) $x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 \leq 0$

c) $-\frac{1}{2}x^2 + x - 1 \leq 0$

d) $3x^2 \geq 8$

e) $(x - 2)^2 + (x - 1)^2 < x^2$

f) $(x - 3)^2 \geq (x - 3)(2x + 1)$

3.27. Rozwiąż graficznie równanie lub nierówność. Wykonaj odpowiednie podstawienie, aby sprawdzić wyniki równania.

a) $x^2 + 4x + 1 = 3x + 3$

b) $2x^2 + 8x + 6 = x^2 + 4x + 3$

c) $-x^2 - 4x - 3 > x + 1$

d) $-2x^2 + 3 \leq 2x^2 - 4x + 3$

3.28. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 155. Wyznacz te liczby.

3.29. Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb.

3.30. Plac ma kształt prostokąta, w którym przekątna jest o 1 m dłuższa od dłuższego boku. Gdyby powiększyć o 3 m długość każdego boku tego prostokąta, to długość przekątnej zwiększyłaby się o 4 m. Oblicz wymiary placu.

3.31. Dwa wielokąty mają razem 18 kątów i 58 przekątnych. Co to za wielokąty?

3.32. Trzy ścieżki w ogrodzie tworzą trójkąt prostokątny o obwodzie 120 m. Dwie osoby wychodzą równocześnie z punktu, który jest wierzchołkiem kąta prostego. Każda z nich idzie po ścieżce będącej inną przyprostokątną i spotykają się w środku przeciwprostokątnej. Jakiej długości są ścieżki, jeżeli jedna osoba pokonuje 13 m, a druga w tym samym czasie 11 m?

3.33. Suma pól dwóch kwadratów jest równa 104, a różnica długości ich przekątnych jest równa 4. Wyznacz długości boków tych kwadratów.

3.34. Dane są funkcje $f(x) = x^2 + 4x - 12$ i $g(x) = 2x - 9$. Wyznacz metodą algebraiczną i graficzną punkty wspólne wykresów tych funkcji.

3.35. Oblicz wartości współczynników b i c , dla których funkcja $f(x) = x^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe równe -1 i 3 .

3.36. Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + 1$ ma współrzędne $W = (2, -1)$. Wyznacz wartości współczynników a i b .

3.37. Do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + 16$ należą punkty $A = (-5, 6)$ oraz $B = (-4, 0)$. Wyznacz współczynniki a i b . Oblicz najmniejszą wartość i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle -4; -1 \rangle$.

3.38. Dane są funkcje $f(x) = 2x^2 + 6x + c$ i $g(x) = -x^2 + bx - 25$ określone dla $x \in \mathbb{R}$. Funkcja f ma jedno miejsce zerowe. Dla $x = 5$ funkcja g przyjmuje największą wartość. Wyznacz współczynniki b i c . Dla obliczonych wartości b i c rozwiąż nierówność $2f(x) + g(x) \leq 0$.

3.39. Do wykresu funkcji kwadratowej f należą punkty: $K = (-3, -1)$, $L = (0, 8)$, $P = (-5, 3)$. Napisz wzór tej funkcji i naszkicuj jej wykres. W jakim zbiorze wartości funkcji f są większe od 3?

3.40. Dane jest równanie $x^2 - 6x + 1 = -2x - m$.

a) Rozwiąż to równanie graficznie dla $m = -6$.

b) Zbadaj, dla jakich wartości m równanie ma dwa rozwiązania, dla jakich – jedno rozwiązanie, a dla jakich – nie ma rozwiązań.

3.41. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2mx + 4m + 5$ dla $x \in \mathbb{R}$. Oblicz najmniejszą wartość i największą wartość tej funkcji w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$ dla $m = \frac{1}{2}$.

D 3.42. Wykaż, że dla $m = 3$ nierówność $x^2 + (2m - 3)x + 2m + 5 > 0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x .

3.43. Dla każdej liczby rzeczywistej b równanie $y = \frac{1}{2}x^2 - bx + 2$ opisuje pewną parabolę. Wyznacz wszystkie wartości b , dla których wierzchołek takiej paraboli leży nad osią x .

3.44. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej g jest przedział $(-\infty; 5)$, a zbiorem rozwiązań nierówności $g(x) > 0$ jest przedział $(2; 8)$. Wyznacz wzór funkcji g .

✱ **3.45.** We wzorze funkcji kwadratowej współczynnik przy x^2 jest równy 1. Wykres tej funkcji przechodzi przez punkty $(1, 2)$ i $(5, m)$. Wyznacz wzór rodziny funkcji kwadratowych spełniających te warunki.

3.46. Dane są wielomiany: $W(x) = x^2 + 2$, $P(x) = 3x - 2$, $R(x) = x^3 + x^2 + 3x + 2$. Wyznacz wielomian $Q(x) = [W(x)]^3 - 2P(x)R(x)$. Określ stopień wielomianu Q i podaj jego wartość dla $x = \sqrt{2}$.

3.47. Wykonaj dzielenie wielomianu W przez wielomian P . Zapisz wielomian W w postaci $W(x) = P(x)Q(x) + R(x)$.

- | | |
|---------------------------------------|-----------------|
| a) $W(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ | $P(x) = 2x + 1$ |
| b) $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + x + 1$ | $P(x) = x - 1$ |
| c) $W(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ | $P(x) = -x + 1$ |
| d) $W(x) = 16x^4 - 100$ | $P(x) = 2x - 3$ |

3.48. Rozłóż wielomian W na czynniki nierozkładalne.

- $W(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
- $W(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$
- $W(x) = x^3 - 7x + 6$
- $W(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$

3.49. Rozwiąż równanie.

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$ | c) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ |
| b) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ | d) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ |

3.50. Wyznacz największe rozwiązanie równania $2x^3 - 4x^2 - 3x + 5 = 0$.

3.51. Reszta z dzielenia wielomianu $x^4 - 3x^3 - kx^2 - x + 5$ przez $x + 2$ jest równa 4. Oblicz k .

3.52. W wyniku dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 1$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = 8x^2 + 4x - 14$ oraz resztę $R(x) = -5$. Oblicz pierwiastki wielomianu $W(x)$.

3.53. Reszta z dzielenia wielomianu $4x^3 - 5x^2 - 23x + m$ przez dwumian $x + 1$ jest równa 20. Oblicz wartość współczynnika m oraz pierwiastki tego wielomianu.

3.54. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ taki, że $W(2) = 7$ i reszta z dzielenia $W(x)$ przez $x - 3$ jest równa 10. Oblicz wartości współczynników a i b tego wielomianu.

3.55. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x} - 1$. Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $\frac{4}{x} - 1 > 0$.

3.56. Sporządź wykres funkcji $g(x) = -\frac{6}{x+4} + 3$. Odczytaj z wykresu zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji g .

3.57. Dany jest prostokąt o polu 16, który nie jest kwadratem. Podaj wzór i narysuj wykres funkcji, która długości krótszego boku tego prostokąta przyporządkowuje długość jego dłuższego boku.

3.58. Wykonaj działania. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{3x^2 + 12x}{x^2 + x - 6} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x}$

b) $\left(\frac{x}{x-2} - \frac{x+5}{x+2}\right) : \frac{x-10}{2-x}$

c) $\frac{3}{2x} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

d) $\left(\frac{x}{x^3-8} - \frac{1}{x^2-4}\right) \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)$

3.59. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3x+2}{2x-5} = 0$

b) $\frac{7}{x} = 1$

c) $\frac{3}{2x+1} = 2$

d) $\frac{5}{x-7} = 2$

e) $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{x+5}{3x-1}$

f) $\frac{3}{x+5} + 2 = \frac{5x-2}{x-2}$

✱ g) $\frac{x^2+1}{x-1} + \frac{x-5}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = 0$

✱ h) $\frac{2x-1}{x^2+3x-4} = \frac{1}{2}$

3.60. Gdyby średnią prędkość pociągu zwiększyć o 9 km/h, to czas przejazdu na dystansie 180 km skróciłby się o 40 minut. Oblicz średnią prędkość tego pociągu.

3.61. Pociąg wyruszył na trasę o długości 280 km z 40-minutowym opóźnieniem. Całą trasę przebył ze średnią prędkością o 10 km/h większą od planowej i w rezultacie zmniejszył opóźnienie do 10 minut. Z jaką średnią prędkością jechał?

3.62. Pociąg miał przebyć 840 km w określonym czasie. W połowie drogi został zatrzymany na pół godziny. Aby przybyć punktualnie na miejsce przeznaczenia, maszynista zwiększył prędkość o 2 km/h. Jak długo pociąg był w drodze?

3.63. Na kolonie nad morzem zgłosiło się 130 dzieci, dla których zaangażowano odpowiednią liczbę wychowawców. Ponieważ przyjęto jeszcze dodatkowo 14 dzieci, a jeden z wychowawców nie zgłosił się do pracy, każdemu z zatrudnionych wychowawców przydzielono po dwoje dzieci więcej, niż planowano na początku. Ilu wychowawców było na tej kolonii i iloma dziećmi każdy z nich się opiekował?

3.64. Turysta przeszedł 105 km, pokonując codziennie tyle samo kilometrów. Gdyby przeznaczył na tę drogę o dwa dni więcej, to każdego dnia mógłby przejść o 6 km mniej. Ile kilometrów dziennie pokonywał turysta?

3.65. Pełny zbiornik z wodą o pojemności 90 m^3 można opróżnić przy użyciu dwóch zaworów. W ciągu jednej godziny przez pierwszy zawór wypływa ze zbiornika o $1,5 \text{ m}^3$ wody więcej niż przez drugi. Czas opróżniania zbiornika tylko przez pierwszy zawór jest o 3 godziny krótszy od czasu opróżniania tego zbiornika tylko przez drugi zawór. Oblicz, w ciągu ilu godzin pełen zbiornik zostanie opróżniony, jeśli woda będzie wypływać przez oba zawory jednocześnie.

3.66. Basen jest opróżniany przez otwór w dnie – osuszenie pełnego zbiornika trwa 4 godziny. Do napełniania basenu służą dwa krany. Jeśli woda leci tylko z pierwszego z nich, to napełnienie basenu zajmuje dwie godziny, jeśli tylko z drugiego – jedną godzinę. W ciągu ilu godzin napełni się basen, jeśli otwarte są obydwa krany i otwór w dnie?

3.67. Podczas budowy bloku mieszkalnego należało wywieźć w określonym terminie 8000 m^3 ziemi. Praca została wykonana na 8 dni przed terminem, gdyż robotnicy stale przekraczali dzienny plan o 50 m^3 . Oblicz, na ile dni było zaplanowane wywożenie ziemi i o ile procent przekraczano dzienny plan.

3.68. Firma zaplanowała wytworzenie produktów A i B, łącznie 20 sztuk. Całkowity koszt wytworzenia produktów A ustalono na 12 000 zł, a produktów B – na 6400 zł. Koszt jednostkowy dla A był o 200 zł wyższy niż dla B. Ile sztuk każdego produktu zaplanowano i jakie były ich koszty jednostkowe?

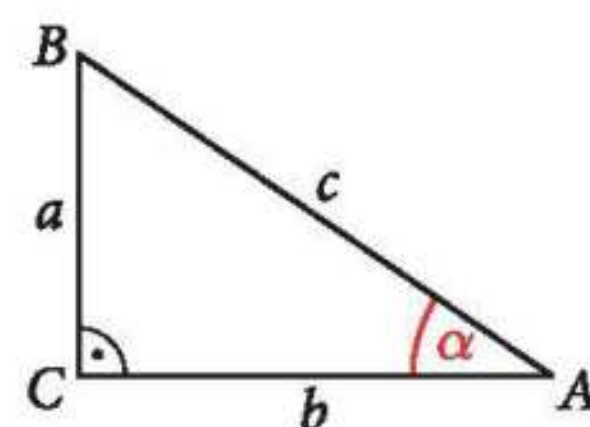


4. Funkcje trygonometryczne

Definicje

- W trójkącie prostokątnym ABC , w którym α jest kątem ostrym (oznaczenia jak na rysunku), mamy:

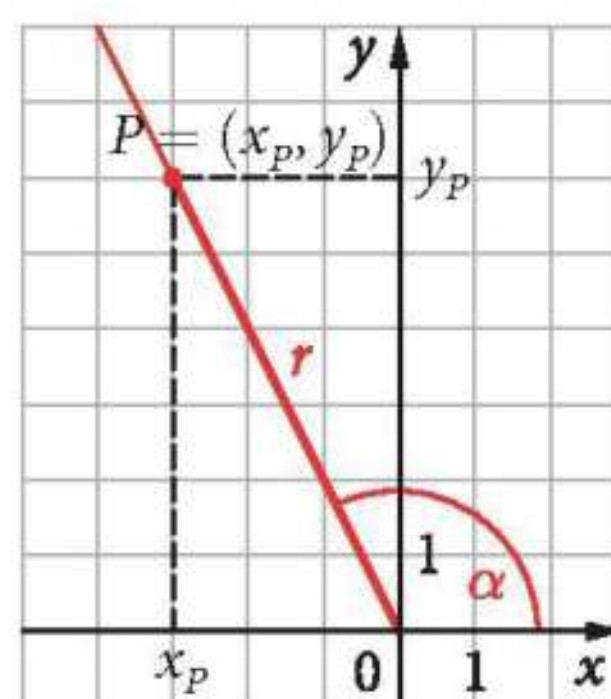
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



- Niech α będzie kątem o wierzchołku w początku układu współrzędnych i początkowym ramieniu pokrywającym się z dodatnią półosią x . Na ramieniu wodzącym kąta α wybieramy dowolny punkt $P = (x_P, y_P)$ różny od wierzchołka, o promieniu wodzącym r . Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{y_P}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x_P}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P} \quad \text{dla } x_P \neq 0$$

$$\text{gdzie } r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}.$$



Twierdzenia

- Jedynka trygonometryczna**

Dla dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ zachodzi równość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

- Jeżeli $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ i $\alpha \neq 90^\circ$, to $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Wzór sinusów

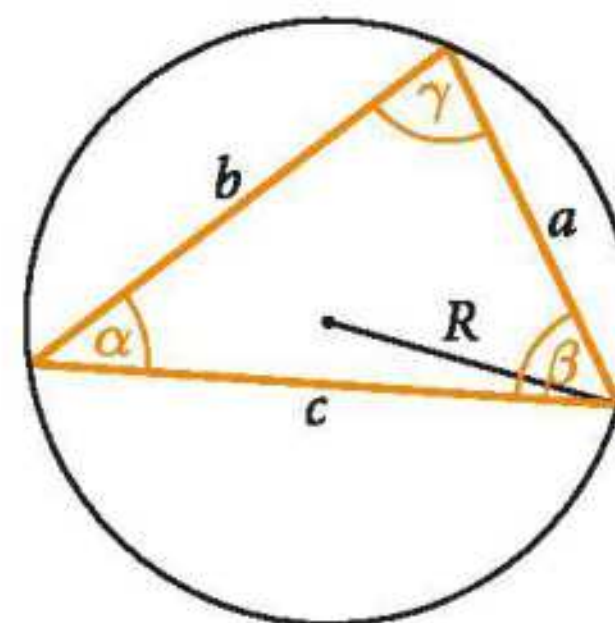
W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest stały.

- Twierdzenie sinusów**

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

- Twierdzenie cosinusów**

W dowolnym trójkącie kwadrat długości boku równa się sumie kwadratów długości pozostałych boków, zmniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

- **Wzory redukcyjne**

Dla dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ zachodzą równości:

$$\begin{array}{lll} \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha & \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha & \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \end{array}$$

Jeżeli $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ i $\alpha \neq 90^\circ$, to $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.11 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Ile jest równy iloczyn $\operatorname{tg} 36^\circ \cdot \operatorname{tg} 54^\circ$?

- A. 1 B. 0 C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ D. 2

4.2. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. Wskaż wartość wyrażenia $\frac{1 - 5 \sin \alpha}{1 + 5 \sin \alpha}$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 1

4.3. Wiadomo, że $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Zatem

- A. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. B. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

4.4. Wskaż wartość a , dla której równanie $\cos \alpha = \frac{1}{a^2 - 4a}$ nie ma rozwiązania.

- A. $a = \frac{1}{4}$ B. $a = \frac{1}{3}$ C. $a = -\frac{1}{2}$ D. $a = \frac{11}{2}$

4.5. Ile jest równa liczba $\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin 70^\circ \cos 20^\circ$?

- A. 0 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. 90

4.6. Kąt α jest rozwarty i $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Zatem

- A. $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$. B. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. D. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

4.7. Wiadomo, że $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Zatem

- A. $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$. B. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{13}{5}$. D. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$.

4.8. Dwa boki trójkąta mają długości 5 i 11, a kąt między nimi ma miarę 120° . Wskaż długość trzeciego boku tego trójkąta.

- A. $\sqrt{201}$ B. $\sqrt{91}$ C. $\sqrt{146 - 55\sqrt{3}}$ D. $\sqrt{146 + 55\sqrt{3}}$

4.9. W trójkącie ABC dane są $|AB| = 2\sqrt{5}$ i $\sphericalangle BCA = 30^\circ$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy

- A. $5\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{5}$. C. $\sqrt{5}$. D. $2\sqrt{5}$.

4.10. Boki trójkąta mają długości $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ i 4. Wskaż wartość cosinusa największego kąta w tym trójkącie.

- A. $\frac{7}{4\sqrt{5}}$ B. $-\frac{2}{\sqrt{35}}$ C. $\frac{2}{\sqrt{35}}$ D. $\frac{9}{4\sqrt{7}}$

4.11. Wskaż liczbę równą $\cos 133^\circ$.

- A. $\sin 47^\circ$ B. $\cos 47^\circ$ C. $-\sin 47^\circ$ D. $-\cos 47^\circ$

W zadaniach 4.12–4.14 oceń prawdziwość podanych zdań.

4.12. Kąty wewnętrzne trójkąta mają miary α , β i γ . Zatem

- A. $\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta + \gamma}{2}$. B. $\cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\beta + \alpha}{2}$. C. $\sin \beta = \cos (\alpha + \gamma)$.

4.13. W trójkącie prostokątnym kąty α i β są ostre oraz $\beta > \alpha$. Zatem

- A. $\sin \alpha < \cos \alpha$. B. $\cos \beta < \cos \alpha$. C. $\sin \alpha < \sin \beta$.

4.14. W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawy mają długości $|AB| = 15$, $|CD| = 13$, a każde ramię ma długość 3. Zatem

- A. $\sin \sphericalangle ADC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $\cos \sphericalangle ADC = \frac{1}{3}$. C. $\operatorname{tg} \sphericalangle ADC = 2\sqrt{2}$.

4.15. W trójkącie KLM dane są: $|KL| = 3\sqrt{5}$, $|LM| = 5\sqrt{2}$ i $|MK| = 2\sqrt{3}$.
Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.
 Kąt przy wierzchołku K

A.	jest ostry,	ponieważ	1.	$ LM ^2 > KL ^2 + MK ^2$.
B.	jest prosty,		2.	$ LM ^2 = KL ^2 + MK ^2$.
C.	jest rozwarty,		3.	$ LM ^2 < KL ^2 + MK ^2$.

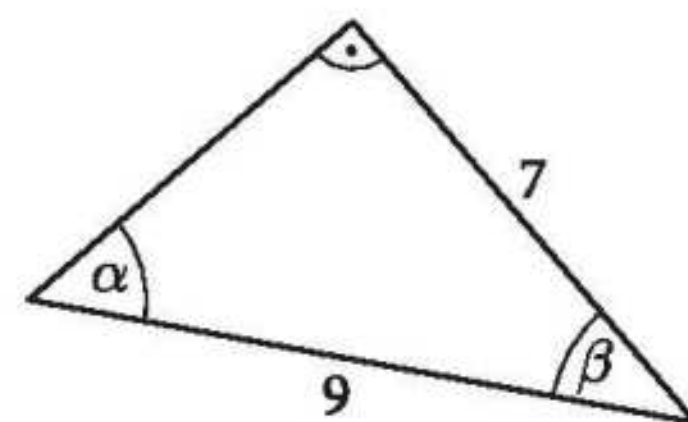
4.16. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α spełniającego podane warunki.

a) $\operatorname{tg} \alpha = 3$ i $\cos \alpha < 0$

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ i $\operatorname{tg} \alpha < 0$

4.17. Kąty α i β są ostre oraz $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ i $\cos \beta = \frac{1}{6}$. Oblicz dokładną wartość wyrażenia $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

4.18. Na podstawie rysunku obok wyznacz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \sin \beta$.



4.19. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{4 \cos \alpha - 3 \sin \alpha}{3 \cos \alpha + 5 \sin \alpha}$.

4.20. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych w trójkącie ABC , w którym $\sphericalangle C = 90^\circ$, a przyprostokątne mają długości

a) $|AC| = 18 \text{ cm}$ i $|BC| = 24 \text{ cm}$.

b) $|AC| = 21 \text{ cm}$ i $|BC| = 72 \text{ cm}$.

4.21. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta BAC w trójkącie prostokątnym ABC , w którym

a) $\sphericalangle C = 90^\circ$, $|AC| = 3$, $|BC| = 2$.

b) $\sphericalangle B = 90^\circ$, $|BC| = \sqrt{15}$, $|AC| = 4$.

4.22. W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych różnią się o 28 cm, a przeciwprostokątna ma 52 cm. Wyznacz z dokładnością do 1° miary kątów ostrych tego trójkąta.

4.23. Wyznacz z dokładnością do 1° miarę kąta przy podstawie w trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC| = 10 \text{ cm}$, a wysokość poprowadzona z wierzchołka C jest równa

a) 5 cm.

b) 8 cm.

c) 12 cm.

4.24. Oblicz.

a) $\cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \operatorname{tg} 45^\circ$

b) $\sin^2 45^\circ \operatorname{tg} 60^\circ - \cos^2 30^\circ \operatorname{tg} 30^\circ$



4.25. Z jednego brzegu jeziora widać szczyt góry pod kątem 18° względem poziomu, a z drugiego brzegu, oddalonego od pierwszego o 1180 m w kierunku podnóża góry, widać jej szczyt pod kątem 22° względem poziomu. Oblicz wysokość h góry (mierzoną względem tafli wody). Podaj wynik z dokładnością do 10 m.



4.26. Do miseczki w kształcie półkuli o średnicy 18 cm nalano mleko, którego poziom jest o 2 cm niższy od poziomu maksymalnie napełnionego naczynia. Jaki jest największy kąt, o który można przechylić miseczkę tak, aby mleko się nie wylało? Podaj wartość dowolnie wybranej funkcji trygonometrycznej tego kąta. Następnie podaj miarę kąta z dokładnością do 1° .



4.27. Prosta droga wznosi się pod kątem 12° do poziomu. Na jaką wysokość ponad poziom wzniesiemy się po przebyciu 900 m tej drogi? Jakiej długości drogę musimy pokonać, aby wzniesć się na wysokość 250 m? Wyniki podaj z dokładnością do 10 m.



4.28. Podstawą masztu jest punkt O , a jego wierzchołkiem – punkt P . Kąt, pod jakim widać maszt z punktu A ($AO \perp OP$), ma miarę 32° , a kąt, pod jakim widać maszt z punktu B , leżącego na odcinku AO w odległości 15 m od A , ma miarę 68° . Oblicz wysokość masztu. Podaj wynik z dokładnością do 0,1 m.

4.29. Przekątna rombu jest $1\frac{3}{4}$ razy dłuższa od jego boku. Podaj wartości dowolnie wybranych funkcji trygonometrycznych kątów tego rombu oraz miary kątów z dokładnością do 1° .

4.30. Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz dokładną wartość tangensa kąta α .

4.31. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$. Oblicz dokładne wartości sinusa i cosinusa kąta α .

4.32. Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = 0,3$. Oblicz $\operatorname{tg}^2 \alpha$.

4.33. Sprawdź, czy dla każdego kąta ostrego α wyrażenie ma stałą wartość. Jeżeli tak, to ją podaj.

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + 3(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + \frac{4 \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$

b) $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha$

D 4.34. Udowodnij tożsamość.

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

b) $\left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - 2$

c) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

d) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = (\operatorname{tg} \alpha - 1) \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + 1 \right)$

D 4.35. Udowodnij tożsamość.

a) $\operatorname{tg}^2 \alpha - 1 = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha}$

c) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$

b) $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin^3 \alpha - \sin \alpha}{\cos^3 \alpha - \cos \alpha}$

d) $\sin \alpha = \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) (1 - \cos \alpha)$

4.36. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB taki, że $\sin \sphericalangle BAC = 0,3$ i $|AC| = 7$. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.**4.37.** Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$.**4.38.** W pewnym trójkącie prostokątnym suma cosinusów kątów ostrych jest równa $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Oblicz iloczyn sinusów tych kątów.**4.39.** Ramię wodzące kąta α przechodzi przez podany punkt P . Wyznacz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

a) $P = (-8, 6)$ b) $P = (-7, 7)$ c) $P = \left(-\frac{15}{2}, 4\right)$ d) $P = (-3, \sqrt{7})$

4.40. Oblicz $\operatorname{tg} 135^\circ + \cos 120^\circ \cdot \sin 150^\circ$.**4.41.** Kąt trójkąta zawarty między bokami o długościach 5 i 4 ma miarę 60° . Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.**4.42.** W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 8$, $|BC| = 12$ i $|AC| = 15$. Wyznacz miary kątów tego trójkąta (z dokładnością do 1°).

5. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

Definicje

- **Funkcją wykładniczą o podstawie a** nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych ($x \in \mathbb{R}$), a jej wykres nazywamy **krzywą wykładniczą**.
- **Logarytmem przy podstawie a ($a > 0$ i $a \neq 1$) liczby b ($b > 0$)** nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać b .
 $\log_a b = c$, gdy $a^c = b$ i $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.
Liczbę b nazywamy **liczbą logarytmowaną**.
- **Funkcją logarytmiczną o podstawie a** nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór dodatnich liczb rzeczywistych ($x > 0$), a jej wykres nazywamy **krzywą logarytmiczną**.

Twierdzenia

- Jeżeli liczby a i b są dodatnie i $a \neq 1$, to istnieje dokładnie jedna taka liczba x , że $a^x = b$.
- Dla dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $k \in \mathbb{R}$ prawdziwe są wzory:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

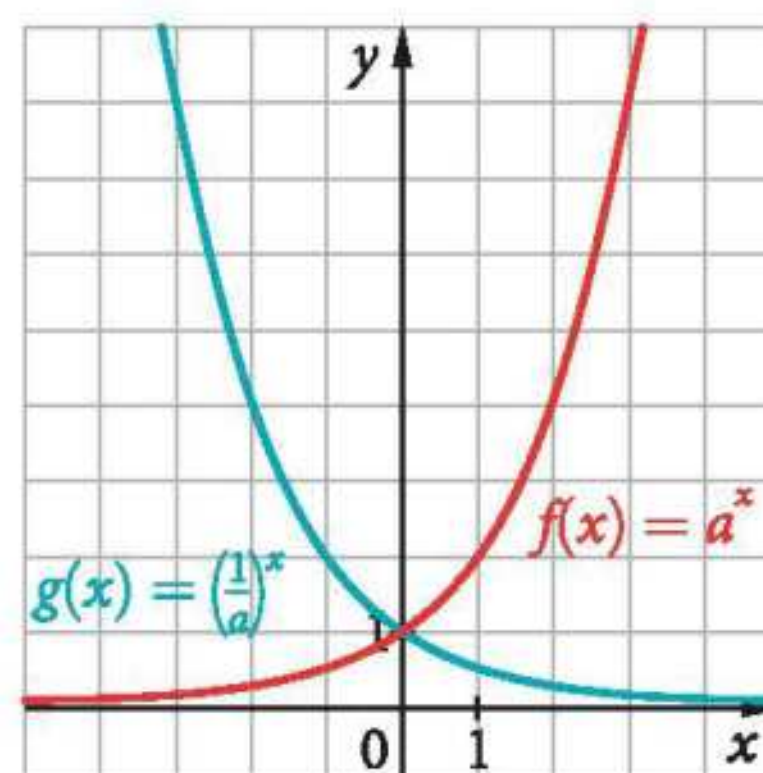
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (x^k) = k \cdot \log_a x$$

Wnioski, uwagi, komentarze...

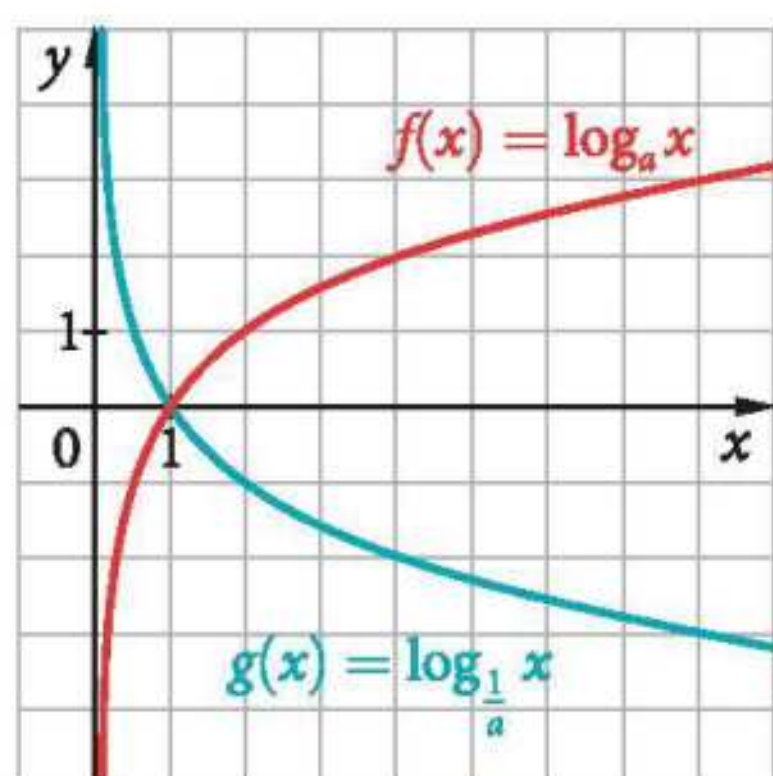
- Wykresy funkcji $f(x) = a^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ dla $a > 0$, $a \neq 1$ są symetryczne względem osi y .

Rysunek obok jest ilustracją przypadku, gdy $a > 1$.

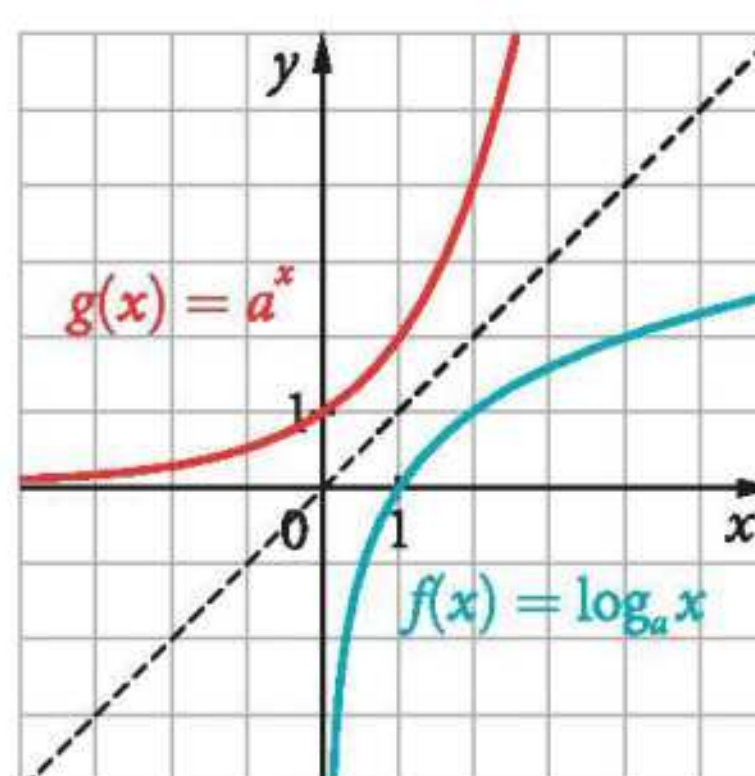


- Dla każdego $a > 0$ i $a \neq 1$:
 - $a^x = a^y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,
 - jeżeli $a \in (1; \infty)$, to $a^x > a^y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x > y$,
 - jeżeli $a \in (0; 1)$, to $a^x > a^y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < y$.
- Dla każdego $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $b > 0$:

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad a^{\log_a b} = b$$
- Wykresy funkcji $f(x) = \log_a x$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ dla $a > 0$ i $a \neq 1$ są symetryczne względem osi x (rys. 1 ilustruje przypadek, gdy $a > 1$).
- Wykresy funkcji $f(x) = \log_a x$ i $g(x) = a^x$, dla $a > 0$ i $a \neq 1$, są symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$ (rys. 2 ilustruje przypadek, gdy $a > 1$).



Rys. 1.



Rys. 2.

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.15 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Wiadomo, że $7^{x+1} = 49$. Wskaż wartość wyrażenia 4^{4x-1} .

A. 16 B. 1 C. 28 D. 64

5.2. Jeżeli $3 = a^x$, to $\frac{3}{a}$ jest równe

A. $3a^{x-1}$. B. a^{x+1} . C. a^{x-1} . D. 1.

5.3. Wiadomo, że $\log_x 9 = \frac{1}{2}$. Wskaż wartość x .

A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\sqrt{3}$ D. 81

5.4. Wskaż wartość wyrażenia $5^{\log_5 \frac{1}{125}}$.

- A. -3 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{1}{125}$ D. 5

5.5. Która z liczb jest równa liczbie $3^{\log_9 \frac{1}{81}}$?

- A. $\sqrt{3}$ B. 81 C. $\frac{1}{9}$ D. -9

5.6. Wskaż zależność fałszywą.

- A. $(\log_2 1 + \log_2 2)^2 = 1$
 B. $\log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 - \log 24 = 0$
 C. $\frac{\log 100 + \log 10}{\log 2 + \log 5} = 3$
 D. $\frac{\log 27}{\log 9} = \log 3$

5.7. Jeden z podanych zbiorów jest zbiorem rozwiązań równania $\log^2 10x = \log^2 100$. Wskaż ten zbiór.

- A. $\{-10, 10\}$ B. $\{1, 10\}$ C. $\{10\}$ D. $\left\{\frac{1}{1000}, 10\right\}$

5.8. Wskaż argument, dla którego funkcja $f(x) = 7^x$ przyjmuje wartość 14.

- A. $x = \log_7 14$ B. $x = 2$ C. $x = \log_{14} 7$ D. $x = \log_7 2$

5.9. Wskaż argument, dla którego funkcja $f(x) = 2^x$ przyjmuje wartość 24.

- A. $x = 3 + \log_2 3$ B. $x = 12$ C. $x = \log_{24} 2$ D. $x = \log_2 12$

5.10. Wskaż wzór funkcji malejącej.

- A. $f(x) = \left(\frac{7}{5}\right)^x$ C. $f(x) = -4^x$
 B. $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$ D. $f(x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^x$

5.11. Wskaż wzór funkcji g , której wykres powstanie w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ przez symetrię względem osi x .

- A. $g(x) = -\left(\frac{5}{3}\right)^x$ C. $g(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$
 B. $g(x) = -\left(\frac{3}{5}\right)^x$ D. $g(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^{-x}$

5.12. Wskaż wzór funkcji g , której wykres powstanie w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = 3^x - 1$ przez symetrię względem osi y .

