Maciej Antek
Krzysztof Belka
Piotr Grabowski

Prosto do matury

Podręcznik do matematyki
dla liceum ogólnokształcącego i technikum

4

Zakres podstawowy i rozszerzony

nowa era
Twoje mocne strony

Prosto do matury

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:
dr Moniki Fabijańczyk, dr Magdaleny Wojciechowskiej-Rysiawy i dr hab. Anny Cegieły.

Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony
Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: ponadpodstawowa (liceum ogólnokształcące i technikum)
Rok dopuszczenia: 2022

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 1013/4/2022

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Piotra Grabowskiego.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na **www.legalnakultura.pl**

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiejkolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024
ISBN 978-83-267-5093-9

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Magdalena Spalińska, Anna Dubiel
Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak
Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski
Redakcja językowa: Marta Zuchowicz
Korekta językowa: Paulina Szulim
Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak
Projekt graficzny: Sławomir Włodarczyk, Ewa Kaletyn, Diana Gawronkiewicz/Podpunkt
Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn
Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska
Rysunki merytoryczne: Andrzej Oziębło
Opracowanie graficzne stron działowych: Marcin Kołacz
Opracowanie graficzne infografik: Ewa Kaletyn, Marcin Kołacz
Ilustracje na infografikach: Adam Król (bryły i piłka, s. 76), Laura Maziewska (ikony, s. 207)
Realizacja projektu graficznego: BOP s.c.

Fotografia na okładce: Getty Images/iStock/Getty Images Plus/Kapook2981.
Fotografie: BE&W: Alamy Stock Photo/Archive PL s. 206 (Stefan Mazurkiewicz); Biblioteka Narodowa/polona.pl s. 207 (Lwów, Plac Akademicki i ul. Fredry); Getty Images: 500Px Plus/Minh Tang s. 113, Corbis Historical/Michael Nicholson s. 208 (Wacław Sierpiński), iStock Unreleased/Corsu1961 s. 83 (piramida w Luwrze), Moment - fanjianhua s. 193, yuanyuan yan s. 178-179 (podest), Stone/Paul Souders s. 221; Indigo: Alamy Stock Photo/B Christopher s. 126; PAP: CAF/Danuta Rago s. 207 (Stanisław Mazur wręczający żywą gęś); Shutterstock: Aleksey Sagitov s. 76, Alexapicso s. 77 (piłka do baseballa), Autorstwa bioraven s. 207 (ikona obiadu), BAO-Images Bildagentur s. 77 (piłka do tenisa), Berezka_Klo s. 207 (ikona piwa), dotshock s. 158, Hein Nouwens s. 207 (ikona kawy), Jay Takayama s. 122, Kevin Tichenor s. 178 (Chevrolet Belair), Likanaris s. 178 (neon), lukaszimilena s. 187, Mesa Studios s. 76-77 (kopuła stacji na Antarktydzie), RedKoala s. 207 (ikona kawioru), Sanzhar Murzin s. 184, Scott Norsworthy s. 7, Surachart Jessadanont s. 30, titov dmitriy s. 77 (piłka do siatkówki), Vlad Klok s. 207 (ikona gęsi), yevgeniy11 s. 179 (koza); Thinkstock/Getty Images: iStockphoto - boggy22 s. 74, de_design s. 261, LiamDoerksen s. 63 (szklana piramida - Muttart Conservatory), yamanstock s. 104, Stockbyte/Comstock Images s. 95; Wikipedia/Wikimedia Commons s. 180 (Jacob Bernoulli); link: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk s. 206 (Zygmunt Janiszewski); link: http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/archiwalia.html s. 206-207 (kartka z Księgi Szkockiej).

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku.
Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Drukarnia Orthdruk

Spis treści

Wstęp 5
Wykaz używanych oznaczeń matematycznych 6

Dział 1. Stereometria

1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni 8
2. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny 21
3. Kąt dwuścienny 31
4. Graniastosłupy 37
5. Ostrosłupy 49
6. Bryły obrotowe 65
7. Pola powierzchni i objętości brył 78
8. Zadania optymalizacyjne 97
9. Powtórzenie 104

Dział 2. Kombinatoryka i teoria prawdopodobieństwa

1. Permutacje i wariacje 114
2. Kombinacje 128
3. Trójkąt Pascala i dwumian Newtona 137
4. Warto powtórzyć – prawdopodobieństwo i jego własności 147
5. Obliczanie prawdopodobieństwa z zastosowaniem kombinatoryki 151
6. Prawdopodobieństwo warunkowe 161
7. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym 168
8. Schemat Bernoulliego 180
9. Powtórzenie 189

Dział 3. Dowody w matematyce

1. Dowody w geometrii 194
2. Dowody w algebrze 208

Dział 4. Powtórzenie

1. Liczby, wyrażenia algebraiczne 222
2. Funkcje. Funkcja liniowa 232
3. Funkcja kwadratowa, wielomiany i funkcje wymierne 244
4. Funkcje trygonometryczne 255
5. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna 265
6. Ciągi liczbowe 273
7. Figury na płaszczyźnie 281

8. Geometria analityczna 293
9. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka 304
10. Stereometria 318
11. Analiza matematyczna 330

Odpowiedzi 343
Skorowidz 362
Tablica wartości logarytmów dziesiętnych 365
Wybrane wzory trygonometryczne 366
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych 368

Wstęp

Podręcznik *Prosto do matury* dla klasy czwartej jest dostosowany do podstawy programowej obowiązującej w liceum od września 2019 r. i obejmuje treści z zakresu podstawowego oraz rozszerzonego. Jest ostatnim podręcznikiem w serii, dlatego też zamieściliśmy w nim dział *Powtórzenie*, w którym przypominamy najważniejsze definicje, twierdzenia oraz wnioski, które pojawiły się w czasie całego cyklu nauczania.

Po każdym temacie w działach *Stereometria* oraz *Kombinatoryka i teoria prawdopodobieństwa* proponujemy zestaw pięciu zadań zatytułowanych *Prosto do matury*. Po omówieniu każdego tematu uczniowie powinni rozwiązywać je samodzielnie. Będzie to dla nich sprawdzianem umiejętności potrzebnych na maturze.

Dział *Dowody w matematyce* ma na celu utrwalenie umiejętności logicznego wnioskowania i wykorzystywania zdobytej wcześniej wiedzy, co jest niezbędne do przeprowadzania dowodów matematycznych.

Książka zawiera prawie 1400 zadań do samodzielnego rozwiązania. To wystarczy do gruntownego przećwiczenia umiejętności nabytych podczas lekcji. Zadania trudniejsze oznaczono * lub **, zadania typu „Wykaż…" poprzedzono znakiem D, natomiast te zadania, do których rozwiązania jest przydatny kalkulator – znakiem .

Podręcznik umożliwia samodzielną naukę, co może być cenne na przykład w razie nieobecności w szkole. Wprowadzane pojęcia ilustrujemy przykładami rozwiązanych zadań. W zrozumieniu materiału bardzo pomogą kolorowe rysunki merytoryczne. Wybrane rozwiązane zadania typu maturalnego zostały oznaczone znakiem .

Uwaga: W zadaniach testowych, w których należy wybrać jedną odpowiedź spośród czterech podanych, wybrana odpowiedź nie musi być jedynym istniejącym rozwiązaniem postawionego problemu.

Różowym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

Odpowiedzi i rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Autorzy

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

$x \in A;\ x \notin A$	x należy do zbioru A; x nie należy do zbioru A
$\{a, b, c\}; \emptyset$	zbiór, którego elementami są a, b, c; zbiór pusty
N, **Z**, **Q**, **R**	zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych
$A \subset B$	zbiór A jest podzbiorem zbioru B
$A \cap B$; $A \cup B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B; suma zbiorów A i B
$A - B$	różnica zbiorów A i B
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek stopnia n z liczby a
$\log_a b$ ($\log b$)	logarytm przy podstawie a (10) liczby b
$(a; b)$; $\langle a; b\rangle$	przedział otwarty; przedział domknięty (zamknięty)
$\langle a; b)$; $(a; b\rangle$	przedział lewostronnie domknięty; przedział prawostronnie domknięty
$\|a\|$	wartość bezwzględna liczby a
$f(x)$	wartość funkcji f dla argumentu x
D; ZW	dziedzina funkcji; zbiór wartości funkcji
$o(S, r)$; $k(S, r)$	okrąg o środku S i promieniu r; koło o środku S i promieniu r
$A = (a, b)$	punkt A o współrzędnych a (tzw. odcięta) i b (tzw. rzędna)
AB; $\|AB\|$	odcinek o końcach A i B; długość odcinka AB
$\overrightarrow{AB}$; $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$	wektor o początku A i końcu B; długość wektora $\overrightarrow{AB}$
$\vec{u} = [a, b]$	wektor $\vec{u}$ o współrzędnych a, b
$a \parallel b$; $a \perp b$	prosta a jest równoległa do prostej b; prosta a jest prostopadła do prostej b
$\sphericalangle ABC$	kąt o wierzchołku B i ramionach: półprostej BA i półprostej BC
$\triangle ABC$	trójkąt ABC
P; obw	pole figury; obwód figury
$\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha$	sinus kąta α; cosinus kąta α; tangens kąta α
(a_n); a_n	ciąg; n-ty wyraz ciągu (a_n)
S_n; S	suma n początkowych wyrazów ciągu; suma szeregu geometrycznego
$\lim_{n\to\infty} a_n$	granica ciągu (a_n)
$\lim_{x\to x_0} f(x)$	granica funkcji f w punkcie x_0
$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$	granica lewostronna, prawostronna funkcji f w punkcie x_0
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$	granica funkcji f w $-\infty$, w ∞
$f'(x)$	wartość pochodnej funkcji f dla argumentu x
Ω; $\overline{\overline{\Omega}}$	zbiór zdarzeń elementarnych; liczba zdarzeń elementarnych w zbiorze Ω
$\overline{\overline{A}}$	liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A
$P(A)$	prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A
A'	zdarzenie przeciwne do zdarzenia A
$P(A\|B)$	prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B
$n!$	silnia liczby n
$\binom{n}{k}$	symbol Newtona (n po k)
$P_n(k)$	prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego
EX	wartość oczekiwana
$\overline{x}$; $\overline{x}_w$	średnia wyników; średnia ważona wyników
σ^2; σ	wariancja; odchylenie standardowe

Stereometria

1

1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni

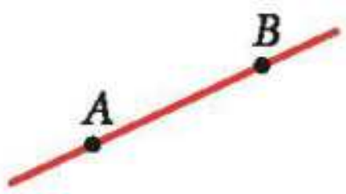
Umiejętności:

- rozpoznawanie wzajemnego położenia prostych i płaszczyzn w przestrzeni

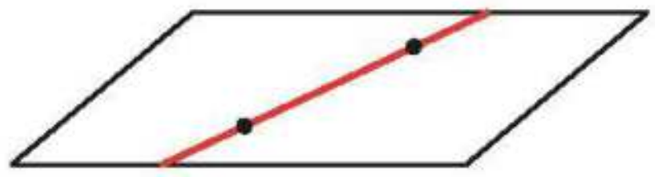
Tematy z geometrii przestrzeni (stereometrii) zaczniemy od przypomnienia i uporządkowania niektórych pojęć oraz zależności dotyczących prostych i płaszczyzn.

Wiemy, że:

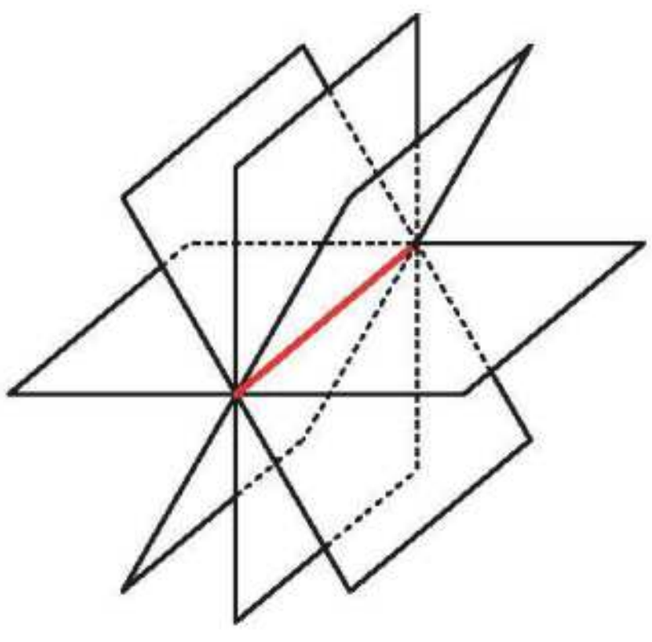
- przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta,



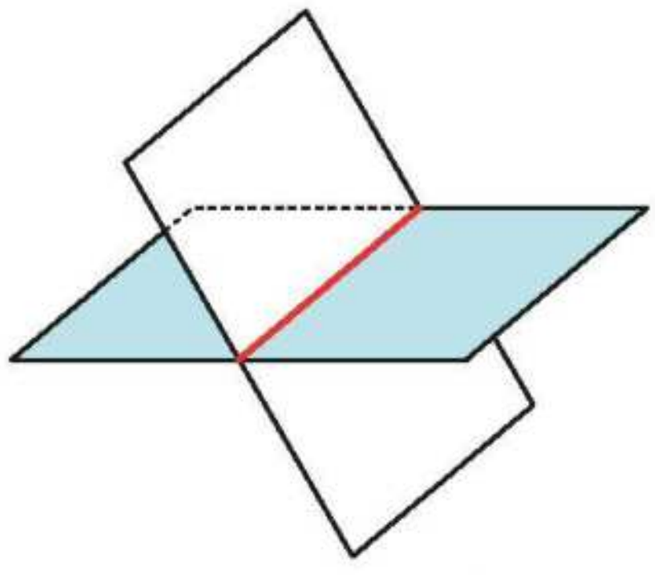
- prosta przechodząca przez dwa różne punkty płaszczyzny jest zawarta w tej płaszczyźnie,



- każda prosta jest zawarta w nieskończenie wielu płaszczyznach,

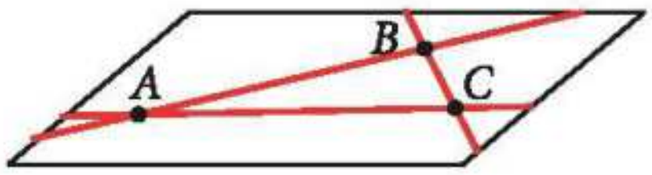


- jeżeli dwie różne płaszczyzny mają punkt wspólny, to mają wspólną prostą, zwaną krawędzią przecięcia.

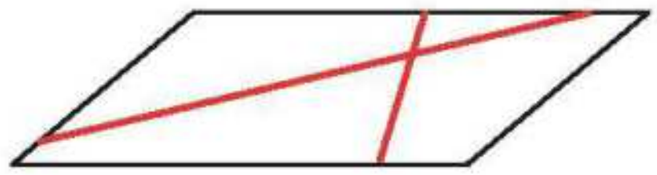


Płaszczyzna jest zbiorem punktów. W przestrzeni ma wszystkie właściwości występujące w planimetrii. Jednoznaczne wyznaczenie płaszczyzny polega na precyzyjnym określeniu, które punkty przestrzeni do niej należą, a które nie należą. Płaszczyzna jest jednoznacznie wyznaczona przez każdy z podanych zbiorów punktów:

- trzy niewspółliniowe punkty,

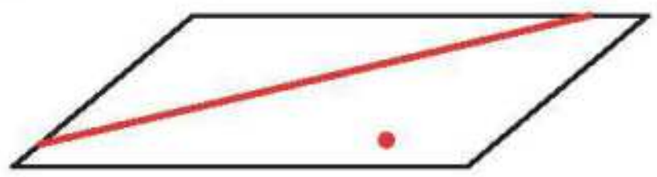


- dwie przecinające się proste,

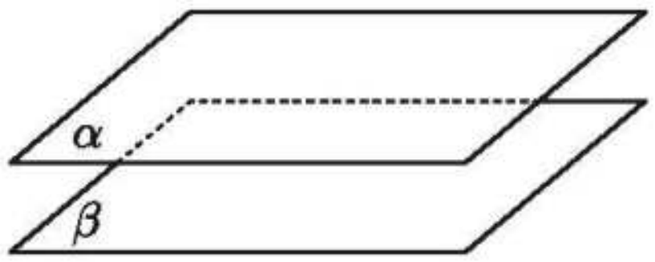
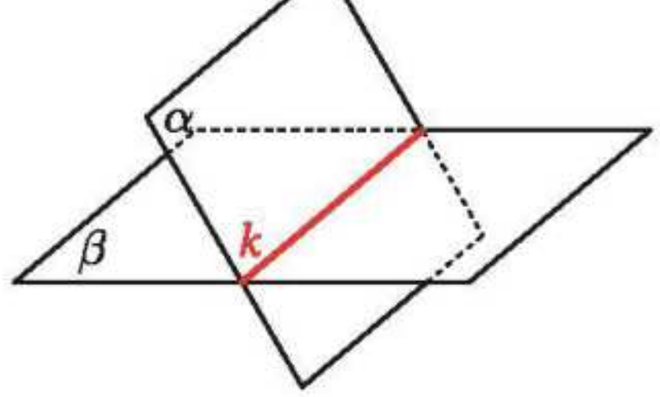


- dwie rozłączne proste równoległe,

- prosta i punkt nienależący do niej.



Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn

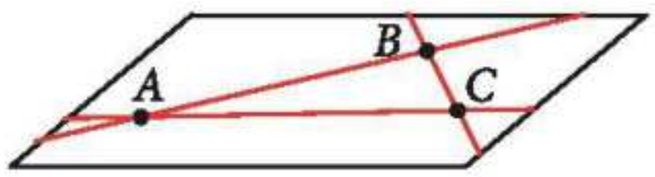
Dwie **różne** płaszczyzny	
albo nie mają punktu wspólnego	albo mają punkt wspólny
	
Płaszczyzny są równoległe: $\alpha \parallel \beta$.	Płaszczyzny α i β przecinają się wzdłuż krawędzi k.

Przyjmujemy ponadto, że każda płaszczyzna jest równoległa do samej siebie.

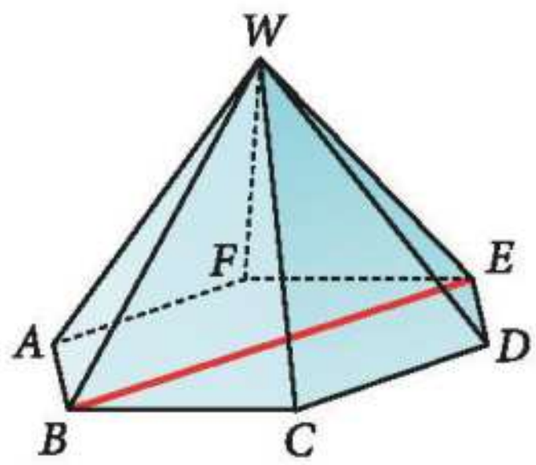
Definicja

Mówimy, że dwie płaszczyzny:
- są **równoległe**, jeżeli nie mają punktów wspólnych albo mają wszystkie punkty wspólne,
- **przecinają się**, jeżeli mają wspólną prostą, nazywaną **krawędzią przecięcia**.

Płaszczyzny często oznacza się małymi literami alfabetu greckiego. Jeżeli podane są punkty A, B, C wyznaczające płaszczyznę, to będziemy ją oznaczać za pomocą skrótu „pł. ABC”.



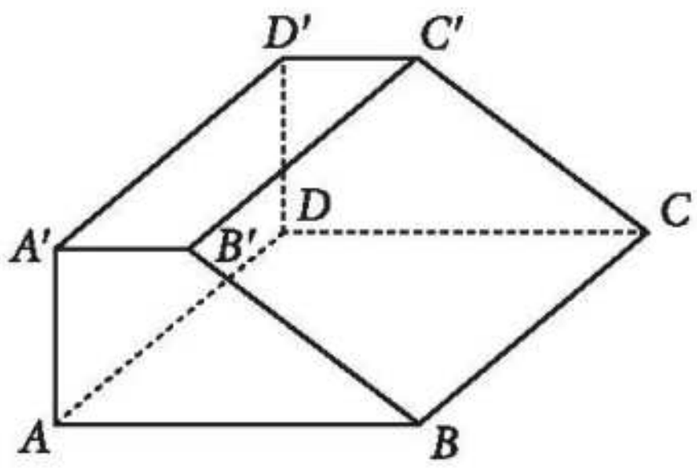
Skrótu „pł. $ABCD$” („pł. $ABCDE$” itd.) używamy wtedy, gdy chcemy wskazać więcej punktów leżących na płaszczyźnie, np. do opisu ścian wielościanów. Skrót „pr. BE” oznacza natomiast prostą przechodzącą przez punkty B i E.



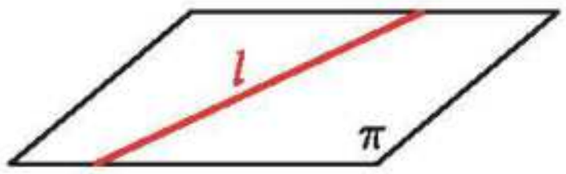
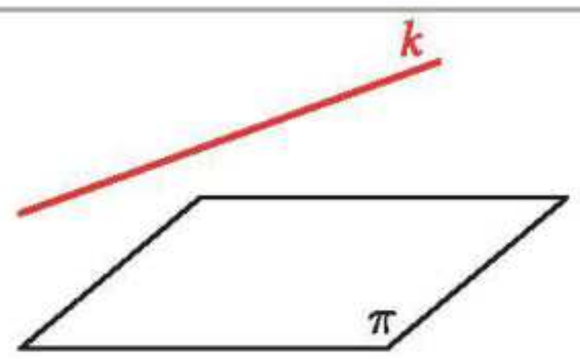
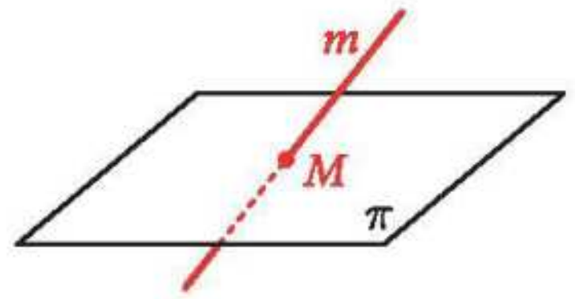
Przykład 1

W narysowanym wielościanie płaszczyzny równoległe są wyznaczone przez następujące pary ścian: $ABCD$ i $A'B'C'D'$ oraz $ABB'A'$ i $DCC'D'$, czyli:

pł. $ABCD \parallel$ pł. $A'B'C'D'$ oraz
pł. $ABB'A' \parallel$ pł. $DCC'D'$



Wzajemne położenie płaszczyzny i prostej

		
Prosta l ma wszystkie punkty wspólne z płaszczyzną π. Mówimy, że prosta l jest zawarta w płaszczyźnie π.	Prosta k nie ma żadnego punktu wspólnego z płaszczyzną π.	Prosta m ma dokładnie jeden punkt wspólny z płaszczyzną π. Mówimy, że prosta m przecina płaszczyznę π w punkcie M.

O prostych l i k mówimy, że są równoległe do płaszczyzny π:

$l \parallel \pi$ i $k \parallel \pi$

Definicja

Mówimy, że prosta:

- jest **równoległa do płaszczyzny**, jeżeli nie ma z nią punktów wspólnych albo jeżeli jest w niej zawarta,
- **przecina płaszczyznę**, jeżeli ma z nią jeden punkt wspólny.

Przykład 2

Opiszemy położenie prostej BM względem płaszczyzn wyznaczonych przez ściany sześciennego pudełka przedstawionego na rysunku.

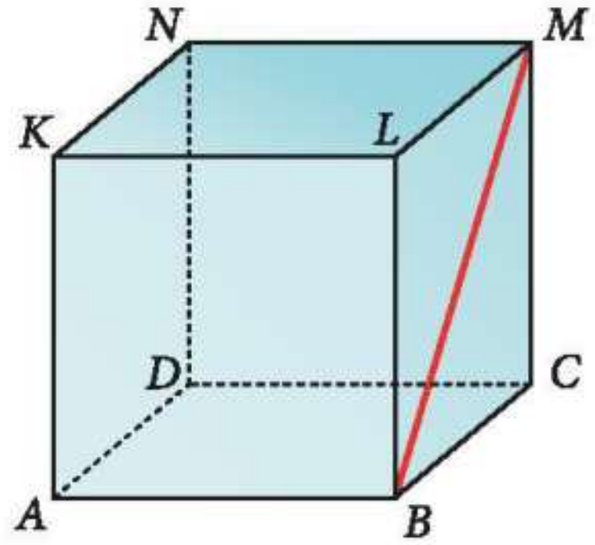
Rozwiązanie

Prosta BM jest równoległa do płaszczyzny:

- $BCML$, ponieważ jest zawarta w tej płaszczyźnie,
- $ADNK$, bo nie ma z tą płaszczyzną żadnego punktu wspólnego.

Prosta BM przecina płaszczyznę:

- $ABCD$ w punkcie B,
- $ABLK$ w punkcie B,
- $KLMN$ w punkcie M,
- $DCMN$ w punkcie M.



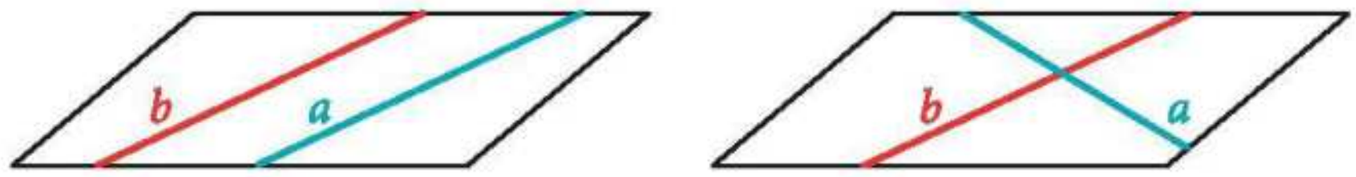
Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

Definicja

Jeżeli dwie różne proste zawarte są w jednej płaszczyźnie, to takie proste nazywamy **współpłaszczyznowymi**.

Przykład 3

Proste a i b są współpłaszczyznowe.

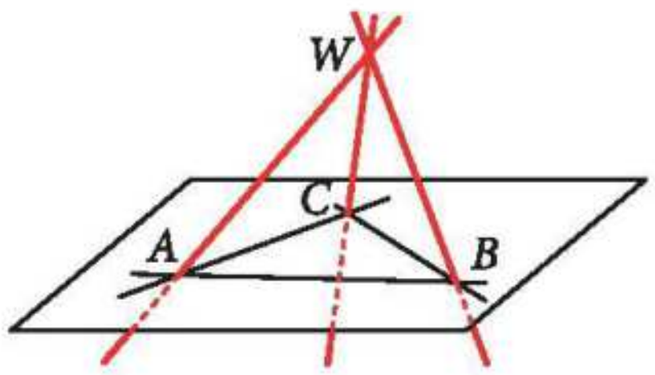


Definicja

Dwie proste, przez które nie można poprowadzić jednej płaszczyzny, nazywamy **skośnymi**.

Przykład 4 ◀ zad. 1.7–1.9

Wypiszemy wszystkie pary prostych skośnych pokazanych na rysunku.



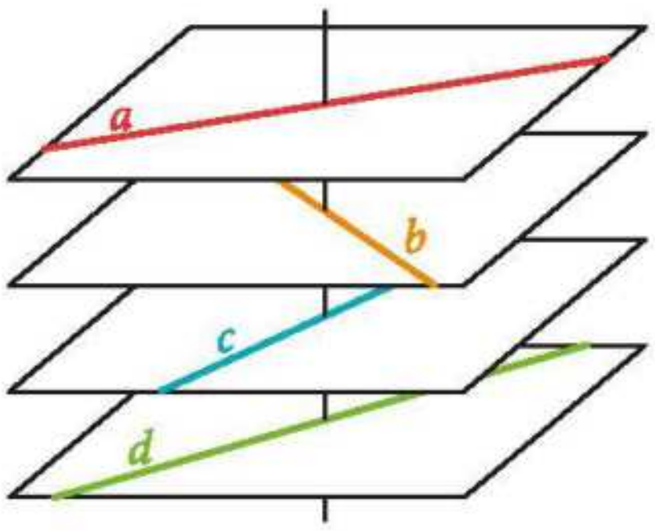
Rozwiązanie

Skośne są proste:

- pr. AB i pr. CW,
- pr. AC i pr. BW,
- pr. BC i pr. AW.

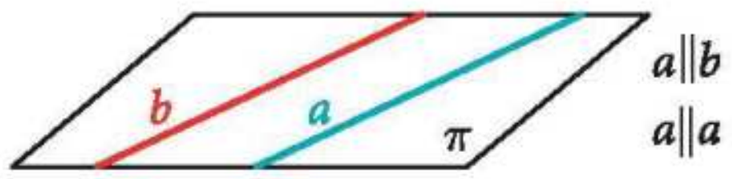
Przykład 5

Na rysunku obok pokazujemy sposób umieszczenia w przestrzeni dowolnej liczby prostych, z których każde dwie są skośne (na rysunku mamy model utworzony z czterech prostych: a, b, c, d).



Równoległość i prostopadłość w przestrzeni

Jeżeli dwie różne proste na płaszczyźnie nie mają żadnego punktu wspólnego, to są równoległe. Przyjmujemy również, że każda prosta jest równoległa do samej siebie, czyli $a \parallel a$.



Równoległość w przestrzeni definiujemy tak, aby odróżnić proste skośne od prostych równoległych. Proste skośne nie mają punktów wspólnych, ale nie nazywamy ich równoległymi.

Definicja

Dwie proste nazywamy **równoległymi w przestrzeni**, jeżeli są współpłaszczyznowe i równoległe na płaszczyźnie, na której leżą.

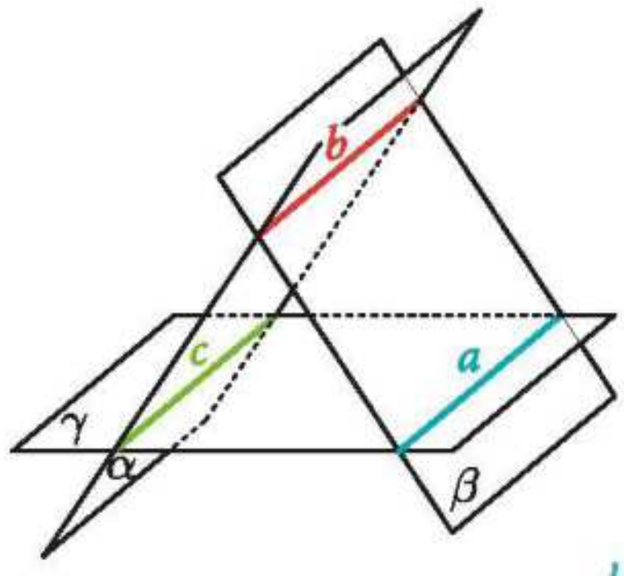
Przykład 6

Proste a, b, c są równoległe w przestrzeni, ponieważ:

$a \parallel b$ w płaszczyźnie β,

$a \parallel c$ w płaszczyźnie γ,

$b \parallel c$ w płaszczyźnie α.



Zdefiniowaliśmy równoległość prostej a do płaszczyzny α oraz równoległość dwóch płaszczyzn.

Zauważmy jeszcze, że przez każdy punkt przestrzeni przechodzi:

- dokładnie jedna prosta równoległa do danej prostej a,
- nieskończenie wiele prostych równoległych do danej płaszczyzny α – suma tych prostych tworzy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny α,

- dokładnie jedna płaszczyzna równoległa do danej płaszczyzny α.

Pokażemy jeszcze prosty przykład twierdzenia udowodnionego metodą nie wprost.

Przykład 7

Dane są dwie równoległe płaszczyzny α i β oraz nierównoległa do nich płaszczyzna π. Niech $\alpha \cap \pi = a$ oraz $\beta \cap \pi = b$. Wykażemy, że $a \parallel b$.

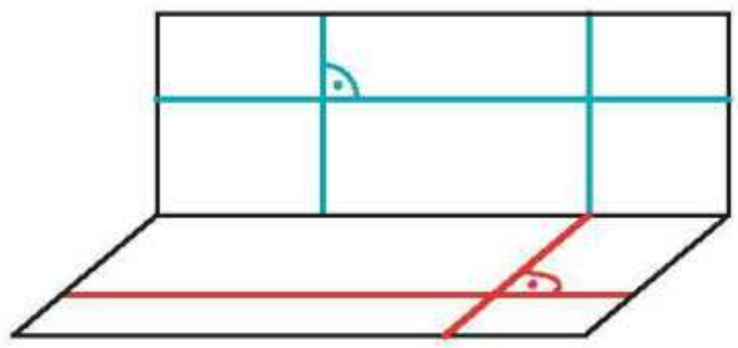
Podobnie jak w planimetrii przyjmujemy zasadę: kiedy piszemy „dwie proste" („dwa punkty", „dwie płaszczyzny"), zakładamy, że te proste (punkty, płaszczyzny) są różne.

Dowód (nie wprost)

Załóżmy, że proste a i b nie są równoległe. Ponieważ leżą w jednej płaszczyźnie π, muszą się przecinać. Oznacza to jednak, że punkt przecięcia tych prostych jest punktem wspólnym płaszczyzn α i β. A to jest sprzeczne z założeniem, że $\alpha \parallel \beta$. Zatem $a \parallel b$.

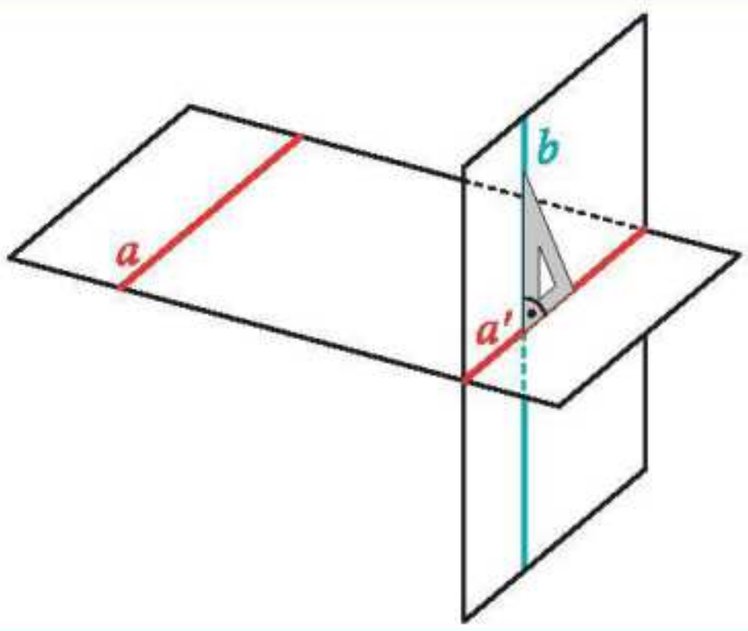
Koniec dowodu

Dwie proste przecinające się na płaszczyźnie pod kątem prostym nazywamy prostymi prostopadłymi. Prostopadłość prostych w przestrzeni definiujemy w bardziej ogólny sposób, tak aby rozszerzyć pojęcie prostopadłości prostych na proste skośne.