A. $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$

C. $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

B. $g(x) = -3^x - 1$

D. $g(x) = -3^x + 1$

5.13. Wskaż dziedzinę funkcji $f(x) = |\log x|$.

A. $(0; \infty)$

B. $\mathbf{R}$

C. $(0; \infty) - \{1\}$

D. $\mathbf{R} - \{0\}$

5.14. Wskaż zbiór wartości funkcji $f(x) = 3^{-x} - 2$.

A. $\mathbf{R}$

B. $(0; \infty)$

C. $(-2; \infty)$

D. $(-\infty; -2)$

5.15. Wskaż dziedzinę funkcji $f(x) = \log |x - 5|$.

A. $\mathbf{R}$

B. $(5; \infty)$

C. $(-\infty; 5)$

D. $\mathbf{R} - \{5\}$

5.16. Dana jest funkcja $f(x) = 0,4^{-x} - 1$. **Oceń prawdziwość podanych zdań.**

A. Funkcja f jest malejąca.

B. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1; \infty \rangle$.

C. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 0.

5.17. Dane są liczby $a = \log_{\frac{2}{3}} 5$ i $b = \log_{\frac{2}{3}} 7$. **Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1 albo 2.**

Prawdziwa jest nierówność

A.	$a < b$,	ponieważ	1.	funkcja $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ jest rosnąca.
B.	$a > b$,		2.	funkcja $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ jest malejąca.

5.18. Oblicz.

a) $\log_3 9 - \log_2 16 + \log 100$

c) $\log_2 \sqrt[3]{2} + \log \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{125}$

b) $\log_2 0,25 + \log_3 \frac{1}{81} - \log 0,001$

d) $\log_2 \sqrt[5]{0,5} - \log \frac{1}{\sqrt[5]{1000}} + \log_7 1$

5.19. Oblicz.

a) $\log_3 6 + \log_3 12 - \log_3 8$

c) $\frac{\log_2 25 + \log_3 49}{\log_2 5 + \log_3 7}$

b) $2 \log_2 10 - \log_2 25 - 0,1 \log_2 2^{10}$

d) $\frac{2 \log_3 6 - \log_3 2}{\log_3 2 + 2}$

5.20. Oblicz.

a) $10^{\log 17}$

b) $5^{1-\log_5 3}$

c) $27^{\log_3 2}$

d) $2^{1+\log_4 5}$

5.21. Przyjmij, że $\log_{\frac{1}{2}} 7 = -2,8$, i oblicz $\log_{\frac{1}{2}} 70 - \log_{\frac{1}{2}} 5$.

5.22. Niech $\log_3 5 = p$. Wyznacz $\log_3 0,36$.

5.23. Niech $\log 8 = t$. Wyznacz $\log 25$.

5.24. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek: $\log_4 c = \log_3 b = \log_2 a = 2$. Oblicz $\sqrt{abc}$.

5.25. Porównaj liczby $a = \log_2 36 + \log_2 30 + \log_2 25$ i $b = 4 + \log_2 28 + \log_2 49$.

D 5.26. Niech $\log_{70} 5 = a$ i $\log_{70} 7 = b$. Wykaż, że $\log_{70} 4 = 2 - 2a - 2b$.

5.27. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = 2^x - 1$

c) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$

e) $f(x) = -3^x - 3$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

d) $f(x) = 4^{-x} + 2$

f) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} - 4$

5.28. Narysuj wykres funkcji $f(x) = 2 - 5^{x-1}$ i podaj największą oraz najmniejszą wartość tej funkcji przyjmowane w przedziale $\langle 3; 5 \rangle$.

5.29. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = a^x + b$. Kropkami zaznaczone są punkty kratowe wykresu.

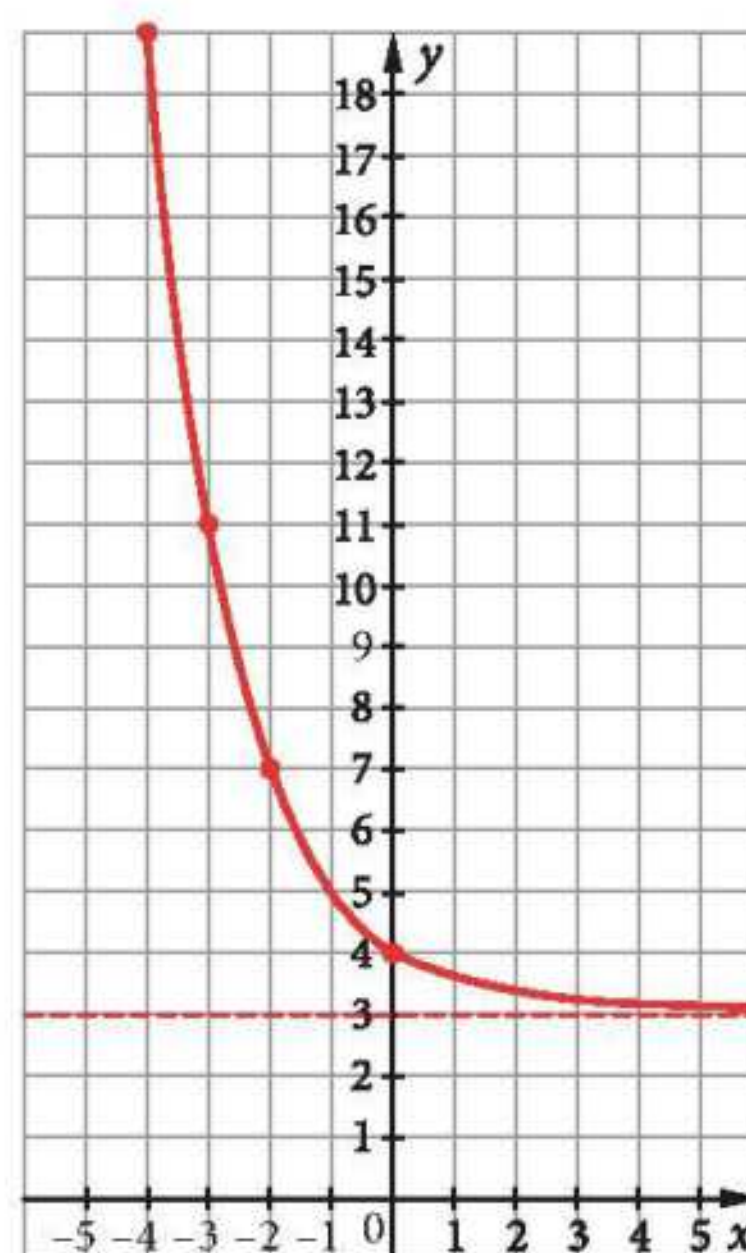
a) Na podstawie wykresu wyznacz a i b .

b) Podaj wzór funkcji g , której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi y .

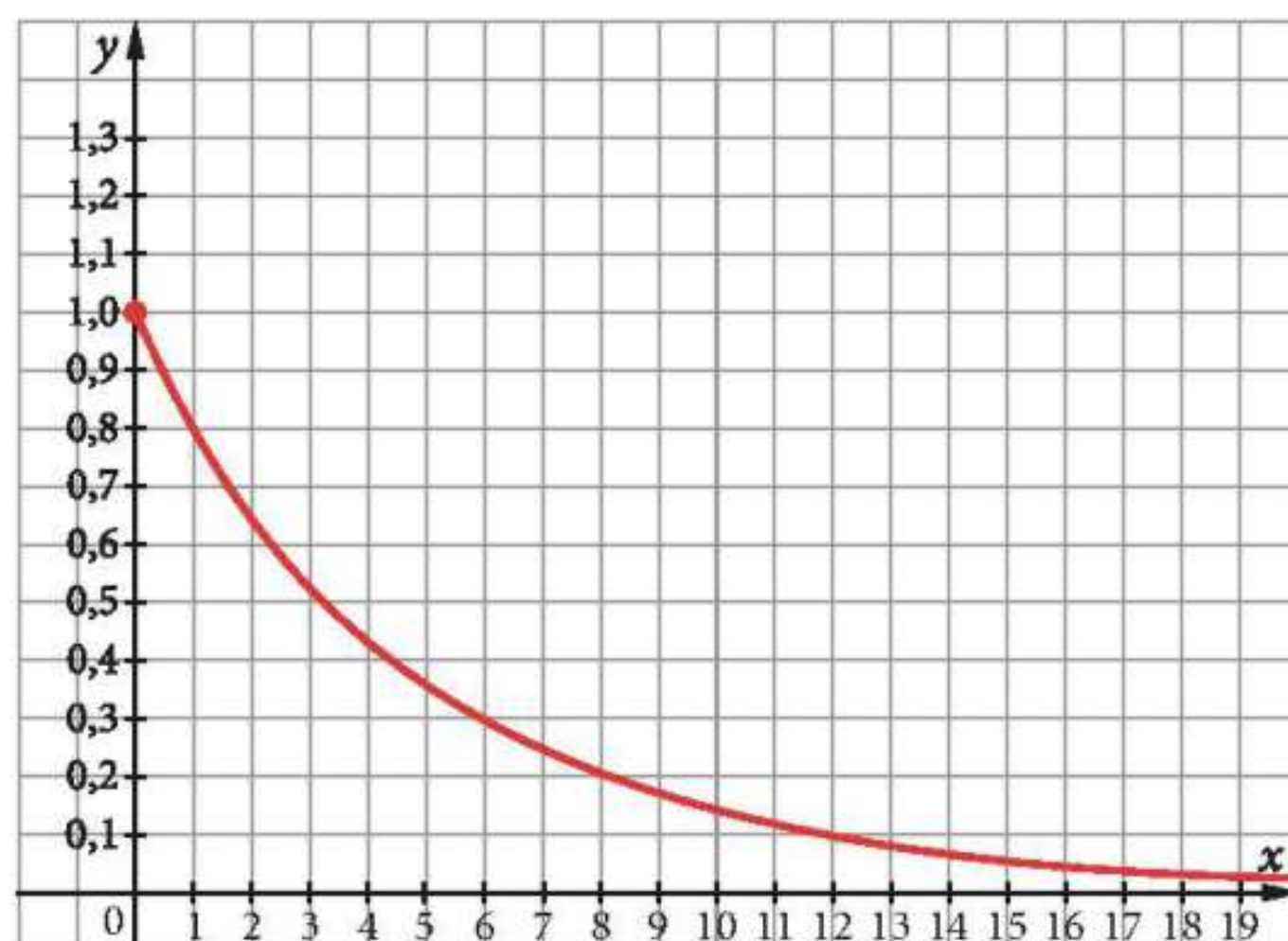
5.30. Pewien gatunek owadów co rok zwiększa trzykrotnie swoją liczebność. Przyjmijmy, że na początku populacja liczyła N osobników.

a) Zapisz wzór funkcji f opisującej liczebność populacji owadów po upływie x lat.

b) O ile procent zwiększy się liczebność populacji owadów po upływie półtora roku?



5.31. Na wykresie przedstawiono rozpad 1 grama pewnej substancji promieniotwórczej w zależności od czasu x mierzonego w latach.



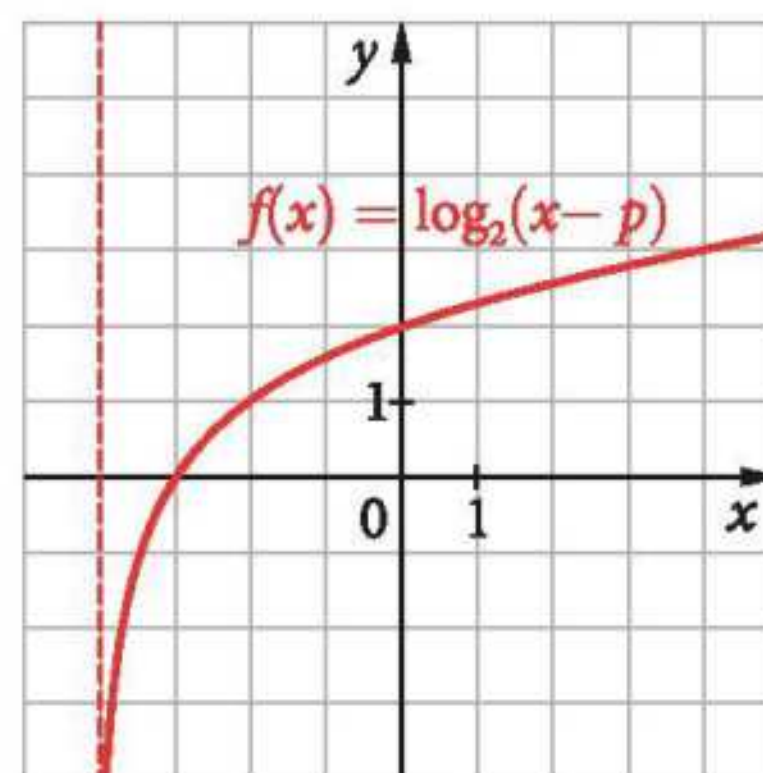
- a) Wzór funkcji opisującej masę tej substancji, która nie rozpadła się po upływie x lat, ma postać $f(x) = a^x$. Na podstawie wykresu wyznacz współczynnik a .
 b) Wyznacz przybliżony okres połowicznego rozpadu tej substancji.

5.32. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{dla } x < 0 \\ 2^{-x} - 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$ i odczytaj z wykresu najmniejszą wartość funkcji.

5.33. Wiadomo, że 1,5849 jest przybliżeniem liczby $10^{0,2}$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Wyznacz przybliżenie liczby $10^{-\frac{4}{5}}$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku oraz przybliżenie liczby $10^{\frac{11}{5}}$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

5.34. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_2(x - p)$.

- a) Na podstawie wykresu wyznacz wartość p .
 b) Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $y = -f(x)$.



5.35. Narysuj wykres odpowiedniej funkcji i odczytaj z niego zbiór rozwiązań nierówności.

- a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x} < \frac{1}{81}$ b) $\log_{\frac{1}{3}}(x + 4) > -2$

6. Ciągi liczbowe

Definicje

- **Ciągiem** nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór dodatnich liczb naturalnych. Ciąg nazywamy **liczbowym**, gdy jego wartości są liczbami rzeczywistymi.
- Jeżeli dziedzinę ciągu ograniczymy do pewnego skończonego zbioru początkowych liczb naturalnych dodatnich, to otrzymamy **ciąg skończony**.
- **Ciągiem arytmetycznym** nazywamy ciąg liczbowy o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje w wyniku dodania do wyrazu poprzedniego stałej liczby r , nazywanej **różnicą** tego ciągu.
- **Ciągiem geometrycznym** nazywamy ciąg liczbowy o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje w wyniku pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę q , nazywaną **ilorazem** ciągu.

Twierdzenia

- Jeżeli dla każdego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ mamy:
 - $a_{n+1} > a_n$, to ciąg (a_n) jest rosnący,
 - $a_{n+1} < a_n$, to ciąg (a_n) jest malejący,
 - $a_{n+1} \geq a_n$, to ciąg (a_n) jest niemalejący,
 - $a_{n+1} \leq a_n$, to ciąg (a_n) jest nierosnący.Ciąg liczbowy, który spełnia co najmniej jeden z powyższych warunków, jest ciągiem monotonicznym, pozostałe ciągi liczbowe są niemonotoniczne.
- **Wzór ogólny ciągu arytmetycznego** (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r ma postać: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$.
- Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , $n > 1$, prawdziwa jest zależność: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, czyli środkowy wyraz jest średnią arytmetyczną wyrazów z nim sąsiadujących.
- Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa:
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$
- **Wzór ogólny ciągu geometrycznego** (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

- Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , $n > 1$, prawdziwa jest zależność: $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.
- Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{dla } q \neq 1$$

$$S_n = n \cdot a_1 \quad \text{dla } q = 1$$

Wnioski, uwagi, komentarze...

- W ciągu arytmetycznym (a_n) zachodzi zależność $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ dla wszystkich $k < n$ i $k, n \in \mathbf{N} - \{0\}$.
- Ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 + (n - 1)r$ jest:
 - rosnący dla $r > 0$,
 - malejący dla $r < 0$,
 - stały dla $r = 0$.
- Średnia arytmetyczna wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego jest równa średniej arytmetycznej wyrazów pierwszego i ostatniego.
- Dany jest ciąg geometryczny o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 q^{n-1}$, w którym $a_1 \cdot q \neq 0$.
 - Jeżeli $q > 1$, to ciąg (a_n) jest malejący dla $a_1 < 0$ i rosnący dla $a_1 > 0$.
 - Jeżeli $0 < q < 1$, to ciąg (a_n) jest rosnący dla $a_1 < 0$ i malejący dla $a_1 > 0$.
 - Jeżeli $q = 1$, to (a_n) jest ciągiem stałym.
 - Jeżeli $q < 0$, to sąsiednie wyrazy ciągu mają różne znaki, zatem ciąg jest niemonotoniczny.

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.13 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Liczba ujemnych wyrazów ciągu określonego wzorem $a_n = (3n - 17)(2n + 3)$ dla $n \geq 1$ jest równa

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

6.2. Który z podanych ciągów ma wyraz równy 43?

- A. $a_n = 4n - 121$ C. $c_n = 4n - 123$
 B. $b_n = 4n - 122$ D. $d_n = 4n - 124$

6.3. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$, gdzie $n \in \mathbf{N} - \{0\}$.
Zatem

- A. $a_5 = 125$. B. $a_5 = 177$. C. $a_5 = 207$. D. $a_5 = 225$.

6.4. Dany jest ciąg (a_n) , w którym $a_n = (-1)^n \cdot (21 - 2n)$ dla $n \geq 1$. W tym ciągu

- A. $a_{11} = -1$. B. $a_{11} > 0$. C. $a_{11} = 0$. D. $a_{11} < -1$.

6.5. Piąty wyraz pewnego ciągu arytmetycznego jest równy 11, a trzynasty wyraz jest równy 35. Wskaż trzeci wyraz tego ciągu.

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

6.6. Ciąg (a_n) jest określony za pomocą układu warunków: $a_1 = 2$ i $a_{n+1} = \frac{2}{1 - a_n}$ dla $n \geq 1$. Wskaż czwarty wyraz tego ciągu.

- A. -2 B. 0 C. $\frac{2}{3}$ D. 6

6.7. Wskaż różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 5n - 11$ określonego dla $n \geq 1$.

- A. 5 B. -5 C. -6 D. -11

6.8. Ile wynosi suma $k - 1$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2n + 1$?

- A. $k^2 + 1$ B. $k^2 - 1$ C. $k^2 - 2k + 1$ D. $(k + 1)^2$

6.9. Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy m , a dwunasty jest równy n . Jaką postać ma dziewiąty wyraz tego ciągu?

- A. $\frac{n - m}{2}$ B. $\frac{1}{2}(m + n)$ C. $\frac{1}{3}(m + n)$ D. $\frac{m - n}{3}$

6.10. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_1 \neq 0$ i iloraz $q \neq 1$. Która z poniższych zależności jest prawdziwa?

- A. $\frac{a_9}{a_7} = \frac{a_{11}}{a_{13}}$ C. $2a_2 = a_1 \cdot a_3$
B. $a_7 - a_5 = a_{13} - a_{11}$ D. $a_5^2 = a_4 \cdot a_6$

6.11. Wskaż wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego o wyrazach $a_1 = 8$, $a_2 = 32$.

- A. $a_n = 2^{n-1}$ B. $a_n = 8 \cdot 4^n$ C. $a_n = 2^{2n-1}$ D. $a_n = 2^{2n+1}$

6.12. Dla jakiej wartości $x \in \mathbf{N}$ liczby: $x + 1$, $4x + 1$, $10x + 7$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny?

- A. $x = 1$ B. $x = 2$ C. $x = 3$ D. $x = 4$

6.13. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich, w którym $a_{17} = 4a_{15}$. Iloraz tego ciągu jest równy

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. 4.

W zadaniach 6.14–6.17 oceń prawdziwość podanych zdań.

6.14. Ciąg o wzorze ogólnym $a_n = 5n^2 - 7$, gdzie $n \in \mathbf{N} - \{0\}$,

- A. ma pięć wyrazów mniejszych od 100.
B. jest monotoniczny.
C. ma wszystkie wyrazy dodatnie.

6.15. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy $a_4 = 6\sqrt{3}$ i $a_7 = 54$.

- A. (a_n) jest ciągiem rosnącym.
B. (a_n) można określić wzorem $a_n = 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}}$.
C. a_{100} jest liczbą wymierną.

6.16. Ciąg liczbowy (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_n + 2} \end{cases}$$

- A. Ciąg (a_n) jest ciągiem stałym.
B. $a_3 = \frac{8}{13}$
C. $a_4 < 1$

6.17. Liczby $\log_2 4$, $\log_2 16$, $\log_2 256$ są

- A. kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
B. kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.
C. wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

6.18. Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = 4n^2 - 16$. Wskaż dwa zdania prawdziwe dotyczące tego ciągu.

- A. Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.
B. Ciąg (a_n) nie ma miejsc zerowych.
C. Tylko jeden wyraz ciągu (a_n) jest ujemny.
D. W ciągu (a_n) występuje wyraz równy 180.
E. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny.
F. Ciąg (a_n) jest geometryczny.

6.19. Ciąg liczbowy (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = -\frac{2}{a_n} \end{cases}$.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1, 2, 3 albo 4.

W opisanym ciągu zachodzi nierówność

A.	$a_{100} > 0,$	ponieważ	1.	wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.
			2.	wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są ujemne.
B.	$a_{100} < 0,$		3.	wyrazy ciągu (a_n) o numerach parzystych są dodatnie.
			4.	wyrazy ciągu (a_n) o numerach parzystych są ujemne.

6.20. Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - 2n - 24$?

6.21. Dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n prawdziwy jest wzór:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

Można z niego skorzystać, aby przedstawić ułamek postaci $\frac{n}{n+1}$ jako sumę różnych ułamków, z których każdy ma w liczniku 1, a w mianowniku liczbę naturalną, np. $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$.

- Ile składników ma suma po prawej stronie wzoru dla: $n = 5$, $n = 7$, $n = 100$?
- Sprawdź prawdziwość wzoru dla $n = 5$.
- Przedstaw liczby $\frac{6}{7}$ oraz $\frac{9}{10}$ w postaci sumy różnych ułamków, z których każdy ma w liczniku 1, a w mianowniku liczbę naturalną.

6.22. Zbadaj monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$.

6.23. Sprawdź, korzystając z definicji, czy ciąg o wyrazie ogólnym a_n jest arytmetyczny. Jeśli jest, wyznacz jego pierwszy wyraz i różnicę r .

- | | | |
|---------------------|----------------|------------------------------------|
| a) $a_n = 3n - 3$ | c) $a_n = 5n$ | e) $a_n = \frac{3 - 5n}{2}$ |
| b) $a_n = n(n - 1)$ | d) $a_n = 7^n$ | f) $a_n = \frac{9n^2 - 4}{3n + 2}$ |

6.24. Liczby x , y , 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, ponadto $x + y = 8$. Oblicz x i y .

6.25. W 9-wyrazowym ciągu arytmetycznym suma pierwszych trzech wyrazów jest równa 3, a suma ostatnich trzech jest równa 111. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

D 6.26. Wykaż, że dla każdego m ciąg $\frac{m+1}{4}, \frac{m+3}{6}, \frac{m+9}{12}$ jest arytmetyczny.

6.27. Liczby 2, $x - 3$, 8 są w podanej kolejności pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x .

6.28. Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz a_{15} .

6.29. Dany jest ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 5$ i $r = -2$. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu od dwudziestego do trzydziestego włącznie.

6.30. Suma pierwszych n wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy 4 jest o 400 mniejsza od sumy następnych n jego wyrazów. Oblicz n .

6.31. Pierwszy wyraz skończonego ciągu arytmetycznego wynosi 30, różnica jest równa -3 , a ostatni wyraz tego ciągu stanowi $\frac{1}{8}$ sumy wszystkich poprzednich wyrazów. Wyznacz liczbę wyrazów i sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

6.32. Pewien sprinter, biegający na dystansie 100 m, w pierwszej sekundzie po starcie przebiegł 7 m, a w każdej następnej o 0,1 m więcej niż w poprzedniej. W której sekundzie po starcie przekroczył on linię mety?

6.33. Długości boków trójkąta, którego jeden kąt ma miarę 120° , tworzą ciąg arytmetyczny. W jakim stosunku są boki tego trójkąta?

6.34. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_1 = x$, $a_2 = 3x + y$, $a_4 = 5x - 2y - 1$, $a_6 = 17$. Dla jakich n zachodzi równość $S_n = 260$?

6.35. W ciągu arytmetycznym stosunek wyrazu szóstego do trzeciego jest równy 7, a suma kwadratów wyrazów drugiego i czwartego jest równa 40. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać -64 ?

6.36. Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest równy $8 \cdot \log_3 \sqrt{3}$, a szósty wyraz tego ciągu jest równy $\frac{5 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - 7\sqrt{3}$. Ile początkowych wyrazów ciągu należy dodać, aby otrzymać 14 650?

6.37. Oblicz sumę $7 + (9 - \sqrt{2}) + (11 - 2\sqrt{2}) + \dots + (55 - 24\sqrt{2})$.

6.38. Składniki po lewej stronie równania:

$$(2x + 1) + (2x + 4) + (2x + 7) + \dots + (2x + 28) = 155$$

są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Rozwiąż to równanie.

6.39. Sprawdź, korzystając z definicji, czy ciąg o wyrazie ogólnym a_n jest geometryczny. Jeśli jest, wyznacz jego pierwszy wyraz i iloraz q .

a) $a_n = 5^n$ b) $a_n = \frac{4}{2^{3n}}$ c) $a_n = 1 + 3^n$ d) $a_n = n^n$

6.40. Liczby 64, x , 4 są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem malejącego ciągu geometrycznego. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

6.41. Na trzech półkach ustawiono 76 płyt kompaktowych. Okazało się, że liczby płyt na półkach górnej, środkowej i dolnej tworzą rosnący ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoją 24 płyty. Oblicz, ile płyt stoi na górnej półce, a ile – na dolnej.

6.42. Przy kopaniu szybu płaci się 100 zł za pierwszy metr głębokości, a za każdy następny o 50 zł więcej niż za poprzedni. Ponadto, jeżeli głębokość szybu przekracza 5 m, ryczałtowo dopłaca się 1000 zł. Końcowy średni koszt 1 m głębokości wykopu wyniósł 625 zł. Oblicz głębokość szybu.

6.43. Na wykonanie modelu prostopadłościanu o objętości 1728 cm^3 zużyto 1008 cm^2 blachy. Długości krawędzi prostopadłościanu tworzą ciąg geometryczny. Oblicz te długości.

✱ **6.44.** Piąty wyraz monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) jest odwrotnością wyrazu pierwszego, a wyraz czwarty jest sumą wyrazów drugiego i trzeciego. Oblicz drugi wyraz tego ciągu.

6.45. Ciąg 9, x , 19 jest arytmetyczny, a ciąg x , 42, y , z jest geometryczny. Oblicz x , y i z .

6.46. Ciąg 1, x , $y - 1$ jest arytmetyczny, a ciąg x , y , 12 jest geometryczny. Oblicz x i y .

6.47. Liczby a , b , c tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa 93. Te same liczby, w podanej kolejności, są pierwszym, drugim i siódmym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz a , b i c .

6.48. Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), wiedząc, że suma jego pierwszych pięciu wyrazów jest równa 10, a wyrazy trzeci, piąty i trzynasty tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny.

- D 6.49.** Wykaż, że jeżeli liczby b , c , $2b - a$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to liczby ab , b^2 , c^2 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.
- 6.50.** Długości trzech odcinków są wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Jaki warunek musi spełniać iloraz q tego ciągu, aby z tych trzech odcinków można było zbudować trójkąt?
- 6.51.** Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_7 = 1$, $a_{11} = 9$.
 a) Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n) .
 b) Sprawdź, czy ciąg o wyrazach a_7 , a_8 , a_{11} jest geometryczny.
 c) Wyznacz n , dla którego suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) ma najmniejszą wartość.
- 6.52.** Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + c = 10$, a ciąg $(a + 1, b + 4, c + 19)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a , b i c .
- 6.53.** Suma pierwszych dziesięciu wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazach całkowitych jest równa 155. Wyraz a_1 jest równy ilorazowi pewnego ciągu geometrycznego (b_n) o wyrazach całkowitych. Wyraz b_1 jest równy różnicy ciągu (a_n) . Suma pierwszych dwóch wyrazów ciągu (b_n) jest równa 9. Wyznacz oba ciągi.
-  **6.54.** Pani Krystyna wpłaciła do banku 15 000 zł na okres trzech lat. Oprocentowanie roczne w tym banku wynosiło 2,8% z kapitalizacją co pół roku. Po roku bank zmienił oprocentowanie na 2,7%, nie zmieniając okresu kapitalizacji. O ile mniej pieniędzy otrzyma pani Krystyna w wyniku tej zmiany?
-  **6.55.** Pan Michał wpłacił 5000 zł do banku, w którym oprocentowanie wkładów wynosiło 2,6% w skali roku, a kapitalizacja odsetek była roczna. Pieniądze te przeznaczył dla swego chrześniaka, więc postanowił nie ruszać ich przez wiele lat. Oblicz, jaki kapitał zostanie zgromadzony na koncie pana Michała po 18 latach, jeśli wysokość oprocentowania się nie zmieni.
-  **6.56.** W banku ogłoszono następujące oprocentowanie lokat w stosunku rocznym: lokata 12-miesięczna – 2,4%, lokata 6-miesięczna – 2,3%, lokata 3-miesięczna – 2,2%. Oblicz, ile wyniosą odsetki po upływie terminu lokaty, jeżeli wpłacimy
 a) kwotę 6000 zł na lokatę roczną.
 b) kwotę 12 000 zł na lokatę półroczną.
 c) kwotę 24 000 zł na lokatę trzymiesięczną.
-  **6.57.** Oprocentowanie lokaty półrocznej wynosi 2,4% w skali roku. Jaką kwotę należy wpłacić na taką lokatę, aby po upływie jej terminu odsetki wyniosły 360 zł?

7. Figury na płaszczyźnie

Definicje

- **Symetralna** odcinka to prosta prostopadła do niego i przechodząca przez jego środek.
- **Dwusieczna** kąta to półprosta o początku w wierzchołku kąta dzieląca ten kąt na dwa przystające kąty.
- **Wysokością** trójkąta nazywamy odcinek prostopadły do prostej zawierającej jeden z boków trójkąta, którego jeden koniec należy do tej prostej, a drugi jest przeciwległym wierzchołkiem trójkąta.
- **Środkową** boku trójkąta nazywamy odcinek łączący środek boku z przeciwległym wierzchołkiem.
- Wielokąt, którego wszystkie boki są równe i wszystkie kąty są równe, nazywamy **wielokątem foremnym**.
- Kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu, nazywamy **kątem środkowym** w tym okręgu.
- **Kątem wpisanym** w okrąg nazywamy kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a każde ramię kąta ma z tym okręgiem jeszcze jeden punkt wspólny.
- Okrąg, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki wielokąta, nazywamy **okręgiem opisanym na tym wielokącie**.
- Okrąg, który jest styczny do każdego boku wielokąta, nazywamy **okręgiem wpisanym w ten wielokąt**.
- **Podobieństwem** o skali $k > 0$ nazywamy każde przekształcenie płaszczyzny, w którym dla dowolnych punktów A, B płaszczyzny oraz ich obrazów A', B' zachodzi równość $|A'B'| = k \cdot |AB|$.

Twierdzenia

- **Twierdzenie Pitagorasa**
W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.
- **Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa**
Jeżeli w trójkącie kwadrat długości najdłuższego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków, to ten trójkąt jest prostokątny.



- **Cechy przystawiania trójkątów**

- Jeżeli dwa trójkąty mają odpowiednie boki równe, to są przystające. (bbb)
- Jeżeli w dwóch trójkątach dwa boki i kąt między nimi zawarty są odpowiednio równe, to te trójkąty są przystające. (bkb)
- Jeżeli w dwóch trójkątach bok i dwa kąty do niego przylegające są odpowiednio równe, to te trójkąty są przystające. (kbb)

- Symetralna odcinka jest zbiorem wszystkich punktów równo oddalonych od końców tego odcinka.

- Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków trójkąta. Jest to środek okręgu opisanego na tym trójkącie.

- Dwusieczna kąta wypukłego jest zbiorem wszystkich jego punktów wewnętrznych równo oddalonych od ramion tego kąta.

- Dwusieczne trzech kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest jednakowo oddalony od wszystkich boków trójkąta. Jest to środek okręgu wpisanego w ten trójkąt.

- Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten, tzw. środek ciężkości trójkąta, dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2:1$, licząc od wierzchołka.

- Trzy proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie, tzw. ortocentrum.

- Dwa okręgi są styczne zewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy odległość między ich środkami jest równa sumie ich promieni.

- Dwa okręgi są styczne wewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy odległość między ich środkami jest równa wartości bezwzględnej różnicy ich promieni.

- **Twierdzenie o odcinkach stycznych**

Jeżeli z punktu P leżącego poza okręgiem poprowadzimy dwie styczne do tego okręgu w punktach A i B , to $|PA| = |PB|$.

- Kąt wpisany równy jest połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

- ✂ • **Twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą**

Kąt α między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu opartemu na łuku zawartym między ramionami kąta α .

- **Twierdzenie Talesa**

Jeżeli ramiona kąta są przecięte dwiema prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta.

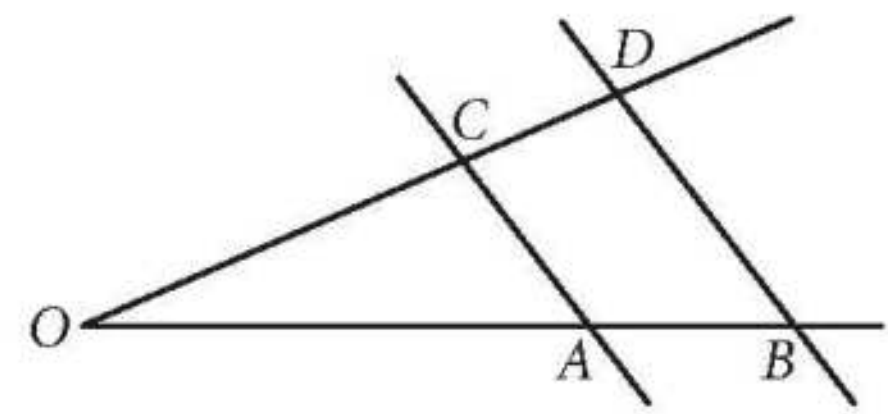


• Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli ramiona kąta COA są przecięte dwiema prostymi AC i BD w taki sposób, że odcinki OA i AB leżące na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odcinków OC i CD wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|},$$

to proste AC i BD są równoległe.



- Dwa wielokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie boki tych wielokątów są proporcjonalne i odpowiednie kąty są równe.
- **Cechy podobieństwa trójkątów**
 - Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.
 - Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąty między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.
 - Jeżeli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.
- Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali ich podobieństwa.

• Twierdzenie o dwusiecznej

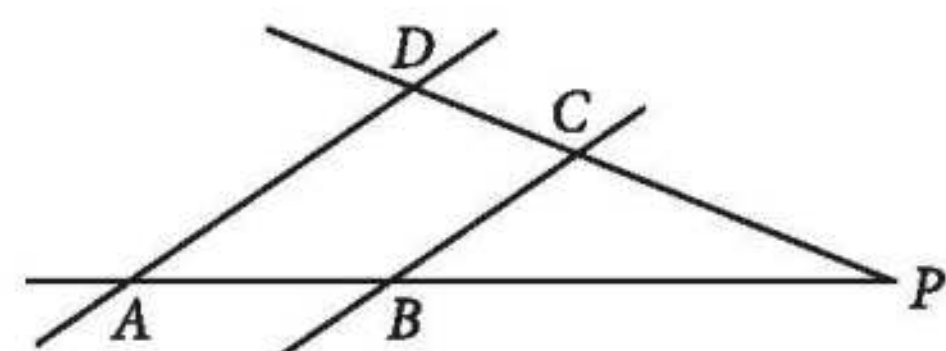
Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok trójkąta na odcinki proporcjonalne do boków przyległych do tego kąta.

- W trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego jest równy iloczynowi długości odcinków, na które ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Wszystkie kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe, ponieważ są równe połowie tego samego kąta środkowego.
- Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.
- Jeżeli proste AD i BC są równoległe, to:

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}, \quad \frac{|PA|}{|BA|} = \frac{|PD|}{|CD|}, \quad \frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$$



• **Wzory na pole trójkąta**

W dowolnym trójkącie ABC przyjmujemy oznaczenia:

a, b, c – długości boków,

α, β, γ – miary kątów wewnętrznych,

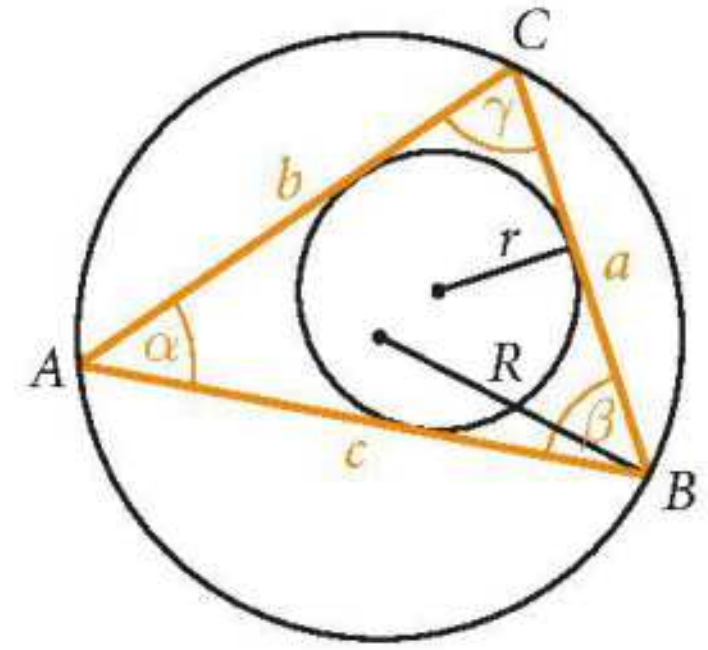
h_a, h_b, h_c – wysokości opuszczone odpowiednio na boki:

a, b, c ,

p – połowa obwodu trójkąta,

r – promień okręgu wpisanego,

R – promień okręgu opisanego.



Pole P trójkąta ABC można obliczyć za pomocą każdego ze wzorów:

$$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2}ac \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$$

$$P = p \cdot r$$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.18 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

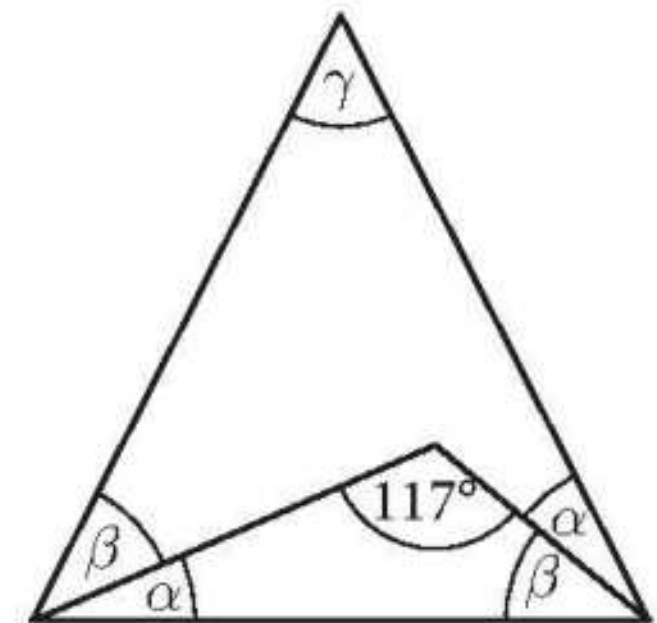
7.1. Trójkąt o bokach $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$

- | | |
|----------------------|------------------------|
| A. jest ostrokątny. | C. jest rozwartokątny. |
| B. jest prostokątny. | D. nie istnieje. |

7.2. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Wskaż miarę kąta γ .

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| A. $\gamma = 43^\circ$ | C. $\gamma = 54^\circ$ |
| B. $\gamma = 57^\circ$ | D. $\gamma = 117^\circ$ |



7.3. Obwód czworokąta wypukłego $ABCD$ jest równy 50 cm. Obwód trójkąta ABD jest równy 46 cm, a obwód trójkąta BCD jest równy 36 cm. Wskaż długość przekątnej BD .

- | | |
|----------|--|
| A. 12 cm | C. 14 cm |
| B. 16 cm | D. Jest za mało danych, aby to obliczyć. |

7.4. W trójkącie prostokątnym symetralna przeciwprostokątnej i środkowa wychodząca z wierzchołka kąta prostego tworzą kąt 22° . Zatem kąty ostre tego trójkąta mają miary

- A. $56^\circ, 34^\circ$. B. $68^\circ, 22^\circ$. C. $62^\circ, 28^\circ$. D. $54^\circ, 36^\circ$.

7.5. Średnica koła w rowerze jest równa 50 cm. Ile pełnych obrotów wykona to koło na dystansie 700 m?

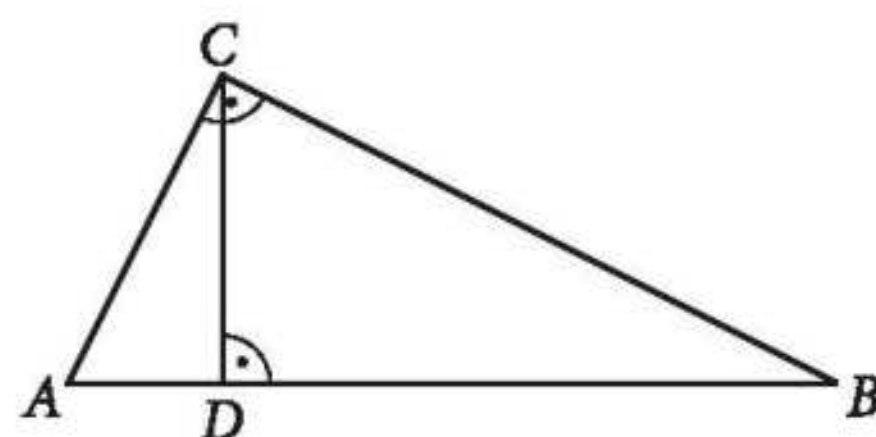
- A. 446 B. 892 C. 891 D. 445

7.6. W trójkącie ABC przedstawionym na rysunku:

$$|AB| = 10 \text{ i } |AD| : |DB| = 1 : 4.$$

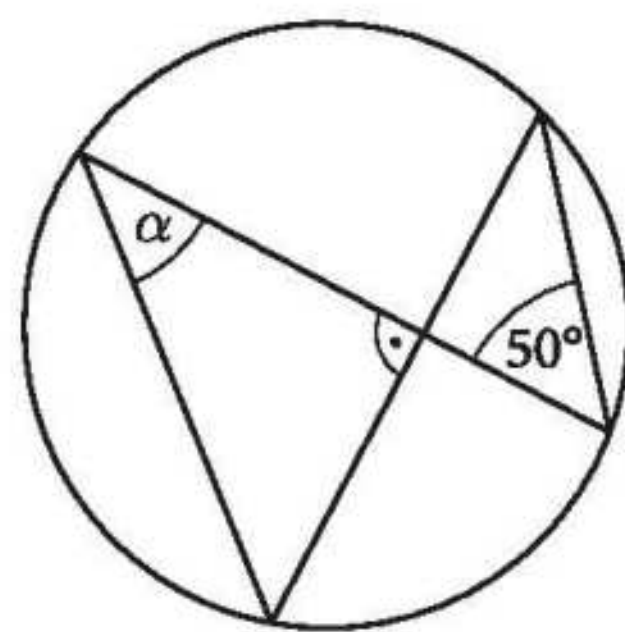
Jakiej długości są przyprostokątne tego trójkąta?

- A. 6 i 8 C. $2\sqrt{5}$ i $8\sqrt{5}$
B. $2\sqrt{10}$ i $2\sqrt{15}$ D. $2\sqrt{5}$ i $4\sqrt{5}$



7.7. Na rysunku przedstawiono okrąg i niektóre jego cięciwy. Na podstawie podanych informacji wskaż miarę kąta α .

- A. 40° B. 50° C. 60° D. 90°



7.8. W trójkącie ABC mamy $|AC| = |BC|$ oraz $\sphericalangle C = 40^\circ$. Wskaż miarę kąta rozwartego między dwusiecznymi kątów A i B .

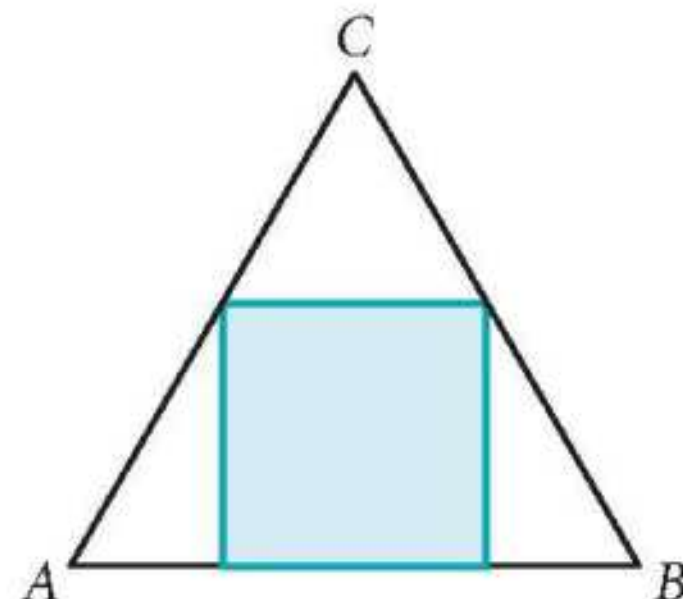
- A. 130° B. 120° C. 110° D. 100°

7.9. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC| = 10$ i $|AB| = 16$, środkowe przecinają się w punkcie S . Wskaż długość odcinka AS .

- A. $4\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{17}$ C. $2\sqrt{17}$ D. 4

7.10. Pole kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny ABC (zob. rysunek) jest równe 12. Wskaż długość boku trójkąta.

- A. $4\sqrt{3}$ C. $4 + 2\sqrt{3}$
B. $2 + 2\sqrt{3}$ D. 16



7.11. Prosta l jest styczna do okręgu o promieniu 5 cm. Ile jest okręgów o promieniu 3 cm stycznych zewnętrznie do tego okręgu i równocześnie stycznych do prostej l ?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

7.12. W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie mają miarę 30° , a wysokość opuszczona na tę podstawę jest równa 1. Wskaż promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. 2

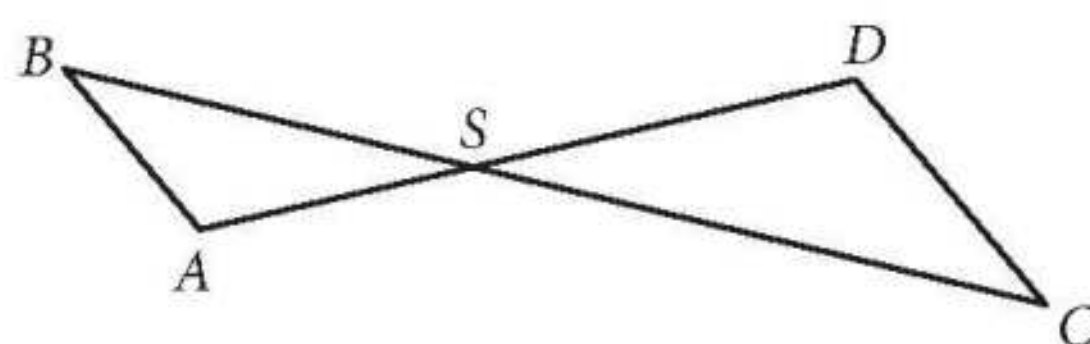
7.13. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC|$, wysokość poprowadzona z wierzchołka C jest równa 36 i $|AB| = 32$. Wskaż długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka B .

- A. 31 B. $18\sqrt{3}$ C. 30 D. $16\sqrt{3}$

7.14. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 12$, $|BC| = 10$, $|CA| = 11$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie D . Wskaż długość odcinka AD .

- A. 5 B. 5,5 C. 6 D. $\sqrt{30}$

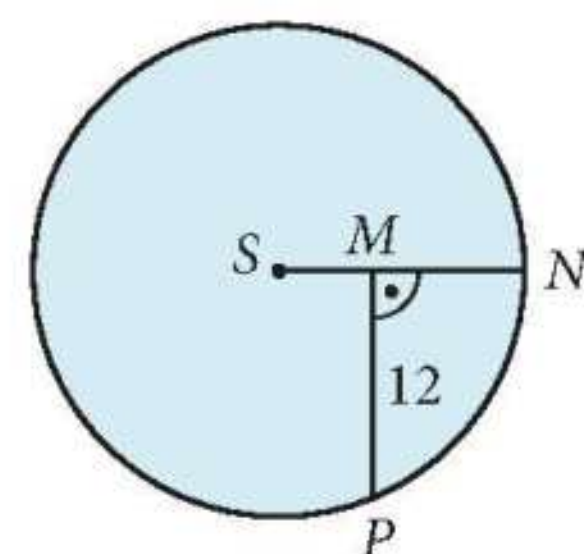
7.15. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wiadomo, że $AB \parallel CD$, $|AB| = 5$, $|BC| = 24$ oraz $|DC| = 7$. Wskaż długość odcinka BS .



- A. 14 B. 12 C. 10 D. 6

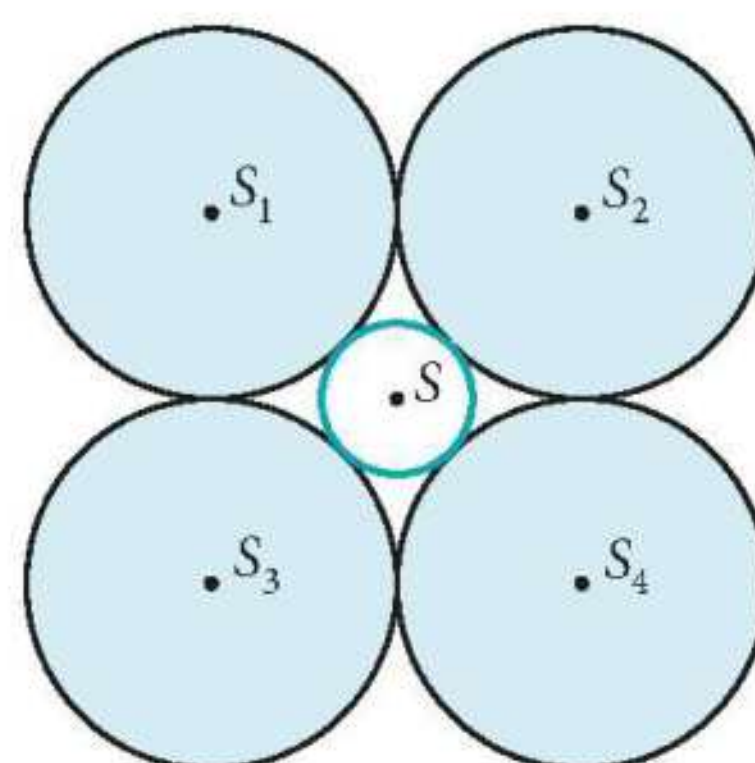
7.16. Pole koła o środku S przedstawionego na rysunku jest równe 169π . Długość odcinka MP wynosi 12. Wskaż długość odcinka NM .

- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5



7.17. Dane są cztery koła o równych promieniach, środkach S_1, S_2, S_3, S_4 , parami styczne zewnętrznie. Suma pól tych kół wynosi 16π . Ile jest równy promień okręgu o środku S stycznego zewnętrznie do każdego z wymienionych kół, położonego jak na rysunku?

- A. $4(\sqrt{2} - 1)$ C. $2(\sqrt{2} - 1)$
B. 0,5 D. 1



7.18. Drzewo rzuca cień o długości 12 m. Pionowo ustawiony drążek o wysokości 90 cm rzuca cień o długości 72 cm. Wskaż wysokość drzewa.

- A. $8\sqrt{2}$ m B. 16 m C. $8\sqrt{3}$ m D. 15 m

W zadaniach 7.19–7.23 oceń prawdziwość podanych zdań.

7.19. Figurę F tworzą: koło oraz dwa punkty nienależące do tego koła. Figura F

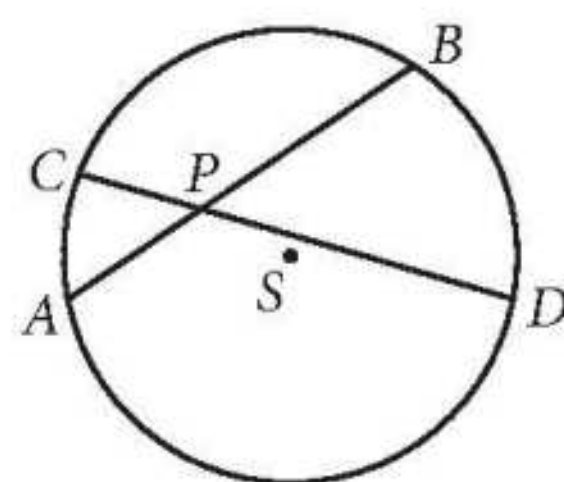
- A. ma zawsze dokładnie jeden środek symetrii.
- B. ma zawsze oś symetrii.
- C. może mieć oś symetrii.

7.20. W trójkącie ABC kąt przyległy do kąta ABC jest dwa razy większy od kąta BAC . Trójkąt ABC jest

- A. ostrokątny.
- B. równoramienny.
- C. rozwartokątny.

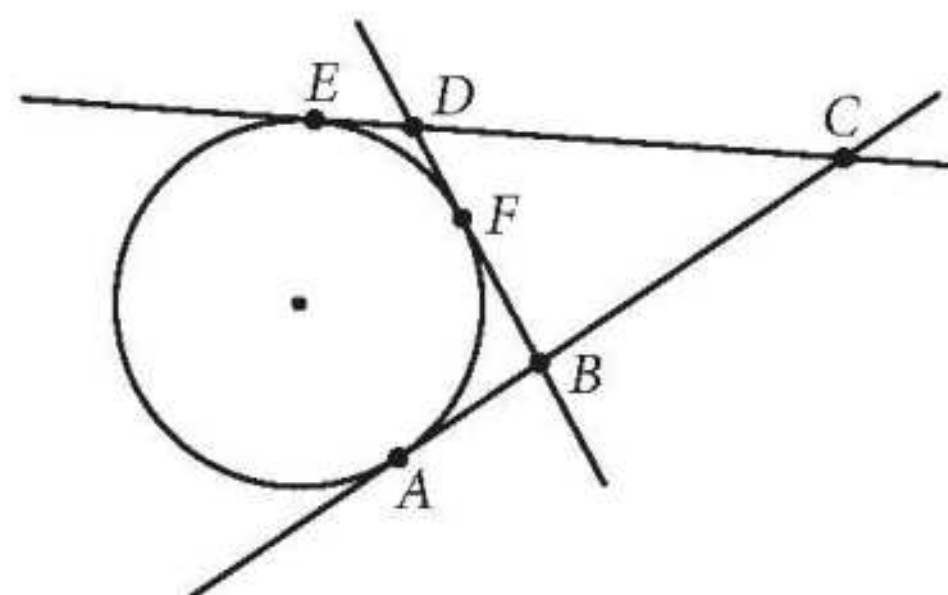
7.21. Cięciwy AB i CD okręgu o środku w punkcie S przecinają się w punkcie P , przy czym $|AB| \neq |CD|$ (zob. rysunek).

- A. $\sphericalangle APD = 2 \cdot \sphericalangle ABD$
- B. Trójkąty APC i DPB są podobne.
- C. Trójkąty ACB i DBC są podobne.



7.22. Proste BC , CD i DB są styczne do okręgu odpowiednio w punktach A , E i F (zob. rysunek).

- A. $|AB| = |BF|$
- B. $|ED| = |DF|$
- C. $|EC| = |AC|$



7.23. W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ przekątna BF ma długość 4.

- A. Pole tego sześciokąta jest równe $8\sqrt{3}$.
- B. Obwód tego sześciokąta wynosi $8\sqrt{3}$.
- C. Promień okręgu opisanego na tym sześciokącie jest równy $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

7.24. W trójkącie ABC dane są $|AB| = 8$ i $|BC| = |AC| = 5$. **Dokończ zdanie.**

Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy

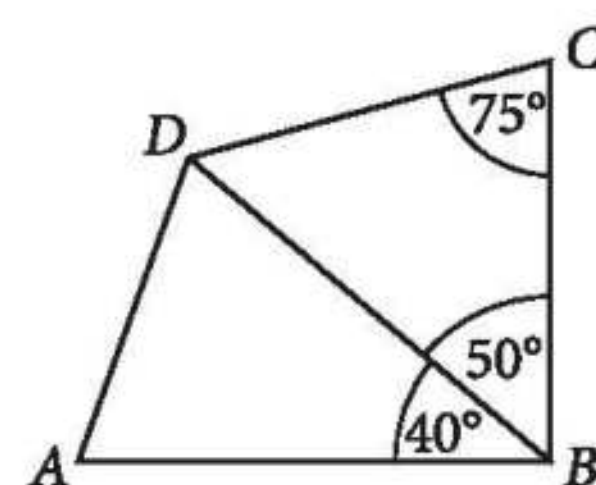
A.	2,	ponieważ	1.	trójkąt ABC jest prostokątny.
B.	4,		2.	wynika to z twierdzenia sinusów.
C.	$4\frac{1}{6}$,		3.	stanowi on $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta opuszczonej na podstawę.

7.25. Liczby 4, 10, c są długościami boków trójkąta równoramiennego. Oblicz c .

7.26. Liczby 6, 10, c są długościami boków trójkąta równoramiennego. Oblicz c .

7.27. Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramiennie w taki sposób, że $|AB| = |AD| = |CD|$. Oblicz miary kątów trójkąta ABC .

7.28. Na rysunku podano miary niektórych kątów w czworokącie $ABCD$, w którym $|AB| = |DB|$. Oblicz miarę kąta ADC .

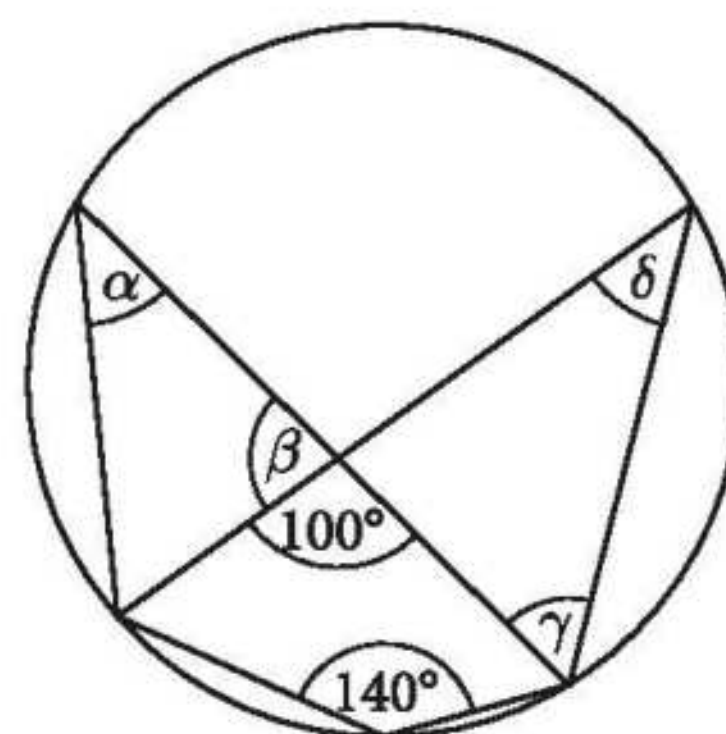


7.29. Pod wpływem silnego wiatru wysoka sosna pochyliła się do poziomu pod kątem 72° . Pod jakim kątem padają promienie słoneczne, jeżeli długość sosny równa jest długości jej cienia?

 **7.30.** W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 3,2$, $|AC| = 2,3$ i $\sphericalangle BAC = 72^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta. Podaj wynik z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

7.31. Koło o średnicy 72 cm toczy się po prostej drodze długości 5 m. Ile pełnych obrotów wykona koło?

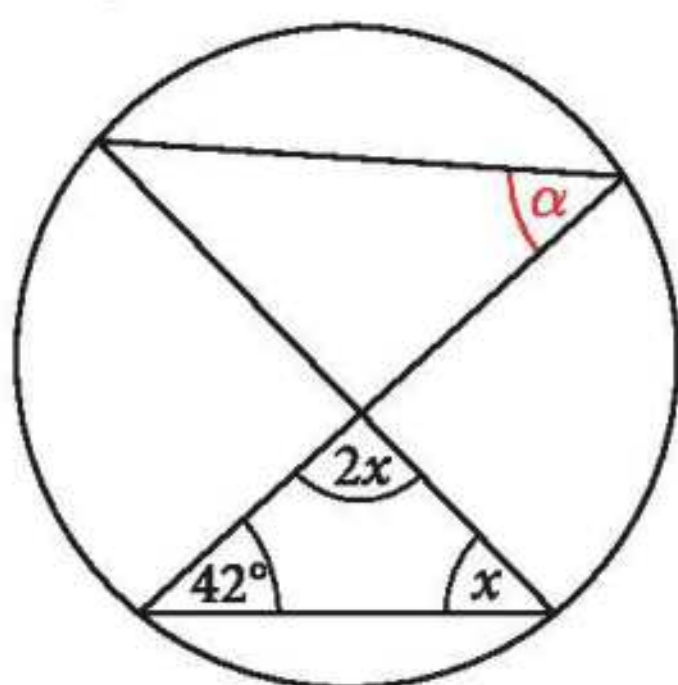
 **7.32.** Pięć jednakowych kół o promieniu 18 cm jest stycznych zewnętrznie do koła o promieniu r . Ponadto każde z nich jest styczne zewnętrznie do dwóch sąsiednich kół. Oblicz r z dokładnością do 0,1 cm.



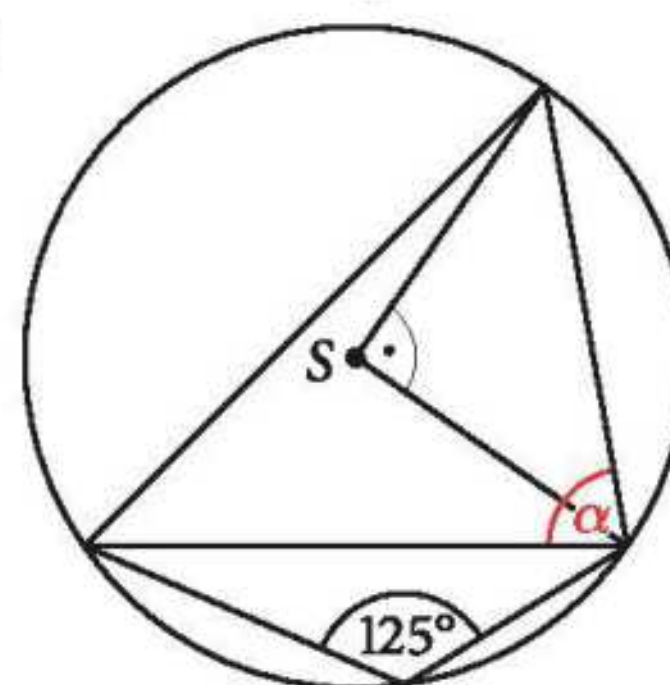
7.33. Na rysunku zaznaczono cięciwy w okręgu i niektóre kąty wyznaczone przez te cięciwy. Oblicz kąty: α , β , γ , δ .

7.34. Na rysunku zaznaczono cięciwy w okręgu i niektóre kąty wyznaczone przez te cięciwy. Oblicz miarę kąta α (punkt S jest środkiem okręgu).

a)



b)



7.35. W trójkącie ABC wysokość CD dzieli bok AB na odcinki o długościach $|AD| = 3$ cm i $|BD| = 5$ cm. Bok BC ma długość 7 cm. Na jakie części zostanie podzielony bok BC symetralną boku AB ?

7.36. W trójkącie ABC , w którym $|AB| = 16$, poprowadzono prostą równoległą do AB przecinającą bok AC w punkcie K i bok BC w punkcie L . Odcinek KL ma długość 12, a wysokość CE trójkąta KLC jest równa 15. Oblicz pole trapezu $ABLK$.

7.37. W trójkącie ABC poprowadzono odcinek RQ równoległy do boku AB (R leży na boku AC , Q leży na boku BC) i odcinek PQ równoległy do boku AC (P leży na boku AB). Dane są długości: $|PB| = 8$, $|QB| = 9$, $|PQ| = 7$, $|RQ| = 4$. Oblicz obwód trójkąta ABC .

7.38. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8, a $\sphericalangle BAC = 30^\circ$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

7.39. W trójkącie prostokątnym ABC dane są długości przyprostokątnych: $|AC| = 2,4$ i $|AB| = 3,2$. Z punktu K będącego środkiem boku AC poprowadzono odcinek KL ($L \in BC$) prostopadły do boku BC . Z punktu M będącego środkiem boku AB poprowadzono odcinek MN ($N \in BC$) prostopadły do boku BC . Oblicz długości odcinków KL i MN .

7.40. Stosunek długości przekątnych rombu jest równy $4 : 3$. Oblicz stosunek obwodu rombu do sumy długości jego przekątnych.

7.41. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC . Kąt ACS jest trzy razy większy od kąta BAS , a kąt CBS jest dwa razy większy od kąta BAS . Oblicz kąty trójkąta ABC .

7.42. Boki trójkąta opisanego na okręgu mają długości równe 10, 14 i 20. Oblicz odległości wierzchołków tego trójkąta od punktów styczności boków z okręgiem.

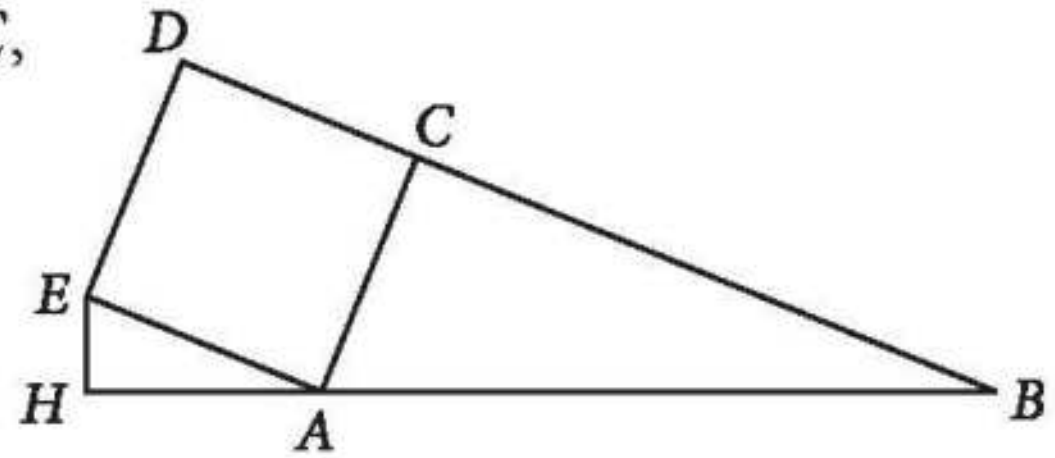
7.43. W okrąg o promieniu 3 cm wpisano kąt o mierze 30° . W punktach przecięcia okręgu z ramionami kąta poprowadzono styczne do tego okręgu. Oblicz odległość punktu przecięcia stycznych od środka okręgu.

D 7.44. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w koło o środku S . Przekątna AC jest średnicą koła, a kąt BSD ma miarę 102° . Wykaż, że kąt ostry tego czworokąta jest równy 51° .

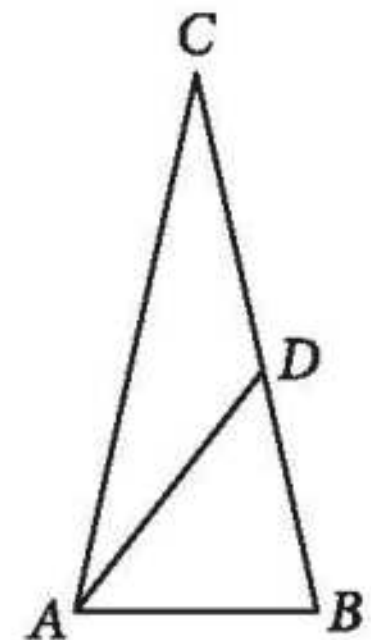
7.45. Środek podstawy trójkąta równoramiennego o ramionach długości 25 cm i podstawie równej 14 cm jest równocześnie środkiem okręgu stycznego do ramion trójkąta. Oblicz promień tego okręgu.

7.46. W trapezie opisanym na okręgu o promieniu 5,23 cm jeden z kątów jest prosty, a kąt ostry ma miarę 46° . Oblicz pole trapezu z dokładnością do 1 cm^2 .

7.47. Na zewnątrz trójkąta prostokątnego ABC , w którym $\angle ACB = 90^\circ$, $|AC| = 5$ i $|BC| = 12$, zbudowano kwadrat $ACDE$, jak na rysunku. Punkt H leży na prostej AB i $\angle EHA = 90^\circ$. Oblicz pole trójkąta HAE .



7.48. Punkt D leży na boku BC przedstawionego na rysunku trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$. Udowodnij, że $\angle ADC = 5 \cdot \angle ACD$.

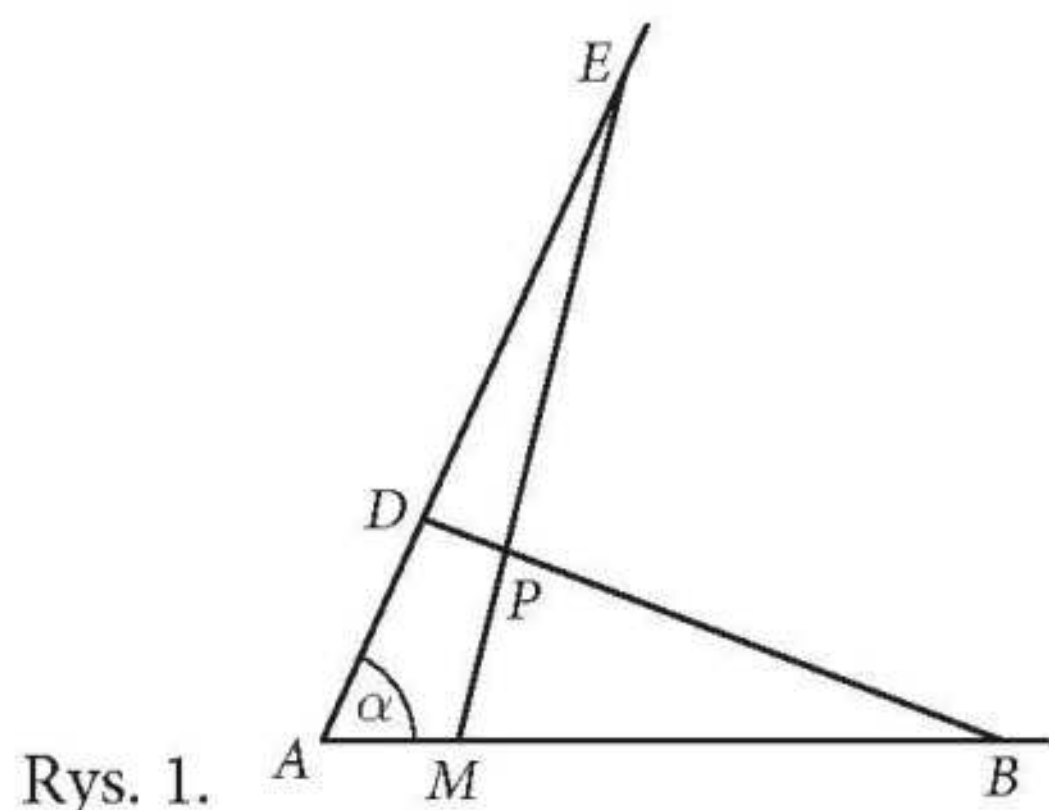


7.49. W trapezie $ABCD$ dane są: $AC = 5$, $\angle DAC = \angle ABC = 30^\circ$. Proste AD i BC , w których zawierają się ramiona trapezu, są prostopadłe. Oblicz pole trapezu.