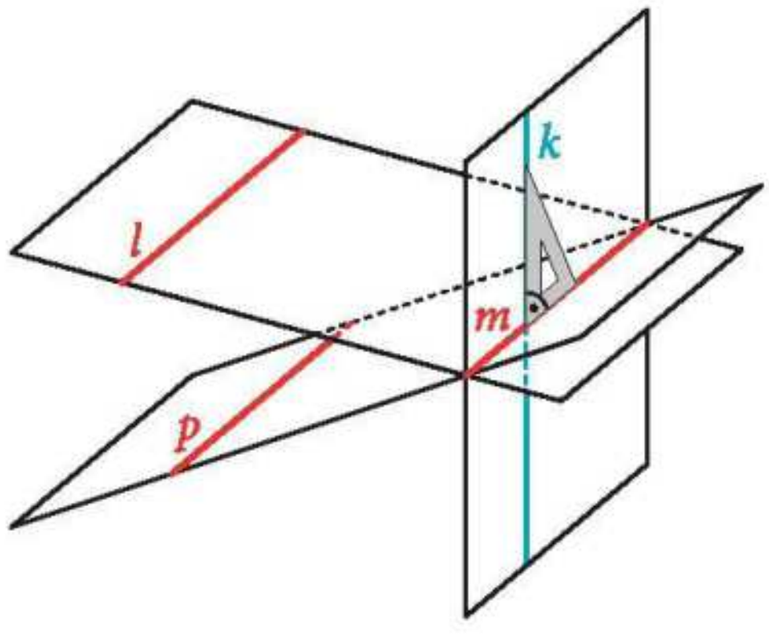


Definicja

Prosta a jest prostopadła do prostej b w przestrzeni ($a \perp b$), gdy istnieje prosta a' równoległa do prostej a i przecinająca prostą b pod kątem prostym.

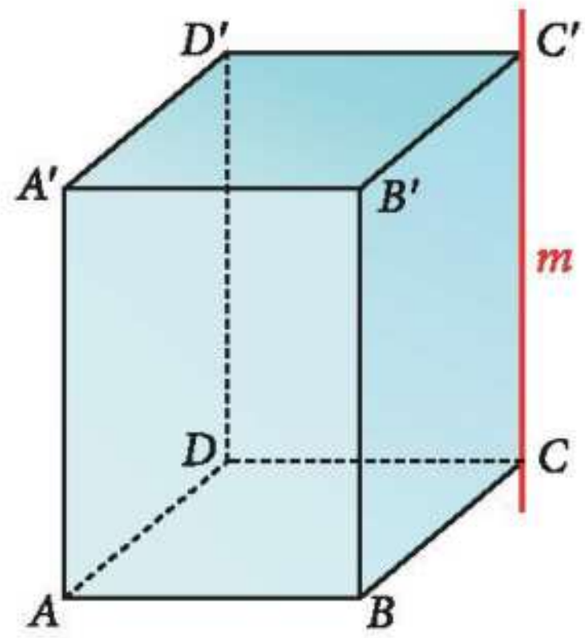


Na rysunku obok przedstawiona jest sytuacja, w której proste k i m przecinają się pod kątem prostym, czyli $k \perp m$. Proste l i p są równoległe do prostej m (i skośne do prostej k). Zgodnie z definicją $k \perp l$ i $k \perp p$. Prosta k jest prostopadła w przestrzeni do każdej prostej równoległej do m.



Przykład 8 ◂ zad. 1.12

Wypiszemy wszystkie krawędzie równoległe i wszystkie krawędzie prostopadłe do prostej m w prostopadłościanie $ABCDA'B'C'D'$.

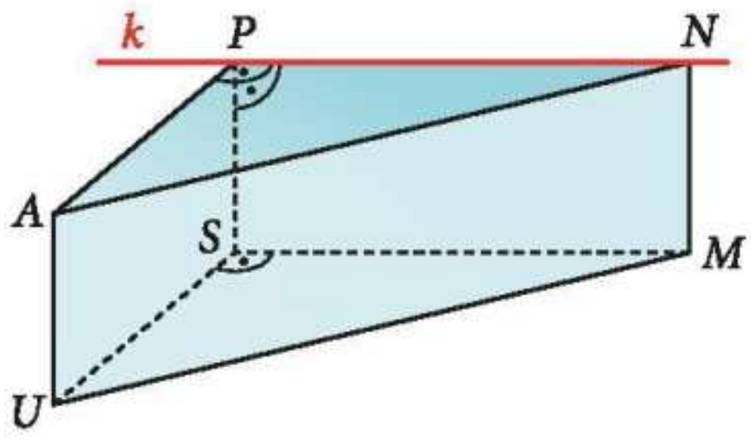


Rozwiązanie

- Krawędzie równoległe:
  $CC' \parallel m$ (bo krawędź CC' jest zawarta w prostej m),
  $AA' \parallel m$, $BB' \parallel m$, $DD' \parallel m$.
- Krawędzie prostopadłe:
  $B'C' \perp m$, $A'D' \perp m$, $D'C' \perp m$, $A'B' \perp m$,
  $BC \perp m$, $AD \perp m$, $DC \perp m$, $AB \perp m$.

Przykład 9

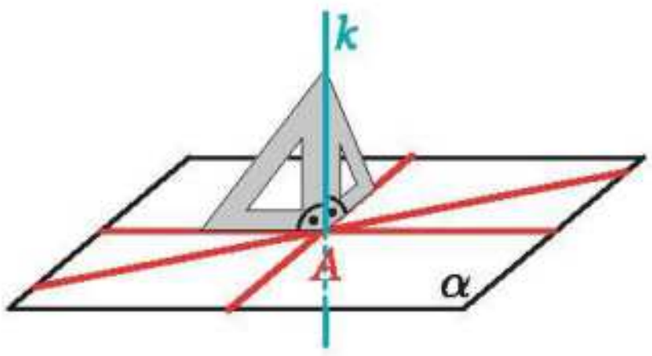
Wypiszemy krawędzie prostopadłe do prostej k w graniastosłupie prostym $SUMPAN$, którego podstawą jest trójkąt prostokątny.



Rozwiązanie

$AP \perp k$, $US \perp k$, $PS \perp k$, $MN \perp k$, $AU \perp k$.

Jeżeli ustawimy ekierki na stole w sposób przedstawiony na rysunku, to prosta k, zawierająca jedną z przyprostokątnych, będzie prostopadła do każdej prostej przechodzącej przez punkt A i zawartej w płaszczyźnie stołu. Jest zatem prostopadła do dowolnej prostej zawartej w płaszczyźnie stołu.



Definicja

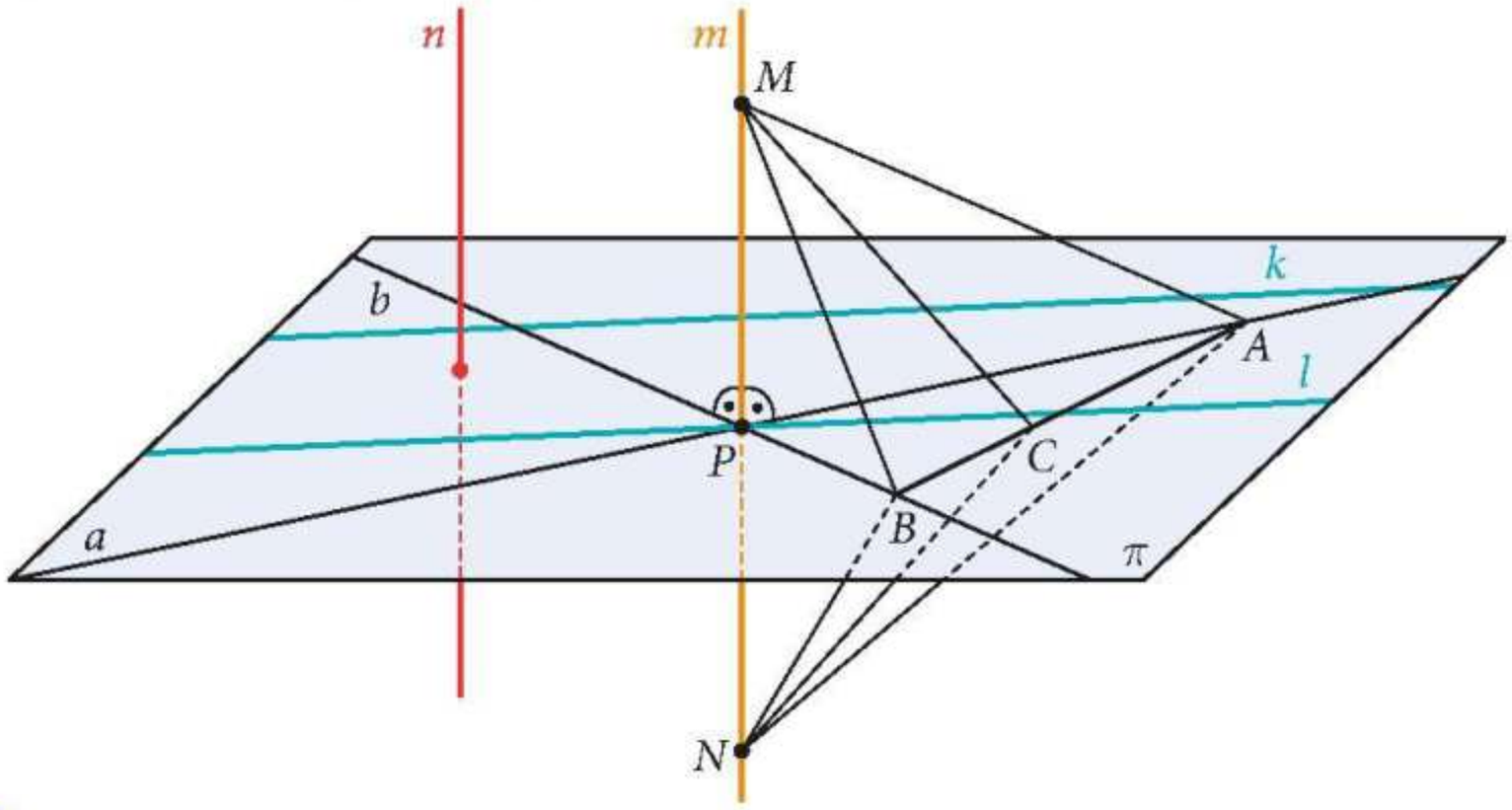
Mówimy, że **prosta k jest prostopadła do płaszczyzny** α ($k \perp \alpha$), jeżeli jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie α.

Udowodnimy twierdzenie.

Twierdzenie

Prosta prostopadła do dwóch przecinających się prostych jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Założenia

1. Proste a i b wyznaczają płaszczyznę π i przecinają się w punkcie P.
2. $n \perp a$ i $n \perp b$

Teza

$n \perp \pi$

Dowód

Zauważmy, że skoro prosta n jest prostopadła do każdej z przecinających się prostych a i b, to nie może być zawarta w płaszczyźnie π.
Aby dowieść prawdziwości tezy, musimy wykazać, że prosta n jest prostopadła do każdej prostej k zawartej w płaszczyźnie π.

Na płaszczyźnie π istnieje dokładnie jedna prosta – oznaczmy ją l – równoległa do wybranej prostej k i przechodząca przez punkt P. Jeżeli $P \in k$, to oczywiście $l = k$.
Ponadto istnieje dokładnie jedna prosta – oznaczmy ją m – równoległa do n i przechodząca przez punkt P. Jeżeli $P \in n$, to oczywiście $m = n$.

Pokażemy, że $m \perp l$, i tym samym dowiedziemy, że $n \perp k$.
Prowadzimy na płaszczyźnie π prostą przecinającą proste a, b i l odpowiednio w punktach A, B i C, jak na rysunku powyżej.
Na prostej m wybieramy takie punkty M i N, aby $|PM| = |PN|$, i rozpatrujemy własności dwóch trójkątów: MNA i MNB.

- W trójkącie MNA mamy:

  $|PM| = |PN|$
  $\sphericalangle MPA = 90^\circ = \sphericalangle APN$ ⟵ z założenia

Bok PA jest wspólny dla trójkątów MPA i APN, zatem:

$\triangle MPA \equiv \triangle NPA$ ⟵ cecha bkb przystawania trójkątów

Stąd $|AM| = |AN|$.

- Podobnie w trójkącie MNB:

  $|PM| = |PN|$

  $\sphericalangle MPB = 90^\circ = \sphericalangle BPN$

  $\triangle MPB \equiv \triangle NPB$ ⟵ cecha bkb przystawania trójkątów

Stąd $|BM| = |BN|$.

Zatem $\triangle ABM \equiv \triangle ABN$. ⟵ cecha bbb przystawania trójkątów

Zbadamy teraz własności trójkąta MNC.

Z przystawania trójkątów ABM i ABN mamy:

$\sphericalangle ABM = \sphericalangle ABN$

Odcinek BC jest wspólnym bokiem trójkątów BCM i BCN, zatem:

$\triangle BCM \equiv \triangle BCN$ ⟵ cecha bkb przystawania trójkątów

i w szczególności $|CM| = |CN|$. ⟵ trójkąt MNC jest równoramienny

Odcinek PC jest wspólnym bokiem trójkątów PCM i PCN, zatem:

$\triangle PCM \equiv \triangle PCN$ ⟵ cecha bbb przystawania trójkątów

Z przystawania tych trójkątów mamy:

$\sphericalangle MPC = \sphericalangle NPC$

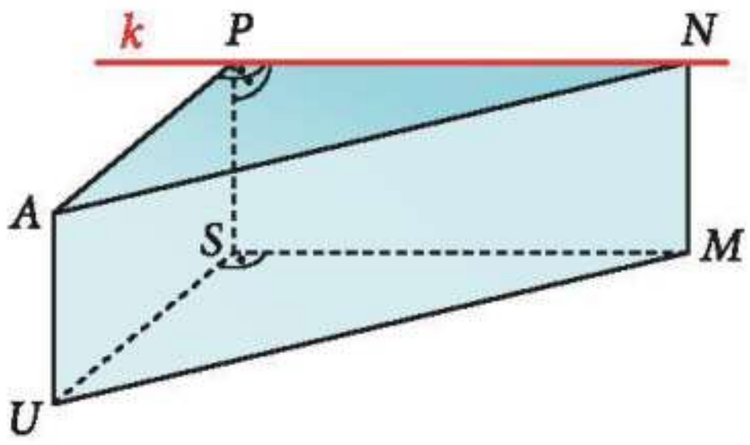
a ponieważ są to kąty przyległe, każdy z nich jest kątem prostym.

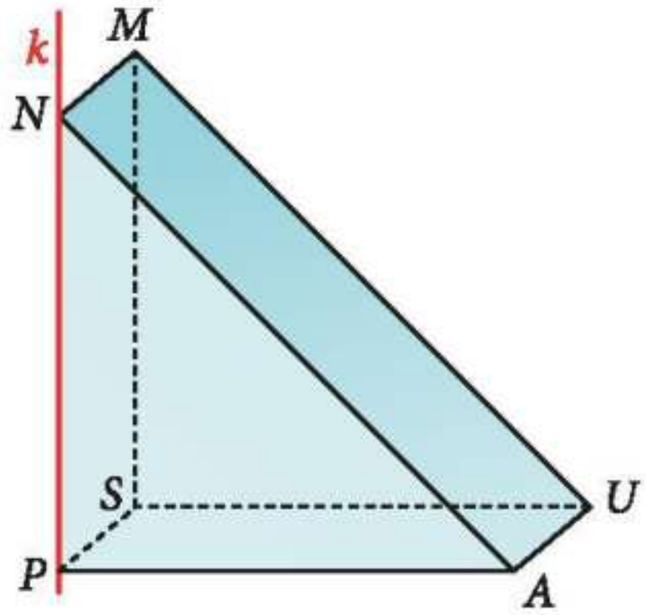
Wykazaliśmy, że $m \perp l$, a skoro $m \parallel n$ i $l \parallel k$, to tym samym $n \perp k$, czyli $n \perp \pi$.

Koniec dowodu

Przykład 10

Prosta k z przykładu 9 jest prostopadła do dwóch prostych: AP i PS, przecinających się w punkcie P. Jest więc prostopadła do płaszczyzny zawierającej ścianę boczną $PAUS$. Rysunek po prawej stronie przedstawia ten sam graniastosłup, ale stojący na ścianie $PAUS$.





Definicja

Mówimy, że **płaszczyzna α jest prostopadła do płaszczyzny** β, jeżeli α zawiera prostą prostopadłą do płaszczyzny β.

Jeżeli płaszczyzna α zawiera prostą prostopadłą do płaszczyzny β, to płaszczyzna β zawiera prostą prostopadłą do płaszczyzny α (można to pokazać na modelu z ekierką), zatem prawdziwe jest następujące twierdzenie, które podajemy bez dowodu.

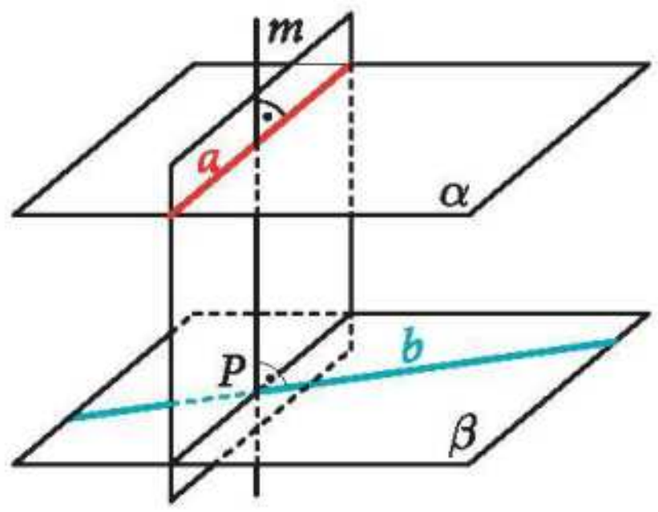
Twierdzenie

Jeżeli płaszczyzna α jest prostopadła do płaszczyzny β, to płaszczyzna β jest prostopadła do płaszczyzny α.

W przykładzie 10 płaszczyznami prostopadłymi są np.: pł. $PAUS$ i pł. $PSMN$.

Zauważmy na koniec, że w przestrzeni dwie dowolne proste mają wspólną, przecinającą je, prostą prostopadłą. Dla prostych skośnych można ją wyznaczyć w następujący sposób:

Przez proste skośne a i b prowadzimy płaszczyzny równoległe α i β. Następnie przez jedną z prostych (na rysunku prosta a) prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do β przecinającą prostą b w punkcie P. Szukana prosta m jest zawarta w tej płaszczyźnie, przechodzi przez punkt P i jest prostopadła do β, zatem przecina każdą z prostych a, b i jest do nich prostopadła.



Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Punkty P, Q, R, S nie leżą na jednej płaszczyźnie. Wskaż liczbę płaszczyzn wyznaczonych przez każde trzy spośród tych punktów.

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

1.2. Proste AB i CD są skośne. Jak są położone proste AC i BD?

A. Są równoległe.
B. Przecinają się.
C. Są skośne.
D. Jest za mało danych, żeby odpowiedzieć na to pytanie.

1.3. Dane są prosta k i punkt P nieleżący na tej prostej. Ile istnieje prostych, a ile płaszczyzn przechodzących przez punkt P i równoległych do prostej k?

A. Jedna prosta i jedna płaszczyzna.
B. Jedna prosta i nieskończenie wiele płaszczyzn.
C. Nieskończenie wiele prostych i jedna płaszczyzna.
D. Nieskończenie wiele prostych i nieskończenie wiele płaszczyzn.

1.4. Dane są prosta k i płaszczyzna α.
Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Istnieje dokładnie jedna płaszczyzna zawierająca prostą k i prostopadła do płaszczyzny α.

B. Istnieje co najmniej jedna płaszczyzna zawierająca prostą k i prostopadła do płaszczyzny α.

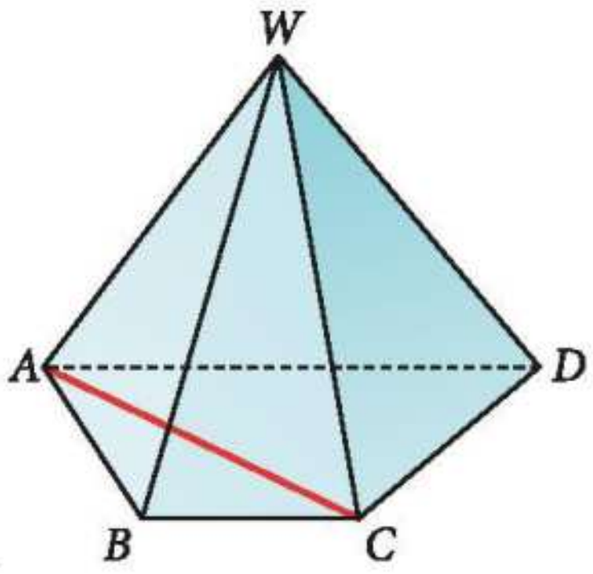
C. Istnieje nieskończenie wiele płaszczyzn zawierających prostą k i prostopadłych do płaszczyzny α.

1.5. Jakim zbiorem może być zbiór punktów wspólnych trzech różnych płaszczyzn? Rozważ różne możliwości położenia płaszczyzn.

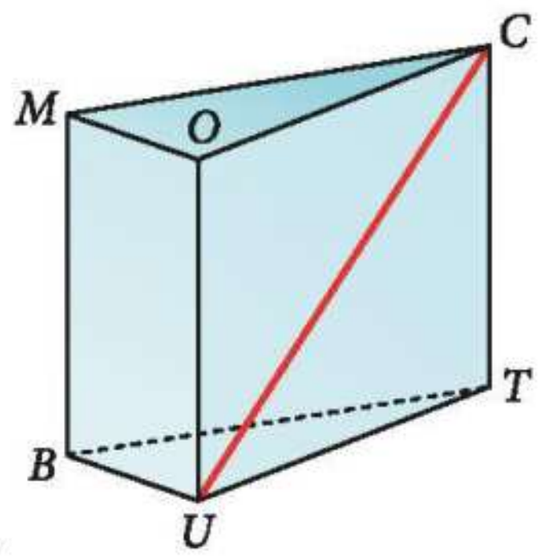
1.6. Punkty K, O, Z, A nie leżą na jednej płaszczyźnie. Wymień wszystkie płaszczyzny wyznaczone przez każde trzy spośród tych punktów. Podaj krawędzie przecięcia każdej pary płaszczyzn.

1.7. Na rysunku 1 przedstawiony jest wielościan $ABCDW$. Wypisz wszystkie jego krawędzie, które są zawarte w prostych skośnych do prostej AC.

1.8. Na rysunku 2 przedstawiono graniastosłup prosty $BUTMOC$ o podstawie trójkątnej. Wypisz wszystkie jego krawędzie, które są zawarte w prostych skośnych do prostej UC.

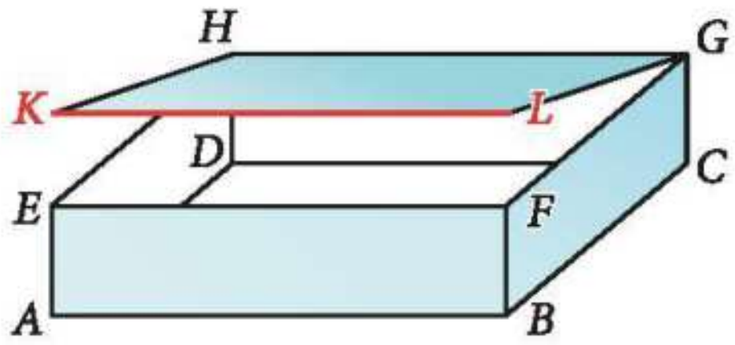


Rys. 1.



Rys. 2.

1.9. Na rysunku przedstawiono otwarte prostopadłościenne pudełko. Wszystkie jego narożniki oznaczono literami. Wypisz krawędzie zawarte w prostych skośnych do prostej KL.



1.10. Dane są dwie proste skośne k i l. Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny π równoległej do obydwu tych prostych i nieposiadającej z nimi punktów wspólnych.

a) Ile jest takich płaszczyzn?

b) Czy przez każdy punkt przestrzeni nienależący do żadnej z tych prostych można poprowadzić taką płaszczyznę? Jeżeli tak, to ile jest takich płaszczyzn przechodzących przez dany punkt?

1.11. Dane są proste skośne k i l. Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) prostej m przecinającej proste k oraz l i równoległej do danej prostej p. Czy dla każdej prostej p istnieje taka prosta m?

1.12. Na rysunku pokazano prostopadłościan z wyróżnioną krawędzią AB, wyznaczającą prostą m. Wypisz wszystkie

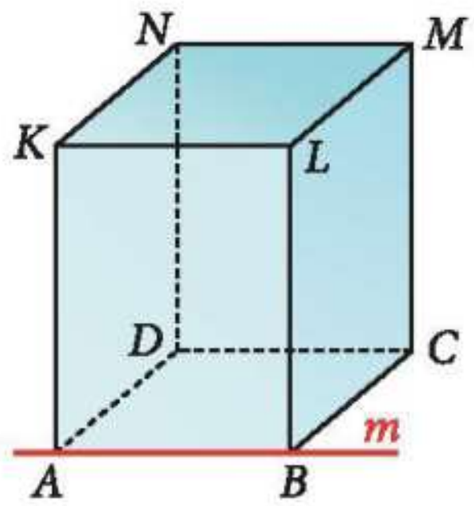
a) krawędzie równoległe do m.

b) krawędzie prostopadłe do m.

c) krawędzie skośne do m.

d) ściany równoległe do m.

e) ściany prostopadłe do m.



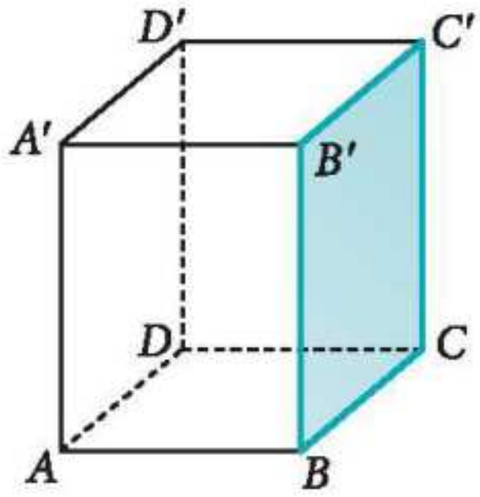
1.13. Na rysunku przedstawiony jest prostopadłościan z wyróżnioną kolorem ścianą α. Wypisz wszystkie

a) krawędzie prostopadłe do α.

b) krawędzie równoległe do α.

c) ściany równoległe do α.

d) ściany prostopadłe do α.



1.14. Czy dwie proste prostopadłe do tej samej płaszczyzny mogą być skośne?

1.15. Czy dwie płaszczyzny prostopadłe do tej samej prostej mogą się przecinać?

1.16. Dana jest płaszczyzna π i punkt A nieleżący na niej. Ile jest płaszczyzn prostopadłych do π przechodzących przez punkt A? Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny α prostopadłej do π, przechodzącej przez punkt A i równoległej do danej prostej k.

1.17. Dane są dwie proste skośne a i b. Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny równoległej do prostej a i zawierającej prostą b.

1.18. Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny zawierającej daną prostą a i prostopadłej do danej płaszczyzny π. Rozważ przypadki, gdy $a \perp \pi$ oraz gdy a nie jest prostopadła do π.

1.19. Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny przechodzącej przez dany punkt P, prostopadłej do danej płaszczyzny π i równoległej do danej prostej k.

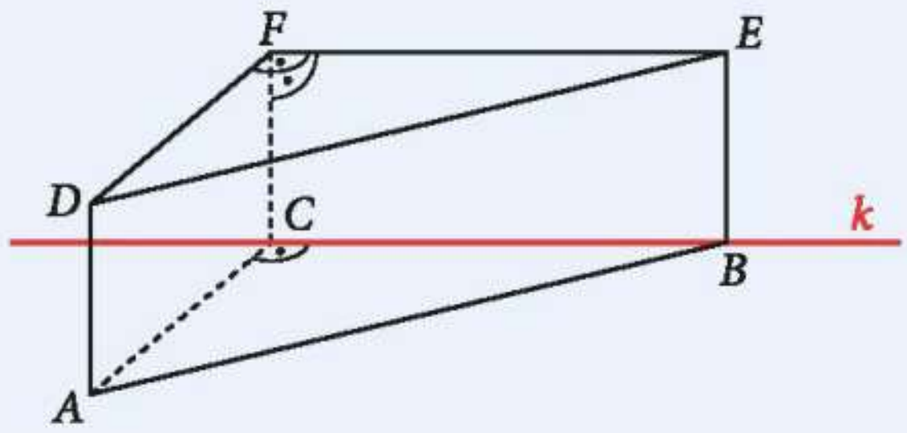
D **1.20.** Wykaż, że dla pary prostych skośnych a i b istnieje dokładnie jedna para płaszczyzn α i β takich, że a zawiera się w α, b zawiera się w β i $\alpha \parallel \beta$.

Prosto do matury

M

1. Różne proste a i b są prostopadłe do prostej k.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Proste a i b mogą być równoległe.
B. Proste a i b mogą być prostopadłe.
C. Proste a i b mogą być skośne.

2. Podstawą graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku jest trójkąt prostokątny. Prosta k zawiera przyprostokątną tego trójkąta. Wypisz wszystkie wyznaczone przez wierzchołki tego graniastosłupa
a) krawędzie równoległe do prostej k.
b) krawędzie prostopadłe do prostej k.
c) krawędzie skośne do prostej k.
d) płaszczyzny równoległe do prostej k.
e) płaszczyzny prostopadłe do prostej k.



3. Dane są prosta k i różne punkty P, Q nieleżące na niej. Ile istnieje płaszczyzn zawierających punkty P i Q i równoległych do prostej k? Rozważ różne położenia punktów względem prostej.

4. Dane są dwie proste skośne a i b oraz punkt P nienależący do żadnej z nich. Zbuduj model lub wykonaj rysunek płaszczyzny równoległej do prostej a i do prostej b oraz przechodzącej przez punkt P.

D **5.** Trzy proste nie leżą w jednej płaszczyźnie, ale każde dwie spośród nich się przecinają. Wykaż, że proste te mają jeden punkt wspólny.

2. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

Umiejętności:

- rozpoznawanie w graniastosłupach i ostrosłupach kątów między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi), obliczanie miar tych kątów
- rozpoznawanie w graniastosłupach i ostrosłupach kątów między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), obliczanie miar tych kątów
- stosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków oraz miar kątów

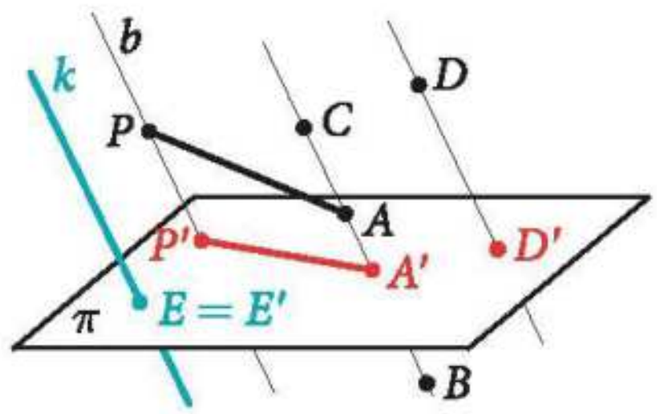
Rzut równoległy

Wiemy, że przez każdy punkt przestrzeni przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do danej prostej. Obserwację tę wykorzystamy do zdefiniowania przekształcenia, które dowolnemu punktowi przestrzeni przyporządkowuje punkt nazywany jego rzutem równoległym na ustaloną płaszczyznę.

Definicja

Niech będzie dana płaszczyzna π i prosta k przecinająca tę płaszczyznę. Przez punkt P przestrzeni prowadzimy prostą b równoległą do prostej k. Prosta b przecina płaszczyznę π w punkcie P', który nazywamy **rzutem równoległym** punktu P na płaszczyznę π w kierunku k.

Na rysunku zaznaczone są rzuty równoległe kilku punktów na płaszczyznę π w kierunku prostej k.



Zauważmy, że:

- przekształcenie to różnym punktom przestrzeni może przyporządkować ten sam punkt płaszczyzny π, np. rzutem każdego z punktów A, B, C jest punkt A',
- rzutem punktu należącego do płaszczyzny π jest on sam (punkty płaszczyzny π są punktami stałymi w tym przekształceniu).

W rzucie równoległym:

- obrazem odcinka jest albo odcinek ($A'P'$ jest obrazem odcinka AP), albo – gdy rzutowany odcinek jest równoległy do kierunku rzutu – punkt (A' jest obrazem np. odcinka AB),
- obrazem prostej jest prosta albo – gdy rzutowana prosta jest równoległa do kierunku rzutu – punkt,
- obrazem przestrzeni jest płaszczyzna π.

Szczególnym przypadkiem rzutu równoległego jest rzut w kierunku prostej prostopadłej do płaszczyzny π. Nazywamy go wówczas **rzutem prostokątnym** (prostopadłym) na płaszczyznę π.

Rzut prostokątny prostej na płaszczyznę jest wygodnym narzędziem do sprawdzenia, które proste skośne są prostopadłe.

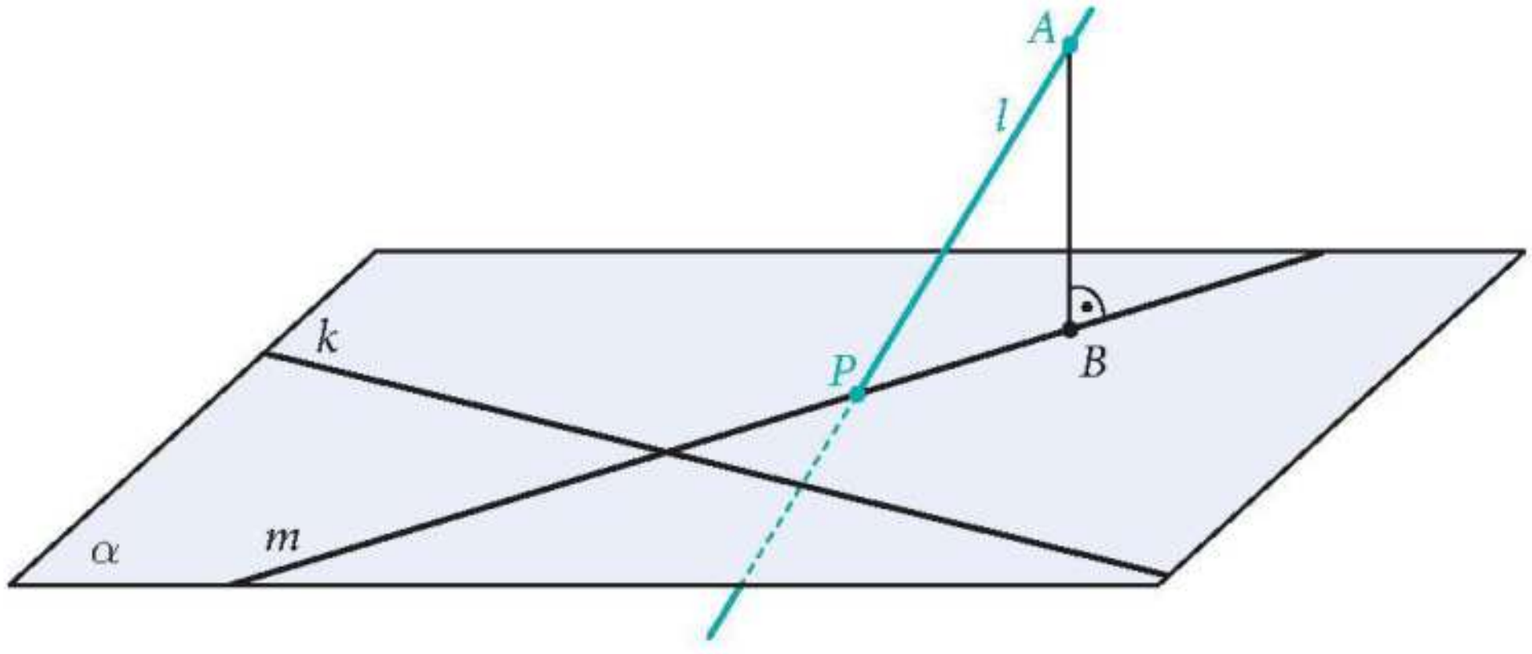
Twierdzenie

Twierdzenie o trzech prostopadłych

Dane są płaszczyzna α i prosta l, która nie jest do niej prostopadła. Prosta m jest rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę α, a k jest dowolną prostą leżącą na płaszczyźnie α.
Prosta l jest prostopadła do k wtedy i tylko wtedy, gdy prosta m jest prostopadła do k.

Dowód

- Jeżeli l jest równoległa do płaszczyzny α, to teza twierdzenia jest oczywista (ponieważ wtedy $l \parallel m$).
- Załóżmy, że l przecina płaszczyznę α i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:
  P to punkt przecięcia prostej l z płaszczyzną α, A jest pewnym różnym od P punktem prostej l, B – rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę α.



Wtedy pr. $AB \perp \alpha$, zatem, zgodnie z definicją, prosta AB jest prostopadła do każdej prostej leżącej na płaszczyźnie α. W szczególności:

pr. $AB \perp k$

Aby wykazać, że $l \perp k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k \perp m$, musimy udowodnić dwa twierdzenia:

I. jeżeli $l \perp k$, to $m \perp k$ oraz II. jeżeli $m \perp k$, to $l \perp k$.

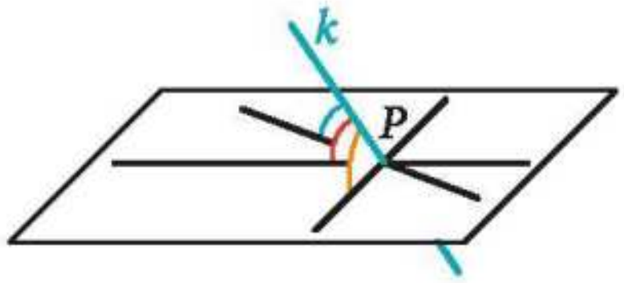
I. Załóżmy, że $l \perp k$. Oznacza to, że k jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych: l oraz pr. AB. Jest więc prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste (zob. twierdzenie na s. 14), w szczególności do pr. $PB = m$, czyli $k \perp m$.

II. Załóżmy, że $m \perp k$. Zatem k jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych: m oraz pr. AB. Jest więc prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste, w szczególności $k \perp l$.

Koniec dowodu

Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

Jeżeli prosta k przecina w punkcie P płaszczyznę π, ale nie jest do niej prostopadła, to tworzy różne kąty z prostymi zawartymi w π i przechodzącymi przez P. Jeden z tych kątów ma szczególne znaczenie.



Definicja

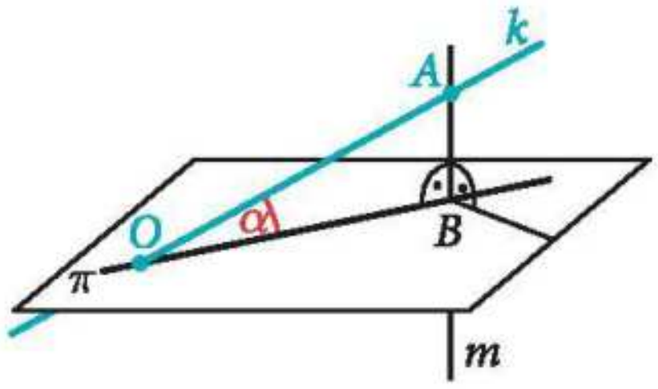
Kątem nachylenia prostej do płaszczyzny, przy założeniu, że prosta nie jest do niej ani prostopadła, ani równoległa, nazywamy kąt ostry utworzony przez tę prostą i jej rzut prostokątny na płaszczyznę.

Kąt nachylenia prostej k do płaszczyzny π wyznaczamy w kolejnych krokach.

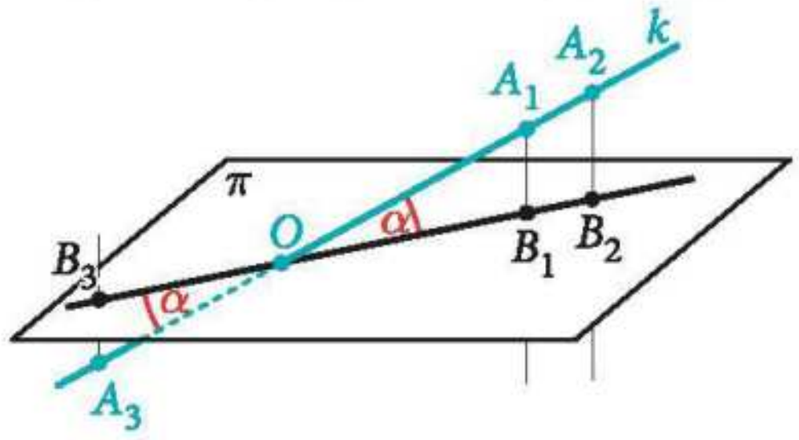
Krok 1: Na prostej k wybieramy punkt A różny od O – punktu przecięcia płaszczyzny.

Krok 2: Przez punkt A prowadzimy prostą m prostopadłą do płaszczyzny π i przecinającą ją w punkcie B (jest to rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę π).

Krok 3: Prowadzimy prostą OB. Kąt AOB oznaczony na rysunku literą α jest szukanym kątem nachylenia prostej k do płaszczyzny π.



Miara kąta α nie zależy od tego, który z punktów prostej k wybierzemy jako punkt A.

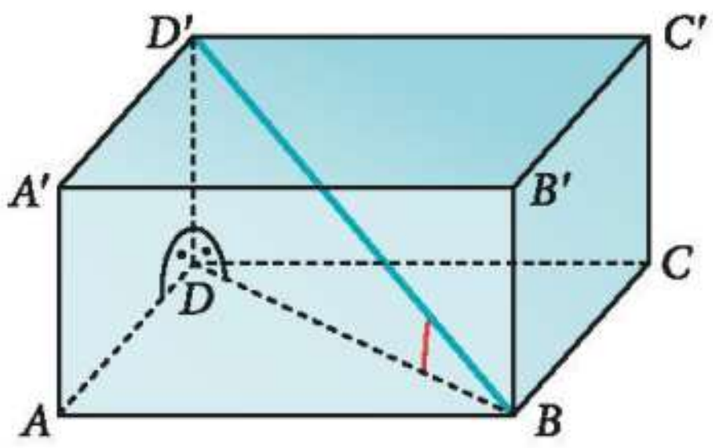


Ponadto przyjmujemy, że prosta równoległa do płaszczyzny tworzy z nią kąt zerowy, czyli kąt o mierze 0°, a prosta prostopadła do płaszczyzny tworzy z nią kąt prosty, czyli kąt o mierze 90°.

Zauważmy, że jeżeli punkt B jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π, a punkt $C \in \pi$ i $C \neq B$, to $|AB| < |AC|$. Inaczej mówiąc, punktem płaszczyzny π, który leży najbliżej punktu A, jest rzut prostokątny punktu A na tę płaszczyznę.

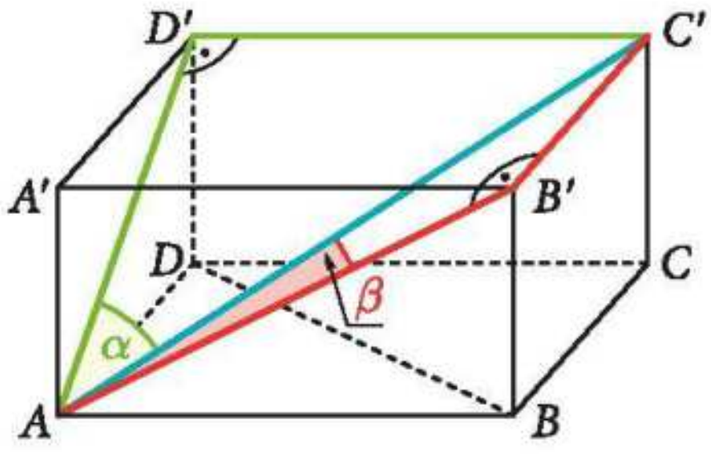
Przykład 1 ◂ zad. 2.8

W prostopadłościanie $ABCDA'B'C'D'$ prosta DD' jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$. Kąt $D'DB$ jest prosty, więc kąt $D'BD$ jest kątem nachylenia prostej BD' do płaszczyzny $ABCD$.



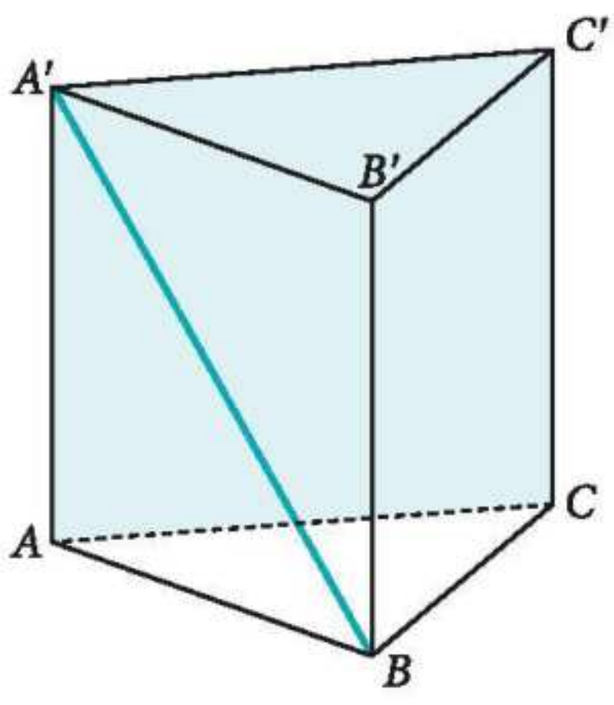
Na rysunku zaznaczone są kąty nachylenia przekątnej AC' prostopadłościanu:

- do płaszczyzny $ABB'A'$ – jest nim kąt β,
- do płaszczyzny $AA'D'D$ – jest nim kąt α.



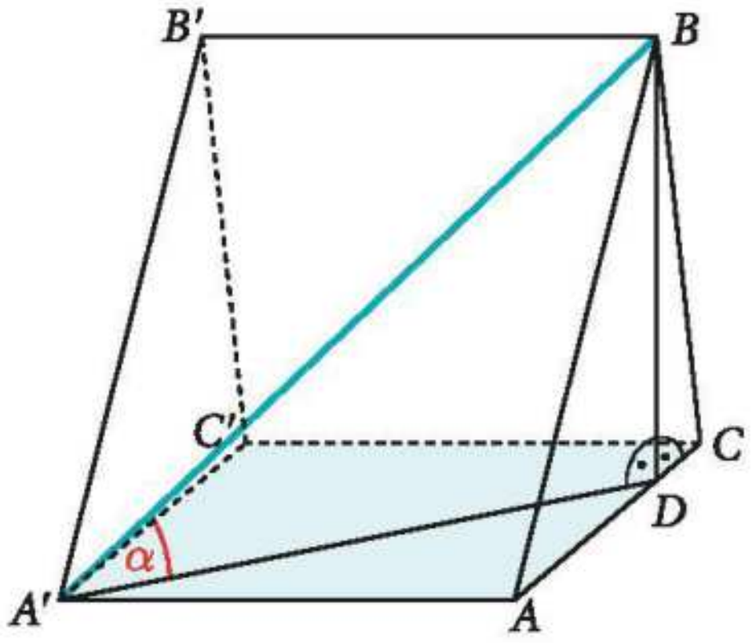
Przykład 2 ◂ zad. 2.9

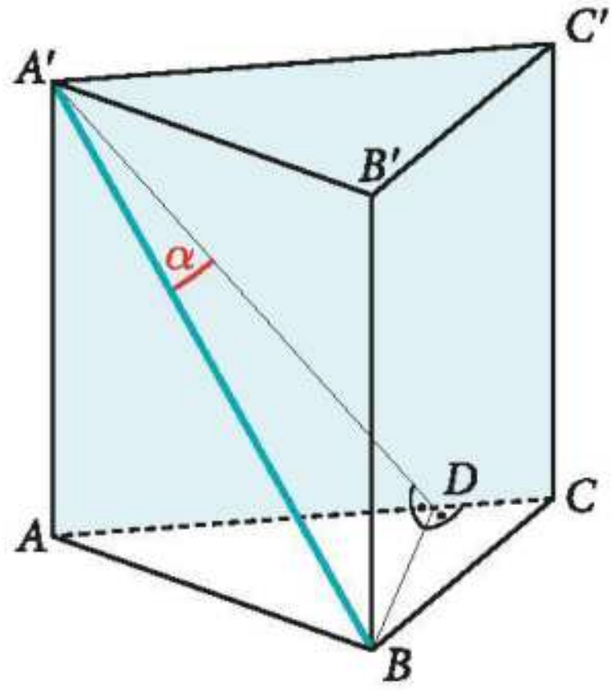
Zaznaczymy kąt nachylenia prostej $A'B$ do płaszczyzny $ACC'A'$ w przedstawionym na rysunku graniastosłupie prostym, którego podstawą jest trójkąt ostrokątny.



Rozwiązanie

Dla ułatwienia ustawmy graniastosłup tak, jak na rysunku po lewej stronie. Ściana ABC jest prostopadła do płaszczyzny $ACC'A'$, zatem wysokość BD trójkąta ACB jest prostopadła do płaszczyzny $ACC'A'$. Rzutem prostokątnym punktu B na płaszczyznę $ACC'A'$ jest punkt D. Szukany kąt to $\sphericalangle DA'B$, oznaczony na rysunku literą α.





Na rysunku po prawej stronie przedstawiony jest graniastosłup w poprzednim położeniu z zaznaczonym kątem α.

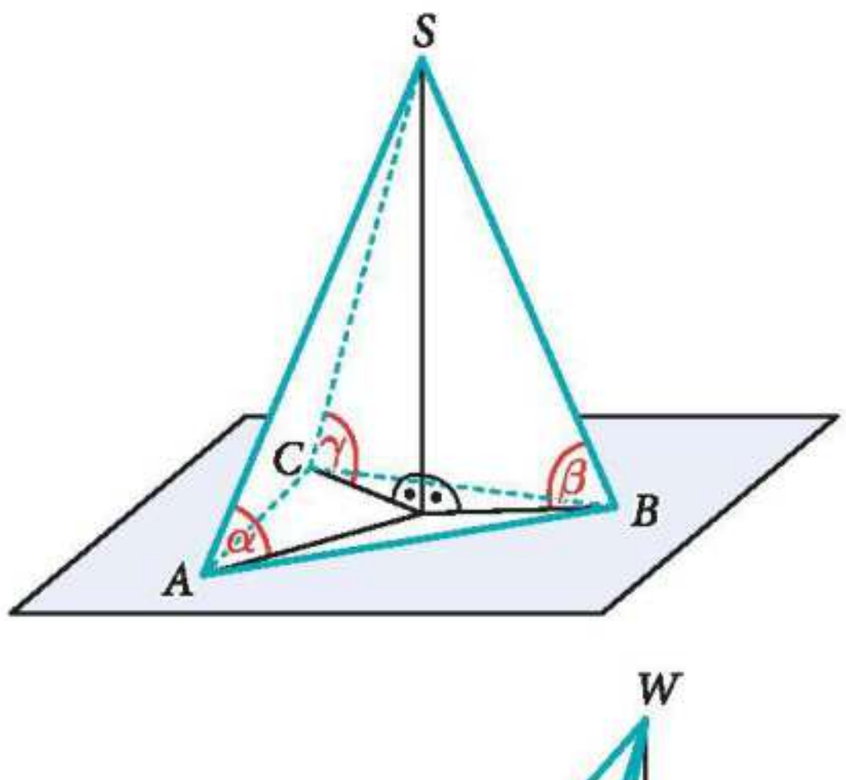
Przykład 3 ◀ zad. 2.10

Zaznaczymy kąty nachylenia krawędzi bocznych danego ostrosłupa o podstawie trójkątnej do płaszczyzny podstawy.

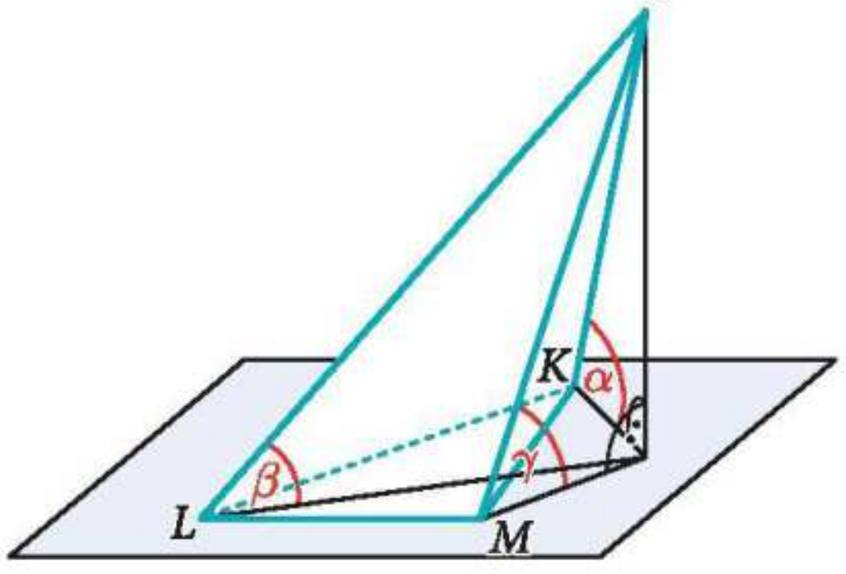
Rozwiązanie

Najpierw należy znaleźć rzuty prostokątne krawędzi bocznych bryły. W tym celu najwygodniej jest zrzutować prostopadle wierzchołek ostrosłupa, czyli poprowadzić wysokość.

a) W ostrosłupie $ABCS$ rzut prostokątny wierzchołka należy do podstawy.
α, β, γ to odpowiednio kąty nachylenia krawędzi AS, BS i CS do płaszczyzny ABC.



b) W ostrosłupie $KLMW$ rzut prostokątny wierzchołka nie należy do podstawy.
α, β, γ to odpowiednio kąty nachylenia krawędzi KW, LW i MW do płaszczyzny KLM.



Odległość punktu od płaszczyzny

Definicja

Niech A_1 oznacza rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę π. **Odległość punktu A od płaszczyzny π** jest równa: 0, gdy $A_1 = A$, oraz $|A_1A|$, gdy $A_1 \neq A$.

Za pomocą odległości punktu od płaszczyzny można zdefiniować:

- odległość między prostą l i płaszczyzną π do niej równoległą jako odległość dowolnego punktu prostej l od płaszczyzny π,
- odległość między dwiema płaszczyznami równoległymi jako odległość dowolnego punktu jednej z tych płaszczyzn od drugiej płaszczyzny.

Przykład 4 ◂ zad. 2.12

Odległość punktu A od płaszczyzny π jest równa 6 cm, odległość punktu B od płaszczyzny π jest równa 10 cm. Prosta AB jest nachylona do płaszczyzny π pod kątem 50°, a punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π. Obliczymy długość odcinka AB (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku).

Rozwiązanie

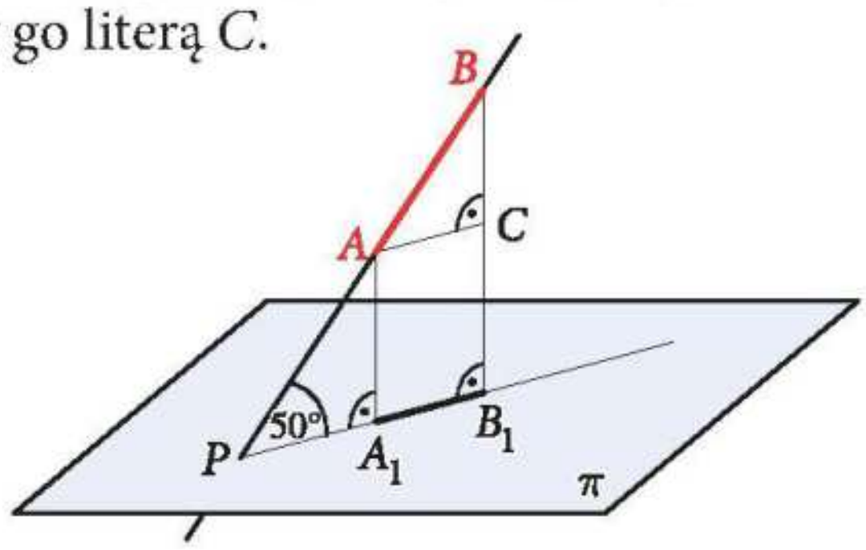
Oznaczmy:
A_1 – rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę π,
B_1 – rzut prostokątny punktu B na płaszczyznę π,
P – punkt przecięcia prostej AB z płaszczyzną π.

Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π, jeżeli odcinek AB nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną π.

Punkty A, B, P, A_1, B_1 leżą na jednej płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny π. Zgodnie z treścią zadania:

$$\sphericalangle BPB_1 = 50°,\ |AA_1| = 6\text{ cm},\ |BB_1| = 10\text{ cm}$$

Jeżeli przez punkt A poprowadzimy prostą równoległą do prostej PA_1, to przetnie ona prostą BB_1 w pewnym punkcie. Oznaczmy go literą C.



Zatem w trójkącie ACB mamy:

$$\sphericalangle ACB = 90°,\ \sphericalangle BAC = 50°$$
$$|BC| = |BB_1| - |CB_1| = 10 - 6 = 4\text{ [cm]}$$

Długość boku AB obliczymy, korzystając z funkcji trygonometrycznych.

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \sin 50°,\ \text{stąd}\ |AB| = \frac{|BC|}{\sin 50°} \approx \frac{4}{0{,}7660} \approx 5{,}22\text{ [cm]}.$$

Odp.: $|AB| = 5{,}22$ cm

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Punkty P i Q leżą po tej samej stronie płaszczyzny π. Punkty P' i Q' są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π. Punkty P, Q, P', Q' spełniają warunki $|PQ| = 6$, $\left|QQ'\right| = 2\sqrt{3}$ i $\left|PP'\right| = 5\sqrt{3}$. Wskaż miarę kąta nachylenia prostej PQ do płaszczyzny π.

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 120°

2.2. Punkty P i Q leżą po tej samej stronie płaszczyzny π w odległościach od niej odpowiednio równych 8 cm i 3 cm. Odcinek PQ o długości 13 cm zrzutowano prostopadle na płaszczyznę π. Wskaż długość rzutu tego odcinka.

A. $8\sqrt{3}$ cm **B.** $2\sqrt{13}$ cm **C.** 11 cm **D.** 12 cm

2.3. Rzut prostokątny odcinka AB o długości 24 cm na płaszczyznę π ma długość 10 cm. Wskaż obliczony z dokładnością do 1° kąt nachylenia prostej AB do płaszczyzny π.

A. 30° **B.** 65° **C.** 67° **D.** 63°

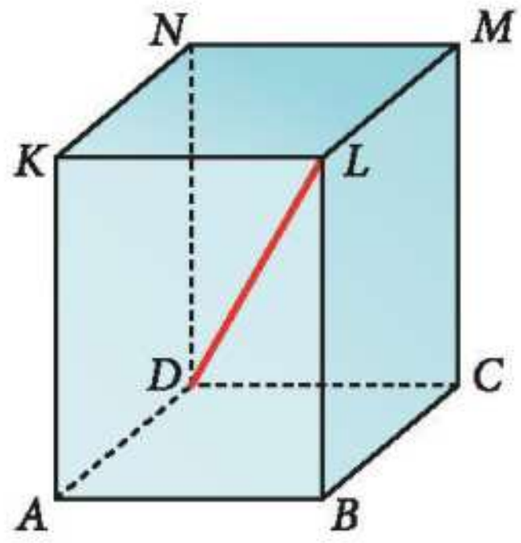
2.4. Ustaw na stole ołówek tak, by był on nachylony do płaszczyzny stołu pod kątem
a) 30°. b) 45°. c) 60°. d) 90°.

2.5. Jaka figura może być obrazem trójkąta w rzucie prostokątnym na daną płaszczyznę? Rozważ różne możliwości. Kiedy obrazem tego trójkąta jest trójkąt do niego przystający?

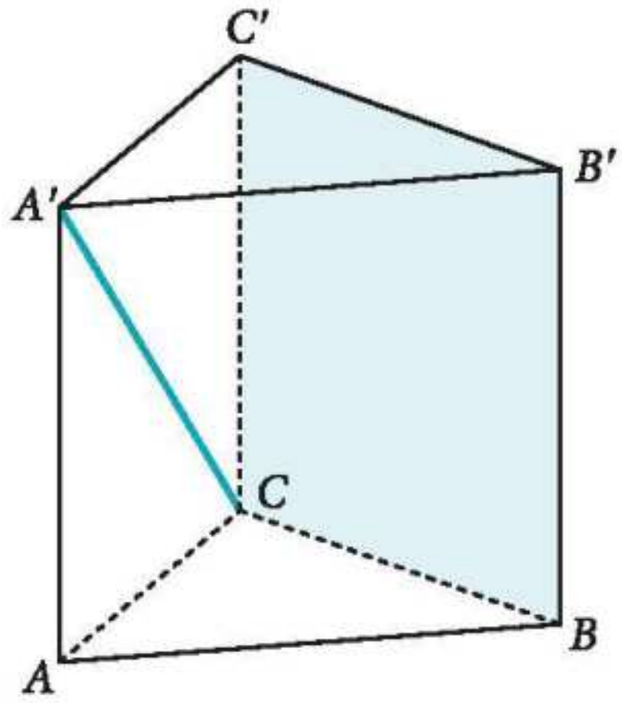
2.6. Dwie różne proste równoległe k i l rzutujemy prostopadle na płaszczyznę π. Czy obrazy tych prostych mogą mieć punkty wspólne?

2.7. Dane są dwie przecinające się proste k i l oraz płaszczyzna π, która ich nie zawiera. W jakim kierunku należy zrzutować te proste na płaszczyznę π, aby ich obrazem była jedna prosta? Kiedy nie można uzyskać takiego wyniku?

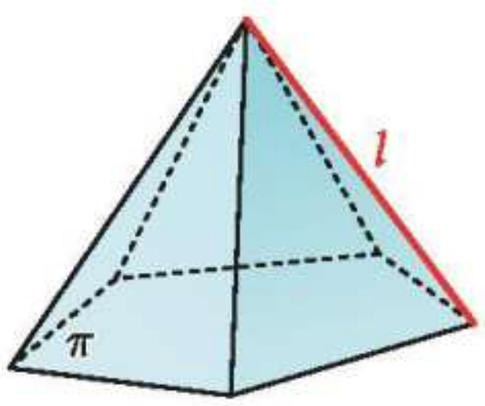
2.8. Przerysuj rzut prostopadłościanu $ABCDKLMN$.
Zaznacz na rysunku kąty nachylenia przekątnej DL do płaszczyzny
a) podstawy $ABCD$.
b) ściany bocznej $ADNK$.
c) ściany bocznej $DCMN$.
d) podstawy $KLMN$.

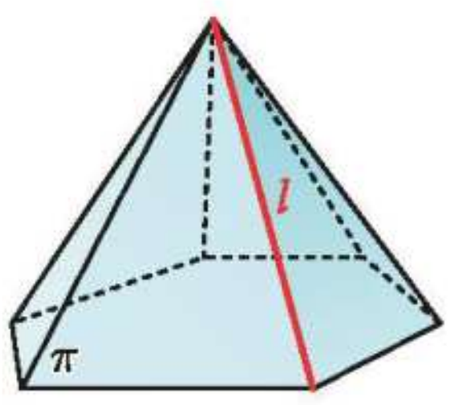


2.9. Przerysuj rzut graniastosłupa prostego $ABCA'B'C'$, którego podstawą jest ostrokątny trójkąt ABC. Zaznacz na rysunku kąt nachylenia prostej $A'C$ do płaszczyzny $CBB'C'$.



2.10. Przerysuj rzuty ostrosłupów. Na każdym rysunku zaznacz kąt nachylenia prostej l do płaszczyzny podstawy π.





2.11. Odcinek AB ma długość 1. Oblicz długość rzutu prostokątnego tego odcinka na płaszczyznę, do której prosta AB jest nachylona pod danym kątem.

a) $0°$ b) $30°$ c) $45°$ d) $60°$ e) $90°$

2.12. Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π. Punkty A_1, B_1 są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π. Punkty A, B, A_1, B_1 spełniają podane warunki. Oblicz długość odcinka AB.

a) $|A_1B_1| = 8$, $|AA_1| = 15$, $|BB_1| = 7$

b) $|A_1B_1| = 10$, $|AA_1| = 3$, $|BB_1| = 7$

2.13. Punkty A i B leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny π. Punkty A_1 i B_1 są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π. Ponadto wiadomo, że $|A_1B_1| = 8$, $|AA_1| = 5$, $|BB_1| = 3$. Oblicz długość odcinka AB.

2.14. Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π. Punkty A_1 i B_1 są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π. Wiadomo, że $|AA_1| = 5$, $|BB_1| = 7$, a prosta AB jest nachylona do płaszczyzny π pod danym kątem. Oblicz długość odcinka AB (z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku).

a) $30°$ b) $60°$ c) $85°$ d) $10°$

2.15. Punkty P i Q leżą po tej samej stronie płaszczyzny π. Punkty P' i Q' są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π. Punkty P, Q, P', Q' spełniają podane warunki. Wyznacz kąt nachylenia prostej PQ do płaszczyzny π.

a) $|PP'| = 9$, $|QQ'| = 5$, $|P'Q'| = 4\sqrt{3}$

b) $|P'Q'| = 3\sqrt{2}$, $|QQ'| = 2\sqrt{2}$, $|PP'| = 5\sqrt{2}$

c) $|P'Q'| = 3$, $|PQ| = 6$

d) $|PQ| = 6$, $|PP'| = 3$, $|QQ'| = 13$

e) $|PQ| = 5\sqrt{2}$, $|P'Q'| = 10$

2.16. Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π. Punkty A' i B' są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π. Wiadomo, że

a) $|A'B'| = 6$, $|AA'| = 12$, $|AB| = 10$. Oblicz $|BB'|$.

b) $|AA'| = 18$, $|BB'| = 10$, $|AB| = 4\sqrt{13}$. Oblicz $|A'B'|$.

c) $|AA'| = 2$, $|BB'| = 10$, $|A'B'| = 6$. Oblicz $|AB|$.

d) $|AB| = 20$, $|BB'| = 17$, $|A'B'| = 16$. Oblicz $|AA'|$.

2.17. Punkty M i N leżą po tej samej stronie płaszczyzny π. Punkty M' i N' są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π. Prosta MN jest nachylona do płaszczyzny π pod kątem α. Wiadomo, że

a) $|M'M| = 12$, $|N'N| = 5$, $\alpha = 40°$. Oblicz $|MN|$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

b) $|M'N'| = 5$, $|M'M| = 10$, $|N'N| = 4$. Oblicz α z dokładnością do 1°.

c) $|M'N'| = 4$, $|MN| = 25$. Oblicz α z dokładnością do 1°.

d) $|M'N'| = 5{,}4$, $\alpha = 72°$. Oblicz $|MN|$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

2.18. Przez punkt M, odległy od płaszczyzny π o 13 cm, poprowadzono dwie proste przecinające płaszczyznę π w punktach K i L oraz nachylone do niej pod kątem 45°. Kąt KML ma miarę α. Wyznacz długość odcinka KL.

a) $\alpha = 90°$ b) $\alpha = 60°$

2.19. Z punktu A poprowadzono odcinki AK i AL o długościach odpowiednio równych 25 cm i 17 cm. Przez punkty K i L przechodzi taka płaszczyzna π, że prostokątne rzuty odcinków AK i AL na nią pozostają w stosunku 5:2. Wyznacz odległość punktu A od płaszczyzny π.

2.20. Zosia znalazła na strychu stary namiot i postanowiła sprawdzić, jak się go rozbija. Według instrukcji każdy z masztów o długości 1 m należy przymocować do podłoża za pomocą dwóch linek. Producent zaleca, aby kąt między linkami był równy 60°, zaś kąt między linkami a podłożem wynosił 30°. Jakiej długości powinny być linki i w jakiej odległości od siebie powinny być ich dolne końce?

2.21. Trójkąt ABC, w którym kąt C jest prosty, wyznacza płaszczyznę π. Przez punkt C poprowadzono prostą prostopadłą do płaszczyzny π i wyznaczono na niej punkt W oddalony od π o 10 cm. Ponadto wiadomo, że $|AW| = 15$ cm i $|BW| = 20$ cm. Oblicz pole trójkąta ABC.

D **2.22.** Dane są dwie równoległe płaszczyzny π_1 i π_2 oraz nierównoległa do nich prosta m. Wykaż, że kąty nachylenia prostej m do płaszczyzn π_1 i π_2 są równe.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. W rzucie równoległym na płaszczyznę
A. obrazem koła może być odcinek.
B. obrazem odcinka nie musi być odcinek.
C. obrazem okręgu może być punkt.

2. W graniastosłupie prostym o podstawie będącej trójkątem równobocznym poprowadzono prostą l przechodzącą przez wierzchołek podstawy dolnej i środek przeciwległej krawędzi podstawy górnej. Wykonaj rysunek ilustrujący tę sytuację. Zaznacz na nim kąty nachylenia prostej l do płaszczyzny podstawy oraz do płaszczyzny każdej ze ścian bocznych.

3. Belka startowa skoczni narciarskiej znajduje się na wysokości 865 m n.p.m., a próg tej skoczni na wysokości 831 m n.p.m. Długość najazdu jest równa 92 m. Oblicz kąt nachylenia skoczni (z dokładnością do 1°). Przyjmij, że najazd jest odcinkiem.

4. Odległość między punktami P i Q wynosi 17 cm, a rzut prostokątny odcinka PQ na płaszczyznę π ma długość 15 cm. Punkt P jest oddalony od płaszczyzny π o 30 cm. Oblicz odległość punktu Q od płaszczyzny π.

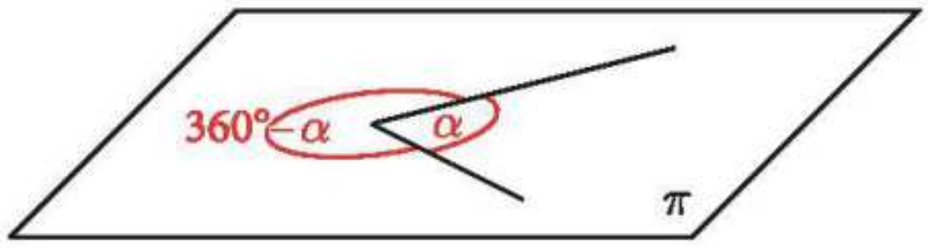
5. Odległość punktu P od płaszczyzny π wynosi a. Punkty A oraz B należą do π, a proste PA i PB tworzą z tą płaszczyzną kąty o mierze 60°. Rzuty prostokątne prostych PA i PB na płaszczyznę π tworzą kąt 120°. Oblicz długość odcinka AB.

3. Kąt dwuścienny

Umiejętności:

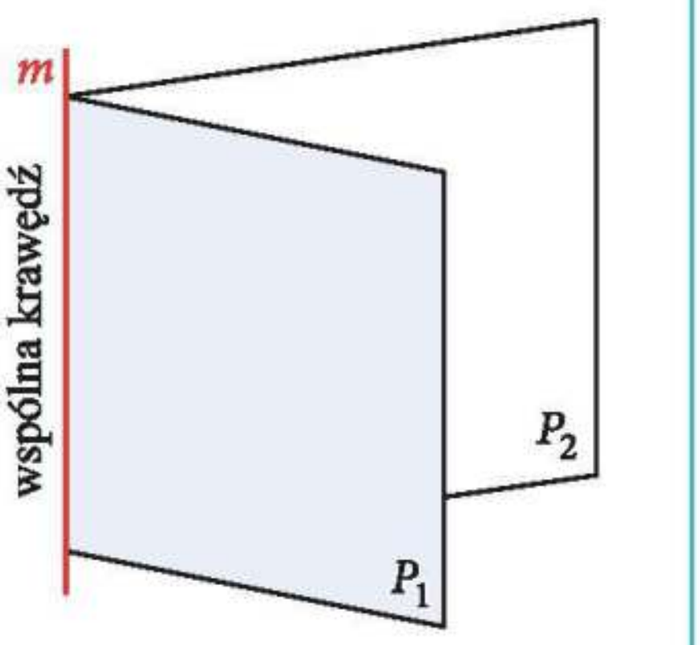
- rozpoznawanie w graniastosłupach i ostrosłupach kątów między ścianami

Przypomnijmy, że każdą z dwóch części płaszczyzny wyznaczonych przez dwie półproste o wspólnym początku, wraz z tymi półprostymi, nazywamy kątem płaskim. Podobnie definiuje się kąt przestrzenny.