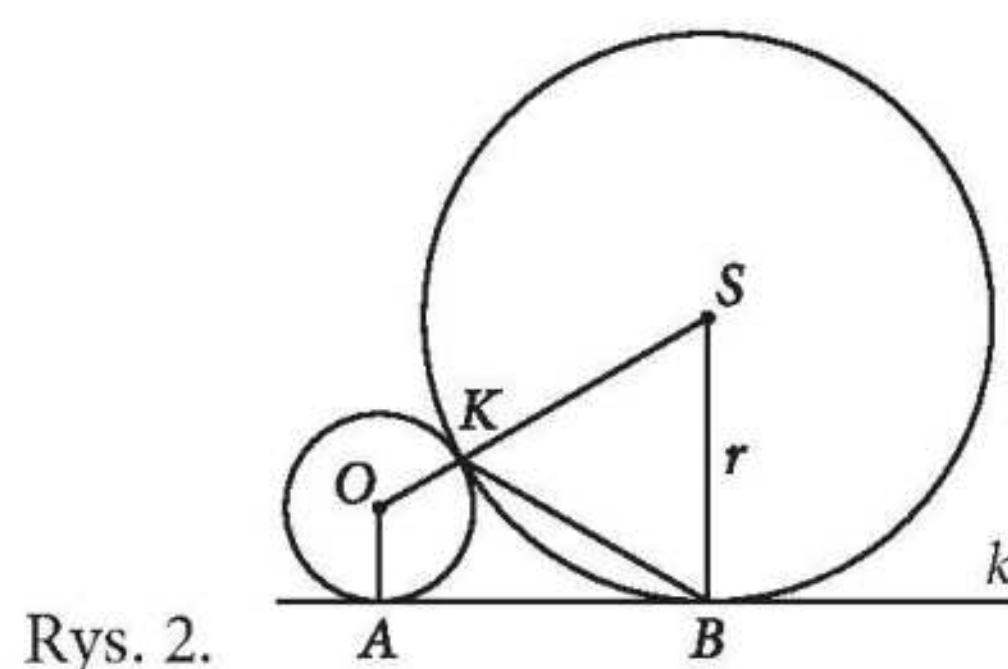
7.50. W trójkącie równobocznym ABC poprowadzono odcinek AD taki, że punkt D leży na boku BC . Stosunek pola trójkąta ADC do pola trójkąta ADB jest równy $1 : 3$. Wyznacz tangens kąta DAB .

- ✱ **7.51.** Oblicz stosunek promienia koła opisanego na ośmiokącie foremnym do promienia koła wpisanego w ten ośmiokąt.
- ✱ **7.52.** Prosta równoległa do boku AB trójkąta ABC przecina bok AC w punkcie M i dzieli trójkąt na części o równych polach. Wyznacz stosunek $|AM| : |MC|$.
- ✱ **7.53.** Dany jest trójkąt ABC , w którym wysokość CD równa 5 cm dzieli bok AB na dwie części: $|AD| = 4 \text{ cm}$ i $|DB| = 8 \text{ cm}$. Znajdź długość odcinka równoległego do CD , którego końce leżą na bokach trójkąta i który dzieli ten trójkąt na części o równych polach.
- ✱ **7.54.** Okrąg przechodzący przez wierzchołek kąta ostrego i wierzchołki kątów rozwartych rombu dzieli przekątną rombu na odcinki o długościach 25 cm i 7 cm. Oblicz pole rombu.
- ✱ **7.55.** W równoległoboku $ABCD$ dane są: $|AB| = |BD| = a$ oraz $|AC| = 2a$. Oblicz długość boku AD oraz cosinus kąta ostrego α utworzonego przez przekątne równoległoboku.
- 7.56.** Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ i $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .

- D** **7.57.** Na rysunku 1 przedstawiono kąt α o wierzchołku A . Na jednym ramieniu tego kąta wybrano punkty D i E takie, że $|AE| = 3|AD|$, a na drugim – punkty M i B takie, że $|MB| = 4|AM|$. Odcinek ME przecina odcinek BD w punkcie P . Wykaż, że $|BP| = 6|PD|$.

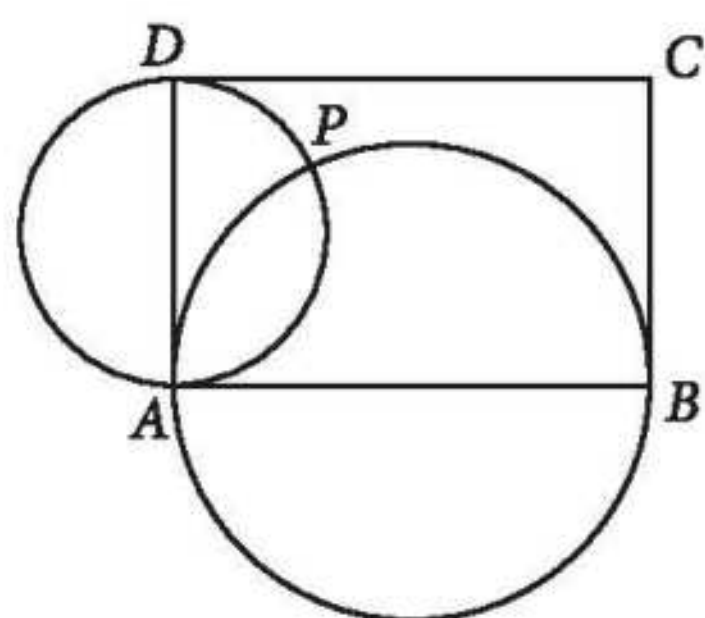


Rys. 1.

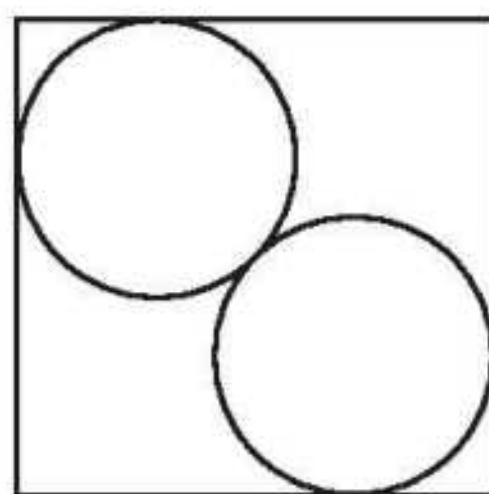


Rys. 2.

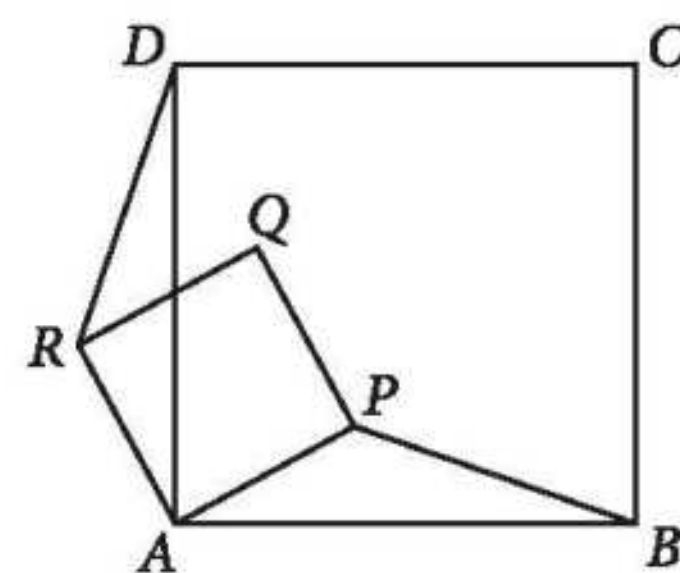
- D** **7.59.** Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Udowodnij, że $MQ \parallel PN$.
- D** **7.60.** Dany jest prostokąt $ABCD$ (rys. 3). Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P , jak na rysunku. Wykaż, że punkty B, P i D leżą na jednej prostej.
- D** **7.61.** W kwadrat o boku 1 wpisano dwa przystające okręgi o promieniu r styczne zewnętrznie i styczne do boków kwadratu, jak na rysunku 4. Wykaż, że $r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- D** **7.62.** Czworokąty $ABCD$ i $APQR$ na rysunku 5 są kwadratami. Udowodnij, że $|BP| = |DR|$.



Rys. 3.



Rys. 4.



Rys. 5.

- 7.63.** Oblicz długość dłuższej przekątnej równoległoboku, którego boki mają długości 9 i 4, a kąt ostry ma miarę 45° .



8. Geometria analityczna

Definicje

- Równanie $y = ax + b$ o zmiennych x, y nazywamy **równaniem prostej w postaci kierunkowej**. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** tej prostej.
- Równanie $Ax + By + C = 0$ o zmiennych x, y , w którym A i B nie są jednocześnie równe 0, nazywamy **równaniem prostej w postaci ogólnej**.

Twierdzenia

- Środkiem odcinka o końcach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest punkt $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.
- Środkiem ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ jest punkt $S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$.
- Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest nachylona do osi x pod takim kątem α , że $\operatorname{tg} \alpha = a$.
- Odległość między punktami $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest równa $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ ($a_1a_2 \neq 0$) są:
 - równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$,
 - prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = -\frac{1}{a_2}$.
- Prosta l jest równoległa do prostej $k: Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $Ax + By + C_1 = 0$. Ponadto jeżeli $C = C_1$, to $k = l$, a jeżeli $C \neq C_1$, to $k \neq l$.
- Prosta l jest prostopadła do prostej $k: Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $Bx - Ay + C_1 = 0$.
- Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) jest równa $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

- Równanie $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ($r > 0$) opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej okrąg o środku $S = (a, b)$ i promieniu r .
- Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii osiowej względem osi x jest punkt $A' = (x, -y)$.
- Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii osiowej względem osi y jest punkt $A' = (-x, y)$.
- Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest punkt $A' = (-x, -y)$.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Równanie $Ax + By + C = 0$ opisuje:
 - całą płaszczyznę, gdy $A = B = C = 0$,
 - zbiór pusty, gdy $A = B = 0$ i $C \neq 0$,
 - prostą, gdy A i B nie są jednocześnie równe 0.
- Jeżeli mamy wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, to najpierw sprawdzamy, czy pierwsze współrzędne tych punktów są równe – jeśli tak, prosta ma równanie postaci $x = c$. Jeśli pierwsze współrzędne tych punktów są różne, korzystamy z postaci kierunkowej równania prostej: $y = ax + b$.
- Nierówność $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$ ($r > 0$) opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej **koło o środku** $S = (a, b)$ **i promieniu** r . Nierówność $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ opisuje zbiór punktów leżących na zewnątrz tego koła.

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.20 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

8.1. Punkt $(-1, 7)$ jest środkiem odcinka AB , w którym $A = (3 - 2\sqrt{7}, \sqrt{3})$. Wskaż współrzędne punktu B .

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| A. $(-5 - 2\sqrt{7}, 7 - \sqrt{3})$ | C. $(-5 - 2\sqrt{7}, 14 - \sqrt{3})$ |
| B. $(5 + 2\sqrt{7}, 14 - \sqrt{3})$ | D. $(-5 + 2\sqrt{7}, 14 - \sqrt{3})$ |

8.2. Odległość punktu przecięcia prostych $y = -3$ oraz $2x + y = 7$ od początku układu współrzędnych jest równa

- | | | | |
|-------|-------------------|------------------|------------------|
| A. 8. | B. $2\sqrt{17}$. | C. $\sqrt{34}$. | D. $2\sqrt{2}$. |
|-------|-------------------|------------------|------------------|

8.3. Wierzchołkami trójkąta są punkty $A = (-3, 4)$, $B = (1, -2)$, $C = (5, 8)$. Wskaż długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka B .

- A. 4 B. $2\sqrt{2}$ C. 8 D. $2\sqrt{17}$

8.4. Wskaż równanie prostej, która tworzy z osią x kąt o mierze 120° .

- A. $y = \sqrt{3}x - 3$ B. $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ C. $y + \sqrt{3}x = \sqrt{3}$ D. $2y + x + 4 = 0$

8.5. Wskaż środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (-5, -1)$, $B = (7, 3)$, $C = (1, 7)$.

- A. (2, 3) B. (1, 4) C. $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ D. (1, 3)

8.6. Ile wynosi pole czworokąta $ABCD$, w którym $A = (-1, -1)$, $B = (6, -1)$, $C = (6, 3)$, $D = (-1, 3)$?

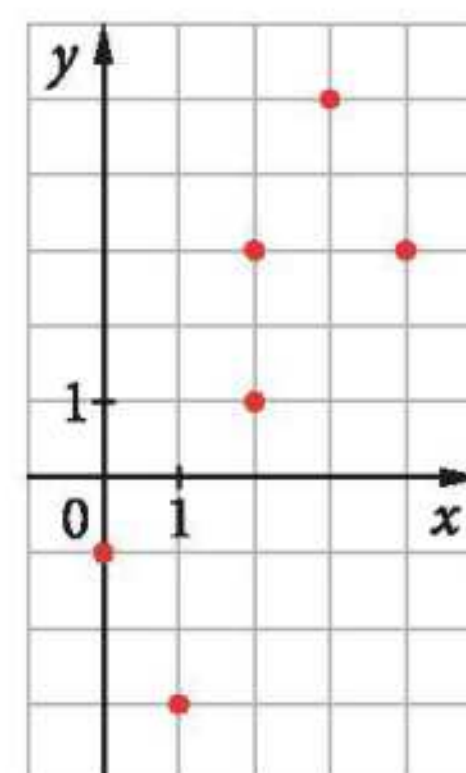
- A. 18 B. 28 C. 30 D. 48

8.7. Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach $x - 1 = 0$, $y + 4 = 0$, $2x - y = 0$. Pole tego trójkąta jest równe

- A. $3\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{10}$. C. 9. D. 4,5.

8.8. Która z prostych nie przechodzi przez żaden z punktów kratowych zaznaczonych na rysunku?

- A. $x - y - 1 = 0$ C. $2x - y - 1 = 0$
B. $4x - y - 7 = 0$ D. $x - 2y + 1 = 0$

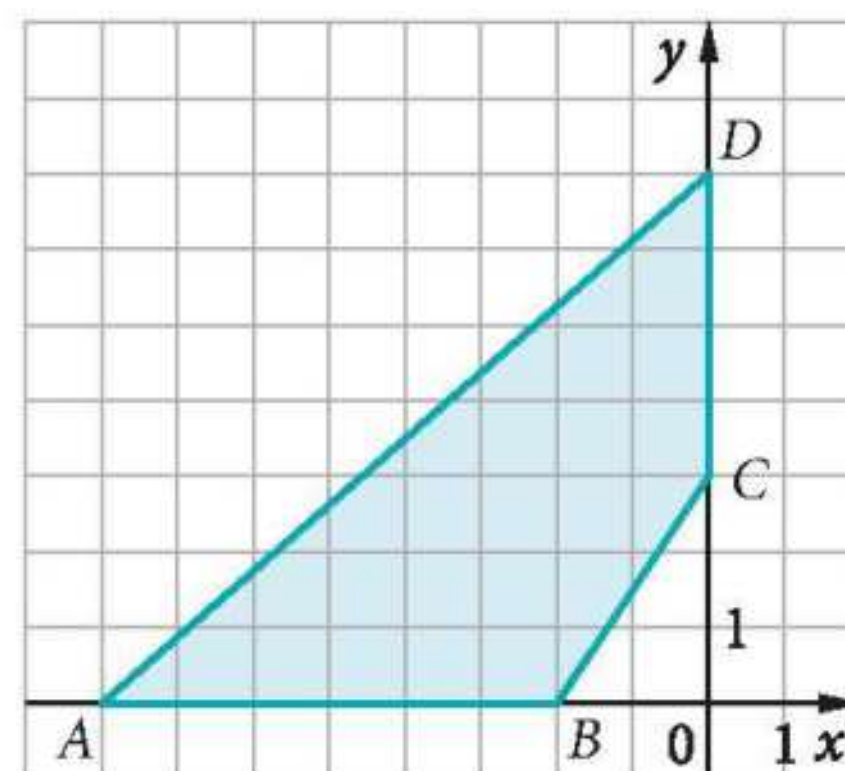


8.9. Wskaż odległość między prostymi $3x + y = 1$ i $3x + y = 6$.

- A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

8.10. Pole czworokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku jest równe

- A. 25. C. 12,5.
B. 50. D. $12\sqrt{3}$.



8.11. Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ z osiami układu współrzędnych jest równa

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

8.12. Wskaż punkt nienależący do okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + y^2 - 9 = 0$.

- A. $(1, \sqrt{5})$ B. $(6, 0)$ C. $(1, -\sqrt{5})$ D. $(1, \sqrt{2})$

8.13. Odległość między środkami okręgów o równaniach $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ oraz $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 6$ jest równa

- A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{13}$. C. $2 + \sqrt{6}$. D. 10.

8.14. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą nierówności $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 \leq 0$?

- A. zbiór pusty C. zbiór jednoelementowy
B. koło D. okrąg

8.15. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x - 4)^2 + (y + 2)^2 \leq 4 \\ y + x = 2 \end{cases}$?

- A. odcinek B. koło C. półpłaszczyzna D. zbiór pusty

8.16. Prosta o równaniu $3x - y + 20 = 0$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $S = (3, -1)$. Wskaż promień tego okręgu.

- A. 9 B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{30}$ D. $3\sqrt{10}$

8.17. Okrąg o równaniu $(x + 9)^2 + (y - 4)^2 = 11$ przekształcono przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

- A. $(x - 9)^2 + (y - 4)^2 = 11$ C. $(x - 9)^2 + (y + 4)^2 = 11$
B. $(x + 9)^2 + (y + 4)^2 = 11$ D. $(x - 4)^2 + (y + 9)^2 = 11$

8.18. Wskaż równanie okręgu, który jest styczny do osi układu współrzędnych w punktach $P = (5, 0)$ i $Q = (0, -5)$.

- A. $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 5$ C. $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$
B. $(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$ D. $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$

8.19. Trójkąt $A'B'C'$ jest obrazem trójkąta o wierzchołkach $A = (-3, -1)$, $B = (7, -2)$, $C = (2, 6)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wskaż współrzędne środka ciężkości trójkąta $A'B'C'$.

- A. $(-2, -1)$ B. $(2, 1)$ C. $(-2, 1)$ D. $(2, -1)$

8.20. Wskaż równanie prostej, która nie jest osią symetrii kwadratu o wierzchołkach $(-5, -1)$, $(1, -5)$, $(5, 1)$, $(-1, 5)$.

- A. $2y = 3x$ B. $x - 5y = 0$ C. $2x + 5y = 0$ D. $2x + 3y = 0$

W zadaniach 8.21–8.24 oceń prawdziwość podanych zdań.

8.21. Dany jest punkt $S = (0, -8)$.

A. Okrąg $o(S, \sqrt{3})$ można opisać za pomocą równania $x^2 + (y + 8)^2 = 3$.

B. Punkt $N = (1, -8)$ należy do koła $k(S, \sqrt{3})$.

C. Punkt $M = (0, \sqrt{3} - 8)$ należy do okręgu $o(S, \sqrt{3})$.

8.22. Dany jest okrąg o środku $S = (-3, 7)$ i promieniu $r = 5$ oraz prosta $k: 4y - 3x = 12$.

A. Prosta k jest styczna do okręgu $o(S, r)$.

B. Prosta k przecina okrąg $o(S, r)$.

C. Figura utworzona przez prostą k i okrąg $o(S, r)$ ma dokładnie jedną oś symetrii.

8.23. Zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej opisany za pomocą układu warunków

$$\begin{cases} (x + 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 4 \\ y = 3 + 2x \end{cases}$$

A. jest odcinkiem. B. ma dokładnie dwie osie symetrii. C. jest zbiorem pustym.

8.24. Po przekształceniu okręgu F przez symetrię osiową względem osi x otrzymano okrąg F' . Figura będąca sumą okręgów F i F'

A. ma zawsze dokładnie dwie osie symetrii.

B. może mieć tylko jedną oś symetrii.

C. może mieć nieskończenie wiele osi symetrii.

8.25. Figura F jest sumą prostej $k: 2x + y + 4 = 0$ i okręgu $o: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 6$.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.

Figura F

A.	nie ma osi symetrii,	ponieważ	1.	prosta k przechodzi przez środek okręgu o .
B.	ma jedną oś symetrii,		2.	prosta k jest styczna do okręgu o .
C.	ma dwie osie symetrii,		3.	prosta k nie ma punktów wspólnych z okręgiem o .

8.26. Naszkicuj w układzie współrzędnych prostą o danym równaniu kierunkowym i napisz jej równanie w postaci ogólnej.

a) $y = \frac{2}{3}x + 2$

b) $y = -2$

c) $y = -3x + 1$

d) $y = 0,25x - 2$

8.27. Dane równanie prostej zapisz w postaci kierunkowej.

a) $2x - 5y + 15 = 0$

c) $\sqrt{3}x + 3y - 1 = 0$

b) $2x - 3y - 6 = 0$

d) $3\sqrt{2}x + 6y - 1 = 0$

8.28. Wyznacz kąt nachylenia do osi x prostej o podanym równaniu.

a) $y = x - 3$

b) $y = \sqrt{3}x$

c) $y = -x + 2$

d) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$

8.29. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B .

a) $A = (-2, -3), B = (5, -3)$

c) $A = (2, -1), B = (2, 3)$

b) $A = (-1, 4), B = (2, -2)$

d) $A = (-3, -5), B = (2, 4)$

8.30. Sprawdź, czy punkty A, B, C są współliniowe.

a) $A = (1, 2), B = (0, -1), C = (-1, -4)$

b) $A = (-1, 5), B = (2, 2), C = (3, 1)$

c) $A = (0, 0), B = (1, -3), C = (2, -5)$

8.31. Napisz równania boków trójkąta o danych wierzchołkach A, B, C .

a) $A = (-3, -3), B = (3, -1), C = (1, 5)$

b) $A = (-2, 2), B = (0, 5), C = (-2, 11)$

8.32. Wyznacz równanie prostej równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt P .

a) $k: y = 2x - 1, P = (3, 2)$

c) $k: 2x + 3 = 0, P = (2, 5)$

b) $k: 2x - y + 5 = 0, P = (-1, 1)$

d) $k: y - \sqrt{7} = 0, P = (3, 0)$

8.33. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P .

a) $l: y = 3x, P = (0, 2)$

c) $l: x - 5y + 2 = 0, P = (-1, 2)$

b) $l: y = -\frac{1}{2}x - 1, P = (3, 1)$

d) $l: y = -5, P = (3, 7)$

8.34. Sprawdź, czy dane proste k i l pokrywają się, są równoległe i różne, czy się przecinają. Jeśli się przecinają, to wyznacz ich punkt wspólny.

a) $k: y = -\frac{2}{3}x + 4$ $l: 2x + 3y + 4 = 0$

b) $k: x - 3y + 5 = 0$ $l: y = 3x - 5$

c) $k: -2x + 4y - 7 = 0$ $l: y = \frac{1}{2}x + 1\frac{3}{4}$

8.35. Dane jest równanie prostej $l: 3x + 2y - 4 = 0$. Napisz równanie prostej k

a) równoległej do l i przechodzącej przez punkt $K = (-2, -5)$.

b) prostopadłej do l i przechodzącej przez punkt $M = (-3, 0)$.

8.36. Określ wzajemne położenie prostych l, k, p, q .

$$l: 2x - y + 7 = 0, \quad k: \frac{1}{2}x + y - 2 = 0, \quad p: x + 2y - 8 = 0, \quad q: x + 2y - 4 = 0$$

8.37. Wyznacz wartość m , dla której proste $(3m - 8)x - 3y - 18 = 0$

i $x - 3y - 12 = 0$ są

a) równoległe.

b) prostopadłe.

8.38. Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-3, 1)$, $Q = (5, 3)$.

8.39. Punkt $A = (5, -3)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC . Punkty A i B są symetryczne względem osi x , a punkty A i C są symetryczne względem osi y .

a) Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C .

b) Oblicz pole tego trójkąta.

8.40. Wyznacz równanie prostej, która jest symetryczna do prostej o równaniu $2x - y + 5 = 0$ względem początku układu współrzędnych.

8.41. Oblicz obwód trójkąta o wierzchołkach $P = (0, -2)$, $Q = (6, -8)$, $R = (2, 2)$.

8.42. Oblicz długość środkowej CD w trójkącie o wierzchołkach

a) $A = (-2, -5)$, $B = (4, -7)$, $C = (3, -1)$.

b) $A = (1, -5)$, $B = (-5, 3)$, $C = (3, 0)$.

8.43. Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową CD trójkąta ABC , którego wierzchołkami są punkty: $A = (-2, -1)$, $B = (6, 1)$, $C = (7, 10)$.

8.44. W trójkącie ABC dane są wierzchołki $A = (3, 5)$ i $B = (-7, -1)$ oraz punkt $S = (-5, 4)$ będący środkiem boku BC . Wyznacz równanie prostej zawierającej bok AC tego trójkąta.

8.45. Dane są punkty: $A = (1, 3)$, $B = (4, 7)$ i $C = (-2, -3)$. Oblicz odległość punktu A od środka odcinka BC .

8.46. Punkty $A = (-1, -6)$ i $B = (4, 2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $S = (1, -1)$ jest jego środkiem symetrii. Oblicz obwód tego równoległoboku.

8.47. W równoległoboku $ABCD$, w którym $A = (1, 0)$, $B = (x_B, 0)$ i $C = (x_C, 3)$, kąt BAD ma miarę 30° oraz $|AB| = |AD|$. Wyznacz obwód tego równoległoboku.

8.48. Boki trójkąta zawierają się w prostych $4x + 3y - 21 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$, $3x + y - 7 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta i oblicz jego pole.

8.49. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-3, 4)$, $B = (5, 2)$, $C = (6, 6)$.

D

- Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.
- Oblicz pole tego trójkąta.
- Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

8.50. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, -3)$, $B = (9, 1)$, $C = (5, 4)$.

8.51. Oblicz pole i obwód trójkąta o wierzchołkach $A = (-5, -1)$, $B = (-1, 7)$, $C = (3, 0)$.

8.52. Sprawdź, czy czworokąt o wierzchołkach $A = (-6, 0)$, $B = (5, -7)$, $C = (4, 6)$, $D = (-7, 13)$ jest rombem. Oblicz pole tego czworokąta.

8.53. W trójkącie ABC dane są: wierzchołek $A = (3, -4)$, wysokość CD : $7x - 2y - 1 = 0$ oraz wysokość BE : $2x - 7y - 6 = 0$. Wyznacz równania prostych zawierających boki tego trójkąta.

8.54. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (0, 5)$, $B = (6, -1)$, $C = (7, 8)$.

Wyznacz

- równanie wysokości tego trójkąta opuszczonej z wierzchołka C .
- równanie środkowej wychodzącej z wierzchołka C .
- pole trójkąta ABC .

8.55. Dane są trzy wierzchołki równoległoboku $ABCD$: $A = (-3, 2)$, $B = (6, -1)$, $C = (10, 1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D oraz oblicz pole równoległoboku.

8.56. Wykaż, że prosta o równaniu $y + x = 4$ jest osią symetrii pięciokąta $ABCDE$ o wierzchołkach: $A = (1, -2)$, $B = (5, -1)$, $C = (6, 3)$, $D = (0, 6)$, $E = (-2, 4)$.

8.57. Rozwiąż układ równań.

a)
$$\begin{cases} y = -3x^2 + 6x + 4 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -3x - 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2} \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

8.58. Napisz równanie okręgu o średnicy AB .

- $A = (-7, 3)$, $B = (1, 3)$
- $A = (2, 17)$, $B = (-8, -7)$
- $A = (-4, 0)$, $B = (6, -8)$

8.59. Wyznacz środek i promień okręgu o podanym równaniu.

a) $x^2 + y^2 = 144$

b) $(x + 7)^2 + (y - 3)^2 = 8$

c) $x^2 + (y - 3)^2 = 5$

8.60. Okrąg o środku w punkcie $S = (3, 7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

8.61. Wyznacz równanie okręgu o środku $S = (3, -5)$

a) stycznego do osi y .

b) przechodzącego przez początek układu współrzędnych.

8.62. Punkt $A = (1, 9)$ należy do okręgu stycznego do osi x w punkcie $B = (-2, 0)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

8.63. Dane są okręgi o równaniach $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ i $x^2 + y^2 = 4$. Wyznacz równania osi symetrii figury będącej sumą tych okręgów.

8.64. Punkty $A = (7, 7)$, $B = (0, 8)$, $C = (-2, 4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Oblicz pole tego trójkąta.

8.65. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $P = (-5, 6)$, którego środek leży na prostej $y = 2x + 4$, a promień jest równy $4\sqrt{2}$.

D 8.66. Okrąg o środku $S = (4, 3)$ przechodzi przez punkt $P = (5, 6)$. Prosta $y = -x + 3$ przecina ten okrąg w punktach A i B . Wykaż, że trójkąt ABP jest prostokątny, i oblicz jego pole.

8.67. Punkt $A = (-2, 5)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Bok BC jest zawarty w prostej o równaniu $y = x + 1$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Oblicz współrzędne wierzchołka C .

8.68. Dane są: okrąg $x^2 + y^2 = 16$ i punkt $A = (8, 0)$. Wyznacz równanie prostej stycznej do danego okręgu przechodzącej przez punkt A .

8.69. Okrąg o środku $S = (5, 4)$ jest styczny wewnętrznie do okręgu o równaniu $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 36$. Wyznacz równanie wspólnej stycznej obu okręgów.

8.70. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = |AC|$ i $B = (7, 2)$. Pole trójkąta jest równe 20. Wysokość poprowadzona z wierzchołka A zawiera się w prostej $y = 3x + 1$. Oblicz współrzędne punktów A i C .

8.71. Wyznacz równanie okręgu o promieniu 3 przechodzącego przez punkt $P = (2, -1)$ i stycznego do osi odciętych, wiedząc, że ten okrąg nie przecina osi rzędnych.



9. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Definicje

- Jeżeli w danym doświadczeniu losowym wszystkie zdarzenia elementarne tworzą zbiór Ω i są jednakowo prawdopodobne, to **prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia** A jest równe stosunkowi liczby zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia A do liczby wszystkich zdarzeń ze zbioru Ω :

$$P(A) = \frac{|\bar{A}|}{|\bar{\Omega}|}$$

- **Zdarzeniem przeciwnym** do A nazywamy zdarzenie polegające na tym, że zdarzenie A nie zajdzie. Zdarzenie przeciwne do A oznaczamy A' .

- ✂ • Jeżeli w grze losowej wyniki gracza X przyjmują wartości $x_1, x_2, \dots, x_n$ odpowiednio z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, \dots, p_n$, gdzie $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, to wartością oczekiwaną EX tej gry nazywamy liczbę:

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

- W uporządkowanym niemalejąco szeregu liczb **medianą** nazywamy wyraz środkowy (w szeregu o nieparzystej liczbie wyrazów) lub średnią arytmetyczną dwóch wyrazów środkowych (w szeregu o parzystej liczbie wyrazów).
- **Dominantą** w zestawie danych jest ta wartość, która występuje w nim najczęściej i więcej niż raz.
- Jeżeli liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ są wszystkimi wynikami obserwacji, to ich **średnia** jest równa:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

- Jeżeli wynikom $x_1, x_2, \dots, x_n$ nadane są odpowiednio dodatnie wagi $a_1, a_2, \dots, a_n$, to **średnią ważoną** tych wyników jest liczba:

$$\bar{x}_w = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$



- **Wariancją** σ^2 w zestawie wyników $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy przeciętne odchylenie kwadratowe od wartości średniej $\bar{x}$:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

- **Odchyleniem standardowym** σ w zestawie wyników $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy pierwiastek kwadratowy z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

- **p -tym centylem** w zbiorze liczb nazywamy taką wartość k , że $p\%$ liczb z tego zbioru jest mniejszych lub równych k .

Twierdzenia

- **Reguła mnożenia**

Jeśli pewien wybór zależy od k ($k \in \mathbf{N}$ i $k > 0$) decyzji oraz: podejmując pierwszą decyzję, mamy m_1 możliwości, drugą – mamy m_2 możliwości, ..., ostatnią (k -tą) – mamy m_k możliwości, to wyboru tego można dokonać na $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ sposobów.

- Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P – prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A, B \subset \Omega$. Wówczas:

- (1) $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$,
- (2) dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ prawdziwa jest nierówność $P(A) \leq 1$,
- (3) $P(A) + P(A') = 1$.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Jeżeli z urny zawierającej n ponumerowanych kul losujemy **ze zwracaniem** k razy po jednej kuli, to liczba wszystkich możliwych wyników losowania jest równa n^k .
- Jeżeli z urny zawierającej n ponumerowanych kul losujemy **bez zwracania** k razy ($k \leq n$) po jednej kuli, to liczba wszystkich możliwych wyników losowania jest równa $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$.
- Żadne zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A nie sprzyja zdarzeniu A' i na odwrót. Inaczej mówiąc, każde zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ albo sprzyja zdarzeniu A , albo sprzyja zdarzeniu A' .

- W statystyce mamy do czynienia z odwróconym, w stosunku do rachunku prawdopodobieństwa, wnioskowaniem:
 - w rachunku prawdopodobieństwa – na podstawie znajomości całej populacji określamy prawdopodobieństwo wylosowania próbki o określonej własności,
 - w statystyce – na podstawie własności próbki losowej wyciągamy najbardziej prawdopodobne wnioski o nieznanymi własnościach populacji.
- Mediana dzieli uporządkowany szereg danych surowych w taki sposób, że przed nią i za nią jest tyle samo danych.
- **Rozstęp**, czyli odległość między danymi skrajnymi, jest jedną z miar rozproszenia danych.

Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.12 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

9.1. Ile jest liczb trzycyfrowych, których wszystkie cyfry są różnymi liczbami nieparzystymi?

- A. 125 B. 100 C. 40 D. 60

9.2. Mamy do dyspozycji 8 skrytek bagażowych. Na ile sposobów możemy rozmieścić w nich 3 różne walizki tak, aby w każdym schowku znajdowała się co najwyżej jedna walizka?

- A. 8^3 B. 3^8 C. $8 \cdot 3$ D. $8 \cdot 7 \cdot 6$

9.3. Przesuwamy się wzdłuż krawędzi sześcianu $ABCD A' B' C' D'$. Na ile sposobów możemy dojść z punktu A do punktu C' , przechodząc po drodze przez dokładnie dwa z pozostałych wierzchołków?

- A. 3 B. 6 C. 8 D. 27

9.4. Rzucamy sześcienną kostką do gry. Wskaż prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek będącej liczbą złożoną.

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

9.5. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Wskaż prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których iloczyn jest parzysty.

- A. 0,6 B. 0,64 C. 0,7 D. 0,8

9.6. W urnie znajduje się 12 kul białych i 4 czarne. Losujemy dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kul różnego koloru?

- A. $\frac{4}{15}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{16}$

9.7. Ze zbioru wszystkich krawędzi graniastosłupa wybieramy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to krawędź jednej z podstaw tego graniastosłupa?

- A. Jest za mało danych, żeby to obliczyć. B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

9.8. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma liczb wyrzuconych oczek będzie większa od 7?