Definicja

Dwie różne półpłaszczyzny P_1, P_2 o wspólnej krawędzi m dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z nich wraz z tymi półpłaszczyznami nazywamy **kątem dwuściennym** o krawędzi m i ścianach P_1 i P_2.

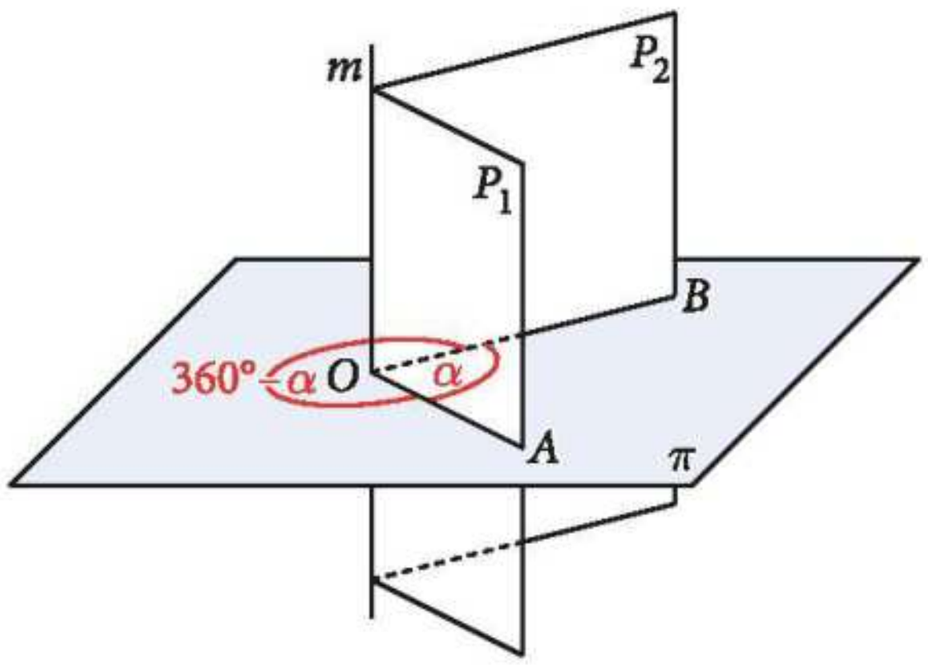


Miarą kąta dwuściennego nazywamy miarę kąta płaskiego będącego częścią wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi. W takim znaczeniu używać będziemy zwrotu „kąt dwuścienny $\alpha = 30°$”.

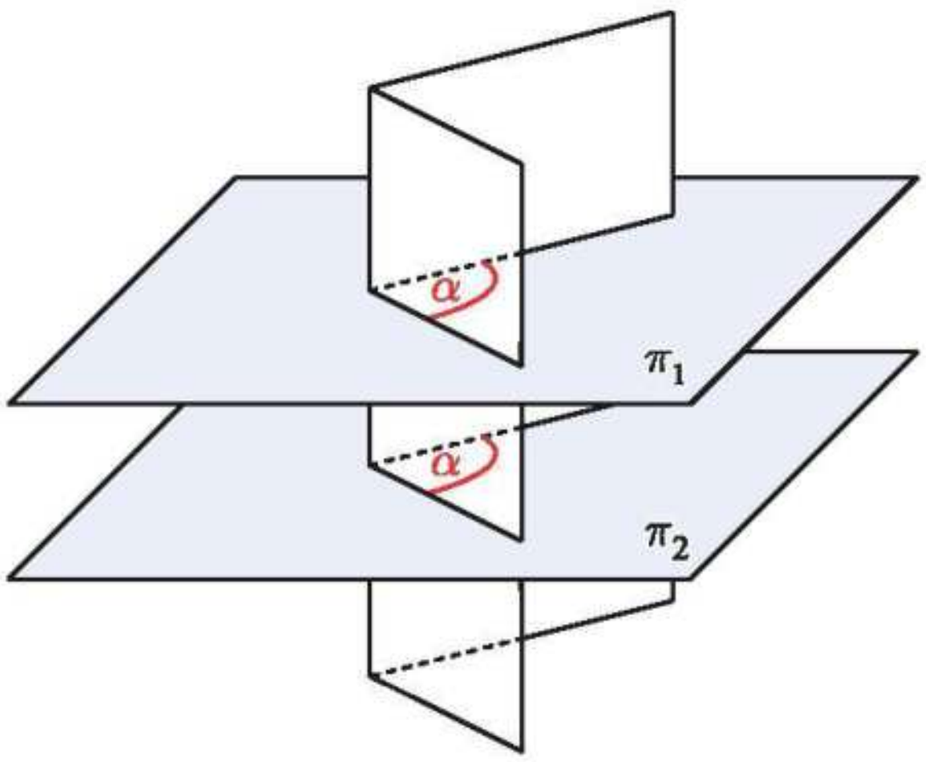
Miarę kąta dwuściennego o krawędzi m i ścianach P_1, P_2 wyznaczamy w kolejnych krokach.

Krok 1: Prowadzimy płaszczyznę π prostopadłą do prostej m.

Krok 2: Mierzymy kąt płaski, wypukły lub wklęsły, będący częścią wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny π. Jeden z kątów dwuściennych ma miarę α, a drugi $360° - \alpha$.

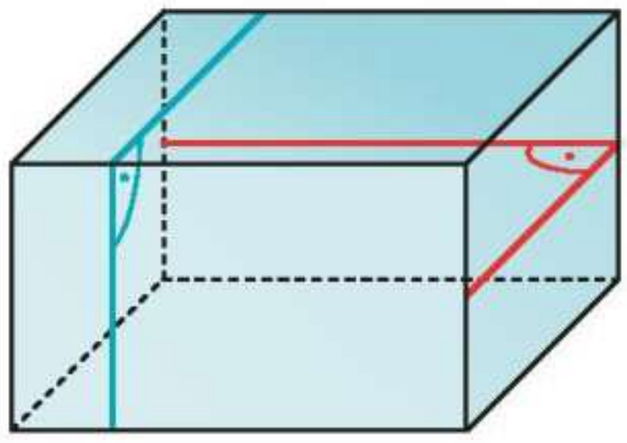


Miara kąta dwuściennego nie zależy od tego, przez który punkt prostej m poprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do krawędzi tego kąta.



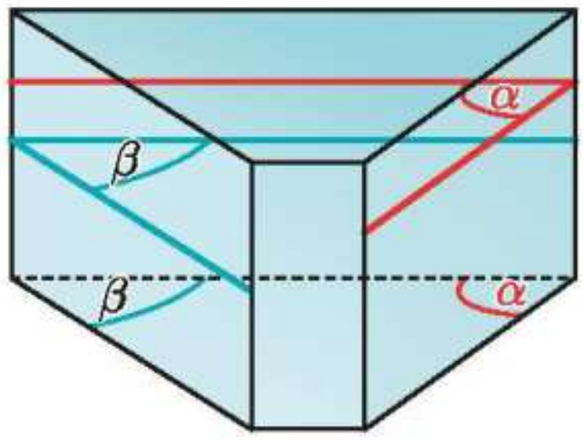
Przykład 1

Kąt dwuścienny wypukły między dwiema półpłaszczyznami prostopadłymi jest kątem prostym, czyli ma miarę 90°. Kąty takie są utworzone przez dowolne dwie przecinające się ściany prostopadłościanu.



Przykład 2

W graniastosłupie prostym kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równy kątowi wyznaczonemu przez odpowiednie krawędzie podstawy.



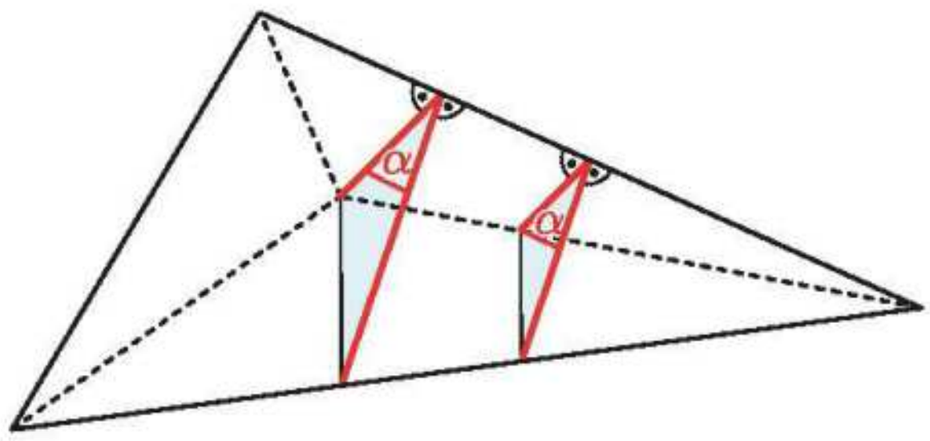
Kątem nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy jest kąt wypukły wyznaczony przez półpłaszczyznę zawierającą ścianę boczną oraz półpłaszczyznę zawierającą podstawę ostrosłupa. **Kąt dwuścienny między ścianami** wielościanu to kąt wypukły wyznaczony przez dwie półpłaszczyzny zawierające ściany wielościanu o wspólnej krawędzi.

Przykład 3 ◀ zad. 3.5

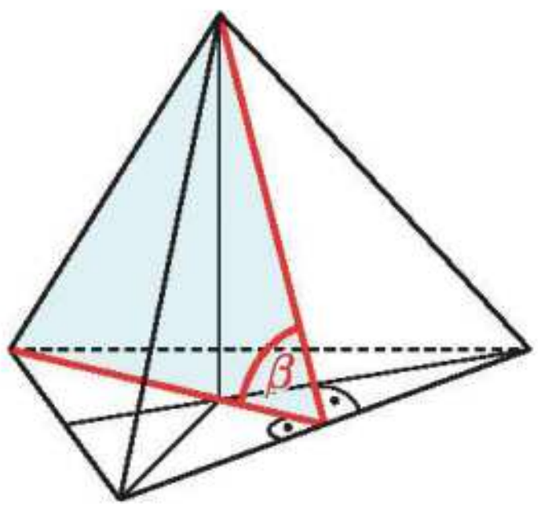
Zaznaczymy kąt dwuścienny w danym ostrosłupie.

Rozwiązanie

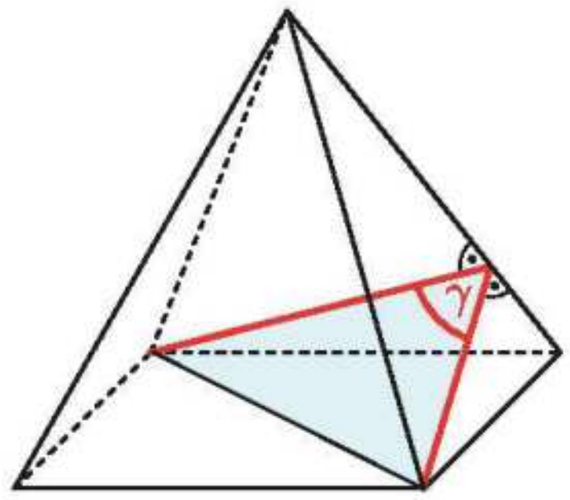
a) α – kąt dwuścienny między ścianami bocznymi ostrosłupa



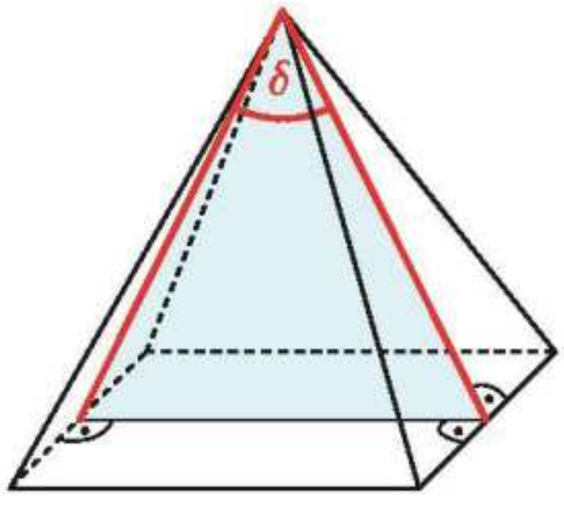
b) β – kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym



c) γ – kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego



d) δ – kąt między przeciwległymi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego



W przykładzie d) zauważmy, że przeciwległe ściany boczne ostrosłupa, będące przystającymi trójkątami równoramiennymi, mają wspólny tylko wierzchołek. Krawędź kąta dwuściennego δ jest równoległa do dwóch krawędzi podstawy ostrosłupa zawartych w ścianach kąta δ. Wysokości ścian bocznych poprowadzone z tego wierzchołka wyznaczają płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzn ścian bocznych. Zatem na płaszczyźnie tej możemy zaznaczyć nie tylko szukany kąt δ, lecz także kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy.

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wskaż miarę kąta dwuściennego między sąsiednimi ścianami bocznymi w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym.

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

3.2. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym podstawą jest kwadrat o boku długości 10 cm, a krawędzie boczne są równe 25 cm. Wskaż wyznaczoną z dokładnością do 1° miarę kąta dwuściennego między ścianą boczną i płaszczyzną podstawy tego ostrosłupa.

A. 65° **B.** 82° **C.** 73° **D.** 78°

3.3. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 12, a wysokość tego ostrosłupa wynosi $2\sqrt{3}$. Wskaż miarę kąta między przeciwległymi ścianami bocznymi.

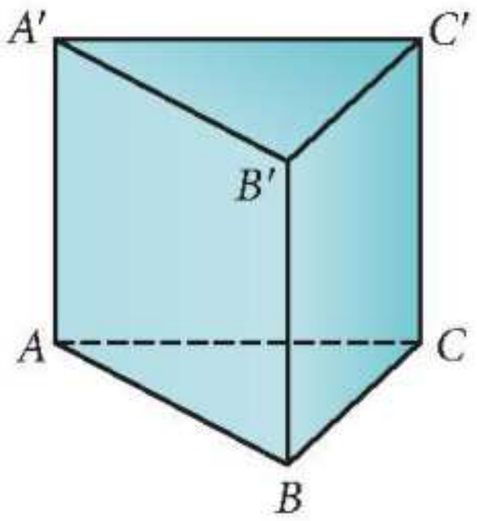
A. 120° **B.** 140° **C.** 135° **D.** 150°

3.4. Ustaw książkę tak, aby jej okładki wyznaczyły kąt dwuścienny o podanej mierze.

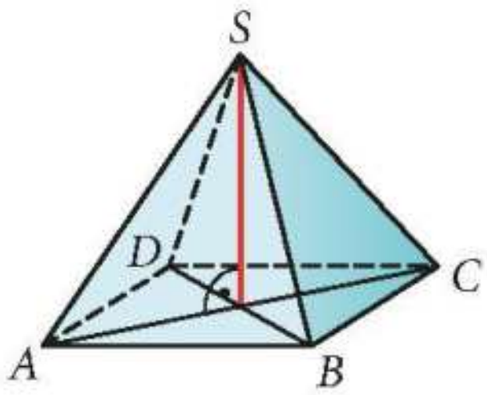
a) 30° b) 45° c) 60° d) 90°

3.5. Przerysuj do zeszytu rzut wielościanu i zaznacz podany kąt dwuścienny.

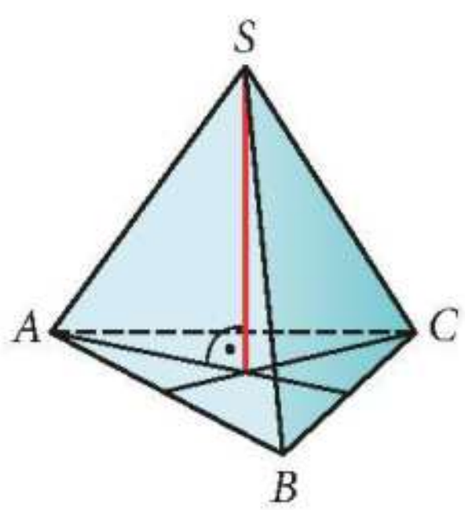
a) kąt między ścianami bocznymi $ABB'A'$ i $BCC'B'$ graniastosłupa prawidłowego trójkątnego (rys. 1)
b) kąt nachylenia ściany ABS ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy (rys. 2)
c) kąt między ścianami bocznymi ABS i ACS ostrosłupa prawidłowego trójkątnego (rys. 3)



Rys. 1.

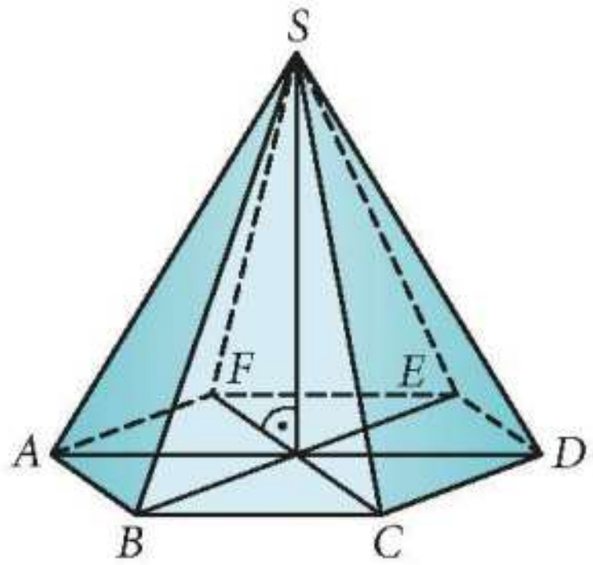


Rys. 2.



Rys. 3.

3.6. Przerysuj do zeszytu rzut ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego i zaznacz podany kąt dwuścienny.
a) kąt między ścianą boczną CDS a płaszczyzną podstawy
b) kąt między ścianami bocznymi AFS i EFS
c) kąt między ścianami bocznymi ABS i DES



3.7. Półpłaszczyzny π_1 i π_2 o wspólnej krawędzi k tworzą kąt dwuścienny o mierze α. Przez punkt A należący do tego kąta poprowadzono prostą l prostopadłą do prostej k i przecinającą ją w punkcie A'. Punkt B_1 jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π_1, a punkt B_2 jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π_2. Prosta l jest nachylona do płaszczyzny π_1 pod kątem β_1, a do płaszczyzny π_2 pod kątem β_2. Przerysuj tabelę do zeszytu. Zastąp ? odpowiednimi wielkościami.

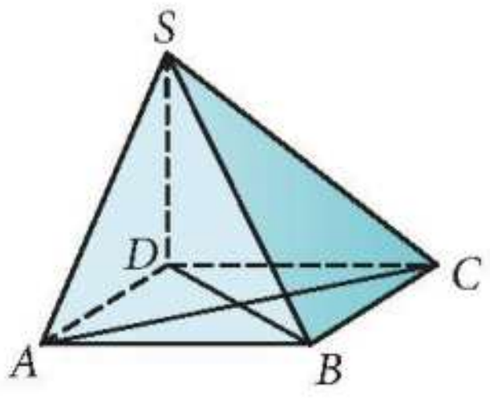
α	β_1	β_2	$\lvert AA'\rvert$	$\lvert AB_1\rvert$	$\lvert AB_2\rvert$	$\lvert B_1A'\rvert$	$\lvert B_2A'\rvert$	$\sphericalangle B_1AB_2$
?	30°	60°	10	?	?	?	?	?
120°	30°	?	?	?	?	6	?	?
?	?	45°	?	8	?	?	?	100°

* **3.8.** Z punktu P należącego do kąta dwuściennego utworzonego przez półpłaszczyzny π_1 i π_2 poprowadzono prostą k przecinającą krawędź tego kąta pod kątem prostym. Prosta k jest nachylona do płaszczyzny π_1 pod kątem 13°, a do płaszczyzny π_2 pod kątem 38°. Jaka jest miara kąta dwuściennego?

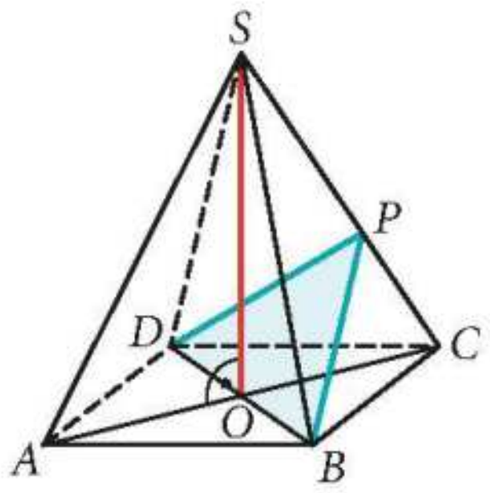
3.9. Co jest większe: miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, czy miara kąta między ścianą boczną a podstawą tego ostrosłupa?

3.10. Dwa trójkąty równoramienne mają wspólną podstawę o długości 2. Półpłaszczyzny, w których zawierają się te trójkąty, tworzą kąt dwuścienny o mierze α. Odległość między wierzchołkami trójkątów jest równa 5, ramiona pierwszego trójkąta mają długość $\sqrt{10}$, a drugiego $\sqrt{17}$. Wyznacz kąt α.

3.11. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt. Krawędź DS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Przerysuj do zeszytu rzut tego ostrosłupa i zaznacz na nim kąty nachylenia ścian BCS i ABS do płaszczyzny podstawy.



3.12. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Kąt BPD jest kątem dwuściennym między ścianami BCS i CDS. Wyznacz cosinus kąta SOP.



Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. W dowolnym ostrosłupie kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy mają miarę mniejszą od 90°.

B. W każdym graniastosłupie prostym kąty między sąsiednimi ścianami bocznymi są proste.

C. W każdym prostopadłościanie kąty między sąsiednimi ścianami są proste.

2. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym zaznacz

a) kąt dwuścienny, który wyznacza ściana boczna z płaszczyzną podstawy.

b) kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi.

3. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest trójkąt równoboczny o boku 5 cm. Wysokość ostrosłupa jest równa 15 cm. Oblicz tangens kąta dwuściennego między ścianą boczną i podstawą ostrosłupa.

4. Przeciwprostokątna AB o długości a jest wspólną podstawą trójkątów równoramiennych prostokątnych ABC i ABC_1. Półpłaszczyzny, w których zawierają się te trójkąty, tworzą kąt dwuścienny o mierze 60°. Oblicz odległość między wierzchołkami C i C_1.

5. Punkty M i N leżą na jednej ścianie kąta dwuściennego i są oddalone od jego krawędzi odpowiednio o 24 cm i 40 cm. Odległość punktu N od płaszczyzny drugiej ściany tego kąta dwuściennego jest równa 15 cm. Oblicz odległość punktu M od płaszczyzny tej ściany.

4. Graniastosłupy

Umiejętności:

- rozpoznawanie w graniastosłupach kątów między: odcinkami, odcinkami i płaszczyznami, ścianami
- korzystanie z siatek graniastosłupów
- określanie, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa płaszczyzną

Przypomnimy i uporządkujemy najważniejsze wiadomości o **graniastosłupach** omawiane podczas nauki w szkole podstawowej.

Zaczniemy jednak od wprowadzenia ogólniejszych pojęć.

Definicja

Figurę (zbiór punktów przestrzeni) nazywamy **wypukłą**, gdy cały odcinek łączący dwa dowolne punkty tej figury jest w niej zawarty.

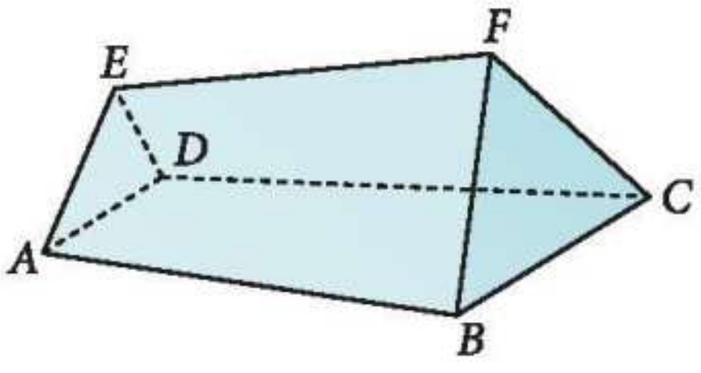
Definicja

Wielościanem wypukłym nazywamy taką figurę wypukłą, której powierzchnię stanowi skończona liczba wielokątów.

Przekątną wielościanu jest odcinek łączący dwa wierzchołki i niezawarty w żadnej ze ścian.

W wielościanie na rysunku poniżej:

- wierzchołkami są punkty: A, B, C, D, E, F,
- krawędziami są odcinki: AB, BC, CD, AD, BF, CF, DE, AE i EF,
- ścianami są wielokąty: $ABCD$, $ABFE$, $DCFE$, BCF, ADE.



Zauważmy, że w podręczniku wszystkie bryły są narysowane w rzucie równoległym.

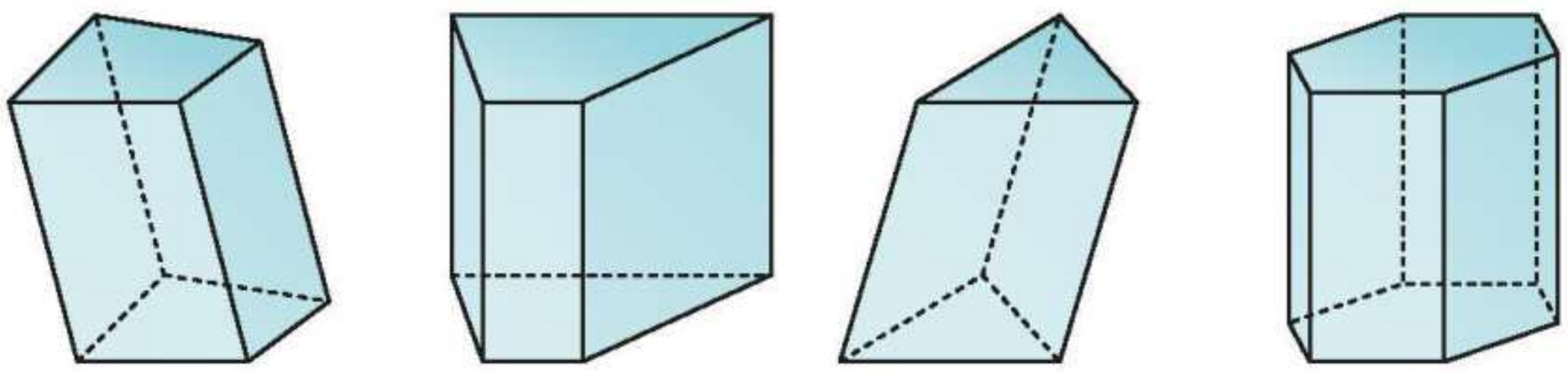
Ten wielościan nie ma żadnej przekątnej.

Graniastosłupy

Definicja

Graniastosłupem wypukłym nazywamy wielościan wypukły, którego dwie ściany (zwane podstawami) są przystającymi wielokątami zawartymi w równoległych płaszczyznach, a pozostałe ściany (zwane bocznymi) są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.

Przykłady graniastosłupów:



graniastosłupy czworokątne

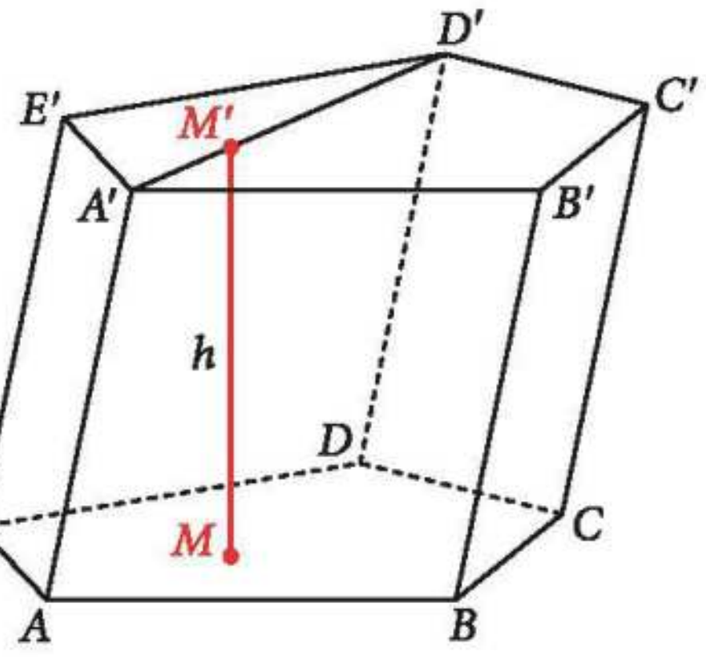
graniastosłup trójkątny

graniastosłup sześciokątny

Przykład 1

W narysowanym graniastosłupie pięciokątnym (czyli takim, który ma w podstawie pięciokąt):

- wierzchołkami są punkty: $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$,
- podstawami są pięciokąty: $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$,
- ścianami bocznymi są równoległoboki: $ABB'A'$, $BCC'B'$, $DCC'D'$, $EDD'E'$, $EAA'E'$,
- krawędziami podstaw są odcinki: AB, BC, CD, DE, EA, $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'A'$,
- krawędziami bocznymi są odcinki: AA', BB', CC', DD', EE',
- wysokością h graniastosłupa jest odcinek łączący dowolny punkt M' płaszczyzny jednej z podstaw z jego rzutem prostokątnym M na płaszczyznę drugiej podstawy.

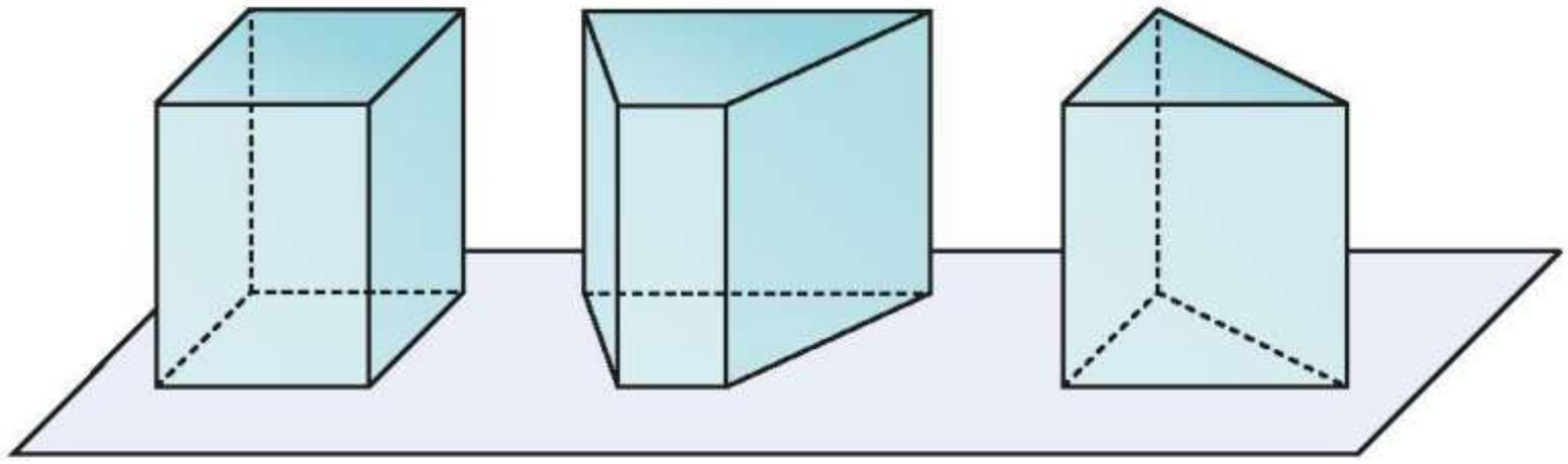


Zauważmy, że wszystkie krawędzie boczne są równoległe i mają tę samą długość:

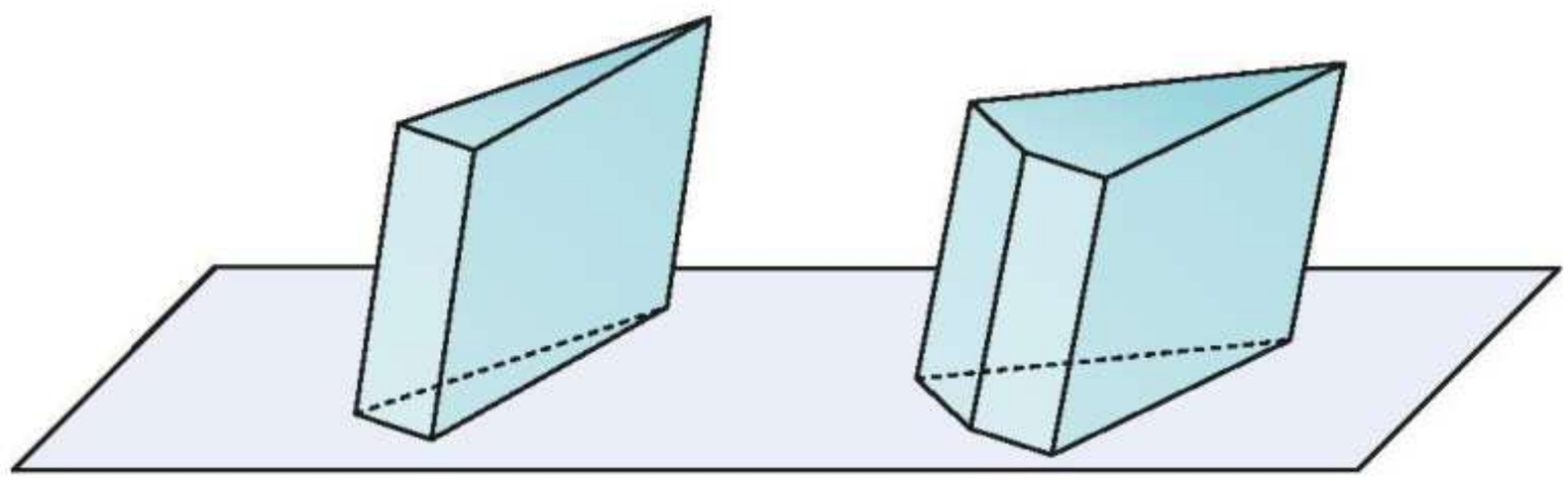
$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'| = |EE'|$$

Definicja

Graniastosłup nazywamy **prostym**, jeżeli jego krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzn podstaw.

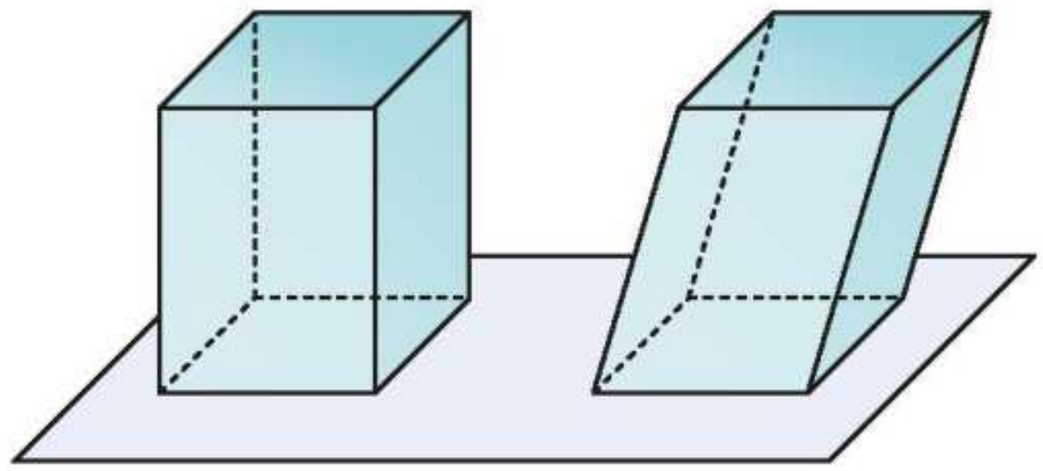


Pozostałe graniastosłupy nazywamy **pochyłymi**.



Definicja

Równoległościan to graniastosłup, którego podstawą jest równoległobok.

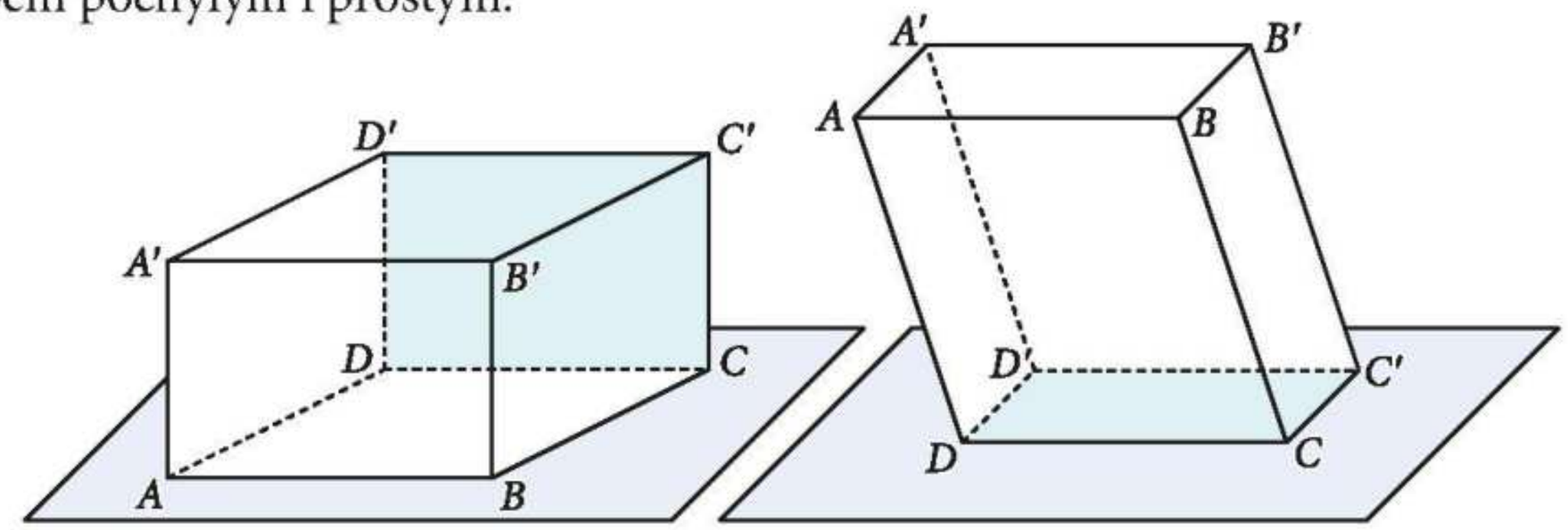


równoległościan prosty

równoległościan pochyły

Jeżeli podstawą rysowanego graniastosłupa jest równoległobok różny od prostokąta, to tę informację trzeba podać słownie, ponieważ na płaskim rysunku nie widać różnicy między tymi czworokątami.

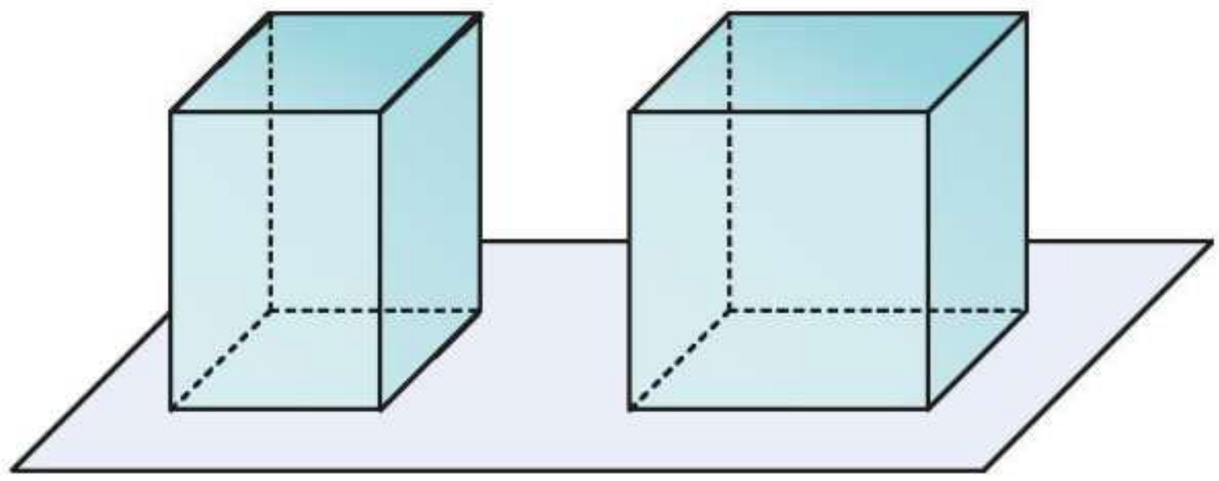
Zauważmy, że równoległościan ma trzy pary ścian równoległych (i przystających). Każda z nich może stanowić parę podstaw tego równoległościanu. Ten sam równoległościan, w zależności od wyboru podstaw, może więc być jednocześnie graniastosłupem pochyłym i prostym.



Definicja

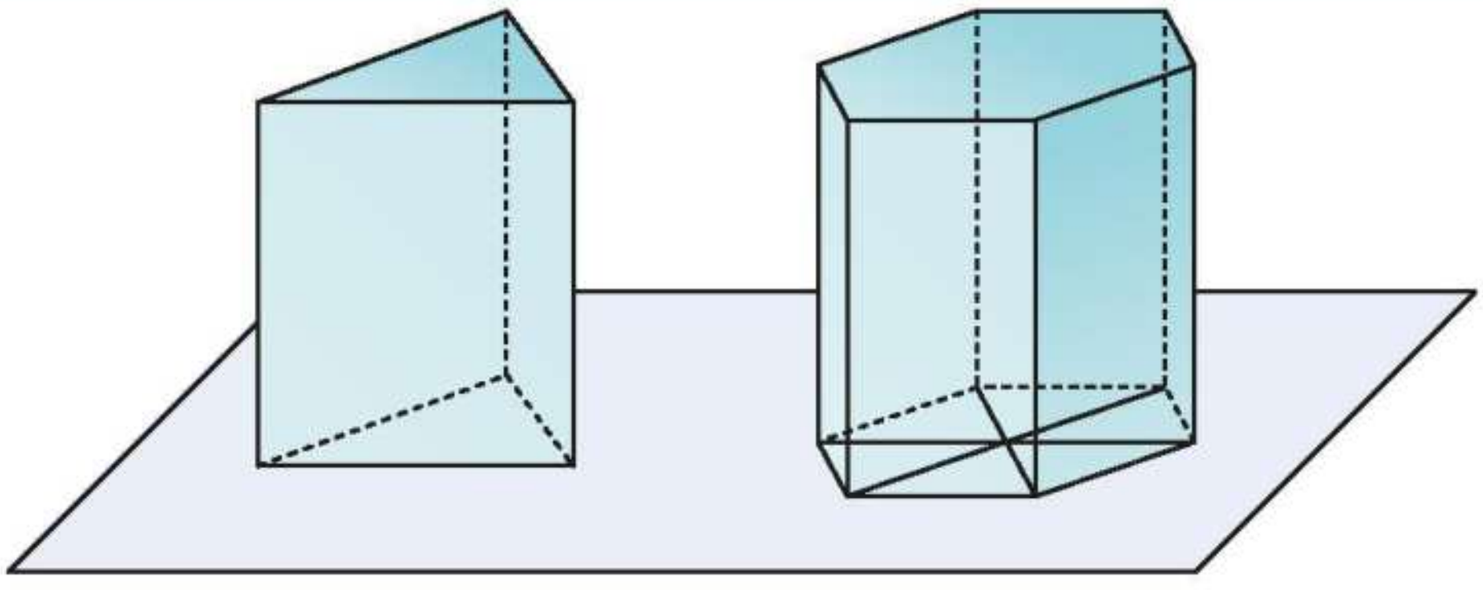
Prostopadłościan to graniastosłup prosty, którego podstawą jest prostokąt. Prostopadłościan o wszystkich krawędziach równych nazywamy **sześcianem**.

Wszystkie ściany prostopadłościanu są prostokątami, a wszystkie ściany sześcianu są kwadratami.



Definicja

Graniastosłup nazywamy **prawidłowym**, jeżeli jest prosty i ma w podstawie wielokąt foremny.



Siatki wielościanów

Jeżeli chcemy przedstawić wielościan, czyli figurę trójwymiarową, na płaskiej kartce, to możemy albo narysować jego rzut równoległy – tak postępowaliśmy dotychczas – albo narysować jego siatkę.

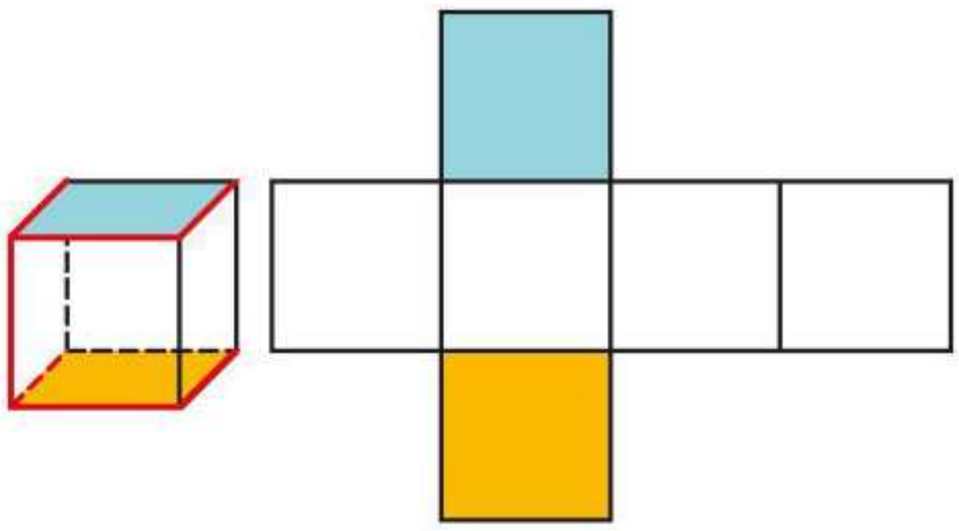
Siatką wielościanu nazywamy płaską figurę będącą sumą wielokątów stykających się bokami, a powstałą przez rozcięcie pewnej liczby krawędzi wielościanu tak, aby jego ściany dały się rozłożyć na płaszczyźnie.

Czasami zamiast nazwy „siatka wielościanu" używa się zwrotu „rozwinięcie powierzchni wielościanu na płaszczyźnie".

Przykład 2 ◂ zad. 4.13

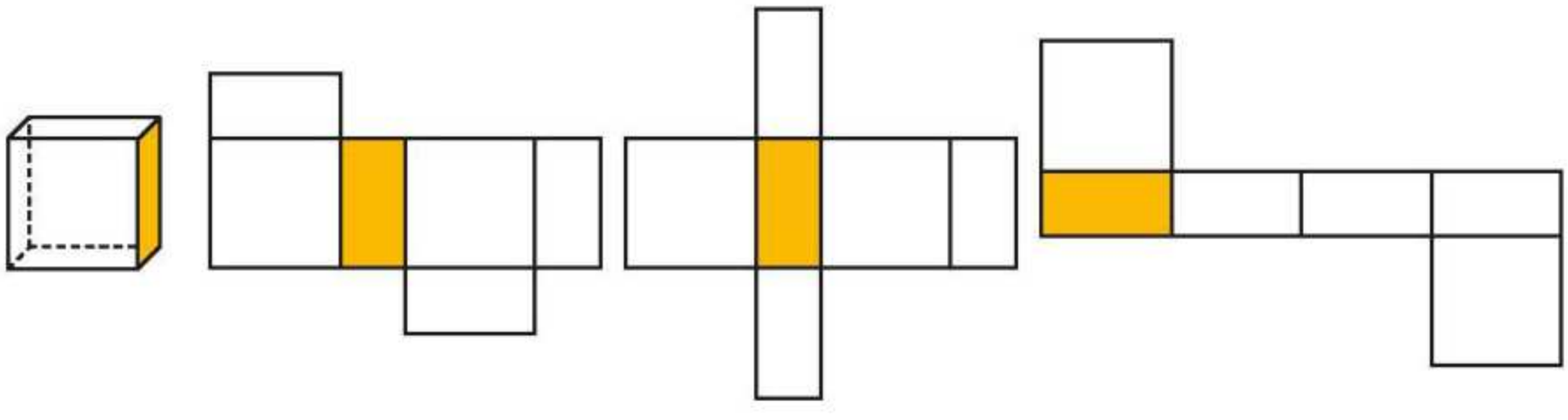
Narysujemy siatkę sześcianu.

Kolorem czerwonym zaznaczone są te krawędzie sześcianu, wzdłuż których został on rozcięty.



Aby wykonać czynność odwrotną, tzn. z siatki otrzymać wielościan, trzeba pozaginać ją wzdłuż każdej krawędzi, odpowiednio złożyć i skleić.

Wielościany mogą mieć wiele różnych siatek. Poniżej prezentujemy trzy różne siatki tego samego prostopadłościanu.

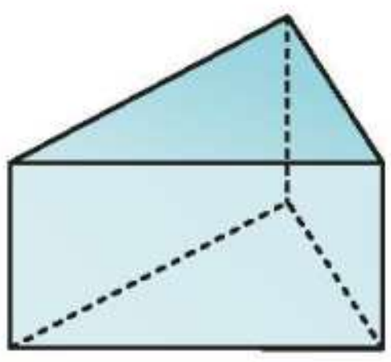


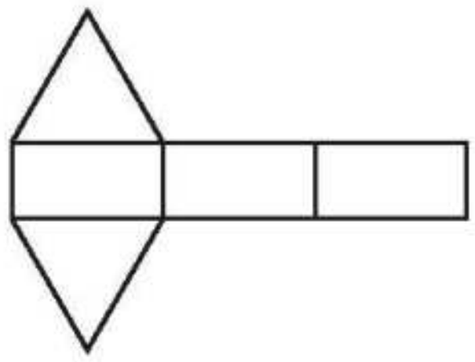
Przykład 3 ◂ zad. 4.14–4.16

Narysujemy siatki kilku graniastosłupów.

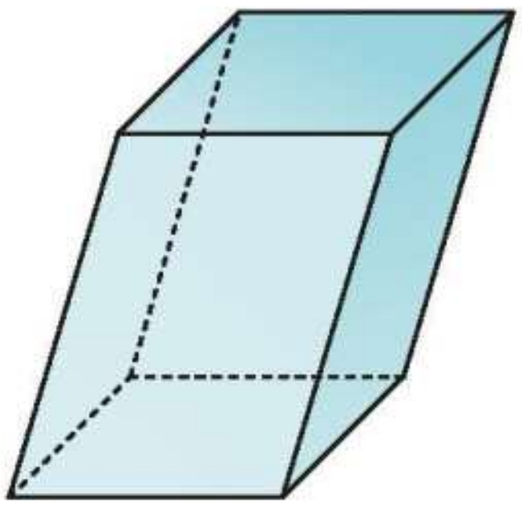
Rozwiązanie

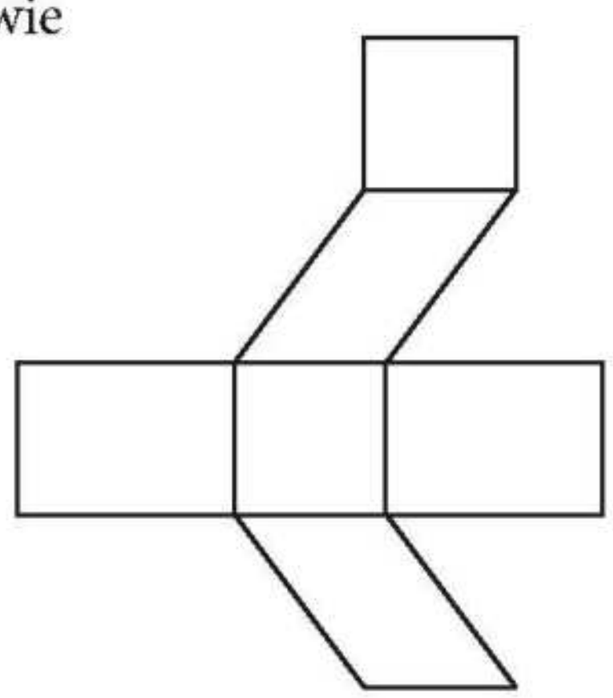
- graniastosłup prawidłowy trójkątny



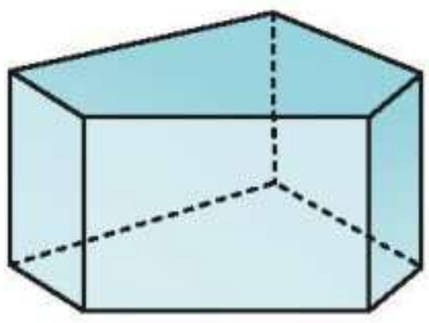


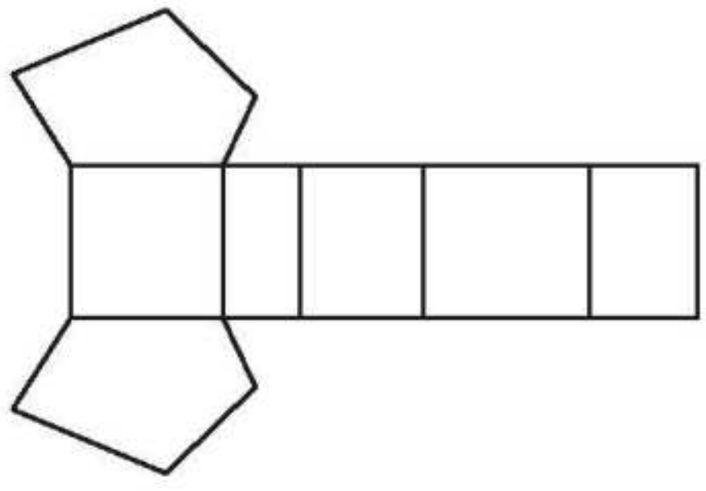
- graniastosłup pochyły z kwadratem w podstawie





- graniastosłup pięciokątny prosty



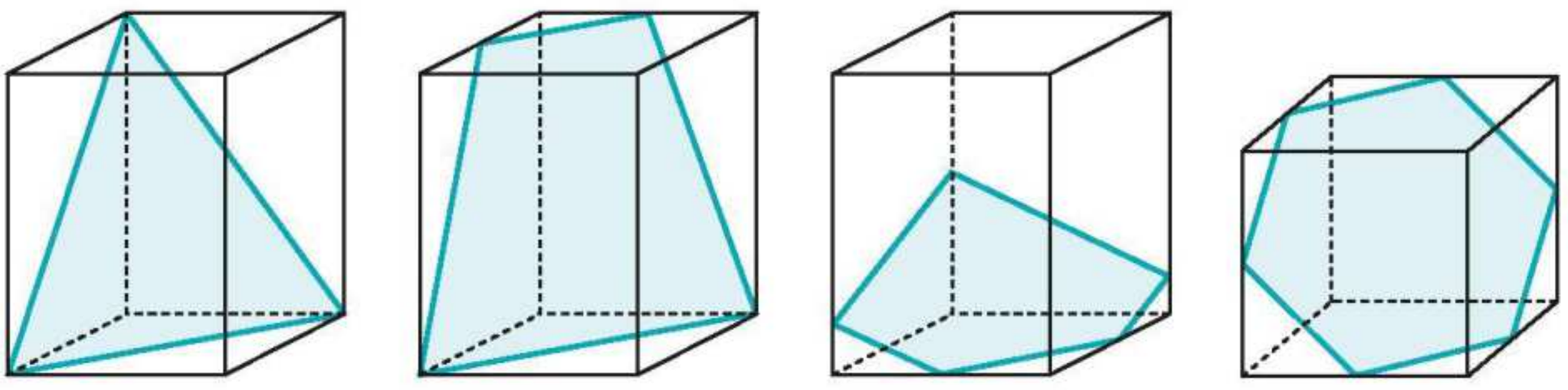


Uwaga: Wymiary siatek graniastosłupów zostały zmniejszone, aby rzuty graniastosłupów i ich siatki zmieściły się na stronie.

Przekroje wielościanów

Jeżeli wielościan przetniemy płaszczyzną w taki sposób, że żadna ze ścian wielościanu nie zawiera się w tej płaszczyźnie oraz do części wspólnej wielościanu i tej płaszczyzny należą co najmniej trzy niewspółliniowe punkty, to tę część wspólną nazywamy **przekrojem płaskim wielościanu**. Przekroje wielościanów są wielokątami o bokach wyznaczonych przez ściany wielościanu i płaszczyznę sieczną. Zastanówmy się, jakimi wielokątami są przekroje płaskie prostopadłościanów.

Każdy prostopadłościan ma sześć ścian, zatem maksymalną liczbą boków przekroju jest 6. Przekrojem o najmniejszej liczbie boków jest trójkąt. Na rysunku prezentujemy różne rodzaje wielokątów będących przekrojami płaskimi prostopadłościanów.

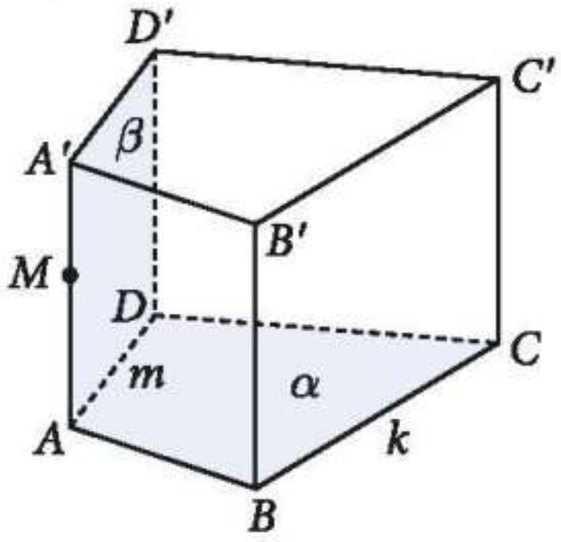


trójkąt | czworokąt (trapez) | pięciokąt | sześciokąt

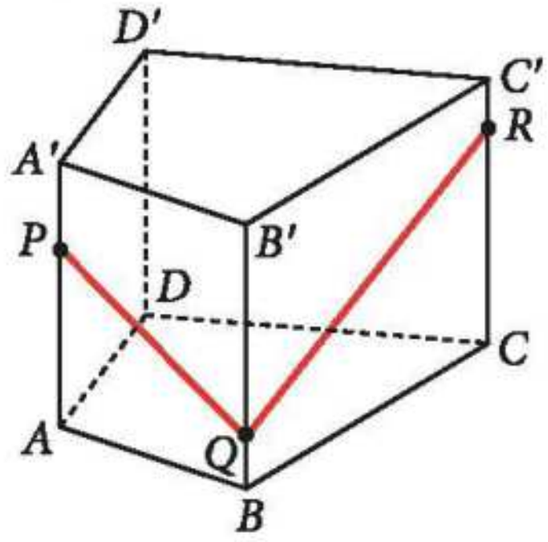
Przykład 4 ◂ zad. 4.20

Dany jest graniastosłup czworokątny $ABCDA'B'C'D'$, którego podstawa nie jest trapezem. Narysujemy przekrój tego graniastosłupa płaszczyzną π

a) wyznaczoną przez krawędź BC i punkt M należący do krawędzi AA', jak na rysunku.



b) wyznaczoną przez punkty P, Q, R należące do krawędzi AA', BB' i CC', jak na rysunku.



Rozwiązanie

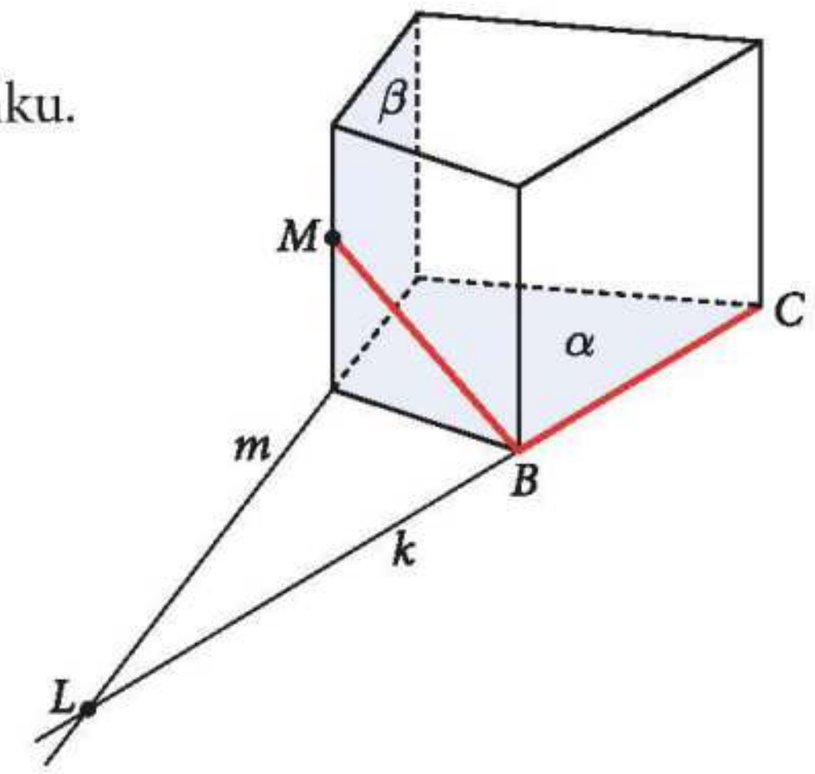
a) Przyjmijmy oznaczenia jak na podanym rysunku.

α – płaszczyzna podstawy $ABCD$,

β – płaszczyzna ściany $ADD'A'$,

k – krawędź przecięcia płaszczyzny przekroju π z płaszczyzną α,

m – krawędź przecięcia płaszczyzny β z płaszczyzną α.



Dwoma bokami szukanego przekroju są odcinki BC i BM, a płaszczyznę π tego przekroju wyznaczają zawierające je proste.

Szukając kolejnych boków przekroju, wyjdziemy poza obszar graniastosłupa.

Na następnych rysunkach zostawiamy tylko niezbędne oznaczenia.

Zgodnie z założeniem zadania proste k i m nie są równoległe.

Oznaczmy punkt ich przecięcia literą L i zauważmy, że:

$L \in \pi$ $\longleftarrow k \subset \pi$

$M \in \pi$

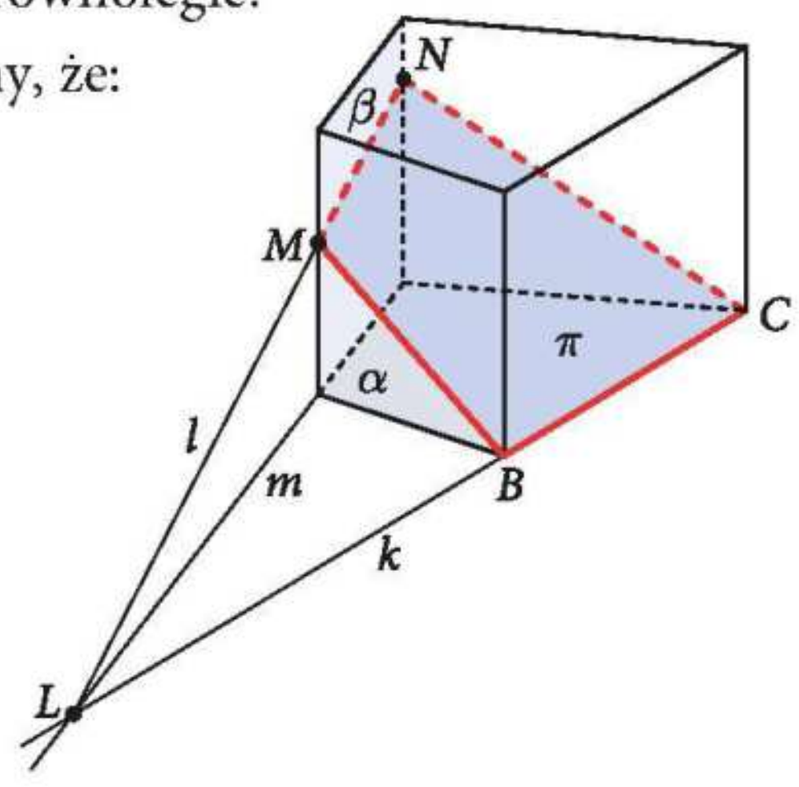
Zatem pr. $LM \subset \pi$.

Równocześnie:

$L \in \beta$ $\longleftarrow m \subset \beta$

$M \in \beta$

Zatem pr. $LM \subset \beta$.

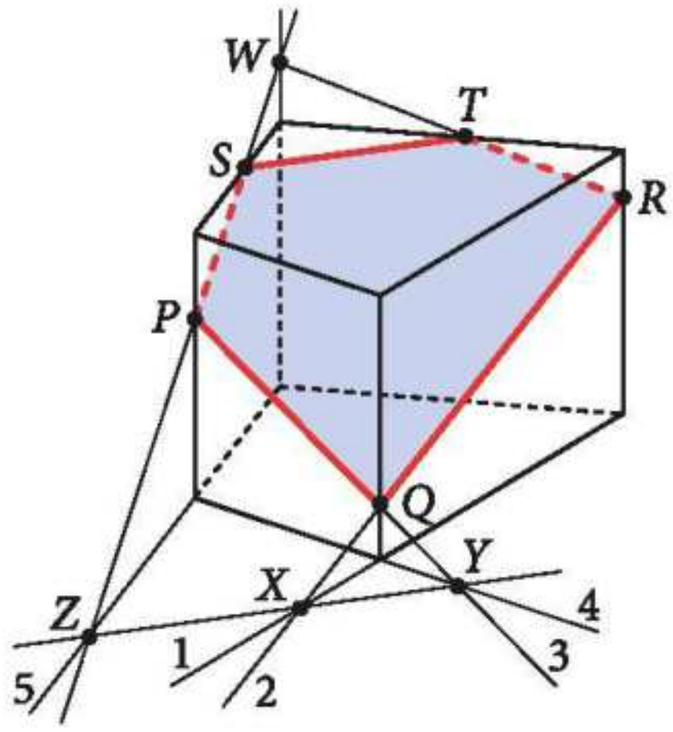


Prosta LM jest więc krawędzią przecięcia płaszczyzny π z płaszczyzną β, a ponieważ przecięła krawędź DD' graniastosłupa w punkcie oznaczonym N, tym samym otrzymaliśmy czwarty wierzchołek przekroju.

Odp.: Szukanym przekrojem płaskim graniastosłupa jest czworokąt $BCNM$.

b) Kolejno kreślimy (oznaczenia jak na rysunku):

- proste: 1 i 2 → otrzymujemy punkt X,
- proste: 3 i 4 → otrzymujemy punkt Y,
- prostą XY,
- prostą 5 → otrzymujemy punkt Z w przecięciu z prostą XY,
- prostą ZP, która przecina krawędź $A'D'$ graniastosłupa w punkcie S oraz przedłużenie krawędzi DD' w punkcie W,
- prostą WR → otrzymujemy punkt T.



Odp.: Szukanym przekrojem płaskim graniastosłupa jest pięciokąt $PQRTS$.

Przykład 5 ◂ zad. 4.22

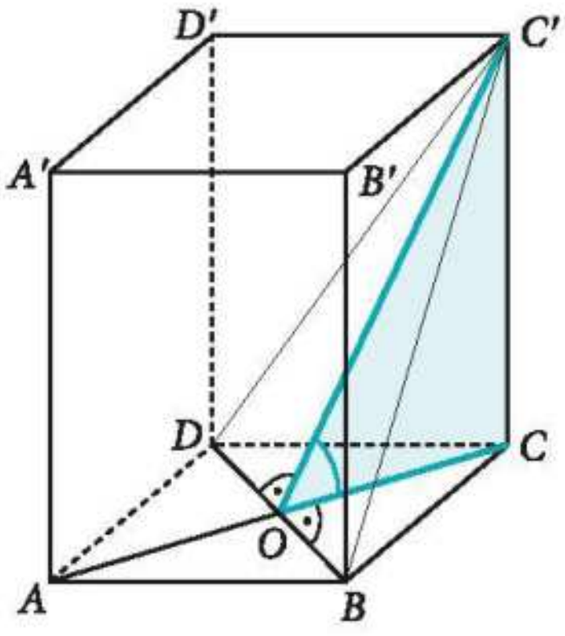
Prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$ o podstawie kwadratowej przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki B, D i C'.

a) Zaznaczymy kąt α między otrzymanym przekrojem a płaszczyzną podstawy $ABCD$ prostopadłościanu.

b) Przyjmujemy, że krawędź podstawy prostopadłościanu ma długość a, a jego wysokość jest równa h. Wyznaczymy $\operatorname{tg}\alpha$.

Rozwiązanie

a) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Przypomnijmy: Używamy w podręczniku zwrotów typu „bok a wielokąta” zamiast „bok wielokąta o długości a”, podobnie „wysokość równa 3”, a nie „długość wysokości równa 3”, „przekątne są równe” zamiast „przekątne mają jednakową długość” itp.

Zauważmy, że:

- ściany boczne są przystającymi prostokątami,
- $|DC'| = |BC'|$, więc przekrojem jest równoramienny trójkąt DBC'.

Płaszczyzna przekroju przecina podstawę $ABCD$ wzdłuż prostej DB. Aby wyznaczyć szukany kąt, należy poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do tej prostej.

- W równoramiennym trójkącie DBC' prowadzimy wysokość $C'O$. Punkt O jest środkiem odcinka DB (przekątnej kwadratu $ABCD$).
- W kwadracie przekątne są równe i przecinają się pod kątem prostym w punkcie, który jest środkiem każdej z nich. Zatem odcinek OC – jako połowa przekątnej AC – również jest prostopadły do prostej DB.

Prosta DB jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych – OC i OC'. Jest więc prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste. Szukanym kątem α jest zatem kąt $C'OC$.

b) $\alpha = \sphericalangle C'OC$, zatem $\operatorname{tg}\alpha$ wyznaczymy z trójkąta prostokątnego $C'OC$.

$$|OC| = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \qquad \longleftarrow \text{połowa przekątnej kwadratu}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|C'C|}{|OC|} = \frac{2h}{a\sqrt{2}} = \frac{h\sqrt{2}}{a}$$

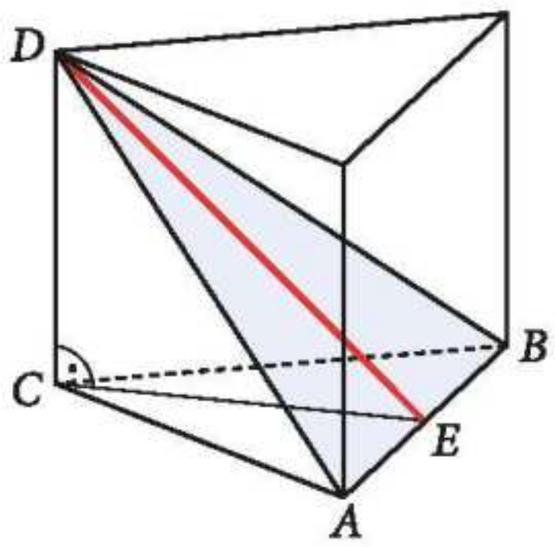
Odp.: a) $\alpha = \sphericalangle C'OC$ b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h\sqrt{2}}{a}$

Przykład 6

Graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy równej 12 cm i wysokości 6 cm przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i jeden z wierzchołków drugiej podstawy. Obliczymy pole otrzymanego przekroju.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Podstawą graniastosłupa jest równoboczny trójkąt ABC, zatem ściany boczne graniastosłupa są przystającymi prostokątami. Stąd $|AD| = |BD|$.

Otrzymany przekrój jest więc trójkątem równoramiennym.

Środek E krawędzi AB jest spodkiem wysokości w trójkącie ABD i spodkiem wysokości w trójkącie ABC.