- A. $\frac{17}{36}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

9.9. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry i trzema monetami. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy tylko piątki i orły.

- A. $\frac{1}{32}$ B. $\frac{1}{44}$ C. $\frac{1}{98}$ D. $\frac{1}{288}$

9.10. Z trzech części egzaminu, którym nadano wagi 1, 2 oraz 3, Anna otrzymała odpowiednio 42, 30 i 60 punktów. Końcowy wynik był średnią ważoną wyników trzech części. Ile punktów otrzymała Anna za cały egzamin?

- A. 94 B. 46,5 C. 141 D. 47

9.11. W uporządkowanym szeregu: 1, 2, 2, 2, 6, x , x , 12, 12, 21, 23, 27 mediana wynosi 9. Wskaż liczbę x .

- A. 6 B. 9 C. 12 D. Wyznaczenie x jest niemożliwe.

9.12. Wskaż odchylenie standardowe następującego zestawu danych:

-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{5}{16}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

W zadaniach 9.13–9.16 oceń prawdziwość podanych zdań.

9.13. Liczba wszystkich liczb pięciocyfrowych utworzonych z cyfr 1, 2, 3 oraz

- A. parzystych jest równa 81.
B. nieparzystych jest równa 162.
C. podzielnych przez 4 jest równa 16.

9.14. Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez

- A. 3 jest równe $\frac{1}{3}$. B. 41 jest równe $\frac{2}{89}$. C. 12 jest równe $\frac{1}{12}$.

9.15. Rzucamy trzema kostkami sześciennymi. Oznaczmy zdarzenia: A – iloczyn liczb oczek jest nieparzysty, B – iloczyn liczb oczek jest parzysty, C – suma liczb oczek jest nieparzysta, D – suma liczb oczek jest parzysta. Zdarzenia

- A. A i B się wykluczają. B. A i D się wykluczają. C. B i C się wykluczają.

9.16. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 układamy wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe o różnych cyfrach. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana jedna z tych liczb jest

- A. równa 3541, wynosi $\frac{1}{625}$.
 B. parzysta, wynosi $\frac{2}{5}$.
 C. większa od 5430, wynosi $\frac{1}{60}$.

9.17. Mamy 6 różnych książek i 5 różnych pudełek. W każdym z nich mogą się zmieścić wszystkie książki. **Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.**

Liczba sposobów rozmieszczenia tych książek w pudełkach jest równa

A.	30,	ponieważ	1.	zgodnie z regułą mnożenia należy pomnożyć liczbę książek przez liczbę pudełek.
B.	5^6 ,		2.	każdemu pudełku możemy jednoznacznie przyporządkować książkę, która do niego trafi.
C.	6^5 ,		3.	każdej książce możemy jednoznacznie przyporządkować pudełko, do którego trafi.

9.18. Ile jest możliwych wyników danego doświadczenia losowego?

- Rzucamy 5 razy monetą i zapisujemy kolejne wyniki.
- Rzucamy 3 razy kostką do gry i zapisujemy kolejne wyniki.
- W urnie jest 15 ponumerowanych losów. Wyciągamy 2 razy po jednym losie bez zwracania i zapisujemy kolejne wyniki.
- W urnie są 4 różnokolorowe kule. Losujemy kolejno 3 razy po jednej kuli ze zwracaniem i zapisujemy kolejne wyniki.
- W pudełku są kartki z cyframi 2, 4, 6 i 8. Losujemy kolejno wszystkie kartki i zapisujemy otrzymaną liczbę czterocyfrową.

9.19. Hasło składa się z ośmiu znaków: trzech liter na początku i pięciu cyfr. Ile takich haseł można ułożyć, mając do dyspozycji 24 litery i wszystkie cyfry?

9.20. Ile jest możliwości wypisania na świadectwie ocen z dziewięciu przedmiotów uczniowi, który otrzymał promocję do następnej klasy?

9.21. W alfabecie Morse'a litery są kodowane za pomocą ciągu znaków: kropek i kresek. Ile liter można zakodować, jeżeli założymy, że do zakodowania każdej z nich możemy użyć co najwyżej czterech znaków?

9.22. W sali do nauki języków obcych jest 15 miejsc. Na ile sposobów może usiąść w tej sali pięciu uczniów? Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc znaczących.

9.23. Na ile sposobów można rozłożyć 5 różnych kart pocztowych w 8 przegródkach, jeżeli

- a) w pojedynczej przegródce może być kilka kart?
- b) w każdej przegródce może być najwyżej jedna karta?

9.24. Z urny zawierającej siedem kul oznaczonych cyframi 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9 losujemy ze zwracaniem trzy razy po jednej kuli i tworzymy trzycyfrowe liczby. Ile otrzymamy w ten sposób liczb

- a) większych od 400?
- b) większych od 650?
- c) mniejszych od 777?

9.25. Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, które mają różne cyfry i są

- a) większe od 300?
- b) mniejsze od 520?
- c) mniejsze od 458?

9.26. Test sprawdzający wiedzę z historii składa się z 45 pytań. Do każdego pytania są cztery odpowiedzi, a wśród nich tylko jedna poprawna. Na ile sposobów uczeń rozwiązujący test może wypełnić tabelę odpowiedzi, jeżeli

- a) odpowie na wszystkie pytania poprawnie?
- b) odpowie (dobrze lub źle) na wszystkie pytania?
- c) poda odpowiedzi tylko do pierwszych 40 pytań?
- d) odpowie poprawnie tylko na pierwszych 10 pytań, a do wszystkich pozostałych poda błędne odpowiedzi?

9.27. Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 15 lub przez 20?

9.28. Na jednej prostej zaznaczono 3 punkty, a na drugiej 4 punkty, jak na rysunku. Ile jest wszystkich trójkątów, których wierzchołkami są trzy spośród zaznaczonych punktów?



9.29. Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie występuje jedna cyfra będąca liczbą nieparzystą i trzy parzyste?

9.30. Kuba ma w szufladzie 5 koszulek: białą, niebieską, zieloną, pomarańczową i czarną, oraz 3 pary spodni: niebieskie, brązowe i czarne. Po ciemku wyjmuję jedną koszulkę i jedną parę spodni. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będą one w tym samym kolorze.

9.31. Ze zbioru wszystkich liczb trzycyfrowych, które mają różne cyfry i są utworzone z cyfr 0, 1, 5, 8, 9, losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej.

9.32. Z pudełka, w którym jest 9 kul ponumerowanych od 1 do 9, losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za pierwszym razem wylosujemy kulę z numerem parzystym, a za drugim razem kulę z numerem nieparzystym. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

9.33. Dwaj bracia codziennie losują, który z nich ma sprzątnąć wspólny pokój. Każdy z nich rzuca kostką. Sprząta ten, kto wyrzuci mniejszą liczbę oczek. Jeżeli obaj wyrzucą tyle samo, pokój pozostaje niesprzątnięty do następnego dnia.

- a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jutro będzie sprzątać młodszy brat.
- b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przez 5 kolejnych dni pokój nie będzie sprzątnięty?

9.34. Na kostkach domina są po dwa pola, każde oznaczone liczbą od 0 do 6. Zestaw do gry składa się z kostek, które wykorzystują wszystkie możliwe układy liczb na obu polach i każda kostka ma inny układ pól. Z zestawu wszystkich kostek wyciągamy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na wyjętej kostce są

- a) pola z takimi samymi liczbami.
- b) pola z co najmniej jedną dwójką lub co najmniej jedną trójką.

9.35. Pan Euzebiusz pamięta, że kod PIN jego karty do bankomatu jest czterocyfrowy i składa się z cyfr 2, 3, 7 i 9, ale zupełnie nie pamięta ich kolejności. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że uda mu się podjąć gotówkę, jeżeli bankomat nie oddaje karty po trzeciej nieudanej próbie wprowadzenia kodu?

9.36. Rysiek, przechodząc codziennie koło cukierni, rzuca monetą dwuzłotową. Jeżeli wypadnie reszka – przeznaczają monetę na zakup pączka, jeżeli orzeł – chowa ją do kieszeni i idzie dalej. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przez tydzień kupi co najmniej jednego pączka?

9.37. Rzucamy trzy razy sześcienną kostką do gry. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a następnie oblicz prawdopodobieństwo, że w każdym rzucie liczba oczek będzie większa od numeru rzutu.

9.38. Dane są dwa pojemniki. W pierwszym z nich jest 9 kul: 4 białe, 3 czarne i 2 zielone. W drugim pojemniku jest 6 kul: 2 białe, 3 czarne i 1 zielona. Z każdego pojemnika losujemy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru.

9.39. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Jedna ściana tej kostki ma jedno oczko, dwie ściany mają po dwa oczka i trzy ściany mają po trzy oczka. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się o 1.

9.40. Z pojemnika, w którym są dwa losy wygrywające i trzy losy puste, losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

9.41. Mateusz losuje kolejno ze zwracaniem dwie kule z pudełka zawierającego dwie kule białe, trzy żółte i pięć niebieskich. Jeżeli wylosuje dwie kule w takim samym kolorze, wygrywa 10 zł. W przeciwnym wypadku przegrywa 6 zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

9.42. Średnia arytmetyczna liczb: 3, 1, 1, 0, x , 0 jest równa 2. Oblicz x .



9.43. Siostry Gabrysia i Marysia zapisywały czas trwania swoich rozmów telefonicznych w pewnym określonym przez rodziców okresie. Wyniki przedstawiły w tabeli.

Zilustruj te dane na diagramie słupkowym.

Oblicz dla każdej z dziewcząt

a) średni czas jednej rozmowy.

b) odchylenie standardowe czasu rozmowy.

Wyniki podaj w pełnych minutach.

Czas trwania rozmowy (w min)	Liczba rozmów	
	Gabrysi	Marysi
2	17	8
3	21	26
4	25	11
5	13	5
6	8	28
7	12	16
8	3	12
9	0	4
10	1	0

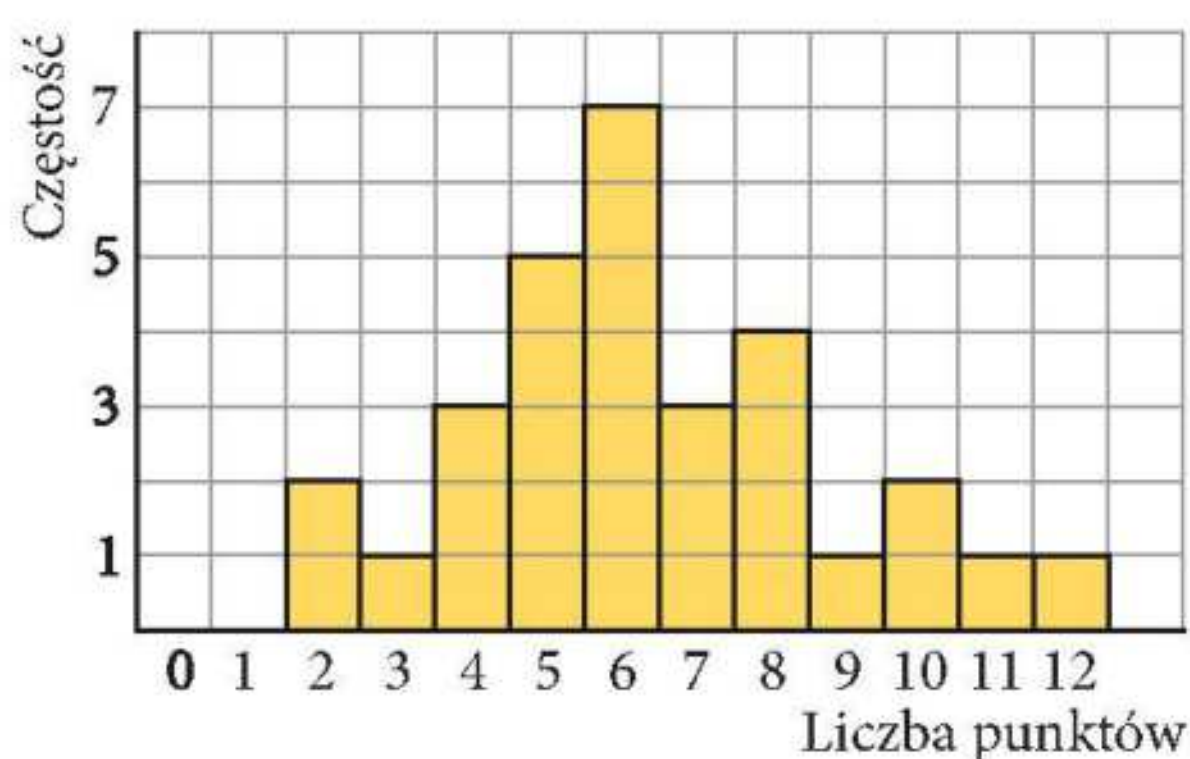
9.44. Dzieci kolejno wchodzące na lodowisko miały: 6, 7, 8, 8, 11, 12, 9, 8, 7, 13, 14, 15, 15, 10, 15, 14, 8, 7, 11, 12, 8, 7, 12 lat. Znajdź medianę, dominantę oraz średnią wieku tych dzieci. Wyniki podaj w pełnych latach.

9.45. Z samochodu dostawczego wypakowano trzydzieści worków z cukrem i sprawdzono ich wagę. Otrzymano wyniki w kilogramach: 50, 49, 48, 51, 50, 48, 50, 48, 53, 49, 48, 50, 51, 48, 50, 51, 49, 50, 47, 48, 49, 48, 50, 50, 47, 51, 51, 48, 53, 50. Oblicz

- rozstęp wartości tych danych.
- medianę tego zestawu danych.
- dominantę tego zestawu danych.
- średnią wagę worka cukru.

9.46. W rozgrywkach pewnej dyscypliny sportowej startowało wiele drużyn. Diagram przedstawia liczby punktów zdobytych przez poszczególne drużyny. Na jego podstawie odpowiedz na pytanie.

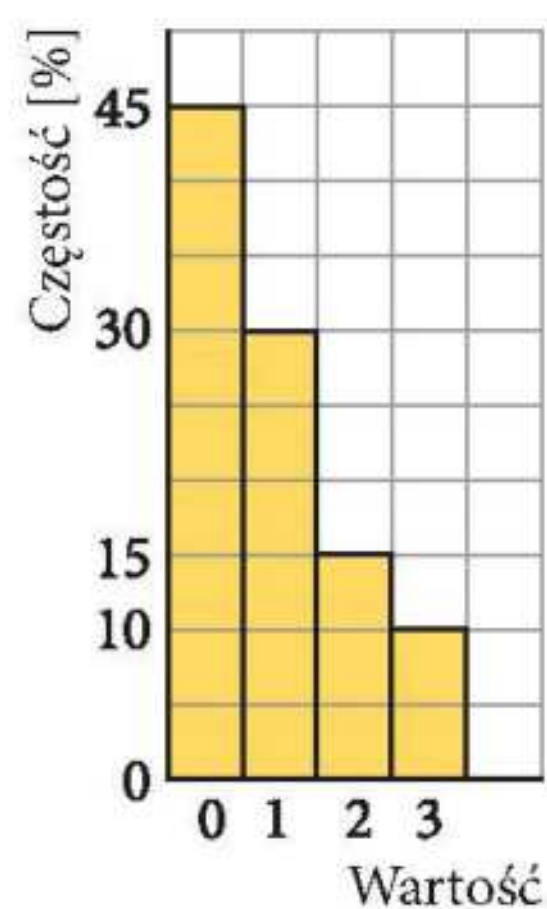
- Ile drużyn uczestniczyło w zawodach?
- Jaką najmniejszą i jaką największą liczbę punktów zdobyły drużyny?
- Ile wynosi dominanta liczby punktów?
- Ile drużyn zdobyło co najmniej 10 punktów, a ile – co najwyżej 5?
- Ile wynosi średnia liczba punktów zdobytych w tych rozgrywkach przez jedną drużynę?



9.47. Bartek przez 50 dni notował czas przejścia z domu do szkoły oraz czas przejścia ze szkoły do domu. Wyniki przedstawił w tabeli.

Czas (w min)	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Częstość	12	18	25	16	13	10	3	2	1

Narysuj diagram częstości ilustrujący te dane. Oblicz średni czas (w pełnych minutach), w jakim Bartek pokonywał trasę szkoła – dom. Znajdź wariancję i odchylenie standardowe danych.



9.48. Oblicz średnią arytmetyczną danych przedstawionych na zamieszczonym obok diagramie częstości.

10. Stereometria

Definicje

- Dwie płaszczyzny: są **równoległe**, jeżeli nie mają punktów wspólnych albo mają wszystkie punkty wspólne; **przecinają się**, jeżeli mają wspólną prostą (nazywaną krawędzią przecięcia).
- Mówimy, że prosta: jest **równoległa do płaszczyzny**, jeżeli nie ma z nią punktów wspólnych albo jest w niej zawarta; **przecina płaszczyznę**, jeżeli ma z nią jeden punkt wspólny.
- Jeżeli przez dwie różne proste przechodzi jedna płaszczyzna, to takie proste nazywamy **współpłaszczyznowymi**.
- Dwie proste, przez które nie można poprowadzić jednej płaszczyzny, nazywamy **skośnymi**.
- Dwie różne proste, które są współpłaszczyznowe i równoległe na tej płaszczyźnie, nazywamy **prostymi równoległymi**. Ponadto przyjmujemy, że proste pokrywające się są również równoległe.
- **Prosta a jest prostopadła do prostej b ($a \perp b$) w przestrzeni**, gdy istnieje prosta a' równoległa do prostej a i przecinająca prostą b pod kątem prostym.
- **Prosta k jest prostopadła do płaszczyzny α ($k \perp \alpha$)**, jeżeli k jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie α .
- **Płaszczyzna α jest prostopadła do płaszczyzny β** , jeżeli zawiera prostą prostopadłą do płaszczyzny β .
- Dane są: płaszczyzna π i prosta a nierównoległa do tej płaszczyzny. Przez punkt P przestrzeni prowadzimy prostą b równoległą do prostej a . Prosta b przecina płaszczyznę π w punkcie P' , który nazywamy **rzutem równoległym punktu P na płaszczyznę π w kierunku a** .
Jeżeli prosta a jest prostopadła do π , to P' nazywamy **rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π** .
- Jeżeli prosta nie jest prostopadła ani równoległa do płaszczyzny, to **kątem nachylenia prostej do płaszczyzny** nazywamy kąt ostry utworzony przez tę prostą i jej rzut prostokątny na płaszczyznę.

- Dwie różne półpłaszczyzny P_1, P_2 o wspólnej krawędzi m dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z nich wraz z tymi półpłaszczyznami nazywamy **kątem dwuściennym** o krawędzi m i ścianach P_1 i P_2 .
- **Miarą kąta dwuściennego** nazywamy miarę kąta płaskiego będącego częścią wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi.
- **Siatką wielościanu** (rozwinęciem powierzchni wielościanu na płaszczyźnie) nazywamy płaską figurę będącą sumą wielokątów stykających się bokami, a powstałą przez rozcięcie pewnej liczby krawędzi wielościanu tak, aby jego ściany dały się rozłożyć na płaszczyźnie.
- **Graniastosłupem** nazywamy wielościan, którego dwie ściany (zwane podstawami) są przystającymi wielokątami leżącymi w równoległych płaszczyznach, a pozostałe ściany (zwane bocznymi) są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.
- Graniastosłup nazywamy **prostym**, jeżeli jego krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzn podstaw.
- **Równoległoscian** to graniastosłup, którego podstawą jest równoległobok.
- **Prostopadłoscianem** nazywamy graniastosłup prosty, którego podstawą jest prostokąt. Prostopadłoscian, którego wszystkie krawędzie są równe, nazywamy **sześcianem**.
- Graniastosłup nazywamy **prawidłowym**, jeżeli jest prosty i ma w podstawie wielokąt foremny.
- **Ostrosłupem** nazywamy wielościan, którego jedną ścianą (zwaną podstawą) jest dowolny wielokąt wypukły, a pozostałe ściany (zwane bocznymi) są trójkątami o wspólnym wierzchołku, nazywanym **wierzchołkiem ostrosłupa**.
- **Ostrosłup prawidłowy** to ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny i którego spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.
- **Wielościanem foremnym** nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są wielokątami foremnymi o tej samej liczbie boków i w każdym wierzchołku zbiega się taka sama liczba krawędzi.
- Jeżeli figurę płaską f obracamy w przestrzeni o kąt pełny wokół prostej k zawartej w płaszczyźnie figury f , to otrzymaną w ten sposób figurę przestrzenną nazywamy **bryłą obrotową**, a prostą k – jej **osią obrotu**.
- **Walcem** nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z boków prostokąta.

- **Stożkiem** nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.
- **Kulą** nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót półkola dookoła prostej zawierającej średnicę.
Przekrój płaski kuli przechodzący przez jej środek nazywamy **kołem wielkim**.
Każdą z dwóch części kuli, na które dzieli ją koło będące jej przekrojem, nazywamy **odcinkiem kuli**. Płaszczyzna przekroju dzieli jednocześnie sferę na dwie części nazywane **czaszami**.
Wycinkiem kuli nazywamy część kuli ograniczoną sferą i powierzchnią boczną stożka o wierzchołku w środku tej kuli.
Warstwą kuli nazywamy część kuli zawartą między dwiema równoległymi płaszczyznami przecinającymi kulę.
- **Podobieństwo** o skali k ($k > 0$) jest przekształceniem przestrzeni o tej własności, że dla dowolnych punktów A, B i ich obrazów A', B' zachodzi równość:

$$|A'B'| = k \cdot |AB|$$
- Figura (bryła) F jest podobna do figury (bryły) F' , co zapisujemy symbolicznie $F \sim F'$, gdy istnieje takie podobieństwo P przestrzeni, w którym $P(F) = F'$.

Twierdzenia

- Prosta prostopadła do dwóch przecinających się prostych jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste.
- W ostrosłupie prawidłowym:
 - wszystkie krawędzie boczne są równe i nachylone do płaszczyzny podstawy pod takim samym kątem,
 - ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi,
 - kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy są równe,
 - kąty dwuścienne między sąsiednimi ścianami są równe.
- Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny i wszystkie krawędzie boczne są równe, to ten ostrosłup jest prawidłowy.
- Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny i wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem, to ten ostrosłup jest prawidłowy.

- Jeżeli bryła F' jest podobna w skali k do bryły F o polu powierzchni P_F i objętości V_F , to:
 - pole powierzchni bryły F' jest równe $P_{F'} = k^2 \cdot P_F$,
 - objętość bryły F' jest równa $V_{F'} = k^3 \cdot V_F$.
- **Twierdzenie Eulera**
W wielościanie wypukłym liczba wierzchołków w , liczba ścian s i liczba krawędzi k spełniają równość $w + s = k + 2$.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π , jeżeli odcinek AB nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną π .
- Wyznaczenie kąta ostrego najczęściej polega na wyznaczeniu wartości jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.
- Istnieje tylko pięć wielościanów foremnych: czworościan foremny, sześcián, ośmiościan foremny, dwunastościan foremny, dwudziestościan foremny.

Zadania

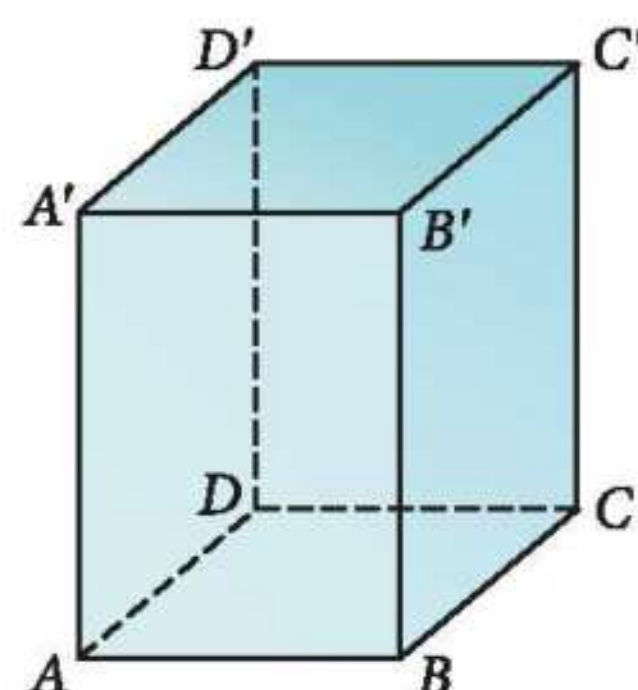
W każdym z zadań 10.1–10.10 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

10.1. Punkty A , B , C i D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Ile płaszczyzn można jednoznacznie wyznaczyć za pomocą tych punktów?

- | | |
|------|------------------------|
| A. 2 | C. 4 |
| B. 3 | D. nieskończenie wiele |

10.2. Na rysunku obok przedstawiono prostopadłościan $ABCD A' B' C' D'$. Do której z wymienionych płaszczyzn równoległa jest prosta CD' ?

- | | |
|------------|-------------|
| A. $ABCD$ | C. $ADD'A'$ |
| B. $ABBA'$ | D. $BCC'B'$ |



10.3. W prostopadłościanie $ABCD A' B' C' D'$ dane są długości krawędzi: $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|AA'| = 12$. Ile jest równy cosinus kąta nachylenia przekątnej BD' do płaszczyzny $ABCD$?

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $\sqrt{\frac{7}{151}}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10.4. Długości trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka prostopadłościanu pozostają w stosunku $4 : 3 : 1$. Objętość tego prostopadłościanu wynosi 324. Wskaż jego pole powierzchni całkowitej.

- A. 38 B. 60 C. 342 D. Jest za mało danych, żeby to obliczyć.

10.5. Graniastosłup prosty ma wysokość 10 cm. Jego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm. Wskaż objętość tego graniastosłupa.

- A. 240 cm^3 B. $250\pi \text{ cm}^3$ C. 100 cm^3 D. 480 cm^3

10.6. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$ o podstawie $ABCD$, w którym $|AC| : |AS| = 6 : 5$. Ile wynosi cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy?

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

10.7. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość a i jest nachylona do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa pod kątem 60° . Wskaż objętość ostrosłupa.

- A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$ B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{a^3}{3}$ D. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$

10.8. Długość każdej krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6 cm. Wskaż pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

- A. $36 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ B. $36 + 12\sqrt{3}$ C. $144\sqrt{3}$ D. $36(1 + \sqrt{3})$

10.9. Tworząca stożka o promieniu podstawy 3 ma długość 6. Wskaż miarę kąta rozwarcia stożka.

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

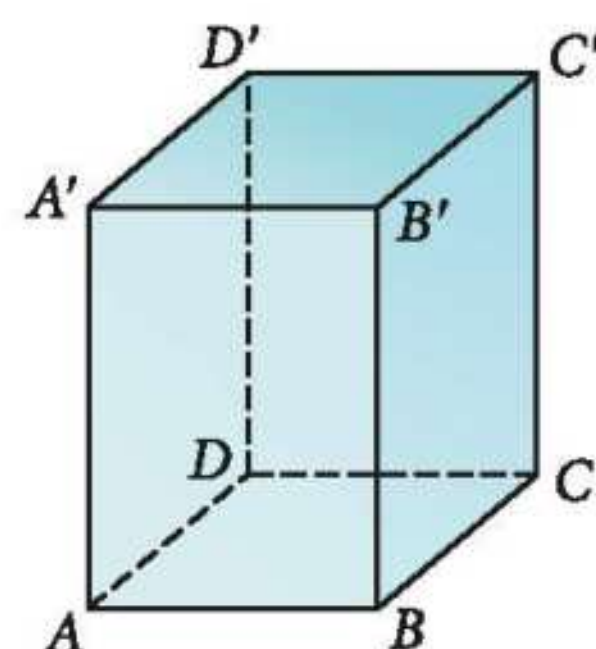
10.10. Powierzchnię boczną stożka tworzy wycinek kołowy o promieniu 12 i kącie środkowym 90° . Wskaż pole powierzchni całkowitej stożka.

- A. 36π B. 45π C. 9π D. $12\sqrt{3}\pi$

10.11. W sześcianie o krawędzi 1 połączono wszystkie wierzchołki dolnej podstawy z jednym wierzchołkiem podstawy górnej. Otrzymano w ten sposób krawędzie ostrosłupa. **Oceń prawdziwość podanych zdań.**

- A. Objętość tak utworzonego ostrosłupa jest równa $\frac{1}{3}$.
 B. Trzy krawędzie tego ostrosłupa mają długość równą $\sqrt{2}$.
 C. Pole jednej ze ścian tego ostrosłupa jest równe $\frac{1}{2}$.

10.12. Na rysunku przedstawiono prostopadłościan $ABCD A' B' C' D'$. **Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.**



Proste DC i AA'

A.	są skośne,	ponieważ	1.	nie mają punktu wspólnego.
B.	nie są skośne,		2.	są niewspółpłaszczyznowe.
C.	są równoległe,		3.	zawierają się w płaszczyznach równoległych.

10.13. Podaj liczbę ścian, krawędzi, wierzchołków i przekątnych

- a) prostopadłościanu. c) czworościanu.
 b) graniastosłupa sześciokątnego. d) ostrosłupa pięciokątnego.

10.14. Narysuj siatkę

- a) graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.
 b) ostrosłupa o podstawie prostokątnej, którego spodkiem wysokości jest punkt przecięcia przekątnych prostokąta.
 c) ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt równoboczny, a jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

10.15. Krawędź podstawy i wysokość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego są równe $5\sqrt{5}$. Oblicz długości przekątnych graniastosłupa.

-  **10.16.** Z punktu P oddalonego od płaszczyzny o 10 cm poprowadzono prostą nachyloną do tej płaszczyzny pod kątem 25° i przecinającą ją w punkcie Q . Oblicz długość odcinka PQ z dokładnością do 1 cm.

10.17. Wyznacz miarę kąta

- nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny jego podstawy.
- między przekątnymi sześcianu.

 **10.18.** Przekątna prostopadłościanu ma długość $d = 11$ cm i tworzy z płaszczyzną podstawy prostopadłościanu kąt $\alpha = 43^\circ$, a z płaszczyzną jednej ze ścian bocznych kąt $\beta = 21^\circ$. Oblicz objętość prostopadłościanu z dokładnością do 1 cm^3 .

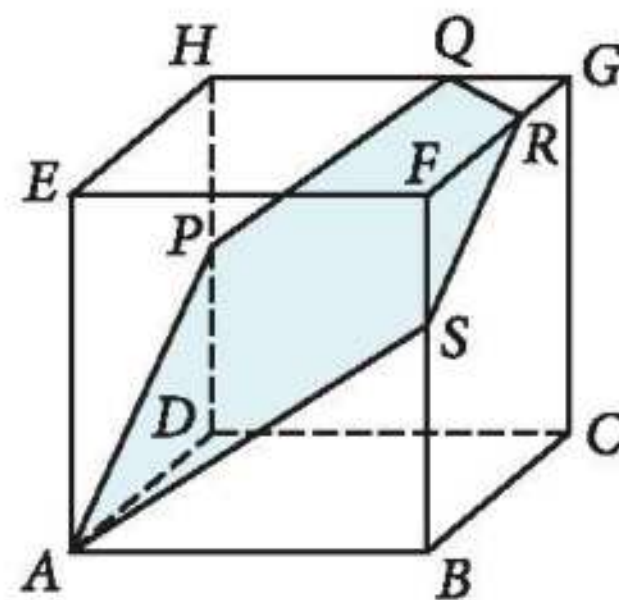
10.19. Pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest cztery razy większe od sumy pól obu podstaw. Wyznacz kąt nachylenia dłuższej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

10.20. W prostopadłościanie $ABCD A'B'C'D'$ dane są długości krawędzi: $|AB| = 3$, $|BC| = 2$, $|AA'| = 4$. Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej BD' do płaszczyzny ściany $BCC'B'$.

10.21. Przekątna prostopadłościanu ma długość d i jest nachylona do płaszczyzn ścian bocznych pod kątami α i β . Oblicz objętość prostopadłościanu.

10.22. W graniastosłupie prostym trójkątnym dwie przekątne ścian bocznych wychodzące z jednego wierzchołka są prostopadłe i każda z nich ma długość $\sqrt{3}$. Wysokość graniastosłupa jest równa 1. Wyznacz długości krawędzi i kąty podstawy tego graniastosłupa.

- ✱ **10.23.** Dany jest sześcian $ABCDEFGH$, którego krawędź ma długość 15. Punkty Q i R dzielą krawędzie HG i FG w stosunku $2:1$, jak na rysunku. Płaszczyzna AQR przecina krawędzie DH i BF odpowiednio w punktach P i S . Oblicz długości odcinków DP i BS .

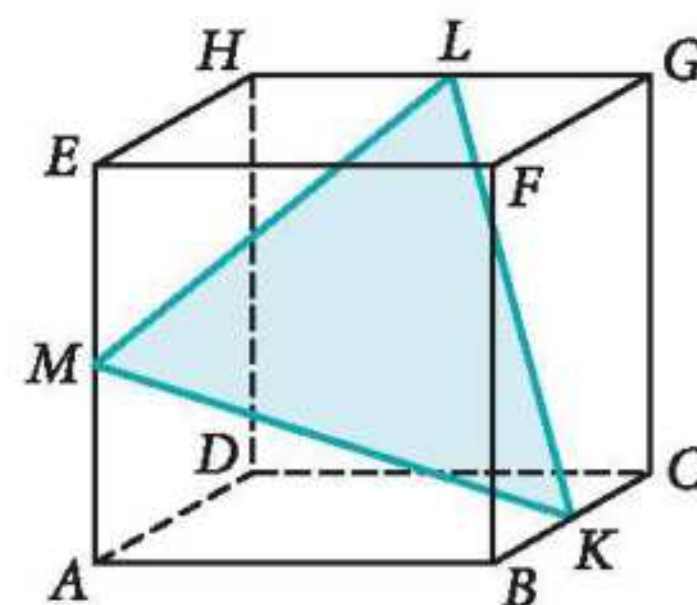


-  **10.24.** Podstawą graniastosłupa jest równoległobok o bokach $a = 2,5$ cm i $b = 1,1$ cm oraz kącie między nimi $\alpha = 25^\circ$. Krawędź boczna graniastosłupa ma długość $c = 4,4$ cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\beta = 27^\circ$. Oblicz objętość graniastosłupa z dokładnością do $0,1 \text{ cm}^3$.

-  **10.25.** W prostopadłościanie punkt przecięcia przekątnych dolnej podstawy połączono odcinkiem ze środkiem jednej z krawędzi bocznych. Odcinek ten ma długość $d = 5$ cm, jest nachylony do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 19^\circ$, a do jednej ze ścian bocznych pod kątem 2α . Oblicz objętość prostopadłościanu z dokładnością do 1 cm^3 .

10.26. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy 8 poprowadzono płaszczyznę przez dwa przeciwległe wierzchołki dolnej podstawy i jeden z wierzchołków górnej podstawy. Płaszczyzna ta jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Wyznacz

- wysokość graniastosłupa.
- pole otrzymanego przekroju.



10.27. Punkty K , L i M są środkami krawędzi BC , GH i AE sześcianu $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 1, jak na rysunku. Oblicz pole trójkąta KLM .

10.28. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku długości 6 i kącie ostrym 60° . Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

D 10.29. Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$. Punkt M jest środkiem krawędzi AB i $|AM| = |MC|$. Odcinek AS jest wysokością tego ostrosłupa. Wykaż, że kąt SCB jest prosty.

10.30. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe $12\sqrt{3}$, a kąt nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy jest równy 60° . Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

10.31. Wysokość prawidłowego ostrosłupa czworokątnego jest równa 3,2 cm, a kąt dwuścienny przy podstawie ma miarę 37° . Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa z dokładnością do 1 cm^2 .