Najpierw obliczamy wysokość podstawy graniastosłupa: $|EC| = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Następnie, na mocy twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym EDC, obliczamy $|ED|$: $|ED|^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 = 144$. Zatem $|ED| = 12$ cm.

Pole szukanego przekroju wynosi $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |ED| = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72 \ \left[\text{cm}^2\right]$.

Odp.: $72\ \text{cm}^2$

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Pewien graniastosłup ma 2040 krawędzi. Wskaż liczbę wierzchołków tego graniastosłupa.

A. 680 **B.** 682 **C.** 1020 **D.** 1360

4.2. Wskaż długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach $3 \times 6 \times 8$.

A. 12 **B.** $4\sqrt{6}$ **C.** $\sqrt{109}$ **D.** 10,1

4.3. Sześcian $ABCDA'B'C'D'$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną BD i wierzchołek C'. Wskaż podaną z dokładnością do 1° miarę kąta nachylenia otrzymanego przekroju do płaszczyzny $ABCD$.

A. 35° **B.** 45° **C.** 55° **D.** 60°

4.4. Podaj liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków
a) sześcianu.
b) graniastosłupa trójkątnego.
c) graniastosłupa pięciokątnego.
d) graniastosłupa sześciokątnego.
e) graniastosłupa siedmiokątnego.

4.5. Pewien graniastosłup ma 11 ścian. Ile ma krawędzi?

4.6. Określ liczbę wierzchołków i krawędzi graniastosłupa, który ma
a) 10 ścian. b) 32 ściany. c) 106 ścian.

4.7. Suma liczb ścian, krawędzi i wierzchołków pewnego graniastosłupa wynosi 44. Co to za graniastosłup?

4.8. Narysuj prostopadłościan i wszystkie jego przekątne. Ile ich jest?

4.9. Ile przekątnych ma graniastosłup o podstawie
a) pięciokątnej? b) sześciokątnej?

4.10. Narysuj sześcian, a w nim jedną z jego przekątnych.
a) Zaznacz kąt nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy.
b) Oblicz długość przekątnej sześcianu o krawędzi a cm.

4.11. Wyznacz kąt, jaki tworzy przekątna sześcianu z wychodzącą z tego samego wierzchołka przekątną ściany bocznej.

4.12. Oblicz długości wszystkich przekątnych równoległościanu prostego, w którym każda krawędź ma długość 10 cm i jeden z kątów podstawy ma miarę 60°.

4.13. Narysuj trzy różne siatki sześcianu o krawędzi 1 cm.

4.14. Narysuj siatkę graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa

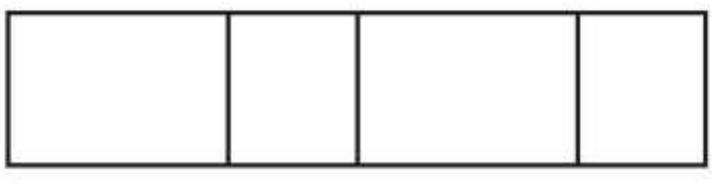
a) podwojonej krawędzi podstawy. b) potrojonej wysokości podstawy.

4.15. Narysuj siatkę graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego o wszystkich krawędziach długości 2 cm.

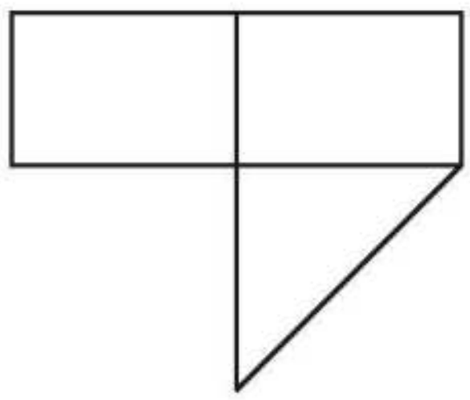
4.16. Narysuj siatkę graniastosłupa prostego, którego krawędź boczna ma długość 5 cm, a podstawą jest romb o kącie ostrym 60° i boku 3 cm.

4.17. Przerysuj figurę i uzupełnij ją tak, aby otrzymać siatkę graniastosłupa.

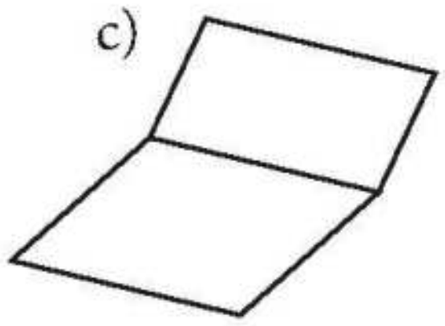
a)



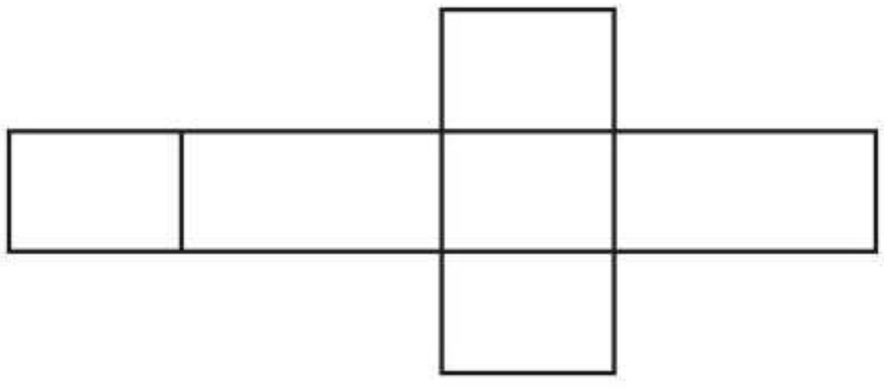
b)



c)



D **4.18.** Czy narysowana figura jest siatką graniastosłupa? Odpowiedź uzasadnij.



4.19. Wysokość graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego jest równa 8. Promień okręgu opisanego na podstawie wynosi 6. Oblicz długości przekątnych tego graniastosłupa.

4.20. Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$ o podstawie kwadratowej $ABCD$, niebędący sześcianem. Narysuj przekrój tego prostopadłościanu płaszczyzną poprowadzoną przez

a) wierzchołki A, C oraz środek krawędzi DD'.

b) środki trzech krawędzi bocznych.

c) wierzchołki D, B oraz środek krawędzi $B'C'$.

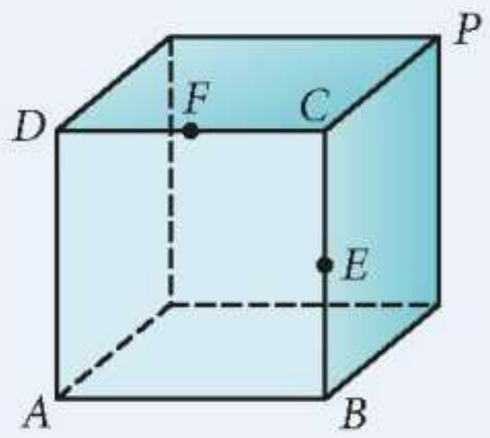
4.21. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym każda krawędź ma długość równą 1. Przez przekątną ściany bocznej i środek przeciwległej krawędzi bocznej poprowadzono płaszczyznę. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

4.22. Podstawę prostopadłościanu stanowi kwadrat o boku 6 cm, a wysokość prostopadłościanu jest równa 9 cm. Prostopadłościan ten przecięto płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i przechodzącą przez jeden z wierzchołków drugiej podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju. Rozważ wszystkie możliwości.

4.23. Sześcian o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy. Kąt nachylenia otrzymanego przekroju do płaszczyzny podstawy wynosi α. Oblicz pole P przekroju. Rozważ wszystkie możliwości.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.
Punkty E i F są środkami krawędzi BC i CD sześcianu przedstawionego na rysunku. Najkrótszą drogę po powierzchni sześcianu z wierzchołka A do wierzchołka P przedstawia linia będąca sumą odcinków



A. AC i CP.
B. AE i EP.
C. AF i FP.

2. Pewien graniastosłup ma 1560 wierzchołków. Ile ma krawędzi?

3. Wysokość graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego jest równa 8. Promień okręgu wpisanego w jego podstawę wynosi 6. Wyznacz cosinusy kątów nachylenia przekątnych tego graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

4. Prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$ o podstawie kwadratowej przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki B, D i C'. Krawędź podstawy prostopadłościanu ma długość $12\sqrt{2}$, jego wysokość jest równa 16, a α jest kątem między otrzymanym przekrojem a płaszczyzną podstawy $ABCD$. Wyznacz $\cos\alpha$.

5. Prostopadłościan o podstawie kwadratowej przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków podstawy. W przekroju otrzymano romb o kącie ostrym α. Wyznacz cosinus kąta β nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy prostopadłościanu.

5. Ostrosłupy

Umiejętności:

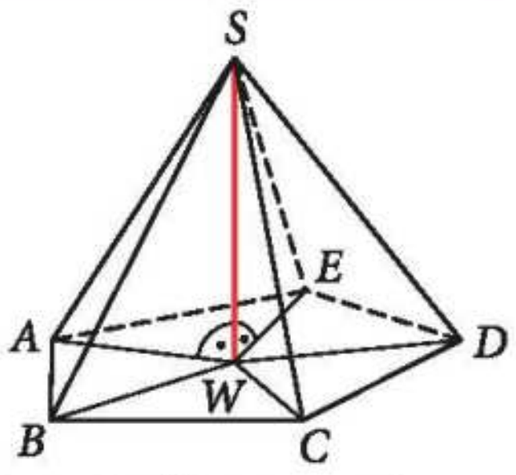
- rozpoznawanie w ostrosłupach kątów między: odcinkami, odcinkami i płaszczyznami, ścianami; obliczanie miar tych kątów
- stosowanie trygonometrii do obliczania: długości odcinków, miar kątów oraz pól powierzchni

Przypomnimy i uporządkujemy najważniejsze wiadomości o **ostrosłupach** omawiane podczas nauki w szkole podstawowej.

Definicja

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego jedną ścianą (zwaną podstawą) jest dowolny wielokąt wypukły, a pozostałe ściany (zwane bocznymi) są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

W narysowanym obok ostrosłupie:



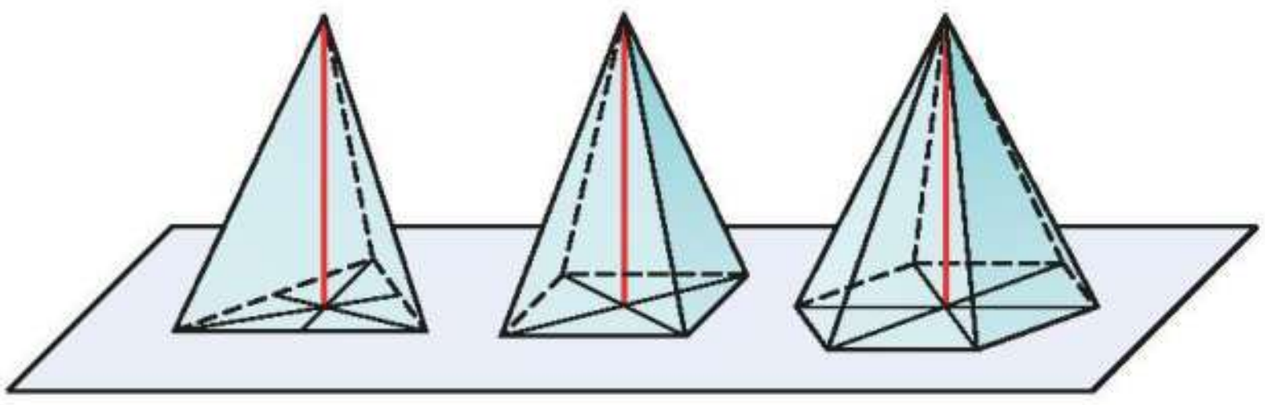
- pięciokąt $ABCDE$ jest podstawą,
- AB, BC, CD, DE, EA są krawędziami podstawy,
- ABS, BCS, CDS, DES, EAS są ścianami bocznymi,
- AS, BS, CS, DS, ES są krawędziami bocznymi,
- A, B, C, D, E, S są wierzchołkami,
- kąty ASB, BSC, CSD, DSE, ESA są kątami płaskimi przy wierzchołku ostrosłupa.

Punkt W jest rzutem prostokątnym wierzchołka S na płaszczyznę podstawy. Odcinek SW nazywamy wysokością ostrosłupa, a punkt W – **spodkiem wysokości**.

Definicja

Ostrosłup prawidłowy to ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny i którego spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

Przykłady ostrosłupów prawidłowych o podstawach: trójkątnej, czworokątnej i sześciokątnej.



Ostrosłup o podstawie trójkątnej ma cztery ściany – dlatego nazywamy go **czworościanem**.

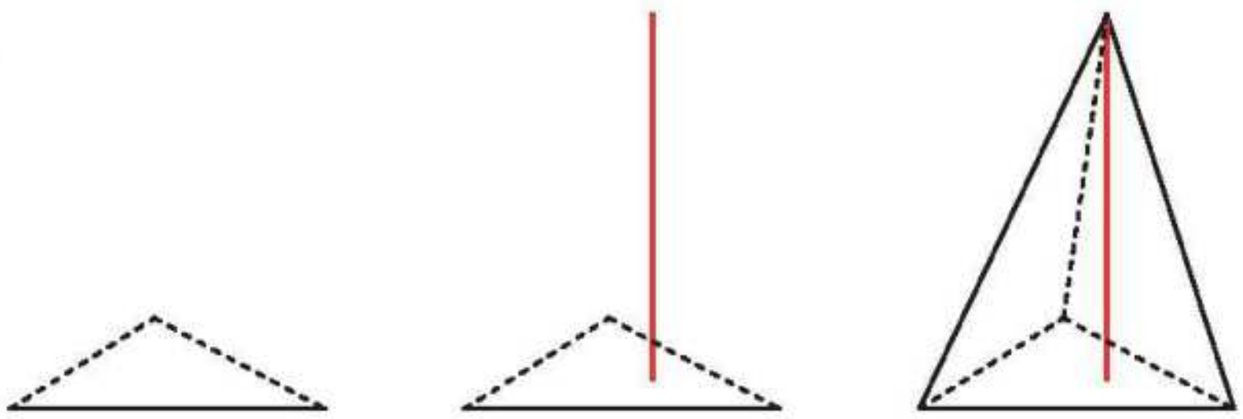
Rysowanie ostrosłupów

Podczas omawiania problemów dotyczących wielościanów istotna jest umiejętność zrobienia czytelnego rysunku wielościanu i poprawnego zaznaczenia jego własności.

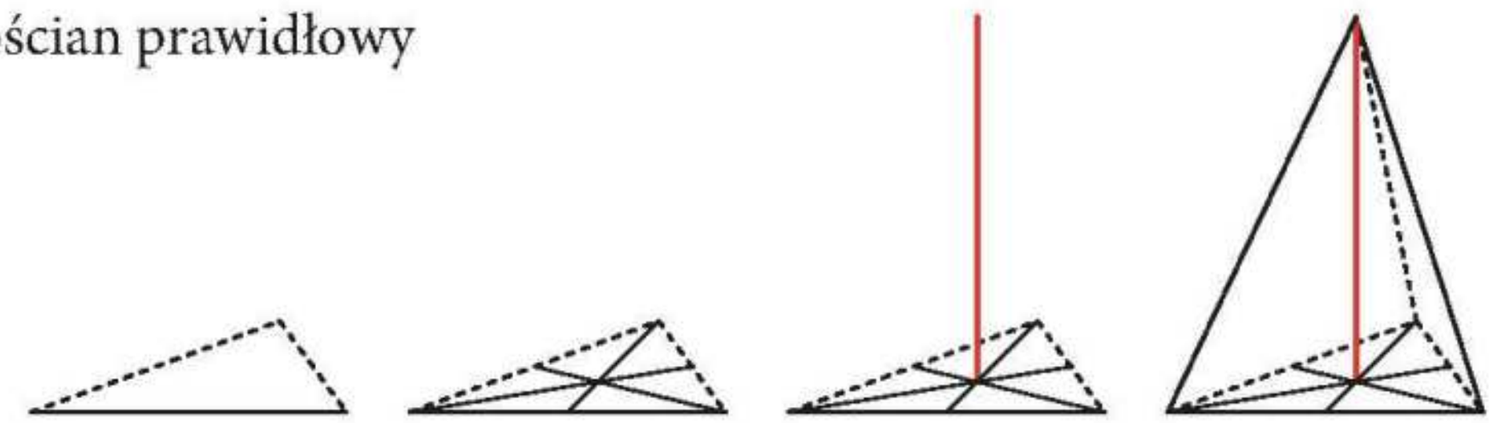
Przykład 1

Przyjrzyjmy się sposobom rysowania najczęściej spotykanych ostrosłupów.

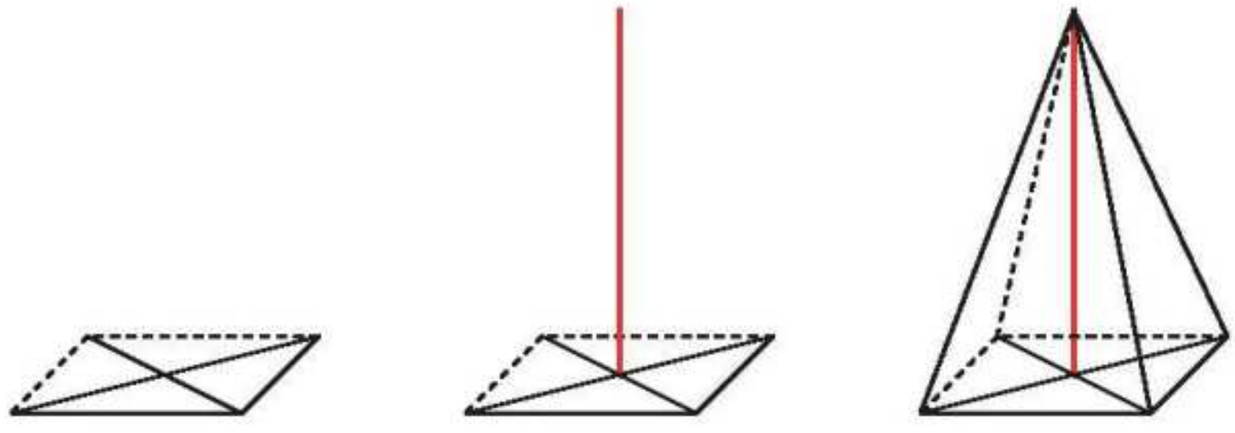
- czworościan



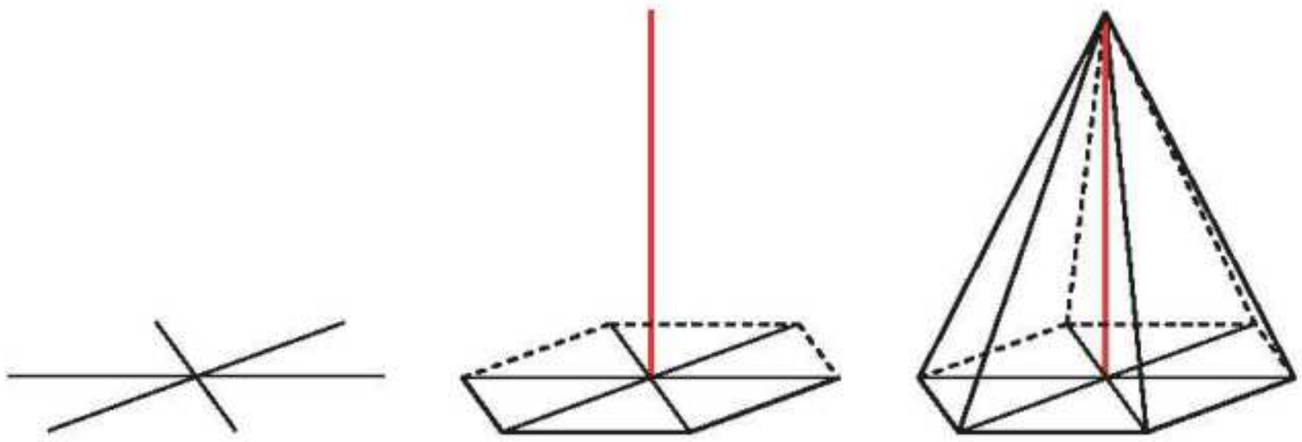
- czworościan prawidłowy



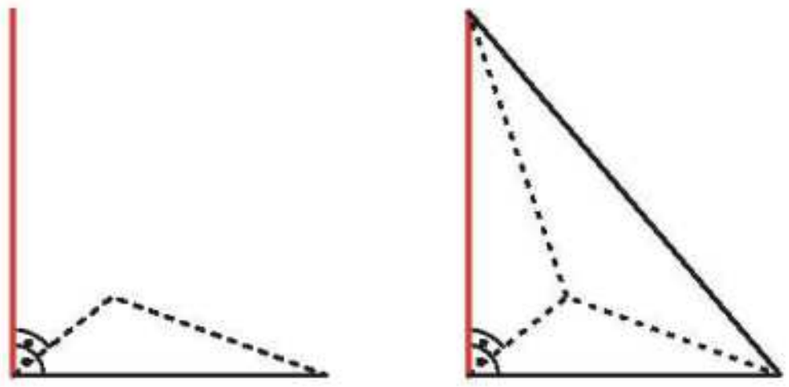
- ostrosłup prawidłowy o podstawie czworokątnej



- ostrosłup prawidłowy o podstawie sześciokątnej



- ostrosłup o podstawie trójkątnej, którego jedna krawędź boczna jest prostopadła do płaszczyzny podstawy

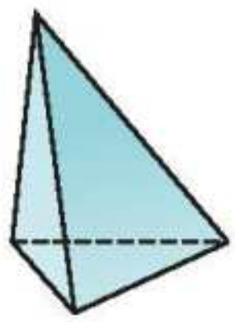


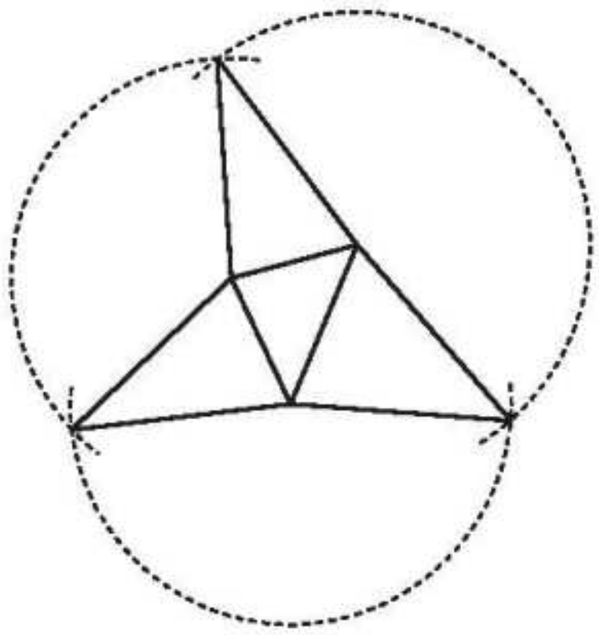
Przykład 2 ◀ zad. 5.12–5.14

Podobnie jak w wypadku graniastosłupów, możemy sporządzić siatki ostrosłupów.

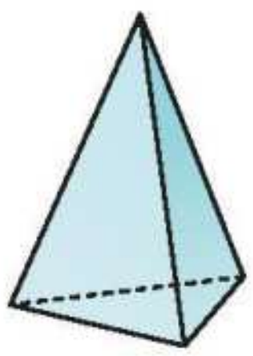
Rozwiązanie

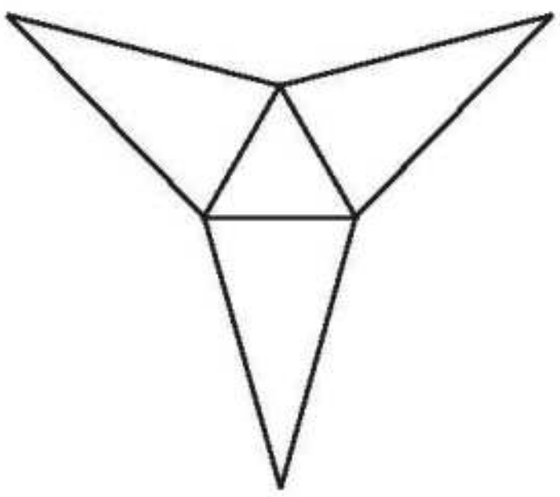
- czworościan



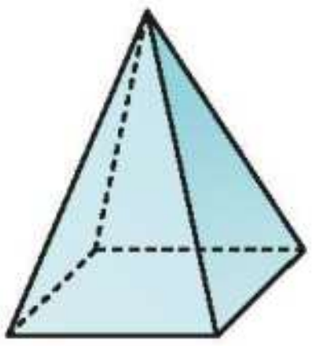


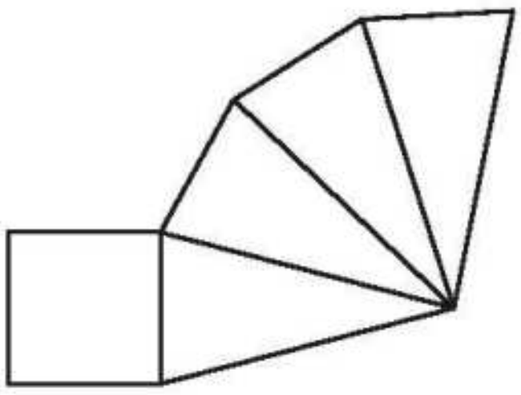
- czworościan prawidłowy





- ostrosłup prawidłowy czworokątny



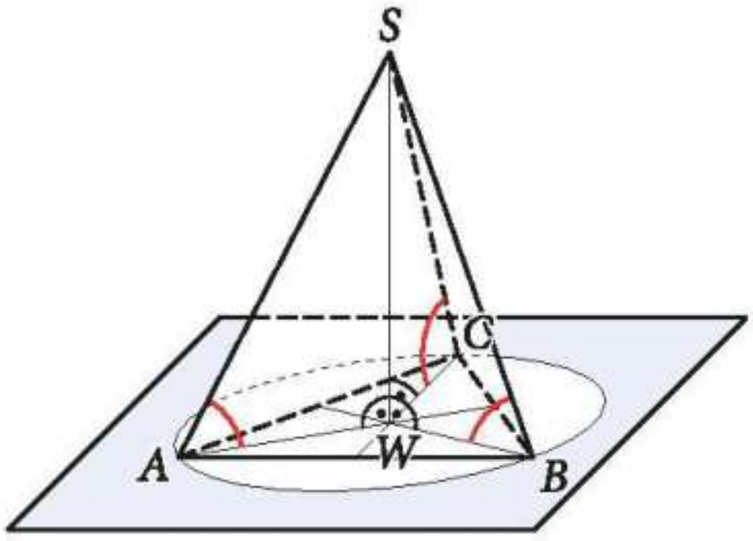


Własności ostrosłupów

Przyjmijmy, że $ABCS$ jest czworościanem prawidłowym.

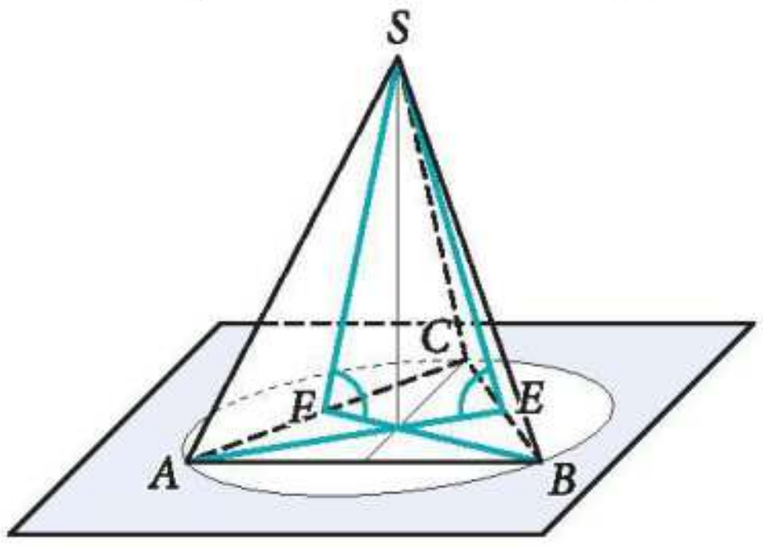
I. Zgodnie z definicją punkt W – spodek wysokości – jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC. Trójkąty AWS, BWS i CWS są przystającymi trójkątami prostokątnymi (cecha bkb).

Z tego faktu wynika, że:
- $|AS| = |BS| = |CS|$,
- $\sphericalangle WAS = \sphericalangle WBS = \sphericalangle WCS$, czyli kąty nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy są równe,
- ściany boczne ostrosłupa są przystającymi trójkątami równoramiennymi (cecha bbb).

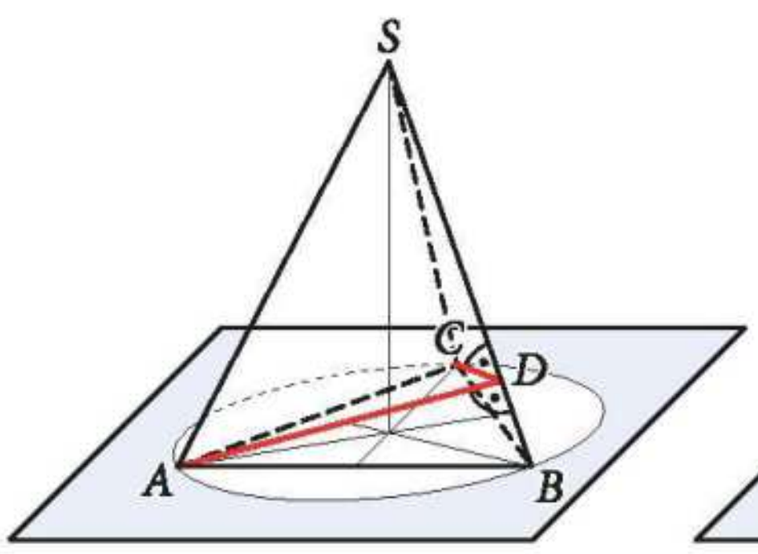


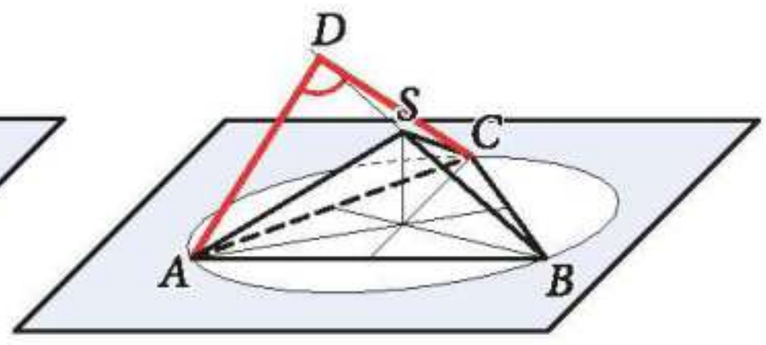
II. Jeżeli punkt E jest środkiem boku BC, to $SE \perp BC$ (SE jest wysokością w równoramiennym trójkącie BCS) oraz $AE \perp BC$ (AE jest wysokością w równobocznym trójkącie ABC). Zatem kąt AES jest kątem nachylenia ściany bocznej BCS do płaszczyzny podstawy.

Jeśli F jest środkiem boku AC, to kąt BFS jest kątem nachylenia ściany bocznej ACS do płaszczyzny podstawy. Trójkąty AES i BFS są przystające (bbb), zatem $\sphericalangle AES = \sphericalangle BFS$. Inaczej mówiąc, **kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy są równe**.



III. Aby wyznaczyć kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi, np. ABS i BCS, trzeba poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do krawędzi BS. Mogą ją wyznaczyć wysokości poprowadzone z wierzchołków A (w trójkącie ABS) i C (w trójkącie BCS). Trójkąty ABS i BCS są przystające, więc obydwie wysokości „trafią" w ten sam punkt (na rysunku po lewej stronie oznaczony D). Można udowodnić, że w ostrosłupie prawidłowym **kąty dwuścienne między sąsiednimi ścianami są równe**.





Zauważmy, że punkt D nie musi należeć do odcinka BS – jak na rysunku po prawej stronie.

Powyższe rozumowanie przeprowadziliśmy dla czworościanu prawidłowego. Można je uogólnić dla dowolnego ostrosłupa prawidłowego.

Twierdzenie

W ostrosłupie prawidłowym:
- wszystkie krawędzie boczne są równe i nachylone do płaszczyzny podstawy pod takim samym kątem,
- ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi,
- kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy są równe,
- kąty dwuścienne między sąsiednimi ścianami bocznymi są równe.

Prawdziwe są również poniższe twierdzenia.

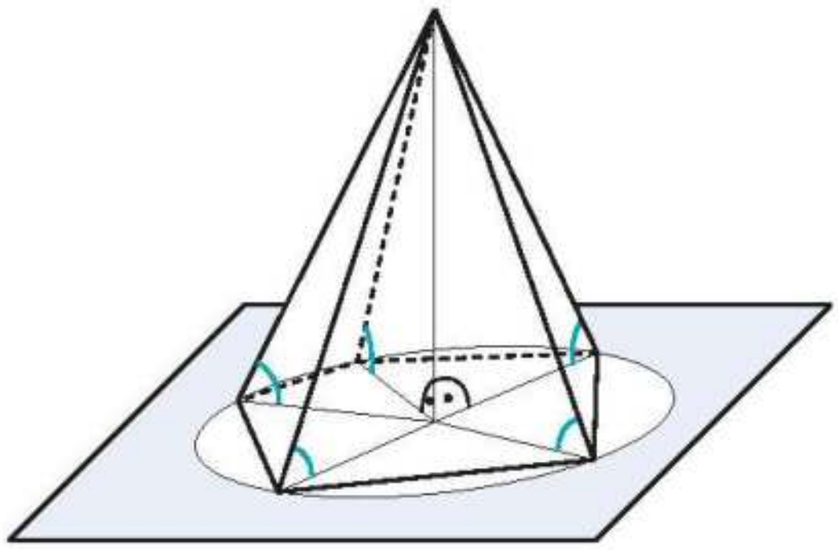
Twierdzenie

Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny i wszystkie krawędzie boczne są równe, to ostrosłup ten jest prawidłowy.

Twierdzenie

Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny i wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem, to ostrosłup ten jest prawidłowy.

Charakterystyczną grupę ostrosłupów tworzą te z nich, które co prawda nie mają w podstawie wielokąta foremnego, ale taki, na którym można opisać okrąg, a ponadto środek tego okręgu jest spodkiem wysokości ostrosłupa. Można wykazać, że równoważne są następujące trzy warunki (tzn. jeżeli spełniony jest jeden z nich, to spełnione są również dwa pozostałe):
- wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są równe,
- wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem,
- na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg, którego środkiem jest spodek wysokości ostrosłupa.

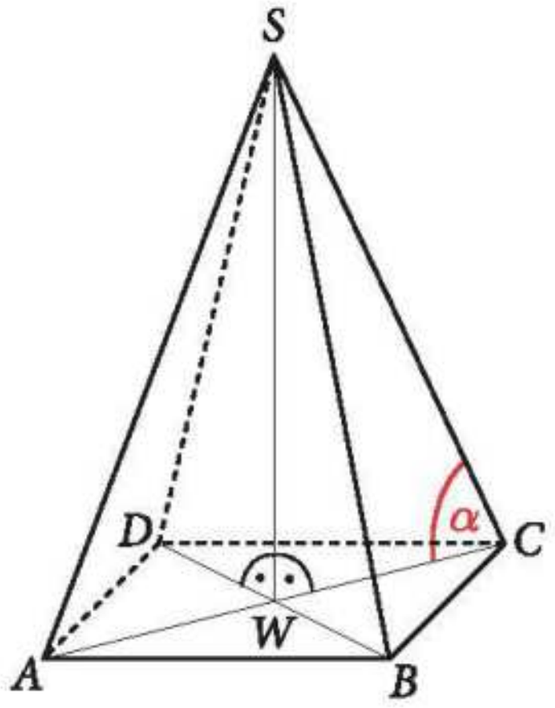


Przykład 3 ◂ zad. 5.21

Wyznaczymy z dokładnością do 1° miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, w którym krawędź podstawy ma długość 6, a wysokość ostrosłupa jest równa 10.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku 6. Szukany kąt α jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym WCS, w którym połowa przekątnej kwadratu $|WC| = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, a bok WS jest wysokością ostrosłupa. Kąt α wyznaczymy za pomocą funkcji trygonometrycznej.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|WS|}{|WC|} = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}357$$

Z tablic odczytujemy, że $\alpha \approx 67°$.

Odp.: 67°

Przykład 4 ◂ zad. 5.23

Kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy trójkątnego ostrosłupa prawidłowego jest równy 70°. Wysokość ostrosłupa jest równa 12. Obliczymy pole P podstawy tego ostrosłupa z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

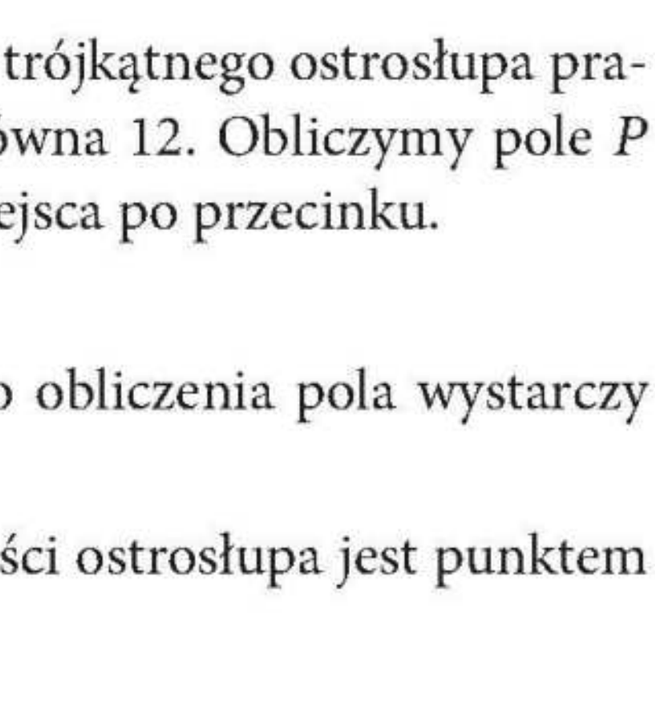
Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny, więc do obliczenia pola wystarczy znaleźć bok tego trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Spodek wysokości ostrosłupa jest punktem przecięcia środkowych podstawy.

Zatem:

$$|WE| = \frac{1}{3} \cdot |AE| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

gdzie a oznacza długość boku podstawy.
Długość odcinka WE obliczymy za pomocą funkcji trygonometrycznej.



$$\operatorname{tg} 70° = \frac{|WS|}{|WE|}$$

$$|WE| = \frac{|WS|}{\operatorname{tg} 70°} \approx \frac{12}{2{,}7475} \approx 4{,}3676$$

Mamy więc $\frac{a\sqrt{3}}{6} \approx 4{,}3676.$

$$a \approx \frac{4{,}3676 \cdot 6}{\sqrt{3}}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \approx \frac{(4{,}3676 \cdot 6)^2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 4} \approx 99{,}1$$

Odp.: $P = 99{,}1$

W **trójkącie równobocznym** wysokości są równocześnie środkowymi boków. Jeżeli bok trójkąta oznaczymy a, wysokość h, pole P, to

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

W **dowolnym trójkącie** środkowe przecinają się w jednym punkcie (środku ciężkości), który dzieli je w stosunku $2 : 1$, licząc od wierzchołka.

Przykład 5

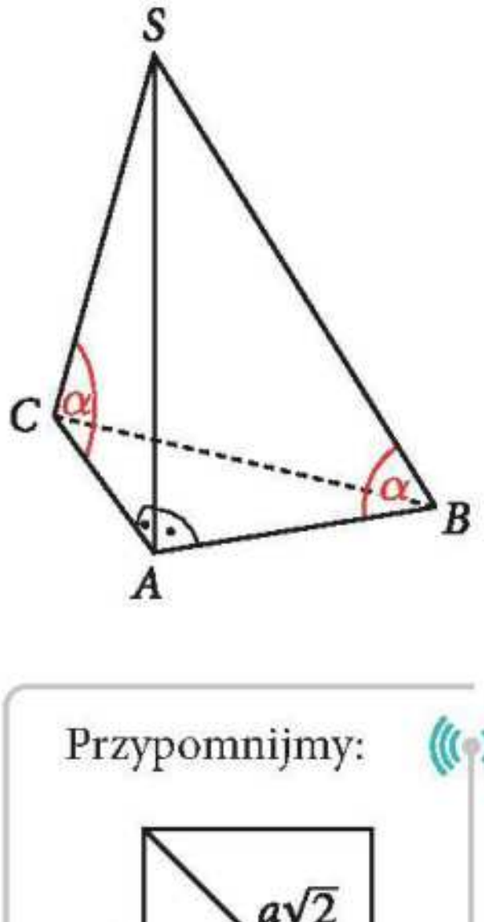
Jolka ma wykonać z drutu szkielet ostrosłupa o następujących własnościach:

- podstawą jest prostokątny trójkąt równoramienny o przeciwprostokątnej 16 cm,
- krawędź boczna, której koniec stanowi wierzchołek kąta prostego podstawy, jest prostopadła do płaszczyzny podstawy,
- pozostałe dwie krawędzie są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°.

Obliczymy, jaką długość powinien mieć drut potrzebny do wykonania zadania.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Kąt CAB jest prosty. Mamy obliczyć sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa.



Zauważmy, że:

1. prostokątny trójkąt równoramienny ABC (podstawa ostrosłupa) jest połową kwadratu o przekątnej $|BC| = 16$, zatem:

$$16 = |AC| \cdot \sqrt{2}$$

czyli $|AC| = |AB| = 8\sqrt{2}$ [cm],

2. ściana boczna ACS jest połową trójkąta równobocznego, ponieważ $\sphericalangle SAC = 90°$ i $\sphericalangle ACS = 60°$ (to samo można powiedzieć o ścianie ABS), stąd:

$$|CS| = 2 \cdot |AC| = 16\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

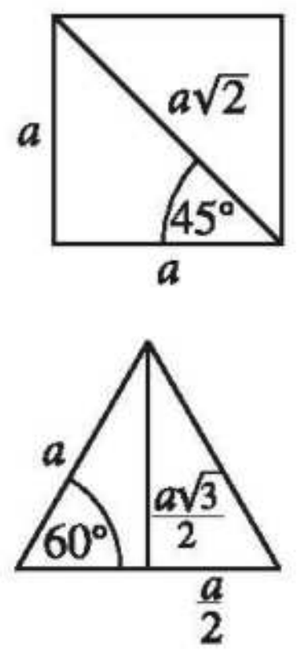
$$|AS| = |AC| \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{6} \text{ [cm]}$$

Suma długości wszystkich krawędzi jest więc równa:

$$16 + 2 \cdot 8\sqrt{2} + 2 \cdot 16\sqrt{2} + 8\sqrt{6} \approx 103{,}5 \text{ [cm]}$$

Zauważmy, że do wykonania takiego szkieletu trzeba przynajmniej jedną krawędź odciąć – pozostałe boki można pozaginać z jednego kawałka drutu.

Przypomnijmy:



Odp.: Potrzebny kawałek drutu powinien mieć prawie 104 cm długości.

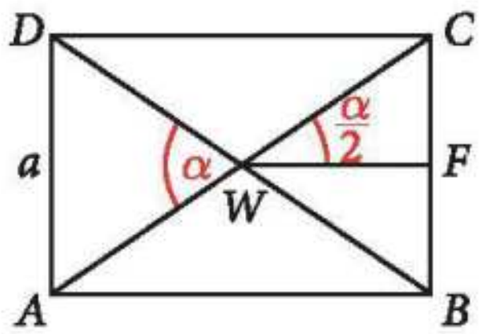
Przykład 6 ◂ zad. 5.25

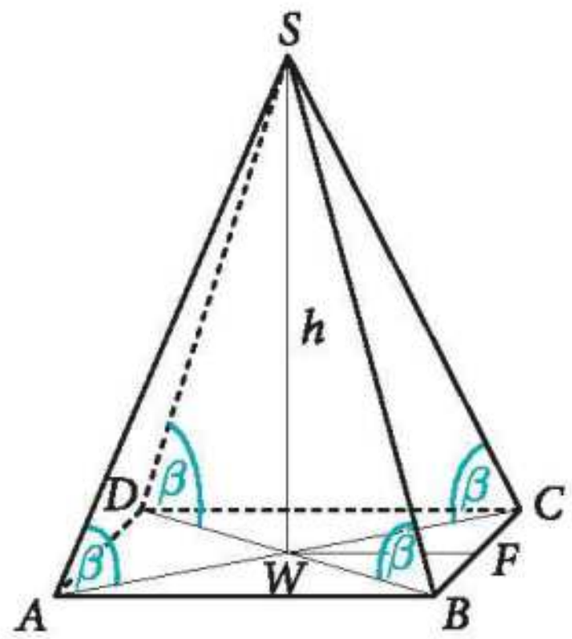
Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, w którym krótszy bok ma długość a, a przekątne przecinają się pod kątem ostrym α. Wysokość ostrosłupa jest równa h, a spodek wysokości jest punktem przecięcia przekątnych podstawy. Wyznaczymy kąty nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy.

Rozwiązanie

Jeżeli podstawa jest prostokątem, to można na niej opisać okrąg (na każdym prostokącie można opisać okrąg). Ponadto jeśli spodek wysokości jest punktem przecięcia przekątnych prostokąta (czyli środkiem okręgu opisanego na tym prostokącie), to krawędzie boczne ostrosłupa są równej długości i tworzą równe kąty z płaszczyzną podstawy.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach.





Dane są trzy wielkości: α, a, h. Za ich pomocą mamy wyznaczyć kąt β.

W prostokątnym trójkącie SWC długość boku WS jest dana, więc wystarczy, że wyznaczymy długość jeszcze jednego boku.

Trójkąt BCW jest równoramienny $(|BW| = |CW|)$. Jeżeli poprowadzimy w nim wysokość WF, to:

$$|FC| = \frac{a}{2},\ \sphericalangle FWC = \frac{\alpha}{2},\ \sin\sphericalangle FWC = \frac{|FC|}{|WC|}$$

Zatem:

$$|WC| = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Wyznaczenie kąta ostrego najczęściej polega na wyznaczeniu wartości jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Możemy teraz wyznaczyć tangens kąta β w trójkącie SWC:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|WS|}{|WC|} = \frac{2h\sin\frac{\alpha}{2}}{a}$$

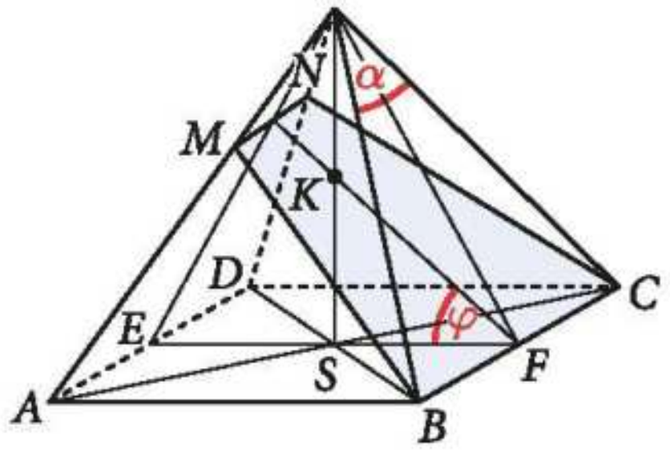
Odp.: Krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod takim kątem β, że $\operatorname{tg}\beta = \frac{2h\sin\frac{\alpha}{2}}{a}$.

Przykład 7 ◀ zad. 5.26

W czworokątnym ostrosłupie prawidłowym kąty płaskie przy wierzchołku są równe α. Przez krawędź podstawy i środek wysokości ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę. Wyznaczymy kąt nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Punkty E i F są środkami krawędzi odpowiednio AD i BC, punkt S jest spodkiem wysokości ostrosłupa.

Zauważmy, że przekrój ostrosłupa jest trapezem równoramiennym. Zauważmy też, że $KF \perp BC$ i $FE \perp BC$, więc szukany kąt φ to kąt SFK.

Oznaczmy $|EF| = 2|SF| = 2a$ oraz $|SW| = 2|SK| = 2h$.

Wyznaczymy kąt φ nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy ostrosłupa w zależności od danego kąta α. Wykorzystamy trzy zależności w różnych trójkątach:

1. $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{h}{a}$ $\longleftarrow$ w $\triangle KSF$

2. $4h^2 + a^2 = |WF|^2$ $\longleftarrow$ w $\triangle WSF$

3. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a}{|WF|}$ $\longleftarrow$ w $\triangle WBF$

Z równości 3 wyznaczamy $|WF|$ i podstawiamy do równości 2.

$$|WF| = \frac{a}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}, \text{ czyli } |WF|^2 = \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \text{ więc } 4h^2 + a^2 = \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$4h^2 = a^2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - 1\right)$$

$$\frac{h^2}{a^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 1\right) = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \longleftarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Zatem $\dfrac{h}{a} = \dfrac{\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ i zgodnie z równością 1 mamy $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Odp.: Szukanym kątem jest kąt φ taki, że $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Przykład 8

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędź podstawy ma długość a, zaś krawędź boczna jest od niej dwa razy dłuższa.

a) Obliczymy cosinus kąta α między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ostrosłupa.

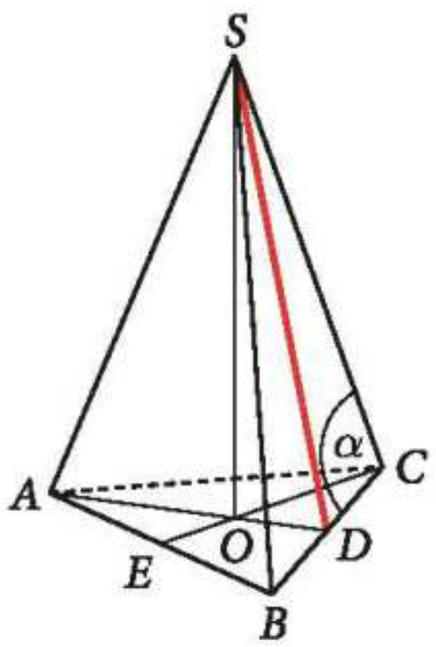
b) Narysujemy przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej oraz wyznaczymy pole P tego przekroju.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach. Punkt O jest spodkiem wysokości ostrosłupa.

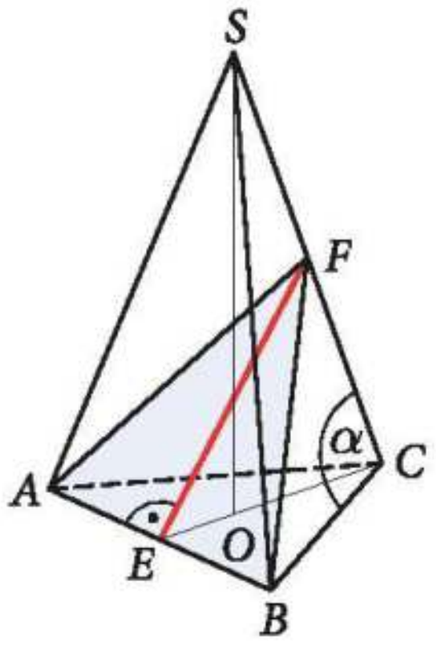
Zgodnie z danymi w zadaniu mamy:

$$|AB| = |BC| = |AC| = a$$
$$|AS| = |BS| = |CS| = 2a$$



a) Ostrosłup jest prawidłowy, zatem D jest środkiem krawędzi BC, a odcinek SD jest wysokością równoramiennego trójkąta BCS.

$$\cos\alpha = \frac{|DC|}{|SC|} = \frac{\frac{1}{2}a}{2a} = \frac{1}{4}$$



b) Jeżeli poprowadzimy przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź AB podstawy, to szukanym przekrojem jest równoramienny trójkąt ABF, gdzie F jest środkiem krawędzi CS. Do obliczenia pola tego trójkąta zastosujemy wzór $P = \frac{1}{2}a \cdot |EF|$.

Długość $|EF|$ wyznaczymy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EBF. Najpierw na podstawie twierdzenia cosinusów w trójkącie BCF wyznaczamy $|BF|^2$.

$$|BF|^2 = |BC|^2 + |CF|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CF| \cdot \cos\alpha =$$
$$= a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}a^2 \quad \longleftarrow \text{twierdzenie cosinusów w } \triangle BCF$$

$$|EF|^2 = |BF|^2 - |EB|^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2 \quad \longleftarrow \text{twierdzenie Pitagorasa w } \triangle EBF$$

$$|EF| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$P = \frac{1}{2}a \cdot |EF| = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}$$

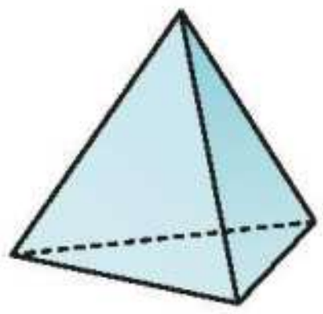
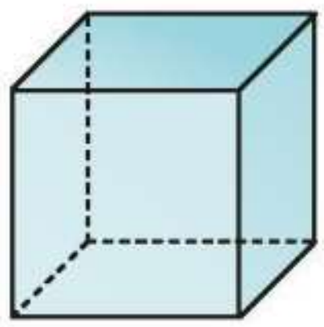
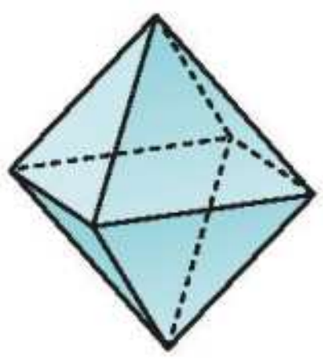
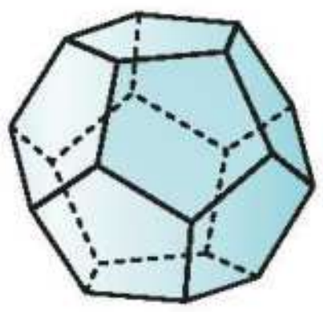
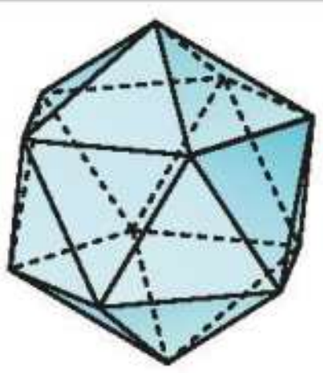
Odp.: a) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ b) $P = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}$

Wielościany foremne

Bardzo ciekawą grupę wielościanów stanowią wielościany foremne. Istnieje ich tylko pięć.

Definicja

Wielościanem foremnym nazywamy wielościan wypukły, w którym wszystkie ściany są wielokątami foremnymi o tej samej liczbie boków i w którego wierzchołkach zbiega się taka sama liczba krawędzi.

Wielościany foremne		
nazwa	rysunek	ściany
czworościan foremny		trójkąty równoboczne
sześcian		kwadraty
ośmiościan foremny		trójkąty równoboczne
dwunastościan foremny		pięciokąty foremne
dwudziestościan foremny		trójkąty równoboczne

W wielościanie foremnym wszystkie wypukłe kąty dwuścienne utworzone przez sąsiednie ściany mają równe miary.

Wielościany foremne nazywane są bryłami platońskimi. Według Platona (428–347 p.n.e.) cały materialny świat zbudowany jest z czterech składników – żywiołów, z których każdy ma swój (foremny) odpowiednik matematyczny: ogień – czworościan, powietrze – ośmiościan, ziemia – sześcian, woda – dwudziestościan. Piąty wielościan foremny – dwunastościan – odkryty przez ucznia Platona, Teajtetosa, został przypisany duchowi (według innych źródeł – wszechświatowi).

Na koniec podajemy wzór, który sformułował i udowodnił Leonhard Euler (1707–1783) – szwajcarski matematyk, fizyk i astronom.

Twierdzenie

W wielościanie wypukłym liczba wierzchołków w, liczba ścian s i liczba krawędzi k spełniają równość (**wzór Eulera**):

$$w + s = k + 2$$

Przykład 9 ◀ zad. 5.28

Obliczymy, ile krawędzi i wierzchołków ma dwudziestościan foremny.

Rozwiązanie

Każda z dwudziestu ścian ma trzy krawędzie, ale każda krawędź jest częścią wspólną dwóch ścian. Zatem liczba krawędzi jest równa:

$$\frac{20 \cdot 3}{2} = 30$$

Podobną metodą możemy wyznaczyć liczbę wierzchołków. Możemy również skorzystać ze wzoru Eulera.

$$w = k + 2 - s$$
$$w = 30 + 2 - 20$$
$$w = 12$$

Odp.: $k = 30$, $w = 12$

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. W pewnym ostrosłupie liczba ścian jest o 6 mniejsza od liczby krawędzi. Wskaż liczbę wierzchołków tego ostrosłupa.

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9

5.2. Wysokość czworościanu foremnego jest równa $4\sqrt{6}$. Wskaż długość krawędzi tego czworościanu.

A. 10 **B.** 12 **C.** $6\sqrt{3}$ **D.** $4\sqrt{2}$

5.3. Ile ścian ma ostrosłup o podstawie n-kątnej?

A. $2n$ **B.** $n-1$ **C.** $n+1$ **D.** $n+2$

5.4. Podaj liczbę ścian s, krawędzi k i wierzchołków w
a) czworościanu.
b) ostrosłupa, którego podstawą jest trapez.
c) ostrosłupa siedmiokątnego.

5.5. Jaki wielokąt jest podstawą ostrosłupa, który ma
a) 31 wierzchołków? b) 14 ścian? c) 24 krawędzie?

5.6. Jaki ostrosłup ma
a) 101 ścian? b) 42 krawędzie? c) 18 wierzchołków?

5.7. Ile ścian ma ostrosłup o 10 krawędziach?

5.8. Iloczyn liczby ścian i liczby krawędzi pewnego ostrosłupa jest równy 84. Ile wierzchołków ma ten ostrosłup?

5.9. Narysuj ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego wszystkie krawędzie mają jednakową długość a.
a) Zaznacz kąt α nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.
b) Oblicz wysokość h tego ostrosłupa dla $a = 4$ cm.
c) Jaką miarę ma kąt α?

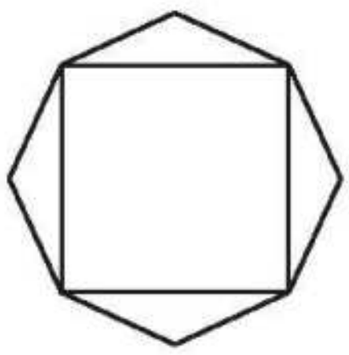
5.10. Narysuj ostrosłup prawidłowy trójkątny i zaznacz kąt nachylenia wysokości ostrosłupa do ściany bocznej.

5.11. Narysuj czworościan foremny i zaznacz kąt między jego ścianami.

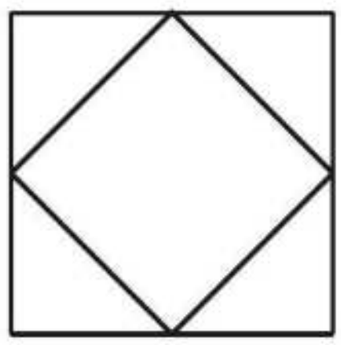
5.12. Narysuj siatkę czworościanu foremnego o krawędzi 3 cm.

5.13. Wyjaśnij, dlaczego podana figura nie jest siatką ostrosłupa czworokątnego.

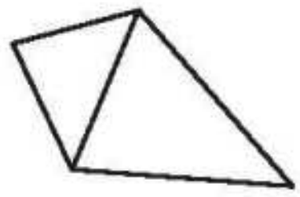
a)



b)



5.14. Przerysuj figurę przedstawioną na rysunku obok i uzupełnij ją tak, aby otrzymać siatkę ostrosłupa.



5.15. Dany jest ostrosłup czworokątny, którego podstawą jest kwadrat o boku długości 4 cm. Jedna ze ścian bocznych, będąca trójkątem równoramiennym o ramieniu równym 3 cm, jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Narysuj siatkę tego ostrosłupa.

5.16. Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCDW$ o kwadratowej podstawie $ABCD$ i krawędzi AW prostopadłej do płaszczyzny podstawy. Wyznacz przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez bok BC i środek krawędzi AW. Jakim wielokątem jest ten przekrój?

5.17. Wysokość ostrosłupa prawidłowego n-kątnego jest równa 24 cm, a promień okręgu wpisanego w podstawę jest równy 7 cm. Oblicz wysokość ściany bocznej opuszczoną z wierzchołka tego ostrosłupa.

5.18. Wysokość ostrosłupa prawidłowego n-kątnego jest równa 8 cm, a promień okręgu opisanego na podstawie jest równy 6 cm. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

5.19. Oblicz wysokość czworościanu foremnego o krawędzi 6 cm.

5.20. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o wysokości 12 cm ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem 45°. Oblicz długości krawędzi tego ostrosłupa.

5.21. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym promień okręgu opisanego na podstawie wynosi 10 cm, a wysokość 30 cm. Wyznacz (z dokładnością do 1°)
a) kąt α nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.
b) kąt β nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

5.22. Wysokość ostrosłupa prawidłowego 100-kątnego jest równa 24 cm, a promień okręgu wpisanego w podstawę jest równy 7 cm. Wyznacz kąt nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy z dokładnością do 1°.

5.23. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°, a wysokość jest równa 20. Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa oraz wyznacz tangens kąta α nachylenia jego ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

5.24. Pan Karol postanowił zbudować dom w kształcie piramidy o podstawie kwadratowej. Słyszał, że najlepiej mieszka się w piramidach, w których kąt nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podłogi jest równy 60°. Przez pomyłkę zbudował jednak dom, w którym to nie ściany, lecz krawędzie ścian były nachylone do podłogi pod kątem 60°. Oblicz (z dokładnością do 1°), jaki kąt nachylenia ścian do płaszczyzny podstawy uzyskał w wyniku tej pomyłki.

5.25. Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny, którego dłuższa podstawa ma długość $2a$, a krótsza podstawa i ramiona mają długość a. Wszystkie krawędzie boczne mają długość b. Wyznacz cosinusy kątów nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy.

5.26. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąty płaskie przy wierzchołku są równe α. Przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę. Wyznacz tangens kąta φ nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

5.27. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β, a krawędź podstawy ostrosłupa ma długość a. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy, nachyloną do niej pod kątem α. Wyznacz pole otrzymanego przekroju.

5.28. Oblicz liczbę krawędzi k i wierzchołków w dwunastościanu foremnego.

5.29. Na dziedzińcu paryskiego Luwru, jednego z najsłynniejszych muzeów świata, stoi piramida w kształcie prawidłowego ostrosłupa czworokątnego. Jej budowę zakończono w 1989 roku. Ściany piramidy zbudowane są z 603 szklanych tafli w kształcie rombu i 70 tafli trójkątnych. Piramida ma 21,65 m wysokości, a długość boku jej podstawy wynosi 35,42 m. Wyznacz

a) długość krawędzi bocznej (wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku).
b) kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy (z dokładnością do 1°).

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.
W ostrosłupie $ABCDW$ o podstawie $ABCD$
A. prosta DB jest skośna do prostej AW.
B. prosta DB jest skośna do prostej AC.
C. prosta DB jest skośna do prostej CW.

2. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego 100-kątnego ma długość 10 cm, a promień okręgu opisanego na podstawie jest równy 6 cm. Wyznacz kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa (z dokładnością do 1°).

3. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy, której długość wynosi a. Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną, która przechodzi przez krawędź podstawy i jest prostopadła do krawędzi bocznej.

4. Dany jest ostrosłup czworokątny prawidłowy o krawędzi podstawy a. Jedna z krawędzi bocznych ma długość b i jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Wyznacz tangensy kątów nachylenia pozostałych krawędzi bocznych ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

D **5.** Przez punkty D i E leżące na krawędziach odpowiednio AW i BW czworościanu $ABCW$ poprowadzono płaszczyznę równoległą do krawędzi CW. Wiadomo, że $|AD| = 2|DW|$ i $|BE| = 2|EW|$. Wykaż, że otrzymany przekrój czworościanu jest równoległobokiem.

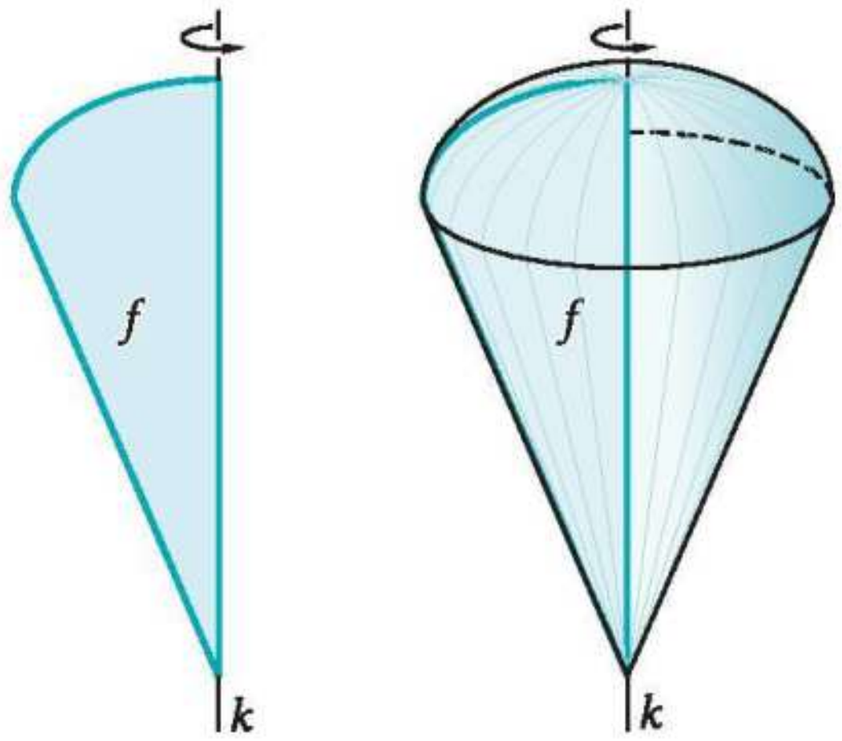
6. Bryły obrotowe

Umiejętności:

- rozpoznawanie w walcach i w stożkach kąta między odcinkami oraz kąta między odcinkami i płaszczyznami (np. kąta rozwarcia stożka, kąta między tworzącą a podstawą), obliczanie miar tych kątów
- stosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków oraz miar kątów

W tym temacie uporządkujemy wiadomości o bryłach obrotowych.

Jeżeli figurę płaską f obracamy w przestrzeni o kąt pełny wokół prostej k zawartej w płaszczyźnie figury f, to otrzymaną w ten sposób figurę przestrzenną nazywamy **bryłą obrotową**, a prostą k – **osią obrotu**.



Jeżeli bryłę przetniemy jakąś płaszczyzną, to część wspólną tych figur nazywamy przekrojem płaskim. W tym podręczniku będziemy się zajmować następującymi rodzajami przekrojów brył obrotowych:

- **przekrojem osiowym**, czyli częścią wspólną tej bryły z płaszczyzną zawierającą oś obrotu,
- **przekrojem poprzecznym**, czyli częścią wspólną tej bryły z płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu.

Omówimy teraz najważniejsze własności brył obrotowych – walca, stożka i kuli.

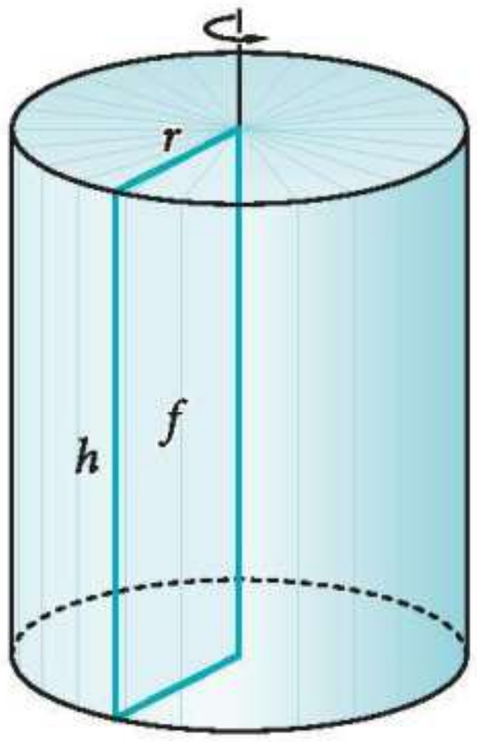
Walec

Definicja

Walcem nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z jego boków.

Dwa koła powstałe przez obrót prostopadłych do osi obrotu boków prostokąta nazywamy **podstawami** walca.

Bok prostokąta równoległy do osi obrotu i niemający z nią punktów wspólnych nazywamy **tworzącą** walca, a drugi bok – **promieniem** r **podstawy** walca. **Wysokością** h walca jest każdy odcinek łączący punkt płaszczyzny jednej podstawy z jego rzutem prostokątnym na płaszczyznę drugiej podstawy (każda tworząca to również wysokość walca). Suma wszystkich tworzących walca stanowi jego **powierzchnię boczną**.

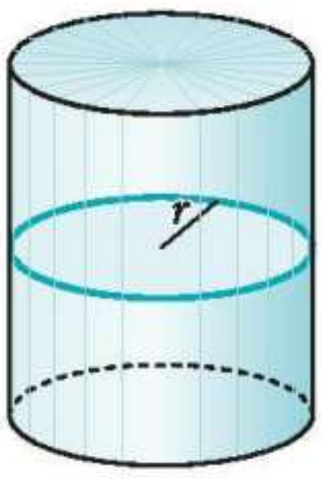


Pojęcia „promień" (podobnie jak pojęcia „wysokość") używać będziemy w dwóch znaczeniach – również zamiast „długość promienia". Nie powinno być z tym kłopotu, bo z kontekstu na ogół jasno wynika, czy „promień" oznacza odcinek czy liczbę.

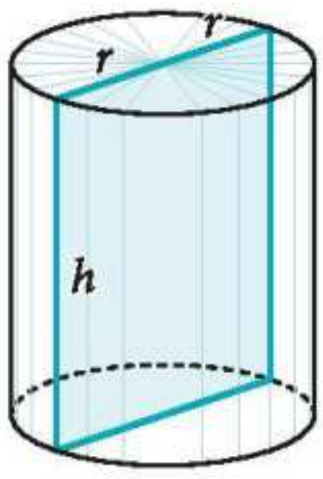
Przekrojem poprzecznym walca jest koło o promieniu r (rys. 1).

Przekrojem osiowym walca jest prostokąt o bokach h i $2r$ (rys. 2).