10.32. Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 1$, $|BC| = \sqrt{2}$. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa mają długość 1. Wyznacz cosinus kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

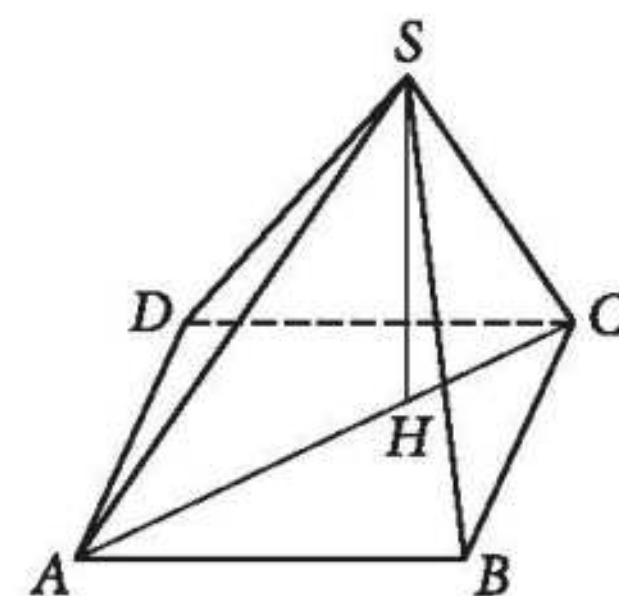
D 10.33. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym dane są: H – wysokość ostrosłupa oraz α – miara kąta utworzonego przez krawędź boczną i krawędź podstawy ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$). Wykaż, że objętość V tego ostrosłupa jest równa $\frac{4H^3}{3(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)}$.

10.34. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a . Ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi. Miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równa 2α . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

10.35. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 100 cm^2 , a jego pole powierzchni bocznej jest równe 260 cm^2 . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

10.36. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$ o podstawie $ABCD$, w którym $|AC| : |AS| = 6 : 5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

10.37. Kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa $ABCD S$. Odcinek HS jest wysokością ostrosłupa. Punkt H dzieli przekątną AC podstawy w stosunku $2 : 1$, jak na rysunku. Krawędzie boczne BS i DS mają długość 1. Oblicz objętość V tego ostrosłupa oraz długości krawędzi AS i CS .



10.38. Dany jest czworościan $ABCS$. Trójkąty ABC i ACS są równoboczne. Ściana ACS jest prostopadła do ściany ABC . Oblicz tangens kąta dwuściennego α między ścianami ABS i ABC .

10.39. W ostrosłupie $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości a . Krawędź AS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka A od płaszczyzny ściany BCS jest równa d . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

 **10.40.** Podstawą ostrosłupa jest romb o kącie ostrym $\alpha = 54^\circ$. Koło wpisane w ten romb ma promień $r = 2,4$ dm. Ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem $\beta = 48^\circ$. Oblicz objętość (z dokładnością do 1 dm^3) i pole powierzchni całkowitej (z dokładnością do 1 dm^2) tego ostrosłupa.

10.41. Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCD S$ jest kwadrat $ABCD$. Pole trójkąta równoramiennego ACS jest równe 120 i $|AC| : |AS| = 10 : 13$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

10.42. Podstawą ostrosłupa $ABCDE$ jest kwadrat $ABCD$. Punkt F jest środkiem krawędzi AD , odcinek EF jest wysokością ostrosłupa, ponadto $|AE| = 15$ i $|BE| = 17$. Oblicz objętość ostrosłupa.

10.43. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt ABC . Krawędź AD jest wysokością ostrosłupa, $|AD| = 12$, $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$. Oblicz objętość ostrosłupa.

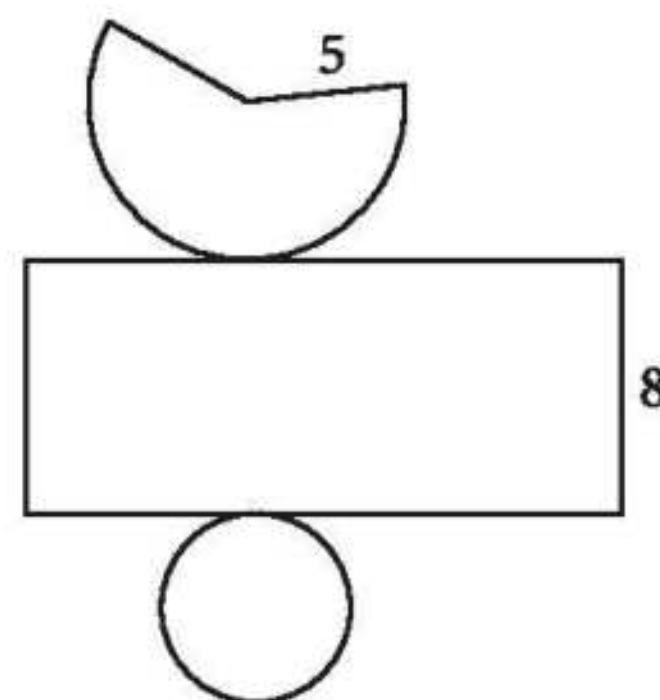
10.44. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Krawędź AS jest wysokością ostrosłupa oraz $|AS| = 8\sqrt{210}$, $|BS| = 118$, $|CS| = 131$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

10.45. Trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej c i kącie ostrym α obraca się wokół przeciwprostokątnej. Oblicz pole powierzchni powstałej bryły.

10.46. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o kącie 120° i promieniu 27 cm. Oblicz pole podstawy tego stożka.

10.47. Objętość stożka o promieniu podstawy 3 jest równa 6π . Wyznacz sinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.

10.48. Kapsuła lądownika ma kształt stożka zakończonego w podstawie półkulą o tym samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa niż promień półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. Oblicz objętość kapsuły lądownika.



10.49. Na rysunku przedstawiono siatkę bryły o polu powierzchni całkowitej 72π . Oblicz objętość tej bryły.

10.50. Kula i stożek, postawione obok siebie na płaszczyźnie, stykają się powierzchniami. Odcinek łączący środek podstawy stożka ze środkiem kuli przechodzi przez punkt styczności tych powierzchni. Kąt między tworzącą stożka a jego wysokością jest równy 30° . Oblicz stosunek promienia kuli do promienia podstawy stożka.

10.51. Z koła o promieniu 8 usunięto wycinek o kącie 45° . Z reszty koła wykonano powierzchnię boczną stożka. Oblicz objętość tego stożka.

 **10.52.** Producent jogurtów sprzedawał 200-gramowe jogurty w pojemnikach w kształcie walca o średnicy podstawy 6 cm.

- Jaką wysokość miały te pojemniki? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 cm. Przyjmij, że 1 g jogurtu ma objętość 1 ml.
- Po pewnym czasie producent wprowadził na rynek jogurt w nowych, 180-gramowych opakowaniach. Nie zmienił średnicy pojemników, lecz w denku pojawiło się wgłębienie w kształcie półkuli o średnicy 4 cm. Dzięki temu nowe pojemniki miały zbliżoną do poprzednich wysokość. Jaką? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 cm.

 **10.53.** Z drewnianego pnia w kształcie walca o obwodzie około 94,2 cm i wysokości 40 cm wycięto prostopadłościenny klocek o wymiarach $20\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 40\text{ cm}$. Jaki procent drewna wykorzystano na klocek? Jakie wymiary powinien mieć prostopadłościenny klocek, aby jak najmniej drewna poszło na odpady? Obliczenia wykonaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

 **10.54.** Prostokąt $ABCD$, obracany wokół boku AB , zakreślił walec w_1 . Ten sam prostokąt, obracany wokół boku AD , zakreślił walec w_2 . Otrzymane walce mają równe pola powierzchni całkowitych. Wykaż, że prostokąt $ABCD$ jest kwadratem.

Odpowiedzi

1. Stereometria

s. 15

- 1.1.** F, P, F **1.2.** zbiór pusty, punkt, prosta **1.3.** pł. $ABCDEF \parallel$ pł. $A'B'C'D'E'F'$,
pł. $ABBA' \parallel$ pł. $DCC'D' \parallel$ pł. $FEE'F'$, pł. $BB'C'C \parallel$ pł. $DD'E'E \parallel$ pł. $AA'F'F$ **1.4.** płaszczyzny:
 KOZ, KOA, OAZ, KAZ ; krawędzie: KO, KZ, KA, OZ, OA, ZA **1.5.** BW, DW **1.6.** $BT, MO,$
 MB **1.7.** $BC, AD, FG, EH, AE, BF, CG, DH$ **1.8.** a) nieskończenie wiele b) tak, jedna
1.9. Prosta m istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy prosta p nie jest równoległa do płaszczyzn
równoległych zawierających k i l . **1.10.** Wskazówka: Poprowadź płaszczyznę przez dwie wybrane
proste i zbadaj położenie trzeciej prostej względem tej płaszczyzny. **1.11.** a) AB, DC, KL, NM
b) $AK, BL, CM, DN, AD, BC, LM, KN$ c) KN, ND, ML, MC d) $ABCD, DCMN, KLMN, ABLK$
e) $BCML, ADNK$ **1.12.** AD, CF, BE, CB, FE **1.13.** a) $AB, DC, A'B', D'C'$ b) $BC, CC', C'B',$
 $B'B, AD, DD', D'A', A'A$ c) $BCC'B', ADD'A'$ d) $ABCD, ABBA', A'B'C'D', DCC'D'$ **1.14.** Nie, są
równoległe. **1.15.** Nie, są równoległe. **1.16.** nieskończenie wiele **1.20.** Wskazówka: Wyznacz
płaszczyzny α i β – poprowadź je przez pary przecinających się i odpowiednio dobranych prostych.

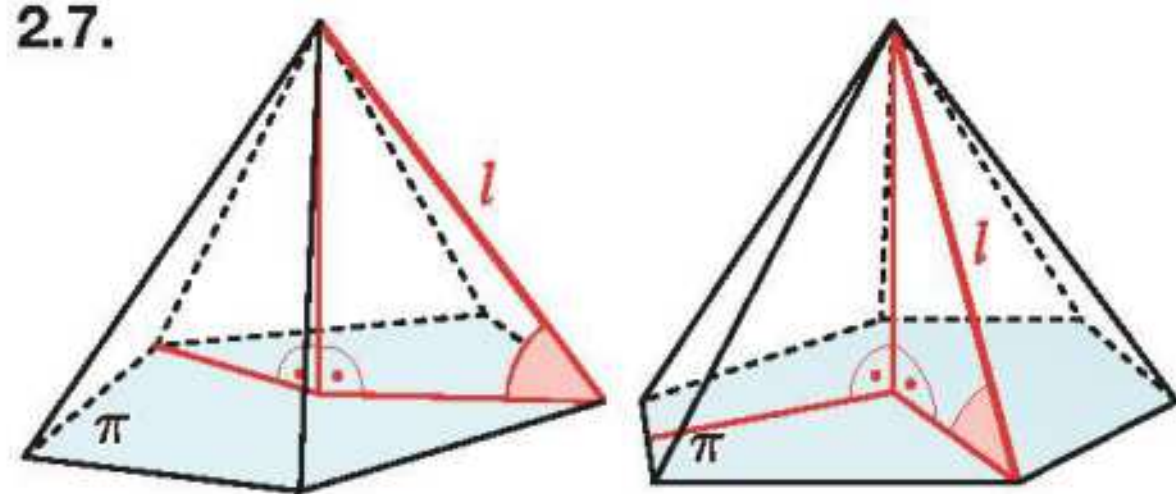
s. 18

- 1.** B **2.** C **3.** B **4.** P, P, P **5.** a) CB, FE b) CF, BE, AD, AC, DF c) DF, AD, DE
d) pł. ABC , pł. DEF , pł. $CBEF$ e) pł. $ACFD$ **6.** nieskończenie wiele, gdy $k \parallel$ pr. PQ ; jedna, gdy
 $k \nparallel$ pr. PQ **7.** Wskazówka: Przez punkt P poprowadź prostą a' równoległą do prostej a i prostą b'
równoległą do prostej b . Szukana płaszczyzna zawiera a' i b' .

s. 24

- 2.2.** Trójkąt lub odcinek. Trójkąt i jego obraz są przystające, gdy leżą w płaszczyznach równoległych.
2.3. tak **2.4.** W kierunku równoległym do płaszczyzny zawierającej proste przecinające się, ale nie
równoległym do π . Takiego wyniku nie można uzyskać, gdy proste leżą na płaszczyźnie równoległej
do π . **2.5.** Wskazówka: Szukanym kątem jest: a) $\sphericalangle LDB$, b) $\sphericalangle LDK$, c) $\sphericalangle LDM$, d) $\sphericalangle DLN$.

2.7.



- 2.8.** a) 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 0

- 2.9.** a) $8\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{29}$ **2.10.** $8\sqrt{2}$

- 2.11.** a) 4 b) $\frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,31$ c) 2,01 d) 11,52

- 2.12.** a) 30° b) 45° c) 60° d) Taka sytuacja
jest niemożliwa. e) Taka sytuacja jest
niemożliwa.

- 2.13.** a) 20 lub 4 b) 12 c) 10 d) 5 lub 29

- 2.15.** a) 26 cm b) $13\sqrt{2}$ cm **2.16.** 15 cm

- 2.14.** a) 10,9 b) 50° c) 81° d) 17,5

- 2.17.** Każda z szukanych wielkości jest równa 2 m.

2.18. $25\sqrt{15} \text{ cm}^2$ **2.19.** Wskazówka: Z dowolnego punktu $M \in m$, różnego od punktów przecięcia prostej z płaszczyznami, poprowadź prostą k prostopadłą do π_1 i π_2 , a następnie rozważ sytuację na płaszczyźnie wyznaczonej przez proste m i k .

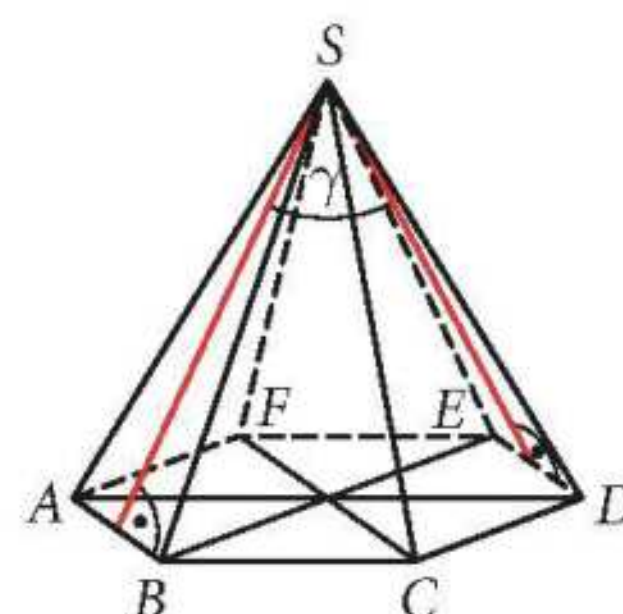
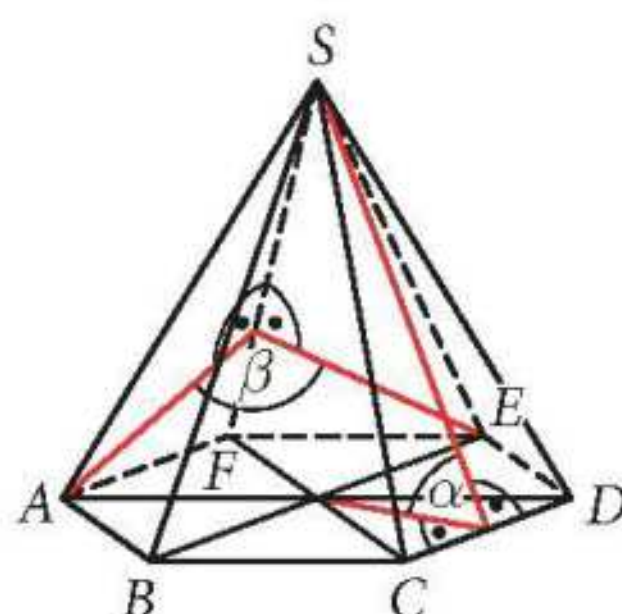
s. 27

1. C 2. D 3. B 4. P, P, F

6. 22° 7. 22 cm lub 38 cm

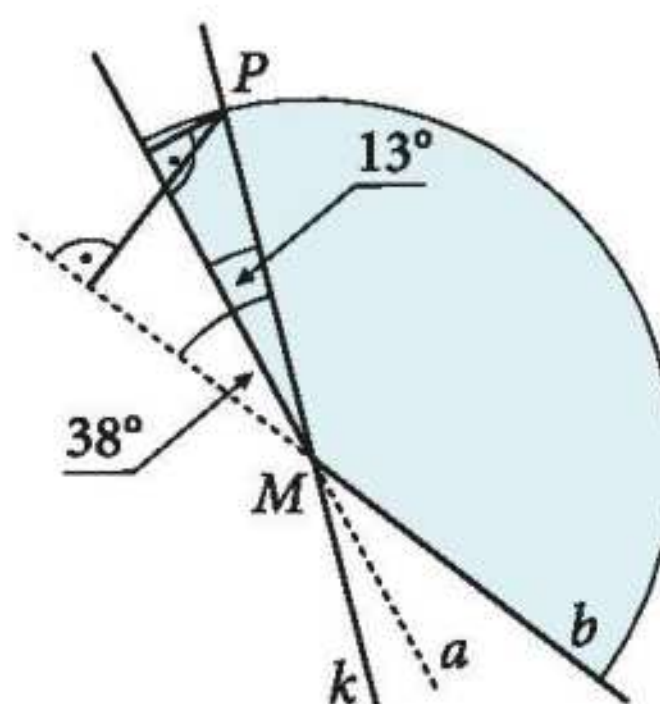
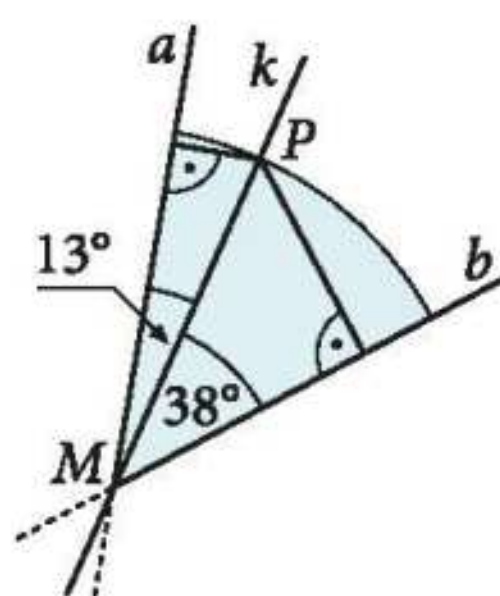
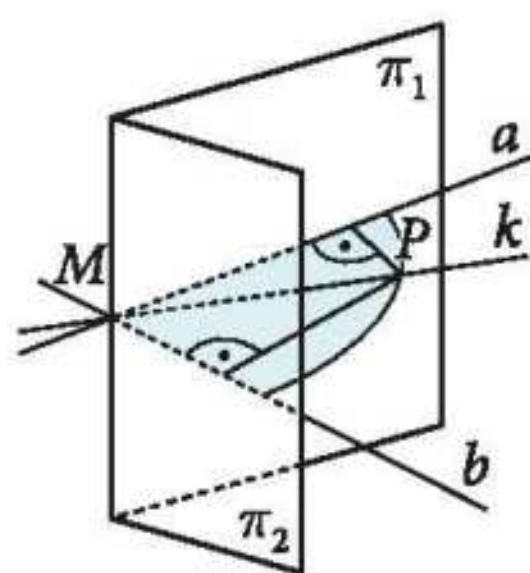
s. 30

3.3. (patrz rys. obok)

a) kąt α b) kąt β c) kąt γ 

3.4.

α	β_1	β_2	$ AA' $	$ AB_1 $	$ AB_2 $	$ B_1A' $	$ B_2A' $	$\sphericalangle B_1AB_2$
90°	30°	60°	10	5	$5\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	5	90°
120°	30°	90°	$4\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	6	0	60°
80°	35°	45°	13,95	8	9,86	11,43	9,86	100°

3.5. 51° lub 155° . Wskazówka: Przyjrzyj się rysunkom poniżej.3.6. $6\sqrt{3}$ 3.7. Kąt między ścianami bocznymi jest rozwarty, więc jest większy. 3.8. $\alpha = 90^\circ$ 3.9. Wskazówka: Są to kąty DCS i DAS. 3.10. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Wskazówka: Zauważ, że kąt SPD jest prosty.

s. 32

1. C 2. D 3. A 4. F, F, P 6. $\frac{1}{2}a$ 7. 9 cm

s. 42

4.1. a) 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków b) 5 ścian, 9 krawędzi, 6 wierzchołków c) 7 ścian, 15 krawędzi, 10 wierzchołków d) 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków e) 9 ścian, 21 krawędzi, 14 wierzchołków 4.2. 27 4.3. a) 16 wierzchołków, 24 krawędzie b) 60 wierzchołków, 90 krawędzi c) 208 wierzchołków, 312 krawędzi 4.4. graniastosłup siedmiokątny 4.5. 4

4.6. a) 10 b) 18 **4.7.** b) $5\sqrt{3}$ cm **4.8.** ok. 35° **4.9.** dwie o długości $10\sqrt{2}$ cm, dwie o długości 20 cm **4.15.** Nie. Odcinki, które po złożeniu siatki stają się jedną krawędzią, muszą być równej długości. **4.16.** $4\sqrt{13}$, $2\sqrt{43}$ **4.18.** $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ **4.19.** Przekrój jest albo prostokątem o polu $54\sqrt{2}$ cm², albo trójkątem o polu $9\sqrt{22}$ cm².

s. 44

1. D **2.** C **3.** C **4.** F, P, F **5.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ **6.** Jeżeli $0 < \operatorname{tg} \alpha \leq \sqrt{2}$, to $P = \frac{1}{2 \cos \alpha}$. Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha > \sqrt{2}$ lub $\alpha = 90^\circ$, to $P = \frac{\sqrt{2} \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$. **7.** $\cos \beta = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

s. 56

5.1. a) $s = 4$, $k = 6$, $w = 4$ b) $s = 5$, $k = 8$, $w = 5$ c) $s = 8$, $k = 14$, $w = 8$
5.2. a) trzydziestokąt b) trzynastokąt c) dwunastokąt **5.3.** a) stukątny b) 21-kątny
 c) siedemnastokątny **5.4.** 6 **5.5.** 7 **5.6.** b) $h = 2\sqrt{2}$ cm c) $\alpha = 45^\circ$ **5.10.** Wskazówka:
 Zastanów się, jakie wartości może przyjmować suma kątów ścian bocznych przy wierzchołku
 ostrosłupa. **5.13.** 25 cm **5.14.** 10 cm **5.15.** $2\sqrt{6}$ cm **5.16.** krawędź podstawy: 24 cm,
 krawędź boczna: $12\sqrt{3}$ cm **5.17.** a) $\alpha = 72^\circ$ b) $\beta = 74^\circ$ **5.18.** 74° **5.19.** $P_p = \frac{800}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{6}$ **5.20.** 68° **5.21.** Wszystkie krawędzie są nachylone pod takim samym kątem α ,
 $\cos \alpha = \frac{a}{b}$. **5.22.** $k = 30$, $w = 20$ **5.23.** a) 33,11 m b) 41°

s. 59

1. C **2.** B **3.** C **4.** P, F, P **5.** 53° **6.** $\frac{7}{15}$ **7.** $\frac{b}{a}$, $\frac{b\sqrt{2}}{2a}$, $\frac{b}{a}$

s. 68

6.1. 31° lub 59° **6.2.** a) $r = \frac{5}{2}$, $h = 5\sqrt{3}$ b) $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $h = 5\sqrt{2}$ c) $r \approx 2,27$, $h \approx 8,91$
6.3. a) $r = 12$, $l = 24$ b) $r = 7\sqrt{3}$, $l = 14$ c) $r = 10$, $l = 10\sqrt{2}$ d) $r = 10,1$, $l = 15,7$ e) $r = 4,8$,
 $l = 18,6$ **6.4.** a) $r = 12$ cm, $h = 12\sqrt{3}$ cm b) $r = 12\sqrt{2}$ cm, $h = 12\sqrt{2}$ cm **6.5.** kąt rozwarcia: 44° ,
 kąt nachylenia tworzącej: 68° **6.6.** Otrzymano sumę dwóch stożków o wspólnej podstawie; przekrój
 jest rombem o kątach 60° i 120° . **6.7.** a) 4 cm b) 4,8 cm **6.8.** $49\sqrt{3}\pi$ dm², $7\sqrt[4]{27}$ dm
6.9. $9\sqrt{3}$ cm, 60° **6.10.** Wskazówka: Jest to suma stożka i walca z wydrążonym stożkiem; stożki te
 są przystające. **6.11.** Wskazówka: a) Jest to suma walca i stożka. b) Jest to suma stożka
 o tworzącej równej dłuższej podstawie trapezu i stożka ściętego o tworzącej równej krótszemu
 ramieniu, z wydrążonym stożkiem o tworzącej równej krótszej podstawie trapezu.
6.12. a) 10 b) 6 **6.13.** Droga przez szczyt zajmie ok. 1 h 25 min, a obejście góry ok. 1 h 35 min.

s. 70

1. B **2.** D **3.** C **4.** P, P, F **5.** 15 cm **6.** promień dolnej podstawy: 5, promień górnej
 podstawy: $\frac{5}{2}$, wysokość: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ **7.** 4

s. 81

- 7.1. 300 7.2. 5 dm 7.3. $8(6 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$ 7.4. $P_c = (192 + 112\sqrt{3}) \text{ cm}^2$,
 $V = 96(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^3$ 7.5. $V = 90\sqrt{3}$, $P_c = 96\sqrt{3}$ 7.6. 486 cm^2 7.7. 324 7.8. $\sqrt{3} \text{ dm}^3$
 7.9. $216 \cdot \text{tg } 70^\circ \approx 593$ 7.10. a) 76° b) $25\sqrt{17}$ c) $166\frac{2}{3}$, $833\frac{1}{3}$ 7.11. $V = abc \sin \alpha \sin \beta$
 7.12. $V = 24\sqrt{3}$, $P_c = 36(1 + \sqrt{3})$ 7.13. $V = \frac{\sqrt{11}}{12}a^3$, $P_c = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{15}}{4}a^2$ 7.14. $100(3 + 2\sqrt{3})$
 7.15. $V = 648 \text{ cm}^3$, $P_b = 216\sqrt{3} \text{ cm}^2$ 7.16. $V = 1296 \text{ cm}^3$, $P_c = 108\sqrt{3}(1 + \sqrt{13}) \text{ cm}^2$
 7.17. 1666 7.18. $320\sqrt{3}$. Wskazówka: Wyznacz spodek wysokości ostrosłupa. 7.19. 2223
 7.20. 2 dm^3 . Wskazówka: Wyznacz spodek wysokości ostrosłupa. 7.21. $V = \frac{a^3 \text{tg } \alpha}{12}$,
 $P_b = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{1 + 4 \text{tg}^2 \alpha}$ 7.22. $P_c = 74,8$, $V = 44,0$ 7.23. 38 cm^3 7.24. $2400\pi \text{ cm}^2$
 7.25. 2 7.26. 90π 7.27. 628 7.28. 618 cm^2
 7.29. $\frac{125}{16} \text{ cm}$ 7.30. ok. 11 m^2 7.31. $200\pi(2 + \sqrt{5}) \text{ cm}^2$ 7.32. $17\frac{1}{3}\pi \text{ cm}^3$
 7.34. 27 : 37. Wskazówka: Skorzystaj z zależności między objętościami brył podobnych.
 7.35. $\frac{S}{\sqrt[3]{4}}$. Wskazówka: Skorzystaj z zależności między objętościami brył podobnych.
 7.36. $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)H$. Wskazówka: Skorzystaj z zależności między objętościami brył podobnych.

s. 85

1. C 2. A 3. C 4. P, P, P 5. $P_c = 422$, $V = 513$ 6. $V = 10 \text{ dm}^3$, $P_c = 32 \text{ dm}^2$
 7. $99\sqrt{11} \text{ cm}^3$

s. 86

1. B 2. D 3. C 4. C 5. B 6. B 7. B 8. D 9. A 10. A 11. B 12. B
 13. B 14. D 15. D 16. C 17. D 18. B 19. B 20. F, P, F 21. F, P, P
 22. P, F, P 23. P, F, P 24. P, P, P 25. F, P, P 26. P, P, P 27. P, P, P 28. P, F, F
 29. P, F, P 30. F, P, F 31. F, P, F 32. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 33. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 34. $2\sqrt{7}$ 35. $36\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\right)$
 36. 45° 37. a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ b) 55° c) 45° 38. $4\sqrt{17}\pi$ 39. 256 40. $81\pi(1 + \sqrt{2})$
 41. $12\pi\sqrt{13} \cdot \sqrt[3]{9}$ 42. 48 43. $a = 4\sqrt{3}$ 44. $P_b = 48 \text{ dm}^2$, $V = 36 \text{ dm}^3$ 45. o 0,4 mm
 46. $0,168d^3$ 47. $V = 1350$, $P_b = 779$ 48. 56,25 49. 108
 50. $P_c = 8(24 + 25\sqrt{5}) \text{ cm}^2$, $V = 480\sqrt{5} \text{ cm}^3$ 51. szerokość wału: 11 m; $41\,569 \text{ m}^3$
 52. $V = 245$, $P_c = 264$ 53. $2\sqrt[3]{3}$ 54. a) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, $P_c = a^2\sqrt{3}$ b) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \approx 71^\circ$ 55. 60°
 56. $\frac{c^2\sqrt{4b^2 - c^2}}{24}$ 57. $96\sqrt{3}$ 58. $\sqrt[3]{\frac{V_1 \cdot V_2}{\pi^2}}$, 1,2 59. $V = 2\pi r^3 \text{tg } \alpha$, $P_c = 2\pi r^2(1 + 2 \text{tg } \alpha)$
 60. $V = \frac{\pi r^3}{3 \text{tg } \alpha}$, $P_b = \frac{\pi r^2}{\sin \alpha}$ 61. stosunek pól: $\frac{3}{2}$, stosunek objętości: $\frac{4}{3}$ 62. $\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$ 63. 8 : 117

2. Dowody w matematyce

s. 100

1.23. Wskazówka: Skorzystaj z nierówności trójkąta. **1.25.** Wskazówka: Przedłuż ramiona trapezu do punktu przecięcia M , wykaż, że pola trójkątów BDC i CDM są równe, i wykorzystaj zależność między polami trójkątów ABM oraz DCM .

s. 113

2.9. Wskazówka: Liczba niepodzielna przez 3 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1 lub 2.

2.19. Wskazówka: Przekształć tezę równoważnie przez podniesienie obu stron do kwadratu.

2.21. Wskazówka: Pomnóż daną nierówność stronami przez 2. **2.27.** Wskazówka: Przekształć tezę równoważnie przez podniesienie obu stron do kwadratu.

3. Powtórzenie

s. 119

- 1.1.** B **1.2.** C **1.3.** D **1.4.** D **1.5.** D **1.6.** B **1.7.** A **1.8.** D **1.9.** B **1.10.** B
1.11. B **1.12.** D **1.13.** B **1.14.** C **1.15.** D **1.16.** C **1.17.** A **1.18.** A **1.19.** A
1.20. C **1.21.** D **1.22.** P, F, F **1.23.** F, P, P **1.24.** F, P, P **1.25.** P, P, F **1.26.** C, E
1.27. A2 **1.28.** -2, 0, 2, 4 **1.29.** a) np. 1,52 b) np. $1\frac{2}{3}$ c) np. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **1.30.** 10 050
1.31. Liczba n jest cztery razy większa od m . **1.32.** a) $(a+12)^2$ b) $(k-\sqrt{6}m)^2$ c) $(1-2x)^2$
d) $\left(\frac{1}{2}y+4z\right)^2$ **1.33.** a) $(a-15)(a+15)$ b) $\left(\frac{1}{2}b-5d^2\right)\left(\frac{1}{2}b+5d^2\right)$ c) $(m-p-k)(m-p+k)$
d) $(x+y)(x+3y)$ **1.34.** $\frac{24+\sqrt{2}}{14}$ **1.35.** $3\frac{1}{5} < 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$ **1.36.** 2 min 5 s
1.37. a) 57,4% b) o 26,48% c) Średnia kwota odliczeń na dojazdy dzieci do szkół nie jest ilorazem wielkości z dwóch pierwszych diagramów. **1.38.** a) o 100% b) o 50% c) 22,9% **1.39.** o 32
1.40. 80% **1.41.** 780 zł **1.42.** 100 wiadomości **1.43.** 400 000 zł **1.44.** 24 h 37 min
1.45. o 37,5% **1.46.** o 189% **1.47.** Pole trójkąta zmniejszyło się o 9%. **1.48.** 9 uczniów
1.49. 800 **1.50.** a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{25}$ **1.51.** a) $\frac{1}{24}$ b) 40 **1.52.** $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ **1.53.** $a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{4}{3}}, \sqrt[4]{2}$
1.54. a) 1 b) 9 c) $\frac{1}{25}$ d) $\frac{2(\sqrt{5}-1)}{3}$ e) 1 f) $\sqrt[3]{2}$ **1.55.** $m < n$ **1.56.** Dane liczby są równe.

Wskazówka: Zauważ, że wyrażenie $5+2\sqrt{6}$ jest kwadratem sumy dwóch pierwiastków kwadratowych.

s. 127

- 2.1.** A **2.2.** B **2.3.** B **2.4.** C **2.5.** A **2.6.** B **2.7.** C **2.8.** A **2.9.** C **2.10.** C
2.11. B **2.12.** A **2.13.** D **2.14.** F, P, P **2.15.** F, P, P **2.16.** P, P, P **2.17.** B. $g(x)$, D. $h(x)$
2.18. C2 **2.19.** a) tak, $D = \{-2, 0, 1, 3\}$, $ZW = \{-6, 0, 3, 9\}$, np. $y = 3x$ b) tak,

$D = \{-5, 0, 1, 5\}$, $ZW = \{0, 1, 25\}$, np. $y = x^2$ c) nie d) nie **2.20.** $y = 2x - 1$,

$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $ZW = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$ **2.21.** a) $\mathbb{R} - \{-2\}$ b) $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$ c) $(-\infty; 5)$

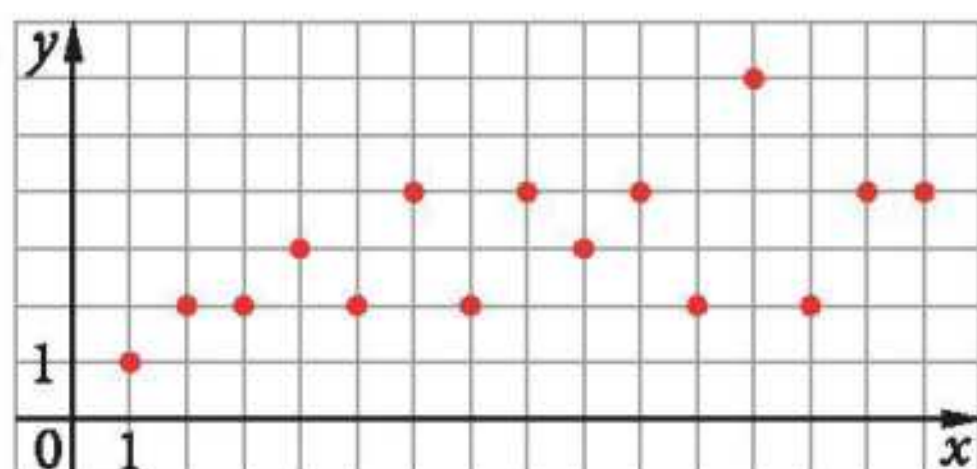
d) $\langle -3; 4 \rangle$ e) $\left(\frac{1}{3}; 3\right) \cup (3; \infty)$ f) $(2; \infty)$ g) $\langle -3; 6 \rangle$ h) $(-5; 5) \cup (5; \infty)$ **2.22.** $f(-3) = -6$,

$f(0) = \frac{3}{2}$, $f(\sqrt{2}) = \frac{8-5\sqrt{2}}{2}$, $f(2) = \frac{1}{4}$, $f(3) = 0$ **2.23.** a) $\{0, 4, 6\}$ b) $\{-1, 0, -4\}$ c) $\{0, 1, 3\}$

d) $\{0, -1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ **2.24.** $f(x) = 0,85x + 5$, $D = \{40, 52, 68, 84, 120\}$,

$ZW = \{39, 49, 62, 76, 107\}$

2.25.



wartość funkcji dla każdej liczby pierwszej: 2;

wartość największa: 6 dla $x = 12$, wartość

najmniejsza: 1 dla $x = 1$

2.26. $f(n) = \frac{60-n}{2n}$, $D = \{3, 4, \dots, 59\}$

2.27. a) $\frac{3}{2}$ b) -3 c) $0, 1$ d) 3

2.28. a) $D = \langle -6; 5 \rangle$, $ZW = (-2; 6)$; brak wartości najmniejszej, brak wartości największej; miejsca

zerowe: $-4, -1$; $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -6; -4 \rangle \cup (-1; 5)$; $f(x) < 0$ dla $x \in (-4; -1)$; funkcja malejąca

w przedziale $\langle -6; -1 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -1; 5 \rangle$; $f(-6) = 5$, $f(0) = 2$, $f(2) = 4$; równanie

$f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2) \cup \langle 6; \infty \rangle$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-2; 0) \cup \langle 3; 4 \rangle \cup (5; 6)$,

2 rozwiązania dla $m \in \langle 0; 3 \rangle \cup \langle 4; 5 \rangle$ b) $D = (-6; -2) \cup (0; \infty) \cup \{-1\}$, $ZW = (-2; \infty)$; brak wartości

najmniejszej, brak wartości największej; miejsca zerowe: $-2, -1, 2$; $h(x) > 0$ dla $x \in (-6; -2) \cup (2; \infty)$;

$h(x) < 0$ dla $x \in (0; 2)$; funkcja malejąca w przedziale $(-6; -2)$, rosnąca w przedziale $(0; \infty)$;

$x = -6 \notin D$, $x = 0 \notin D$, $h(2) = 0$; równanie $h(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2)$,

1 rozwiązanie dla $m \in (-2; 0) \cup (0; 2) \cup \langle 5; \infty \rangle$, 2 rozwiązania dla $m \in (2; 5)$, 3 rozwiązania dla $m = 0$

c) $D = (-8; 6)$, $ZW = (-3; 2) \cup \{3\}$; brak wartości najmniejszej, wartość największa: 3 dla $x \in (2; 6)$;

miejsca zerowe: $-5, 1$; $g(x) > 0$ dla $x \in (-5; -4) \cup (1; 6)$; $g(x) < 0$ dla $x \in (-8; -5) \cup (-4; 1)$; funkcja

rosnąca w każdym z przedziałów $(-8; -4)$ i $\langle -2; 2 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -4; -2 \rangle$, stała w przedziale

$(2; 6)$; $g(-6) = g(0) = -1$, $g(2) = 2$; równanie $g(x) = m$ ma: 0 rozwiązań

dla $m \in (-\infty; -3) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-3; -2) \cup (1; 2)$, 2 rozwiązania

dla $m \in \langle -1; 1 \rangle \cup \{-2\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-2; -1)$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 3$

d) $D = (-\infty; 6)$, $ZW = \langle -3; 6 \rangle$; wartość najmniejsza: -3 dla $x = 6$, wartość największa: 6 dla $x = 2$;

miejsca zerowe: $-5, 5$; $k(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; 5)$; $k(x) < 0$ dla $x \in (5; 6)$; funkcja stała

w każdym z przedziałów $(-\infty; -7)$ i $(-2; 1)$, malejąca w każdym z przedziałów $\langle -7; -5 \rangle$ i $\langle 2; 6 \rangle$,

rosnąca w każdym z przedziałów $\langle -5; -2 \rangle$ i $\langle 1; 2 \rangle$; $k(-6) = 1$, $k(0) = 5$, $k(2) = 6$; równanie $k(x) = m$

ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -3) \cup (6; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in \langle -3; 0 \rangle \cup \{6\}$, 2 rozwiązania

dla $m \in (2; 3) \cup (3; 5) \cup (5; 6) \cup \{0\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (0; 2) \cup \{3\}$, nieskończenie wiele

rozwiązań dla $m \in \{2, 5\}$ **2.29.** a) $D = \langle -4; 7 \rangle$, $ZW = (1; 9)$ b) równanie $-h(x) - 2 = m$ ma:

0 rozwiązań dla $m \in \langle 0; \infty \rangle$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -7) \cup \langle -4; -2 \rangle \cup (-2; 0)$, 2 rozwiązania

dla $m \in (-7; -4)$; 3 rozwiązania dla $m = -2$ c) rosnąca w przedziale $(-9; -5)$, malejąca w przedziale

$\langle -5; -3 \rangle$, niemalejąca w przedziale $\langle -3; 5 \rangle$ d) wartość najmniejsza: -2 dla $x = -6$,

wartość największa: 7 dla $x = -2$ **2.30.** $D = \langle -8; 10 \rangle$, $ZW = \langle 3; 8 \rangle$ **2.31.** a) malejąca w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 1; 5 \rangle$ b) rosnąca w przedziale $\langle -5; -1 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$ **2.32.** f – rosnąca, g – niemonotoniczna, h – malejąca **2.33.** a) 4 mln b) Wszystkie funkcje są niemonotoniczne. c) 2004 r. – ok. 3,5 mln, 2005 r. – ok. 3,8 mln, 2006 r. – ok. 4 mln, 2007 r. – ok. 4,5 mln d) w 2001 r., 1,4 mln e) odwiedziny u krewnych lub znajomych

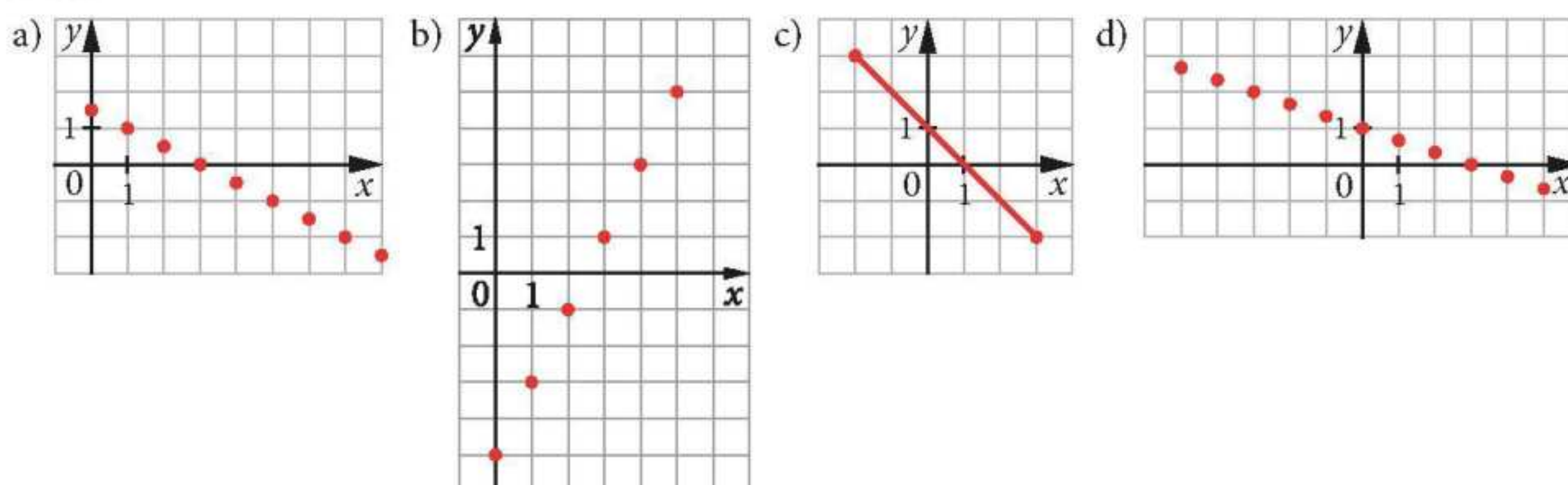
2.35. a) 482 tys.



c) w 6. tygodniu d) po 5 tygodniach

2.37. 145 zł **2.38.** a) $1\frac{1}{2}$, 63° b) $\frac{2}{3}$, 124°

2.39.

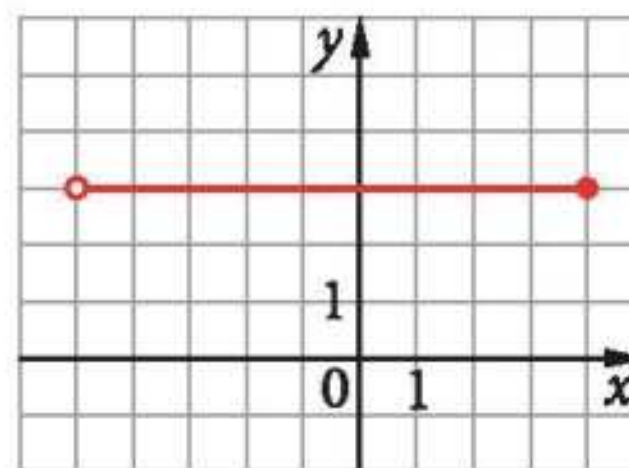
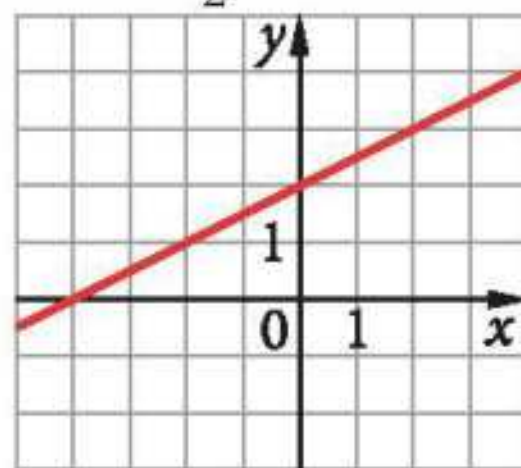
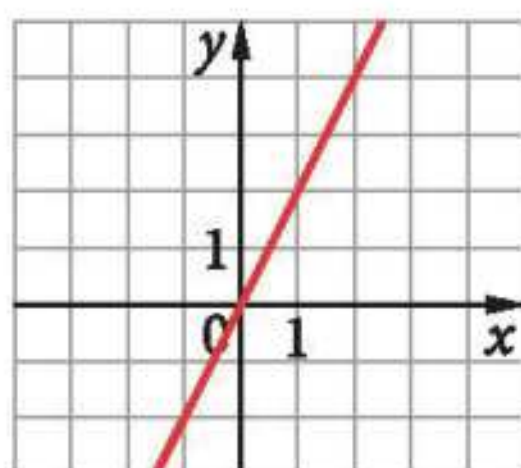


2.40. a) $f(x) = -x + 3$ b) $f(x) = 2x + 4$

2.41. a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

c) $f(x) = 3$ dla $x \in (-5; 4)$

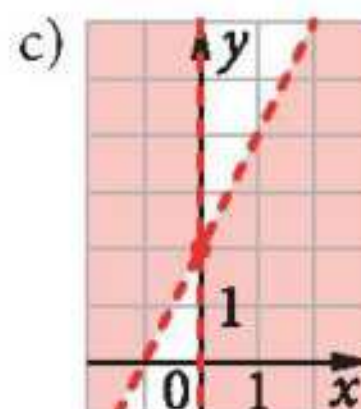
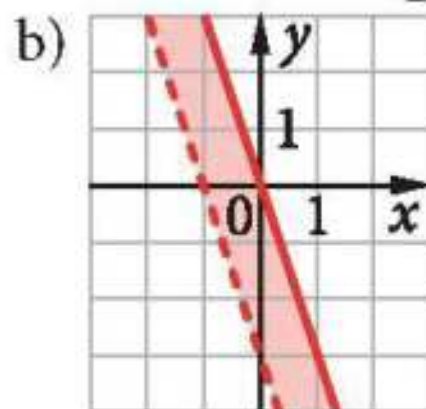
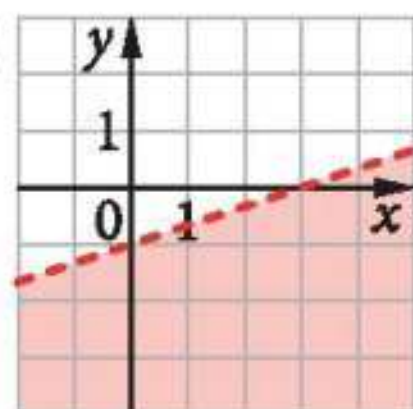


2.42. $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$

2.43. a) $f(x) = 3x - 9$ b) $f(x) = -4x + 4$ c) $f(x) = x - 2$

d) $f(x) = 3x + 1$ **2.44.** a) rosnąca dla $m < 2$, malejąca dla $m > 2$ b) rosnąca dla $m < -\sqrt{2}$, malejąca dla $m > -\sqrt{2}$ **2.45.** a) $g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$ b) $g(x) = \frac{2}{5}x$ **2.46.** $-2\frac{2}{3}$

2.47. a)



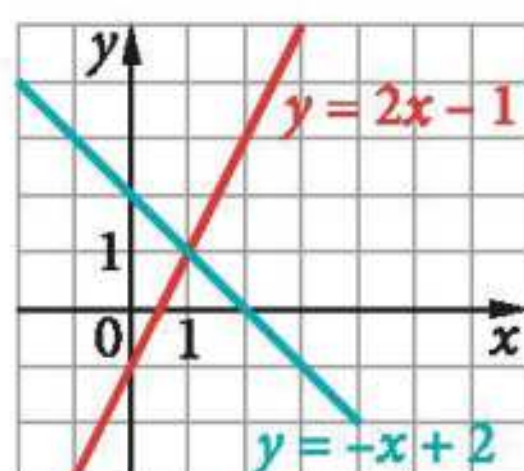
2.48. a) $x = 0,25$ b) $x = 2$ c) $x = 2(2\sqrt{5} - 3)$ d) $x \in \mathbb{R}$ e) $x = 1$ f) $x \in \langle 21,5; \infty \rangle$

g) $x \in (-\infty; -4)$ h) $x \in (-\infty; -2)$ **2.50.** $x = 2^3$

2.51. a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ b) układ sprzeczny c) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ d) układ nieoznaczony: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x \end{cases}$

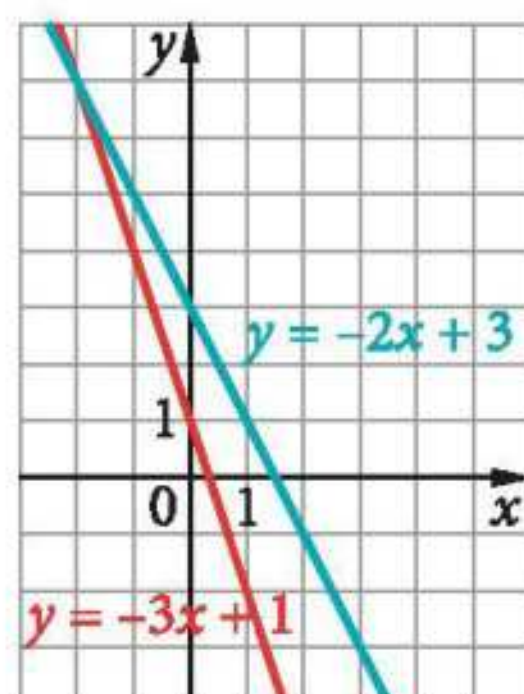
2.52. a)

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$



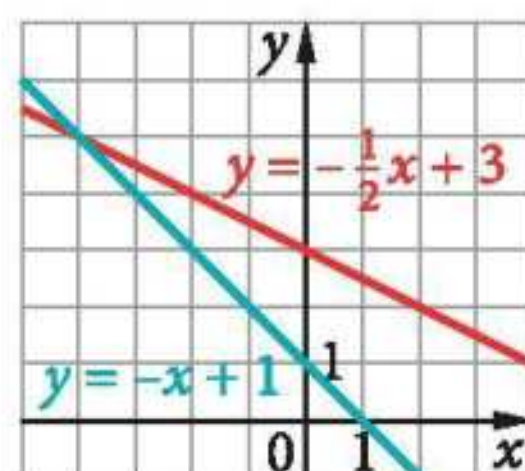
b)

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases}$$



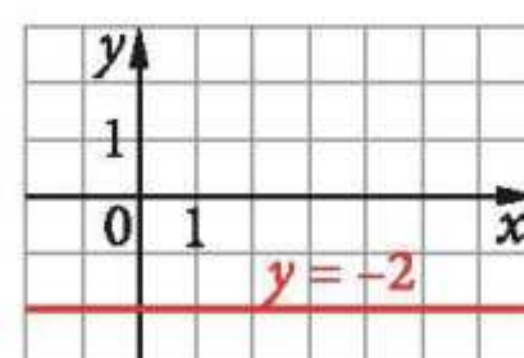
c)

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases}$$



d)

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -2 \end{cases}$$



2.53. 263 telefony stacjonarne i 102 telefony komórkowe 2.54. o 400 zł

2.55. Jacka: $32 \text{ m} \times 25 \text{ m}$ i Artura: $40 \text{ m} \times 28 \text{ m}$ lub Jacka: $66\frac{2}{3} \text{ m} \times 12 \text{ m}$ i Artura: $74\frac{2}{3} \text{ m} \times 15 \text{ m}$ 2.56. $V(t) = 12t + 180$; $D = \langle 0; 110 \rangle$; po 1 h 50 min

$$2.57. p(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1000 \\ \frac{1}{5}(x - 1000) & \text{dla } x > 1000 \end{cases}$$

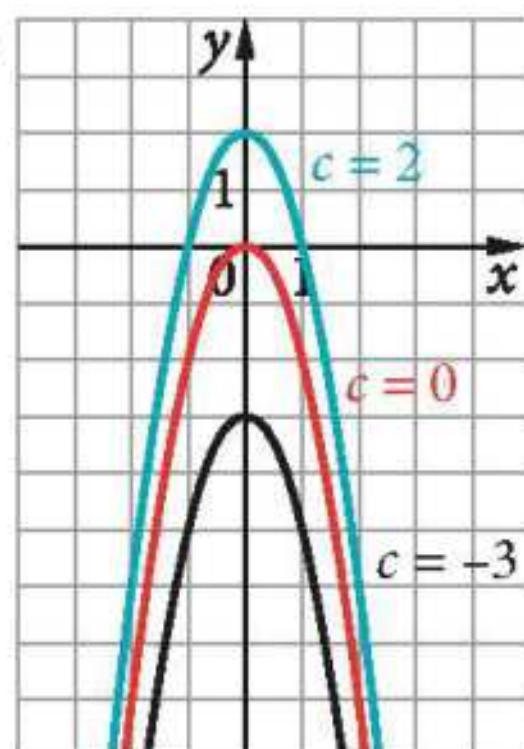
2.58. a) $x = -2$ lub $x = 8$ b) $x = -16$ lub $x = 6$ c) $x = -11$ d) $x = -8$ lub $x = -4$ e) równanie sprzeczne f) $x = 4$ lub $x = 10$ 2.59. a) $x \in (-1; 5)$ b) $x \in (-\infty; -10) \cup (0; \infty)$ c) nierówność tożsamościowa d) $x \in \langle 3; 5 \rangle$ e) nierówność sprzeczna f) $x \in (-36; -6)$

s. 139

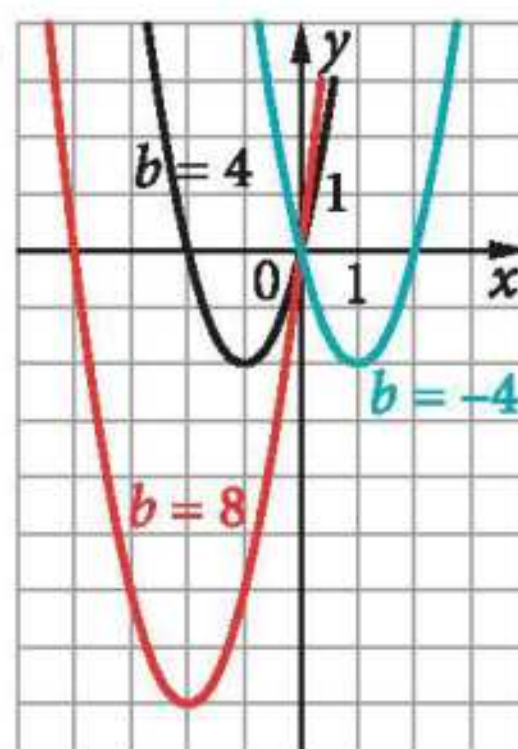
3.1. C 3.2. C 3.3. D 3.4. A 3.5. C 3.6. D 3.7. D 3.8. B 3.9. C 3.10. B

3.11. F, F, P 3.12. F, P, F 3.13. B2

3.14. a)

b) $c = 8$ c) $c < 0$ d) $c = 0$

3.15. a)

b) $b = 8$ c) $b \neq 0$ d) $b = 0$ 3.16. a) postać ogólna: $f(x) = -x^2 + 8x - 15$, postać iloczynowa: $f(x) = -(x - 3)(x - 5)$ b) postaćkanoniczna: $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 4\frac{1}{2}$, postać iloczynowa: $f(x) = \frac{1}{2}(x + 4)(x - 2)$ c) postać kanoniczna: $f(x) = 3(x - 1)^2 + 3$, postać iloczynowa nie istnieje d) postać ogólna: $f(x) = -2x^2 + x + 3$, postaćkanoniczna: $f(x) = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 3\frac{1}{8}$ e) postać kanoniczna: $f(x) = (x - 1)^2 + 2$, postaćiloczynowa nie istnieje f) postać kanoniczna: $f(x) = -2(x + 2)^2 + 2$, postać iloczynowa: $f(x) = -2(x + 1)(x + 3)$ 3.17. a) $D = \mathbb{R}$, $ZW = \langle -4; \infty \rangle$; miejsca zerowe: $-3, 1$; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; 1)$; funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$,

rosnąca w przedziale $\langle -1; \infty \rangle$; wartość najmniejsza: -4 dla $x = -1$ b) $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; 1)$; miejsca zerowe: $0, 4$; $f(x) > 0$ dla $x \in (0; 4)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$; rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$, malejąca w przedziale $\langle 2; \infty \rangle$; wartość największa: 1 dla $x = 2$ c) $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; 0)$; miejsce zerowe: 2 ; $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$; funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$, malejąca w przedziale $\langle 2; \infty \rangle$; wartość największa: 0 dla $x = 2$ d) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -2; \infty \rangle$; miejsca zerowe: $\frac{-3 - \sqrt{6}}{3}$, $\frac{-3 + \sqrt{6}}{3}$; $f(x) > 0$ dla $x \in \left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\frac{-3 + \sqrt{6}}{3}; \infty\right)$, $f(x) < 0$ dla $x \in \left(\frac{-3 - \sqrt{6}}{3}; \frac{-3 + \sqrt{6}}{3}\right)$; funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$, rosnąca w przedziale $\langle -1; \infty \rangle$;

wartość najmniejsza: -2 dla $x = -1$ **3.18.** a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$, $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty; 4)$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 7$, $D = \langle 2; 6 \rangle$, $ZW = \langle -2; 7 \rangle$ **3.19.** $\left(-\infty; -\frac{7}{8}\right)$ **3.20.** a) wartość największa: 5 dla $x = 3$, wartość najmniejsza: -7 dla $x = 1$ b) wartość największa: 1 dla $x = 1$, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$

3.21. 121 **3.22.** -9 **3.23.** $15 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$ **3.24.** $P = 6$

3.25. a) $x = -1$ lub $x = 3$ b) $x = 0$ lub $x = \frac{3}{5}$ c) $x = 2 - \sqrt{3}$ lub $x = 2 + \sqrt{3}$ d) brak rozwiązań

e) $x = 1\frac{1}{3}$ lub $x = 4$ f) $x = -1$ lub $x = -4$ **3.26.** a) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (3; \infty)$ b) $x = 2\sqrt{2}$

c) $x \in \mathbf{R}$ d) $x \in \left(-\infty; \frac{-2\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}; \infty\right)$ e) $x \in (1; 5)$ f) $x \in \langle -4; 3 \rangle$

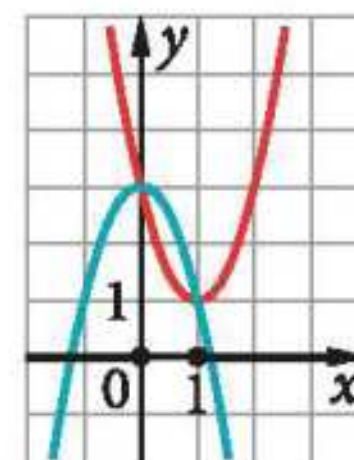
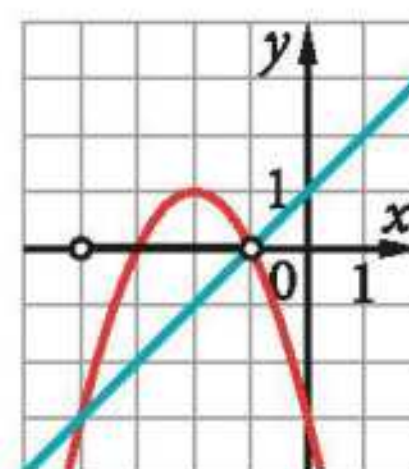
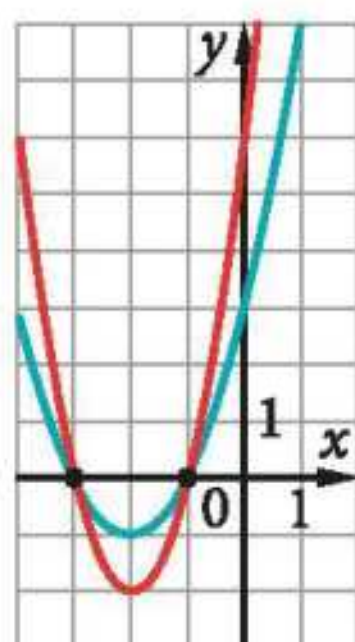
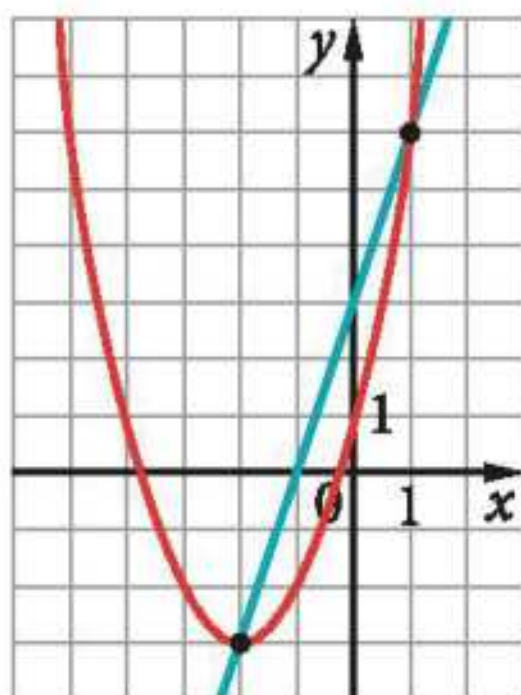
3.27.

a) $x = -2$ lub $x = 1$

b) $x = -3$ lub $x = -1$

c) $x \in (-4; -1)$

d) $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 1; \infty \rangle$



3.28. $-9, -7, -5$ lub $5, 7, 9$ **3.29.** $-1, 0, 1, 2$ **3.30.** $12 \text{ m} \times 5 \text{ m}$ **3.31.** siedmiokąt

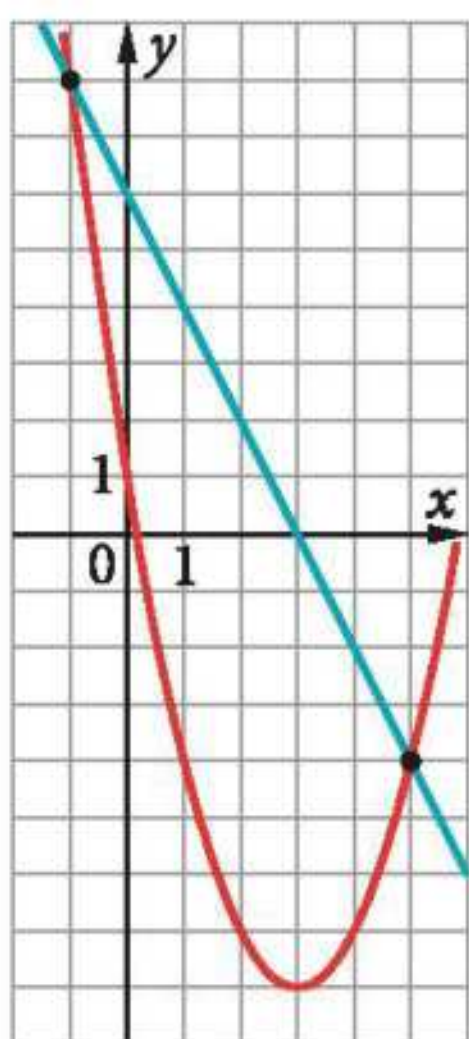
i jedenastokąt **3.32.** $30 \text{ m}, 40 \text{ m}, 50 \text{ m}$ **3.33.** $6\sqrt{2}, 4\sqrt{2}$ **3.34.** $(1, -7), (-3, -15)$

3.35. $b = -2, c = -3$ **3.36.** $a = \frac{1}{2}, b = -2$ **3.37.** $a = 2, b = 12$; wartość najmniejsza: -2

dla $x = -3$, wartość największa: 6 dla $x = -1$ **3.38.** $b = 10, c = 4\frac{1}{2}, x \in \left\langle -8; \frac{2}{3} \right\rangle$

3.39. $f(x) = x^2 + 6x + 8, y > 3$ dla $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; \infty)$

3.40. a) $x = -1$ lub $x = 5$ b) 2 rozwiązania dla $m < 3$, 1 rozwiązanie dla $m = 3$, brak rozwiązań dla $m > 3$



3.41. wartość najmniejsza: $5\frac{1}{4}$ dla $x = 1$, wartość

największa: $7\frac{1}{3}$ dla $x = -\frac{2}{3}$ **3.43.** $b \in (-2; 2)$

3.44. $g(x) = -\frac{5}{9}(x-2)(x-8)$ **3.45.** $f(x) = x^2 + \frac{m-26}{4}x + \frac{30-m}{4}$

3.46. $Q(x) = x^6 - 2x^3 - 2x^2 + 16$, stopień $Q = 6$, $Q(\sqrt{2}) = 20 - 4\sqrt{2}$

3.47. a) $W(x) = (2x+1)(x^2-x+2) - 3$

b) $W(x) = (x-1)(3x^2-2x-1)$

c) $W(x) = (-x+1)(-x^3+3x+1) + 4$

d) $W(x) = (2x-3)(8x^3+12x^2+18x+27) - 19$

3.48. a) $W(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$ b) $W(x) = x(x-1)^3$

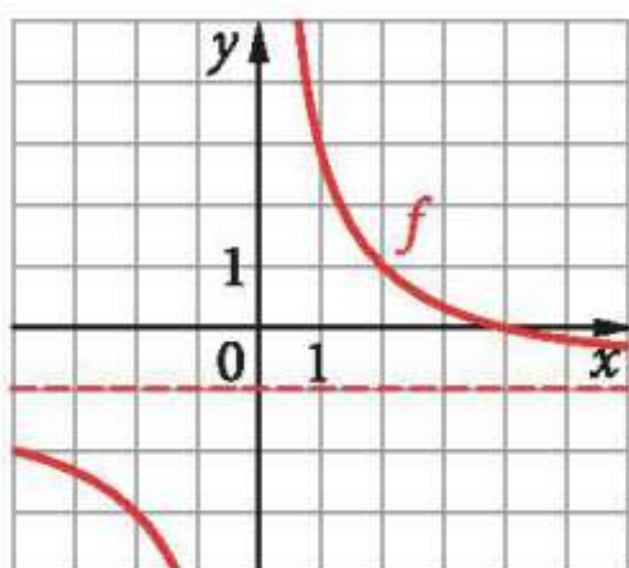
c) $W(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$ d) $W(x) = (x-1)(x+1)(x^2+2x+3)$

3.49. a) $x = 0$ lub $x = 3$ b) $x = -2$ lub $x = 2$, lub $x = 3$ c) $x = -2$ lub $x = 1$, lub $x = 5$

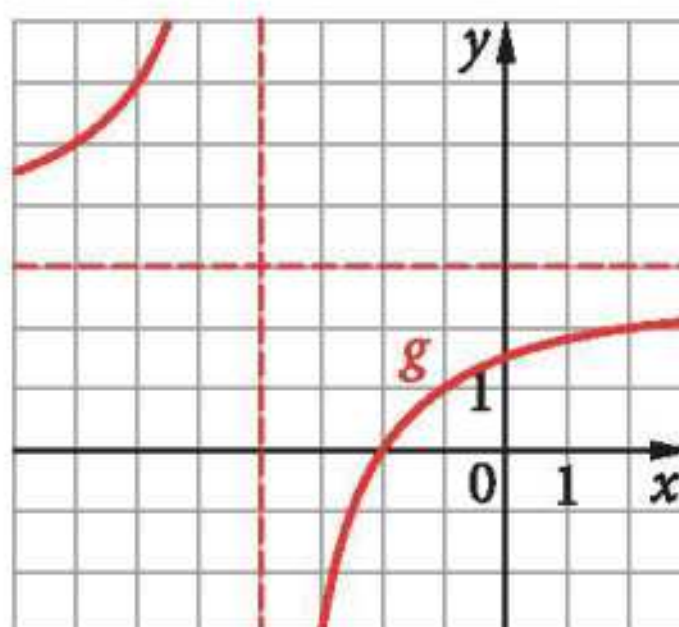
d) $x = -2$ lub $x = 2$ **3.50.** $x = \frac{1+\sqrt{11}}{2}$ **3.51.** $k = 10\frac{3}{4}$ **3.52.** $x \in \left\{-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\}$

3.53. $m = 6$, $x \in \left\{-2, \frac{1}{4}, 3\right\}$ **3.54.** $a = -5$, $b = 9$

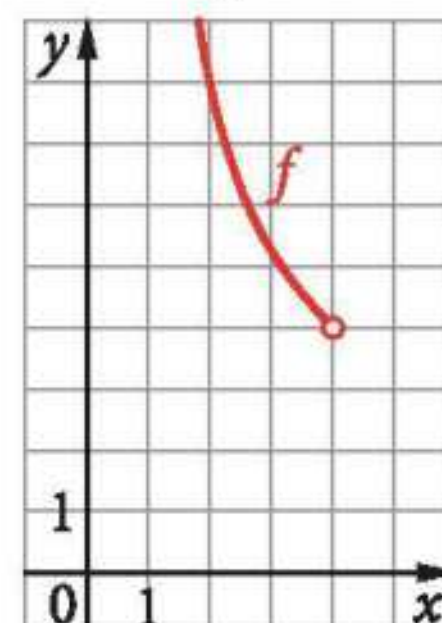
3.55. $\frac{4}{x} - 1 > 0$ dla $x \in (0; 4)$



3.56. $ZW = \mathbb{R} - \{3\}$; funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -4)$ i $(-4; \infty)$



3.57. $f(x) = \frac{16}{x}$, $x \in (0; 4)$



3.58. a) $\frac{3(x+2)}{x+3}$, $x \in \mathbb{R} - \{-4, -3, 0, 2\}$ b) $\frac{1}{x+2}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2, 10\}$ c) $\frac{x^2-6x-3}{2x(x+1)(x-1)}$,

$x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ d) $-\frac{1}{(x+2)(x-2)}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ **3.59.** a) $x = -\frac{2}{3}$ b) $x = 7$ c) $x = \frac{1}{4}$

d) $x = 9\frac{1}{2}$ e) $x = -\frac{3}{5}$ lub $x = 3$ f) $x = -\frac{8}{3}$ lub $x = -2$ g) brak rozwiązań h) $x = -1$ lub $x = 2$

3.60. 45 km/h **3.61.** 80 km/h **3.62.** 21 godzin **3.63.** Było 12 wychowawców, każdy miał

pod opieką 12 dzieci. **3.64.** 21 km **3.65.** $6\frac{2}{3}$ h **3.66.** 48 min **3.67.** 40 dni, o 25%

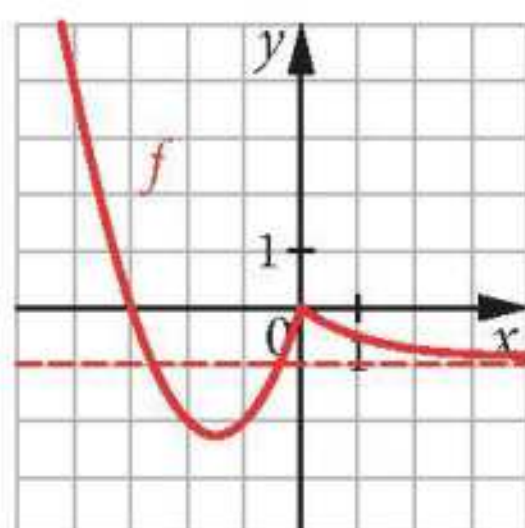
3.68. 12 sztuk produktu A po 1000 zł i 8 sztuk produktu B po 800 zł

s. 148

- 4.1. A 4.2. B 4.3. C 4.4. A 4.5. B 4.6. D 4.7. D 4.8. A 4.9. D 4.10. B
 4.11. D 4.12. P, F, F 4.13. P, P, P 4.14. P, F, F 4.15. A3 4.16. a) $\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$,
 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$ 4.17. $\frac{41\sqrt{7}}{18}$ 4.18. $\frac{28\sqrt{2}}{81}$ 4.19. $-\frac{2}{13}$
 4.20. a) $\sin \angle A = \cos \angle B = \frac{4}{5}$, $\sin \angle B = \cos \angle A = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg} \angle B = \frac{3}{4}$
 b) $\sin \angle A = \cos \angle B = \frac{24}{25}$, $\sin \angle B = \cos \angle A = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{24}{7}$, $\operatorname{tg} \angle B = \frac{7}{24}$
 4.21. a) $\sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \angle BAC = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{2}{3}$ b) $\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos \angle BAC = \frac{1}{4}$,
 $\operatorname{tg} \angle BAC = \sqrt{15}$ 4.22. 67° i 23° 4.23. a) 30° b) 53° c) Taki trójkąt nie istnieje.
 4.24. a) $\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 4.25. $h = \frac{1180 \cdot \operatorname{tg} 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 22^\circ}{\operatorname{tg} 22^\circ - \operatorname{tg} 18^\circ} \approx 1960$ [m] 4.26. $\sin \alpha = \frac{2}{9}$, $\alpha \approx 13^\circ$
 4.27. wysokość: 190 m, długość drogi: 1200 [m] 4.28. $h = \frac{15 \operatorname{tg} 32^\circ \operatorname{tg} 68^\circ}{\operatorname{tg} 68^\circ - \operatorname{tg} 32^\circ} \approx 12,5$ [m]
 4.29. cosinus kąta ostrego: 0,53125, kąt ostry: 58° , sinus kąta rozwartego: 0,8472, kąt rozwarty: 122°
 4.30. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 4.31. $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ 4.32. $\frac{91}{9}$ 4.33. a) tak, 4 b) tak, 0
 4.36. $P = \frac{175\pi}{13}$ 4.37. $\frac{47}{15}$ 4.38. $\frac{1}{6}$ 4.39. a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$
 b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -1$ c) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\cos \alpha = -\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{8}{15}$ d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$,
 $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ 4.40. $-\frac{5}{4}$ 4.41. $\sqrt{7}$ 4.42. $32^\circ, 53^\circ, 95^\circ$

s. 154

- 5.1. D 5.2. C 5.3. D 5.4. C 5.5. C 5.6. D 5.7. D 5.8. A 5.9. A 5.10. C
 5.11. B 5.12. A 5.13. A 5.14. C 5.15. D 5.16. F, F, P 5.17. B2 5.18. a) 0
 b) -3 c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{5}$ 5.19. a) 2 b) 1 c) 2 d) 1 5.20. a) 17 b) $\frac{5}{3}$ c) 8 d) $2\sqrt{5}$
 5.21. -3,8 5.22. $2-2p$ 5.23. $\frac{6-2t}{3}$ 5.24. 24 5.25. $a > b$ 5.28. wartość
 największa: -23 dla $x = 3$, wartość najmniejsza: -623 dla $x = 5$ 5.29. a) $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$
 b) $g(x) = 2^x + 3$ 5.30. a) $f(x) = N \cdot 3^x$ b) o ok. 420% 5.31. a) $a = \frac{4}{5}$ b) 3 lata
 5.32. $-\frac{9}{4}$



5.33. $10^{-\frac{4}{5}} \approx 0,158$, $10^{\frac{11}{5}} \approx 158,5$

5.34. a) $p = -4$

5.35. a) $x \in (1; \infty)$ b) $x \in (-4; 5)$

s. 160

- 6.1. A 6.2. A 6.3. D 6.4. B 6.5. C 6.6. D 6.7. A 6.8. B 6.9. B 6.10. D
 6.11. D 6.12. B 6.13. C 6.14. F, P, F 6.15. P, F, F 6.16. F, P, P 6.17. P, F, P
 6.18. C, D 6.19. A3 6.20. pięć 6.21. a) 5, 7, 100 c) $\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$,
 $\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$ 6.22. ciąg malejący 6.23. a) tak, $a_1 = 0$, $r = 3$
 b) nie c) tak, $a_1 = 5$, $r = 5$ d) nie e) tak, $a_1 = -1$, $r = -\frac{5}{2}$ f) tak, $a_1 = 1$, $r = 3$ 6.24. $x = -1$,
 $y = 9$ 6.25. 171 6.27. $x = 7$ 6.28. $a_{15} = 72$ 6.29. -473 6.30. $n = 10$ 6.31. $n = 6$
 i $S_6 = 135$ lub $n = 33$ i $S_{33} = -594$ 6.32. w czternastej 6.33. 3 : 5 : 7 6.34. $n = 13$
 6.35. osiem lub nie istnieje n takie, że $S_n = -64$ 6.36. sto 6.37. $25(31 - 12\sqrt{2})$
 6.38. $x = \frac{1}{2}$ 6.39. a) tak, $a_1 = 5$, $q = 5$ b) tak, $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = 2^{-3}$ c) nie d) nie 6.40. $\frac{1}{4}$
 6.41. na górnej: 16 płyt, na dolnej: 36 płyt 6.42. 20 m 6.43. 6 cm, 12 cm, 24 cm
 6.44. $a_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ lub $a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ 6.45. $x = 14$, $y = 126$, $z = 378$ 6.46. $x = 3$, $y = 6$
 6.47. $a = 3$, $b = 15$, $c = 75$ lub $a = 31$, $b = 31$, $c = 31$ 6.48. $a_n = 2$ lub $a_n = 3n - 7$
 6.50. $1 < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 6.51. a) $a_1 = -11$, $r = 2$ b) tak c) $n = 6$ 6.52. $a = 2$, $b = 5$, $c = 8$
 lub $a = 26$, $b = 5$, $c = -16$ 6.53. ciąg arytmetyczny (a_n) : $a_1 = 2$, $r = 3$;
 ciąg geometryczny (b_n) : $b_1 = 3$, $q = 2$ 6.54. o 32 zł mniej 6.55. 7936,38 zł
 6.56. a) 144 zł b) 138 zł c) 132 zł 6.57. 30 000 zł

s. 170

- 7.1. C 7.2. C 7.3. B 7.4. A 7.5. D 7.6. D 7.7. A 7.8. C 7.9. C 7.10. C
 7.11. C 7.12. D 7.13. C 7.14. C 7.15. C 7.16. A 7.17. C 7.18. D 7.19. F,
 F, P 7.20. F, P, F 7.21. F, P, F 7.22. P, P, P 7.23. P, P, P 7.24. C2 7.25. $c = 10$
 7.26. $c = 6$ lub $c = 10$ 7.27. 36° , 72° , 72° 7.28. 125° 7.29. 54° 7.30. 3,50 7.31. dwa
 7.32. $r = 12,6$ cm 7.33. $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $\delta = 40^\circ$ 7.34. a) $\alpha = 46^\circ$ b) $\alpha = 80^\circ$
 7.35. 1,4 cm, 5,6 cm 7.36. $P = 70$ 7.37. obw = 36 7.38. $\frac{4\sqrt{21}}{3}$
 7.39. $|KL| = |MN| = 0,96$ 7.40. 10 : 7 7.41. $\sphericalangle A = 60^\circ$, $\sphericalangle B = 45^\circ$, $\sphericalangle C = 75^\circ$ 7.42. 2, 8 i 12
 7.43. $2\sqrt{3}$ cm 7.45. 6,72 cm 7.46. $P = 131$ cm² 7.47. $P = \frac{750}{169}$ 7.48. Wskazówka: Jeżeli
 $\sphericalangle ACD = \alpha$, to $\sphericalangle ADC = 180^\circ - 2\alpha$, $\sphericalangle ADB = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$, $\sphericalangle DAB = 2\alpha$, $\sphericalangle ABD = 3\alpha$,
 $\sphericalangle ADB = 180^\circ - 5\alpha$, $\sphericalangle ADC = 180^\circ - (180^\circ - 5\alpha) = 5\alpha$. 7.49. $P = \frac{25\sqrt{3}}{3}$ 7.50. $\frac{3\sqrt{3}}{5}$
 7.51. $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ 7.52. $\sqrt{2} - 1$ 7.53. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm 7.54. $P = 384$ cm² 7.55. $|AD| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$,
 $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ 7.56. $P = 84$ 7.57. Wskazówka: Z punktu D poprowadź półprostą równoległą do
 odcinka AB do przecięcia z odcinkiem PE i wykorzystaj podobieństwo odpowiednich trójkątów.
 7.58. $\frac{1}{3}r$ 7.63. ok. 12,16

s. 179

- 8.1. D 8.2. C 8.3. C 8.4. C 8.5. D 8.6. B 8.7. C 8.8. D 8.9. A 8.10. A
 8.11. B 8.12. D 8.13. B 8.14. C 8.15. A 8.16. D 8.17. C 8.18. D 8.19. A

- 8.20. C 8.21. P, P, P 8.22. P, F, P 8.23. P, P, F 8.24. F, F, P 8.25. C1
 8.26. a) $2x - 3y + 6 = 0$ b) $y + 2 = 0$ c) $3x + y - 1 = 0$ d) $x - 4y - 8 = 0$ 8.27. a) $y = \frac{2}{5}x + 3$
 b) $y = \frac{2}{3}x - 2$ c) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3}$ d) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{6}$ 8.28. a) 45° b) 60° c) 135° d) 150°
 8.29. a) $y = -3$ b) $y = -2x + 2$ c) $x = 2$ d) $y = \frac{9}{5}x + \frac{2}{5}$ 8.30. a) tak b) tak c) nie
 8.31. a) pr. AB: $x - 3y - 6 = 0$, pr. BC: $3x + y - 8 = 0$, pr. AC: $2x - y + 3 = 0$ b) pr. AB:
 $3x - 2y + 10 = 0$, pr. BC: $3x + y - 5 = 0$, pr. AC: $x + 2 = 0$ 8.32. a) $y = 2x - 4$ b) $2x - y + 3 = 0$
 c) $x = 2$ d) $y = 0$ 8.33. a) $y = -\frac{1}{3}x + 2$ b) $y = 2x - 5$ c) $5x + y + 3 = 0$ d) $x = 3$
 8.34. a) Proste są równoległe i różne. b) Proste przecinają się w punkcie $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. c) Proste się
 pokrywają. 8.35. a) $k: 3x + 2y + 16 = 0$ b) $k: 2x - 3y + 6 = 0$ 8.36. $p \parallel k$, $p \parallel q$, $k = q$, $l \perp p$,
 $l \perp k$, $l \perp q$ 8.37. a) $m = 3$ b) $m = -\frac{1}{3}$ 8.38. $y = -4x + 6$ 8.39. a) $B = (5, 3)$,
 $C = (-5, -3)$ b) $P = 30$ 8.40. $2x - y - 5 = 0$ 8.41. $obw = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{29}$
 8.42. a) $|CD| = \sqrt{29}$ b) $|CD| = \sqrt{26}$ 8.43. $y = 2x - 4$ 8.44. $y = -\frac{2}{3}x + 7$ 8.45. 1
 8.46. $obw = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{89}$ 8.47. $obw = 24$ 8.48. $(6, -1), (0, 7), (2, 1)$, $P = 10$
 8.49. b) $P = 17$ c) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 5)^2 = \frac{85}{4}$ 8.50. $P = 20$ 8.51. $P = 30$, $obw = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{65}$
 8.52. tak; $P = 136$ 8.53. pr. AB: $2x + 7y + 22 = 0$, pr. AC: $7x + 2y - 13 = 0$, pr. BC: $x - y + 2 = 0$
 8.54. a) $x - y + 1 = 0$ b) $3x - 2y - 5 = 0$ c) $P = 30$ 8.55. $D = (1, 4)$, $P = 30$
 8.57. a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -7 \\ y = -4 \end{cases}$ c) brak rozwiązań d) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$
 8.58. a) $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 16$ b) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 169$ c) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 41$
 8.59. a) środek: $(0, 0)$, promień: 12 b) środek: $(-7, 3)$, promień: $2\sqrt{2}$ c) środek: $(0, 3)$,
 promień: $\sqrt{5}$ 8.60. $\left(\frac{23}{5}, \frac{31}{5}\right)$ 8.61. a) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 9$ b) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 34$
 8.62. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$ 8.63. $x + 2y = 0$, $4x - 2y - 5 = 0$ 8.64. $P = 15$
 8.65. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 32$ lub $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(y - 5\frac{1}{5}\right)^2 = 32$ 8.66. $P = 8$ 8.67. $C = (-3, -2)$
 lub $C = (5, 6)$ 8.68. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{3}$ lub $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{8\sqrt{3}}{3}$ 8.69. $x + 2y - 8 - 6\sqrt{5} = 0$
 8.70. $A = (0, 1)$ lub $A = (2, 7)$, $C = (-5, 6)$ 8.71. $(x - 2 - \sqrt{5})^2 + (y + 3)^2 = 9$

s. 189

- 9.1. D 9.2. D 9.3. B 9.4. A 9.5. C 9.6. C 9.7. D 9.8. B 9.9. D 9.10. D
 9.11. B 9.12. D 9.13. P, P, F 9.14. P, F, F 9.15. P, P, F 9.16. F, P, P 9.17. B3
 9.18. a) 32 b) 216 c) 210 d) 64 e) 24 9.19. $24^3 \cdot 10^5$ 9.20. 5^9 9.21. 30
 9.22. 360 000 9.23. a) 8^5 b) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ 9.24. a) 245 b) 175 c) 228 9.25. a) 504
 b) 304 c) 254 9.26. a) 1 b) 4^{45} c) 4^{40} d) 3^{35} 9.27. 9 9.28. 30 9.29. 2125
 9.30. $\frac{2}{15}$ 9.31. $\frac{7}{16}$ 9.32. $\frac{5}{18}$ 9.33. a) $\frac{5}{12}$ b) $\left(\frac{1}{6}\right)^5$ 9.34. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{13}{28}$
 9.35. $\frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$ 9.36. $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{127}{128}$ 9.37. $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6^3} = \frac{5}{18}$

- 9.38.** $\frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{9 \cdot 6} = \frac{19}{54}$ **9.39.** $\frac{4}{9}$ **9.40.** $1 - \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} = \frac{7}{10}$ **9.41.** 0,08 zł **9.42.** $x = 7$
9.43. a) Gabrysia: 4 min, Marysia: 5 min b) Gabrysia: 2 min, Marysia: 2 min **9.44.** mediana: 10 lat, dominanta: 8 lat, średnia: 10 lat **9.45.** a) 6 kg b) 50 kg c) 50 kg d) 49,5 kg
9.46. a) 30 b) najmniejsza: 2, największa: 12 c) 6 d) co najmniej 10 punktów: 4, co najwyżej 5 punktów: 11 e) 6,37 **9.47.** $\bar{x} = 17$, $\sigma^2 = 3,24$, $\sigma = 1,85$ **9.48.** 0,9

s. 199

- 10.1.** C **10.2.** B **10.3.** B **10.4.** C **10.5.** A **10.6.** A **10.7.** B **10.8.** D **10.9.** C
10.10. B **10.11.** P, F, P **10.12.** A2 **10.13.** a) 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków, 4 przekątne b) 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków, 18 przekątnych c) 4 ściany, 6 krawędzi, 4 wierzchołki, 0 przekątnych d) 6 ścian, 10 krawędzi, 6 wierzchołków, 0 przekątnych
10.15. $10\sqrt{5}$, 25 **10.16.** 24 cm **10.17.** a) ok. 35° b) ok. 70° **10.18.** $V = 207 \text{ cm}^3$
10.19. 60° **10.20.** $\frac{2\sqrt{145}}{29}$ **10.21.** $V = d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$ **10.22.** $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, 30° , 30° , 120° **10.23.** $|DP| = |BS| = 9$ **10.24.** $V = 2,3 \text{ cm}^3$ **10.25.** $V = 144 \text{ cm}^3$ **10.26.** a) $4\sqrt{6}$
b) $P = 64$ **10.27.** $P = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ **10.28.** $V = 108\sqrt{3}$ **10.30.** 4 **10.31.** $P_c = 162 \text{ cm}^2$
10.32. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **10.34.** $V = \frac{a^3 \cos \alpha}{12\sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}}$ **10.35.** $V = 400 \text{ cm}^3$ **10.36.** $\frac{4\sqrt{82}}{41}$ **10.37.** $V = \frac{2}{9}$,
 $|AS| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $|CS| = \frac{\sqrt{6}}{3}$ **10.38.** $\tan \alpha = 2$. Wskazówka: $\alpha = \angle SKD$, gdzie D jest środkiem odcinka AC , natomiast K dzieli odcinek AB tak, że $|AK| : |KB| = 1 : 3$. **10.39.** $V = \frac{d \cdot a^3}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}$
10.40. $V = 25 \text{ dm}^3$, $P_c = 71 \text{ dm}^2$ **10.41.** $P_b = 20\sqrt{313}$ **10.42.** $V = \frac{64\sqrt{209}}{3}$ **10.43.** $V = 48$
10.44. $V = 1760\sqrt{210}$ **10.45.** $P_c = \pi c^2 \sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)$ **10.46.** $P = 81\pi \text{ cm}^2$
10.47. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ **10.48.** $V = \frac{2}{27}\pi \text{ m}^3$ **10.49.** $V = 84\pi$ **10.50.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **10.51.** $V = \frac{49\sqrt{15}}{3}\pi$
10.52. a) 7,1 cm b) 7,0 cm **10.53.** ok. 28,32%, wymiary (w cm): $21,21 \times 21,21 \times 40$. Wskazówka: Skorzystaj z tego, że ze wszystkich prostokątów o danej przekątnej największe pole ma kwadrat.

Skorowidz

Aksjomat 94

Bryła obrotowa 62, 197

bryły podobne 71

Cechy podobieństwa trójkątów 169

— przystawania trójkątów 168

centyl 188

ciąg 159

— arytmetyczny 159

— geometryczny 159

— liczbowy 159

— malejący 159

— monotoniczny 159

— niemalejący 159

— niemonotoniczny 159

— nierosnący 159

— rosnący 159

— skończony 159

cięciwa kuli 65

cosinus kąta 147

czasza kuli 66, 198

czworościan 46

— foremny 55

Dominanta 187

dwudziestościan foremny 55

dwunastościan foremny 55

dwusieczna kąta 167

dzielenie z resztą 109, 110

Figura wypukła 34

funkcja liniowa 126

— logarytmiczna 153

— wielomianowa (wielomian) 137

— wykładnicza 153

— wymierna 137

Graniastosłup 197

— pochyły 36

— prawidłowy 37, 197

— prosty 36, 197

— wypukły 35

Hiperbola 138

hipoteza 94

Jedynka trygonometryczna 147

Kąt dwuścienny 28, 197

— nachylenia prostej do płaszczyzny 20, 196

— rozwarcia stożka 64

— środkowy 167

— wpisany 167

koło wielkie kuli 66, 198

krawędź przecięcia płaszczyzn 9

— wielościanu 34

krzywa logarytmiczna 153

— wykładnicza 153

kula 65, 198

Liczba logarytmowana 153

— pierwsza 116

liczby względnie pierwsze 116

logarytm 153

Mediana 187

miara kąta dwuściennego 28, 197

Nierówność opisująca koło 179

Odchylenie standardowe 188

odcinek kuli 66, 198

odległość między punktami na płaszczyźnie 178

odległość punktu od płaszczyzny 23

— — — prostej 178

okrąg opisany na wielokącie 45, 167

— wpisany w wielokąt 45, 167

ostroslup 46, 197

— prawidłowy 46, 197

ośmiościan foremny 55

oś obrotu 62, 197

Pierwiastek wielomianu 137

płaszczyzny prostopadłe 14, 196

— równoległe 9, 196

podobieństwo na płaszczyźnie 167

— w przestrzeni 71, 198

podstawa graniastosłupa 35, 197

— ostrosłupa 46

- stożka 64
- walca 63
- podzielność liczb 106
- pojęcie pierwotne 94
- postać iloczynowa funkcji kwadratowej 138
- kanoniczna funkcji kwadratowej 137
- ogólna funkcji kwadratowej 137
- powierzchnia boczna stożka 64
- — walca 63
- procent 117
- promień podstawy walca 63
- wiodący 147
- prosta prostopadła do płaszczyzny 14, 196
- równoległa do płaszczyzny 10, 196
- proste prostopadłe na płaszczyźnie 178
- — w przestrzeni 13, 196
- równoległe na płaszczyźnie 178
- — w przestrzeni 12
- skośne 11, 196
- współpłaszczyznowe 11, 196
- prostopadłościan 37, 197
- przedziały liczbowe 116
- przekątna wielościanu 34
- przekrój osiowy bryły obrotowej 62
- płaski wielościanu 39
- poprzeczny bryły obrotowej 62
- przybliżenie z nadmiarem 118
- — niedomiarem 118
- Reguła mnożenia** 188
- reszta z dzielenia 109, 110
- rozstęp 189
- równanie okręgu 179
- prostej w postaci kierunkowej 178
- — — — ogólnej 178
- równoległościan 36, 197
- rzut prostokątny (prostopadły) 20, 196
- równoległy 19, 196
- Sfera** 65
- sinus kąta 147
- spodek wysokości ostrosłupa 46
- stożek 64, 198
- ścięty 64
- suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 159
- — — — geometrycznego 160
- symetralna odcinka 167
- sześcian 37, 55, 197
- Ściana boczna graniastosłupa** 35, 197
- — ostrosłupa 46, 197
- wielościanu 34
- średnia 187
- arytmetyczna 117
- geometryczna 117
- ważona 187
- średnica kuli 65
- środek kuli 65
- środkowa boku trójkąta 167
- Tangens kąta** 147
- teza 94
- trójmian kwadratowy 137
- twierdzenie Bézouta 138
- cosinusów 147
- odwrotne do twierdzenia Pitagorasa 96, 167
- — — — Talesa 169
- o dwusiecznej 169
- o kącie między styczną a cięciwą 168
- o odcinkach stycznych 168
- Pitagorasa 167
- sinusów 147
- Talesa 168
- (wzór) Eulera 55, 199
- tworząca stożka 64
- walca 63
- Układ równań nieoznaczony** 126
- — oznaczony 126
- — sprzeczny 126
- Walec** 63, 197
- wariancja 188
- warstwa kuli 66, 198
- wartość bezwzględna liczby 116
- oczekiwana gry losowej 187
- wielokąt foremny 167
- opisany na okręgu 45
- wpisany w okrąg 45
- wielomian (funkcja wielomianowa) 137
- stopnia zero 137
- zerowy 137

- wielomiany równe 138
- wielościan foremny 54, 197
 - wypukły 34
- wierzchołek ostrosłupa 197
 - stożka 64
 - wielościanu 34
- współczynnik kierunkowy funkcji liniowej 126
 - — prostej 178
- wycinek kuli 66, 198
- wyróżnik trójmianu kwadratowego (delta) 137
- wysokość graniastosłupa 35
 - ostrosłupa 46
 - stożka 64
 - trójkąta 167
 - walca 63
- wzory redukcyjne 148
 - skróconego mnożenia 118
- wzór (twierdzenie) Eulera 55, 199
 - ogólny ciągu arytmetycznego 159
 - — — geometrycznego 159
 - sinusów 147
- Założenie 94
- zbiór liczb wymiernych 116
- zdarzenie przeciwne 187

Tablica wartości logarytmów dziesiętnych liczb od 1 do 9,9

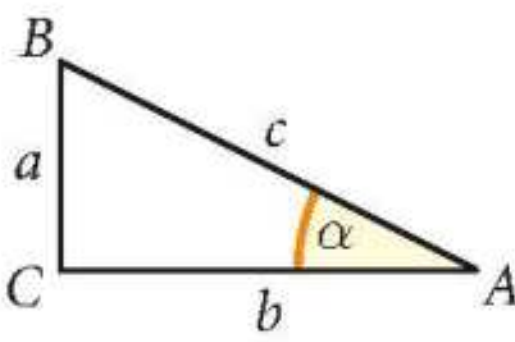
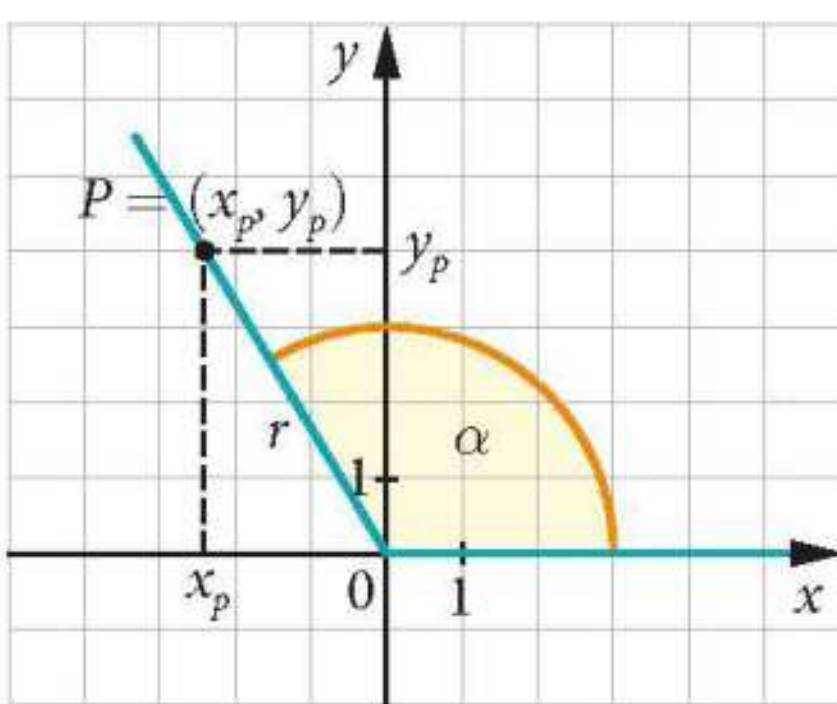
x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$\log x$	0,000	0,041	0,079	0,114	0,146	0,176	0,204	0,230	0,255	0,279
x	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
$\log x$	0,301	0,322	0,342	0,362	0,380	0,398	0,415	0,431	0,447	0,462
x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$\log x$	0,477	0,491	0,505	0,519	0,531	0,544	0,556	0,568	0,580	0,591
x	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
$\log x$	0,602	0,613	0,623	0,633	0,643	0,653	0,663	0,672	0,681	0,690
x	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
$\log x$	0,699	0,708	0,716	0,724	0,732	0,740	0,748	0,756	0,763	0,771
x	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
$\log x$	0,778	0,785	0,792	0,799	0,806	0,813	0,820	0,826	0,833	0,839
x	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
$\log x$	0,845	0,851	0,857	0,863	0,869	0,875	0,881	0,886	0,892	0,898
x	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
$\log x$	0,903	0,908	0,914	0,919	0,924	0,929	0,934	0,940	0,944	0,949
x	9	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9
$\log x$	0,954	0,959	0,964	0,968	0,973	0,978	0,982	0,987	0,991	0,996

Tablica wartości funkcji trygonometrycznych

Miara kąta α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	Miara kąta α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000	90°	1,0000	0,0000	—

Wybrane wzory trygonometryczne

Definicje funkcji trygonometrycznych

kąta ostrego	kąta wypukłego
$\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ 	$\sin \alpha = \frac{y_P}{r}$ $\cos \alpha = \frac{x_P}{r}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}$  $r = OP = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$

Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0

α	$(0^\circ; 90^\circ)$	$(90^\circ; 180^\circ)$
$\sin \alpha$	+	+
$\cos \alpha$	+	-
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-

Podstawowe zależności trygonometryczne

- Jedynka trygonometryczna**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ dla $\alpha \neq 90^\circ$

- Wzory redukcyjne**

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Zależności trygonometryczne w trójkącie

- Pole trójkąta**

$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

$$P = \frac{1}{2}ac \sin \beta$$

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

- Twierdzenie sinusów**

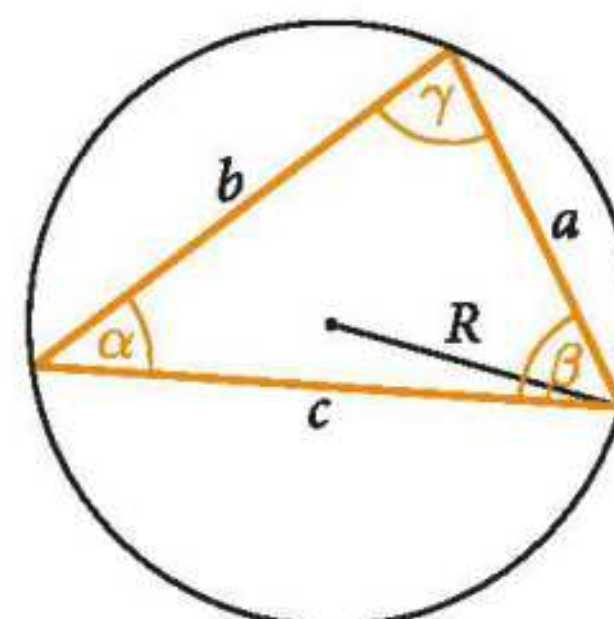
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

- Twierdzenie cosinusów**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Podręcznik *Prosto do matury 4* do zakresu podstawowego został opracowany z myślą o uczniach przygotowujących się do obowiązkowej matury z matematyki. Prawie 900 zadań z odpowiedziami pozwala wyćwiczyć umiejętności sprawdzane na maturze.



Pomoc w zrozumieniu

Przykładowe rozwiązania zadań typu maturalnego pokazują różne możliwości radzenia sobie z takimi zadaniami.

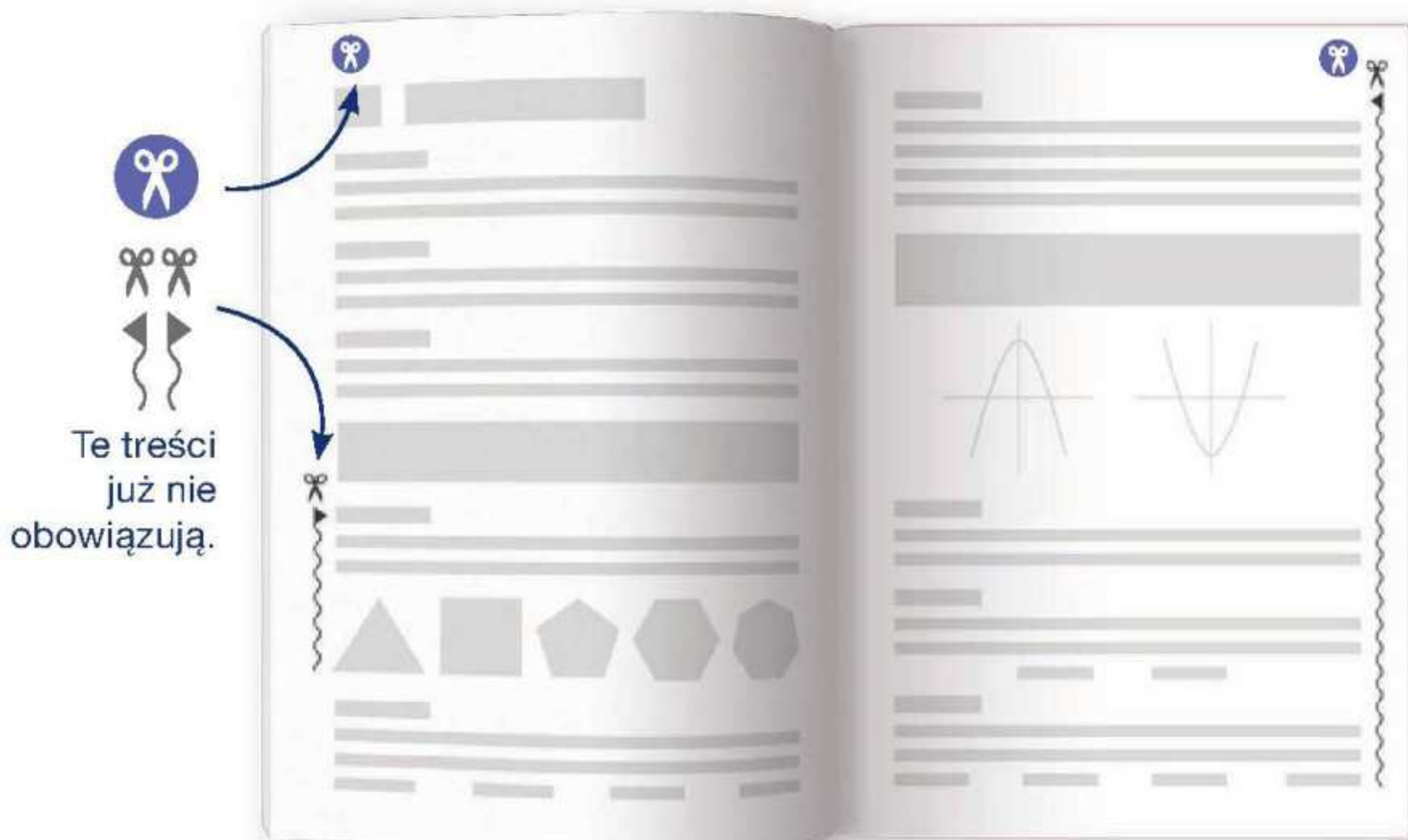
Porządkowanie i syntetyzowanie

Warto powtórzyć przypominając wiadomości z wcześniejszego etapu nauki.

Obszerne powtórzenia

Ostatni dział – *Powtórzenie* – zawiera najważniejsze treści teoretyczne obejmujące cały cykl nauczania oraz zadania sprawdzające zdobytą wiedzę.

W podręczniku znajdziesz oznaczenia treści, które od września 2024 r. nie są już wymagane.



Fioletowa ikona na górze strony wskazuje, że na tej stronie znajdują się treści, które nie są wymagane – oznaczono je szarą ikoną i falką.