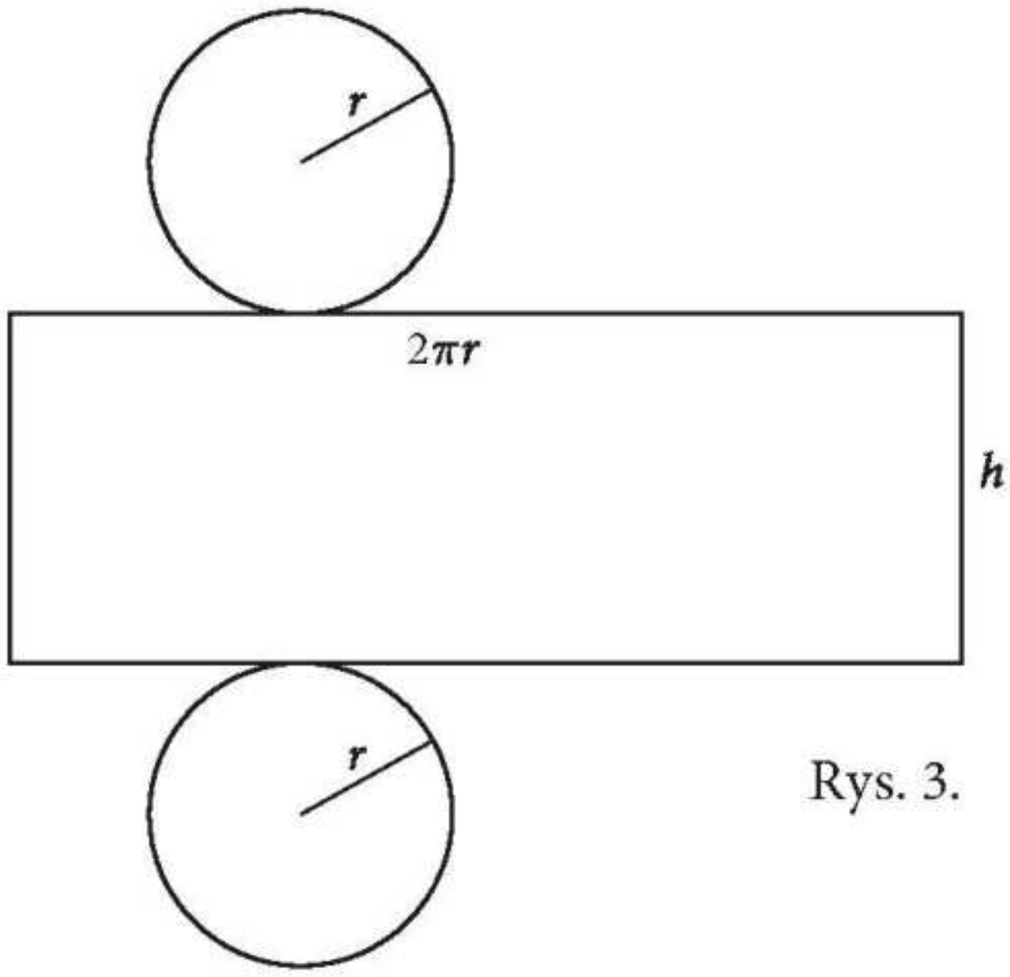
Na rysunku 3 przedstawiona jest siatka walca.



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

Graniastosłupem wpisanym w walec nazywamy graniastosłup, którego podstawy są wielokątami wpisanymi w podstawy walca.

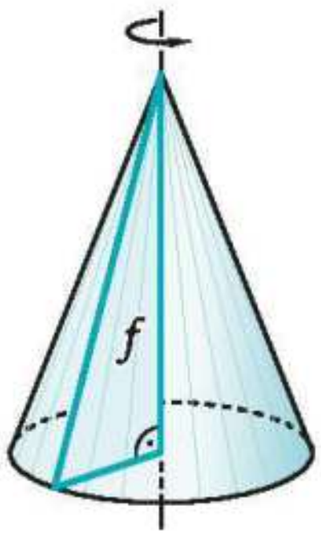
Graniastosłupem opisanym na walcu nazywamy graniastosłup, którego podstawy są wielokątami opisanymi na podstawach walca.

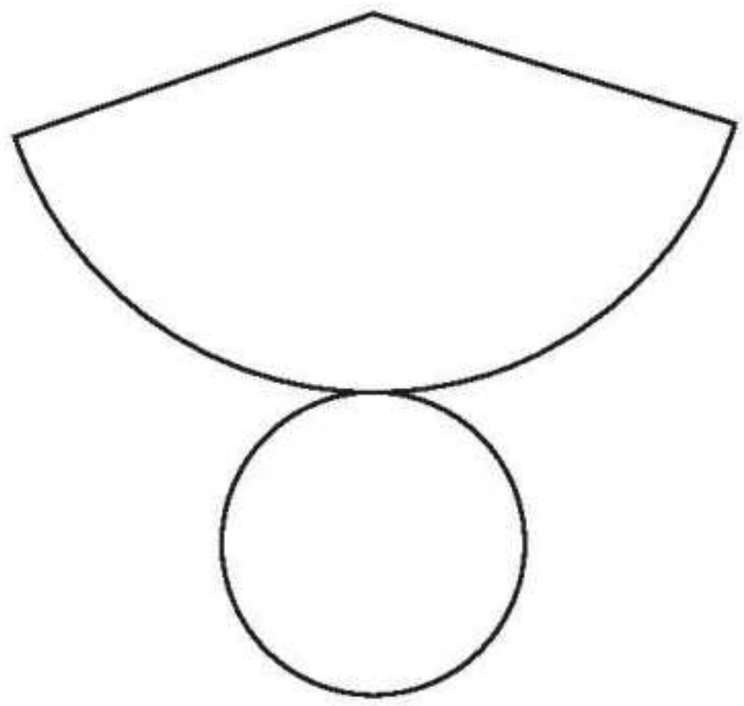
Stożek

Definicja

Stożkiem nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z jego przyprostokątnych.

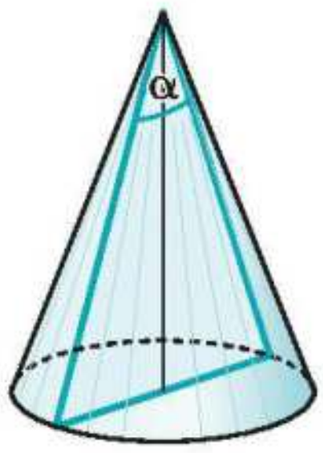
Koło powstałe w wyniku obrotu drugiej przyprostokątnej nazywamy **podstawą** stożka, a ten wierzchołek trójkąta, który nie należy do podstawy – **wierzchołkiem** stożka. Powierzchnia otrzymana w wyniku obrotu przeciwprostokątnej stanowi **powierzchnię boczną** stożka. Każdy odcinek łączący wierzchołek stożka z podstawą i zawarty w powierzchni bocznej nazywamy **tworzącą** stożka.





Rzutem prostokątnym wierzchołka stożka na płaszczyznę podstawy jest środek podstawy. **Wysokością** stożka nazywamy odcinek łączący wierzchołek ze środkiem podstawy. Tak samo nazywamy również długość tego odcinka.

Przekrój osiowy stożka to trójkąt równoramienny. Kąt α między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia stożka**. Przekroje osiowe stożka są trójkątami przystającymi.



Przekrojem poprzecznym stożka jest koło. Część stożka zawartą między jego podstawą a przekrojem poprzecznym nazywamy **stożkiem ściętym**. Przekrojem osiowym stożka ściętego jest trapez równoramienny. Wysokością stożka ściętego nazywamy wysokość tego trapezu.

Ostrosłupem wpisanym w stożek nazywamy ostrosłup, którego podstawa jest wielokątem wpisanym w podstawę stożka, a wysokość pokrywa się z wysokością stożka.
Ostrosłupem opisanym na stożku nazywamy ostrosłup, którego podstawa jest wielokątem opisanym na podstawie stożka, a wysokość pokrywa się z wysokością stożka.

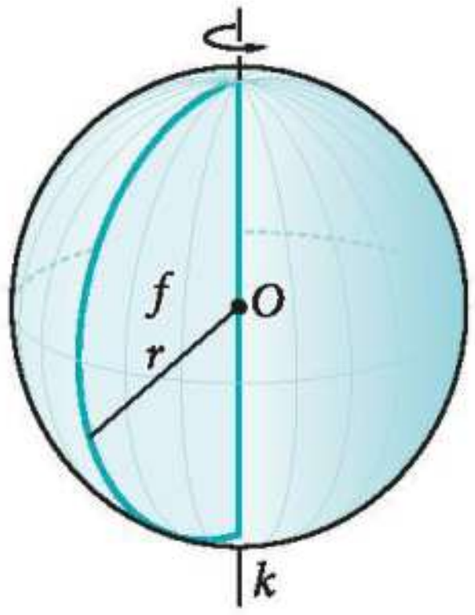
Kula

Definicja

Kulą nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót półkola dookoła prostej zawierającej jego średnicę.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

O – środek kuli,
r – promień kuli,
k – oś obrotu.



Zatem O jest środkiem średnicy obracanego półkola. Średnica ta ma długość $2r$.

Bezpośrednio z definicji wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Kula o środku O i promieniu r jest zbiorem punktów przestrzeni oddalonych od punktu O co najwyżej o r.

Powierzchnię kuli, którą tworzą punkty oddalone od środka o r, nazywamy **sferą**. Sfera powstaje przez obrót półokręgu dookoła prostej zawierającej średnicę tego półokręgu.

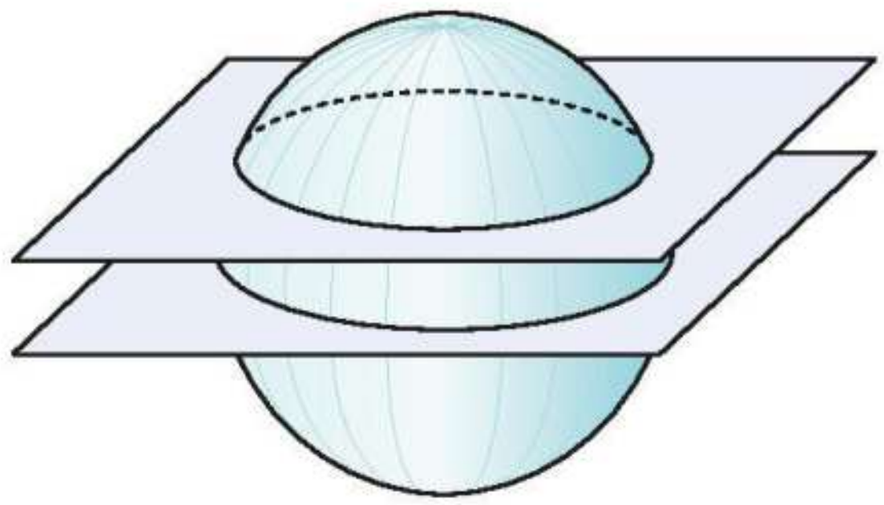
Prawdziwe jest poniższe twierdzenie, które podajemy bez dowodu.

Twierdzenie

Sfery nie da się tak rozciąć, aby można ją było rozłożyć na płaszczyźnie. Dlatego nie istnieje siatka kuli.

Każdy odcinek łączący dwa punkty sfery nazywamy **cięciwą** kuli, a cięciwę przechodzącą przez środek kuli – jej **średnicą**. Każda średnica kuli ma długość równą $2r$, a odległość między dwoma dowolnymi punktami kuli nie jest większa od długości jej średnicy.

Jeżeli płaszczyzna i kula mają punkty wspólne, to częścią wspólną tej płaszczyzny i kuli jest albo koło, albo punkt.

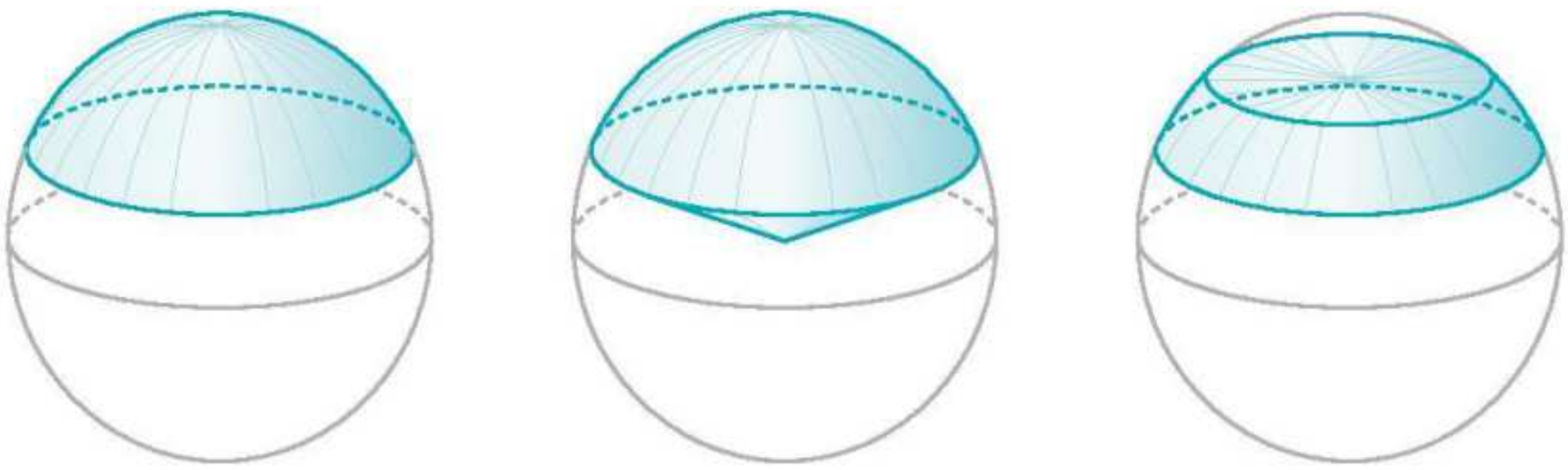


Każdy przekrój kuli przechodzący przez jej środek nazywamy **kołem wielkim**.

Każdą z dwóch części kuli, na które dzieli ją koło będące jej przekrojem, nazywamy **odcinkiem kuli**. Płaszczyzna przekroju dzieli sferę na dwie części. Są to **czasze**.

Wycinek kuli to część kuli ograniczona sferą i powierzchnią boczną stożka o wierzchołku w środku tej kuli i tworzącej o długości r.

Warstwą kuli nazywamy część kuli zawartą między dwiema równoległymi, przecinającymi kulę płaszczyznami.



odcinek kuli | wycinek kuli | warstwa kuli

Definicja

Bryły wpisane w kulę

- Wielościan jest wpisany w kulę wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego wierzchołki należą do sfery tej kuli.
- Walec jest wpisany w kulę wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi jego podstaw są zawarte w sferze tej kuli.
- Stożek jest wpisany w kulę wtedy i tylko wtedy, gdy okrąg jego podstawy jest zawarty w sferze i wierzchołek należy do sfery tej kuli.

Bryły opisane na kuli

- Wielościan jest opisany na kuli wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego ściany są styczne do kuli.
- Walec jest opisany na kuli wtedy i tylko wtedy, gdy jego podstawy i tworzące są styczne do kuli.
- Stożek jest opisany na kuli wtedy i tylko wtedy, gdy jego podstawa i tworzące są styczne do kuli.

Przyjmiemy bez dowodu następujące twierdzenie.

Twierdzenie

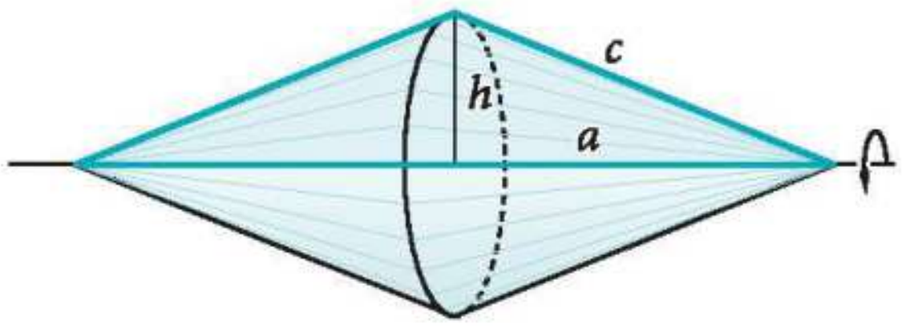
- Na każdym ostrosłupie prawidłowym można opisać kulę.
- W każdy ostrosłup prawidłowy można wpisać kulę.
- Środki kul: opisanej na ostrosłupie prawidłowym i wpisanej w ostrosłup prawidłowy należą do prostej zawierającej wysokość ostrosłupa.

Przykład 1

Narysujemy bryłę, która powstaje w wyniku obrotu danej figury wokół danej prostej.

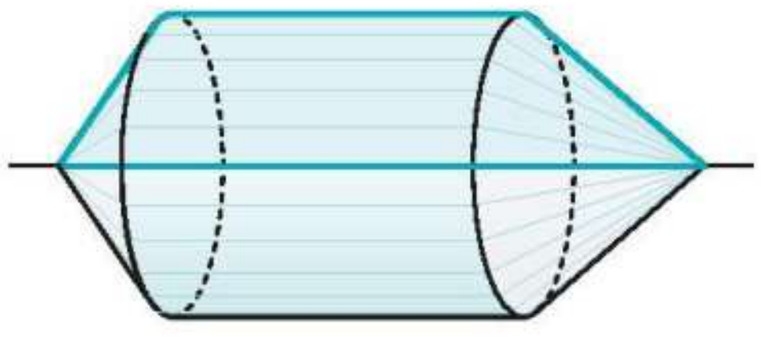
Rozwiązanie

a) Trójkąt równoramienny obraca się dookoła prostej zawierającej podstawę.



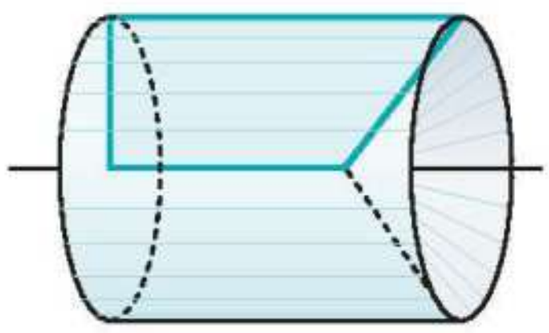
Otrzymana bryła to dwa przystające, sklejone podstawami stożki, w których h (wysokość trójkąta) jest promieniem podstawy, a (połowa podstawy trójkąta) to wysokość stożka, a c (ramię trójkąta) jest jego tworzącą.

b) Trapez, który przy dłuższej podstawie ma kąty ostre, obraca się dookoła prostej zawierającej dłuższą podstawę.



Otrzymujemy bryłę złożoną z dwóch stożków i walca.

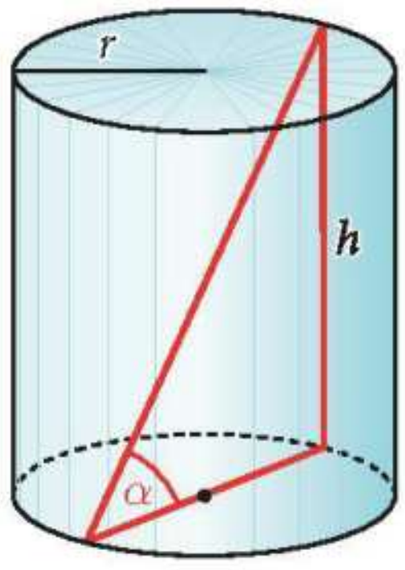
c) Trapez prostokątny obraca się dookoła prostej zawierającej krótszą podstawę.



Otrzymujemy walec z wydrążonym stożkiem.

Przykład 2 ◂ zad. 6.5

Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 75°$. Promień podstawy walca jest równy 3. Obliczymy wysokość walca (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).



Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Mamy:

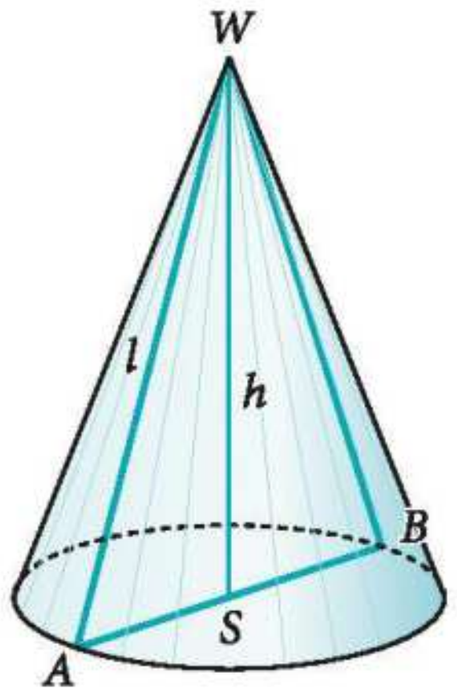
$$\frac{h}{2r} = \operatorname{tg} 75°$$

$$h = 2r \cdot \operatorname{tg} 75° \approx 6 \cdot 3{,}7321 \approx 22{,}4$$

Odp.: $h = 22{,}4$

Przykład 3 ◂ zad. 6.6

Kąt rozwarcia stożka o promieniu podstawy 4 jest równy 70°. Obliczymy długość tworzącej i wysokość tego stożka (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).



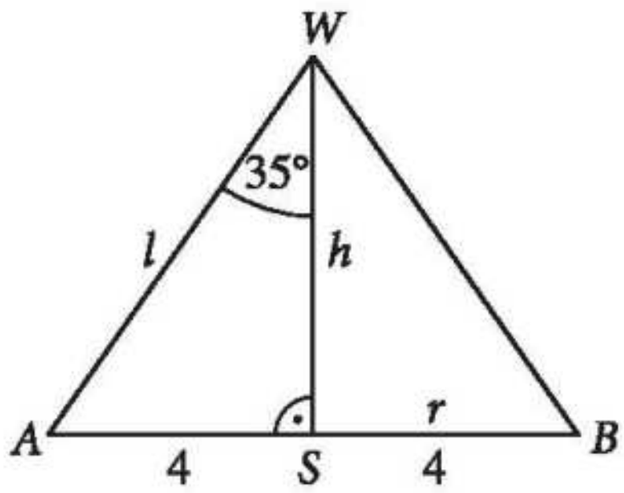
Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoramienny, w którym kąt przy wierzchołku jest równy 70°. Zatem w prostokątnym trójkącie ASW mamy:

$$\sphericalangle AWS = 35° \text{ i } |AS| = 4$$

Szukane wielkości wyznaczamy, korzystając z funkcji trygonometrycznych.



$$\frac{4}{l} = \sin 35°$$

$$l = \frac{4}{\sin 35°} \approx \frac{4}{0{,}5736} \approx 6{,}97350 \approx 7{,}0$$

$$\frac{4}{h} = \operatorname{tg} 35°$$

$$h = \frac{4}{\operatorname{tg} 35°} \approx \frac{4}{0{,}7002} \approx 5{,}7$$

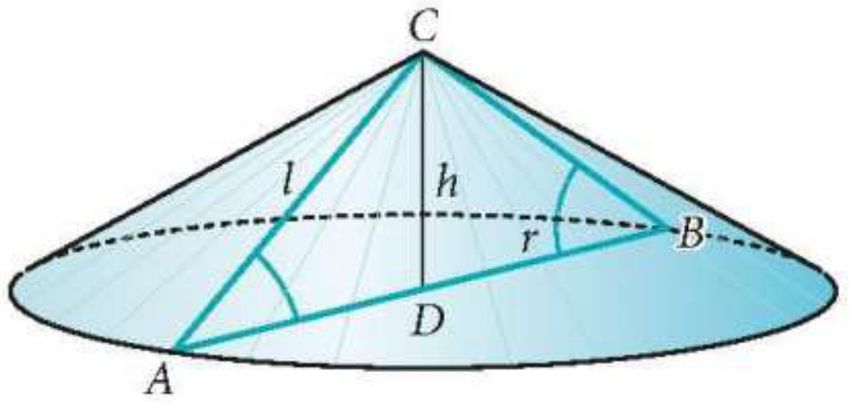
Odp.: $l = 7{,}0,\ h = 5{,}7$

Przykład 4 ◂ zad. 6.7

Tworząca stożka ma 24 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Obliczymy promień podstawy r i wysokość h tego stożka.

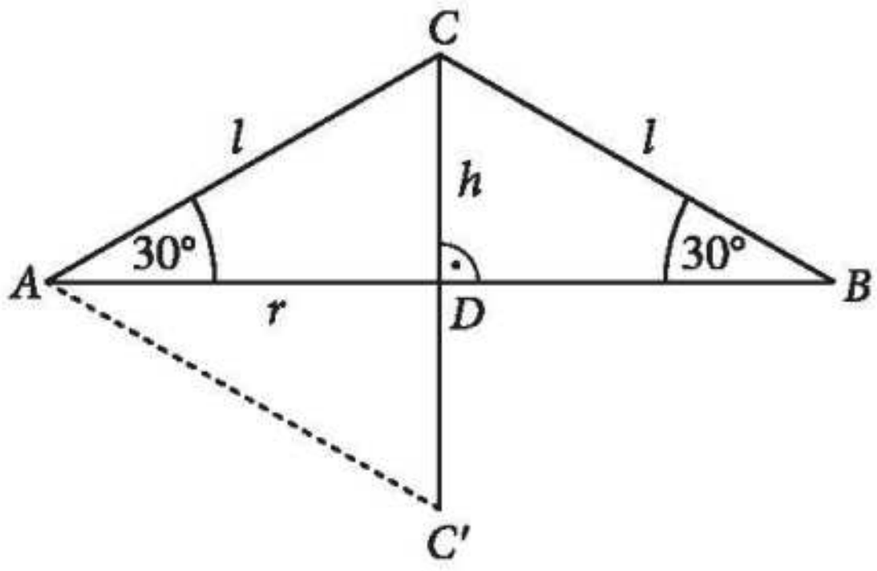
Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Zatem $l = |AC| = |BC| = 24$ cm. Kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy jest kątem DAC przy podstawie przekroju osiowego stożka.

Trójkąt ADC jest połową trójkąta równobocznego $AC'C$ o boku $l = 24$ cm (rys. obok). Promień podstawy stożka jest w tym trójkącie wysokością, czyli:



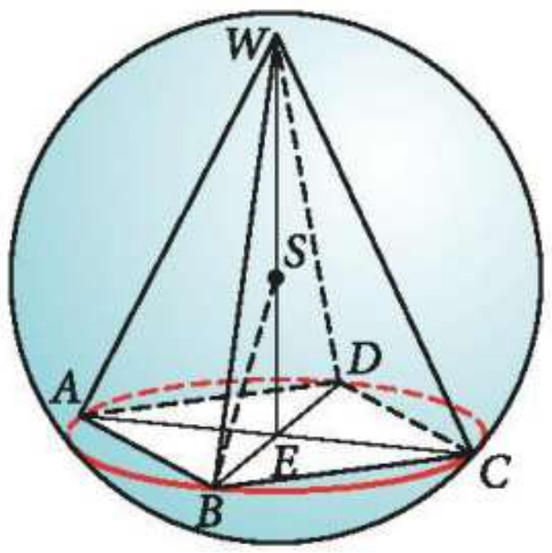
$$r = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}\ [\text{cm}]$$

Wysokość stożka to połowa boku trójkąta $AC'C$. Zatem $h = \frac{l}{2} = 12$ [cm].

Odp.: $r = 12\sqrt{3}$ cm, $h = 12$ cm

Przykład 5 ◂ zad. 6.19

Obliczymy promień R kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, w którym krawędź podstawy i krawędź boczna mają długość 6.



Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Środek S kuli należy do prostej EW, gdzie E jest spodkiem wysokości ostrosłupa. Zauważmy, że:

$$\triangle BCD \equiv \triangle BWD \qquad \longleftarrow \text{cecha bbb}$$

Zatem $\sphericalangle BWD = 90°$ i środek okręgu opisanego na trójkącie BWD, czyli tym samym środek kuli, jest środkiem przeciwprostokątnej BD – czyli punktem E (jak widać, rozpatrywany rysunek nie odpowiada założeniom zadania). Promień kuli jest więc równy połowie przekątnej kwadratu $ABCD$.

Odp.: $R = 3\sqrt{2}$

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Tworząca stożka o promieniu podstawy 1 ma długość 2. Wskaż miarę kąta rozwarcia stożka.

A. 90° **B.** 60° **C.** 45° **D.** 30°

6.2. Jaką bryłę otrzymamy w wyniku obrotu trapezu prostokątnego (niebędącego prostokątem) wokół krótszego ramienia?

A. sumę dwóch stożków
B. sumę walca i stożka
C. kulę z wydrążonym stożkiem
D. stożek ścięty

6.3. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest półkolem. Wskaż miarę kąta rozwarcia stożka.

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

6.4. Przekrojem osiowym walca jest prostokąt o wymiarach 10×6. Oblicz kąt α nachylenia przekątnej tego przekroju do płaszczyzny podstawy walca (z dokładnością do 1°).

6.5. Tworząca walca tworzy z przekątną jego przekroju osiowego dany kąt α. Długość przekątnej przekroju osiowego wynosi 10. Oblicz promień r i wysokość h walca.

a) $\alpha = 30°$ b) $\alpha = 45°$ c) $\alpha = 27°$ (wyniki podaj z dokładnością do 0,01)

6.6. Kąt rozwarcia stożka ma miarę α, a wysokość stożka jest równa h. Oblicz promień r i tworzącą l stożka.

a) $\alpha = 60°$, $h = 12\sqrt{3}$
b) $\alpha = 120°$, $h = 7$
c) $\alpha = 90°$, $h = 10$
d) $\alpha = 80°$, $h = 12$ (wyniki podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku)
e) $\alpha = 30°$, $h = 18$ (wyniki podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku)

6.7. Oblicz promień podstawy r i wysokość h stożka, którego tworząca o długości 24 cm jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod danym kątem.

a) 60° b) 45°

6.8. Podstawa stożka jest kołem o obwodzie 16π. Wysokość tego stożka jest równa 20. Oblicz kąt rozwarcia stożka oraz kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy (z dokładnością do 1°).

6.9. Trójkąt równoboczny obrócono wokół jednego z jego boków. Jaką bryłę otrzymano? Jaka figura jest przekrojem osiowym tej bryły?

6.10. Trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm i ramionach długości 5 cm obrócono dookoła
a) podstawy. b) ramienia.
Oblicz promień wspólnej podstawy otrzymanych w ten sposób stożków.

6.11. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu 147 dm^2. Oblicz pole podstawy i wysokość stożka.

6.12. Półkole o promieniu 18 cm zwinięto w stożek. Oblicz wysokość i kąt rozwarcia stożka.

6.13. Narysuj bryłę powstałą w wyniku obrotu rombu (niebędącego kwadratem) dookoła prostej zawierającej bok tego rombu.

6.14. Narysuj i opisz bryłę, którą otrzymamy w wyniku obrotu trapezu prostokątnego (niebędącego prostokątem) dookoła prostej zawierającej
a) dłuższą podstawę. b) dłuższe ramię.

6.15. W wyniku obrotu półkola dookoła prostej zawierającej jego średnicę otrzymano kulę. Oblicz promień tej kuli, wiedząc, że obwód półkola wynosi
a) $10(\pi + 2)$. b) $12 + 6\pi$.

6.16. Kulę o promieniu 3 cm przecięto dwiema równoległymi płaszczyznami w taki sposób, że podzieliły one średnicę kuli prostopadłą do tych płaszczyzn na trzy równe odcinki. Oblicz pole każdego z otrzymanych przekrojów.

* **6.17.** Promień podstawy stożka jest równy r, a tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Przez wierzchołek stożka poprowadzono płaszczyznę, która tworzy z osią symetrii stożka kąt β. Oblicz pole P otrzymanego przekroju.

6.18. Pan Jacenty stoi u podnóża góry w kształcie niemal idealnego stożka i pragnie jak najszybciej znaleźć się dokładnie po jej przeciwnej stronie. Góra wznosi się na wysokość 300 m, a promień jej podstawy ma 2 km. Pan Jacenty po płaskim terenie porusza się z prędkością 4 km/h, wchodzi pod górę z prędkością 2 km/h, a schodzi z prędkością 5 km/h. Sprawdź, czy powinien wejść na szczyt prostą drogą i zejść, czy obejść górę dookoła.

6.19. Oblicz promień kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, w którym krawędź podstawy ma długość 8, a krawędź boczna ma długość 9.

6.20. Oblicz promień kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym trójkątnym, w którym krawędź podstawy ma długość 12, a krawędź boczna ma długość $6\sqrt{2}$.

6.21. Oblicz promień kuli wpisanej w ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym wszystkie krawędzie mają długość równą 8 cm.

6.22. Krawędź boczna czworościanu foremnego jest dłuższa o c od promienia kuli opisanej na tym czworościanie. Wyznacz promień tej kuli.

6.23. Wyznacz promień kuli opisanej na graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym, którego wszystkie krawędzie są równe a.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.
W wyniku obrotu trójkąta wokół jednego z jego boków możemy otrzymać
A. sumę dwóch stożków.
B. stożek z wydrążonym stożkiem.
C. sumę walca i stożka.

2. Oblicz wysokość stożka, którego tworząca ma długość 17 cm, a podstawą jest koło o polu 200,96 cm^2. W obliczeniach przyjmij $\pi \approx 3{,}14$.

3. Wysokość stożka wynosi 12 cm, a jego kąt rozwarcia jest równy 78°. Oblicz promień podstawy i tworzącą stożka (z dokładnością do 1 mm).

4. Kulę o promieniu 12 cm przecięto płaszczyzną odległą od środka kuli o 3 cm. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

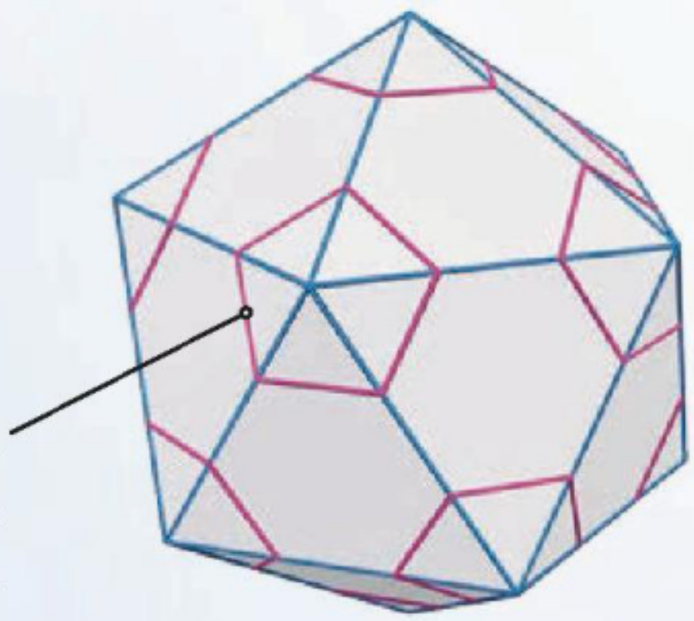
5. Siatkę stożka stanowi ćwiartka koła o promieniu R i koło o promieniu r.
Wyznacz $\frac{R}{r}$.

Jak zrobić kulę

Siatka kuli nie istnieje, co sprawia, że przy produkcji kulistych przedmiotów, takich jak piłki, pojawia się problem – w jaki sposób pociąć materiał, by stworzyć warstwę okrywającą kulę? Bardzo pomocne okazują się wielościany.

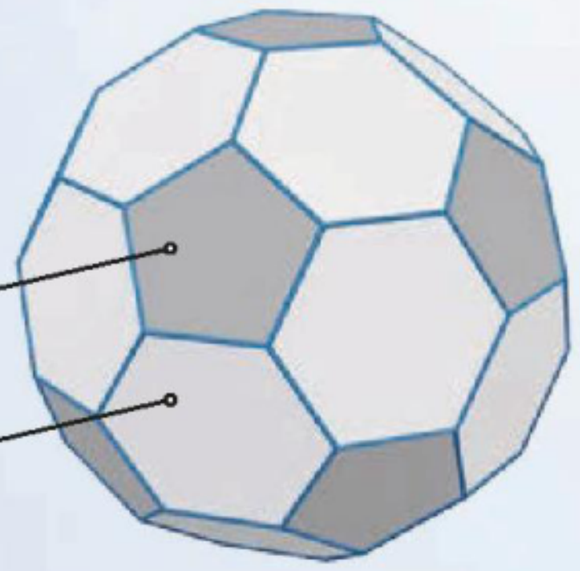
Od dwudziestościanu do piłki nożnej

Dwudziestościan foremny to bryła, której powierzchnię tworzy 20 przystających trójkątów równobocznych. Ma 12 wierzchołków i 30 krawędzi. Obcinamy wszystkie naroża tej bryły.



Linie cięcia powadzimy tak, by przecinały krawędzie w $\frac{1}{3}$ ich długości od najbliższego wierzchołka.

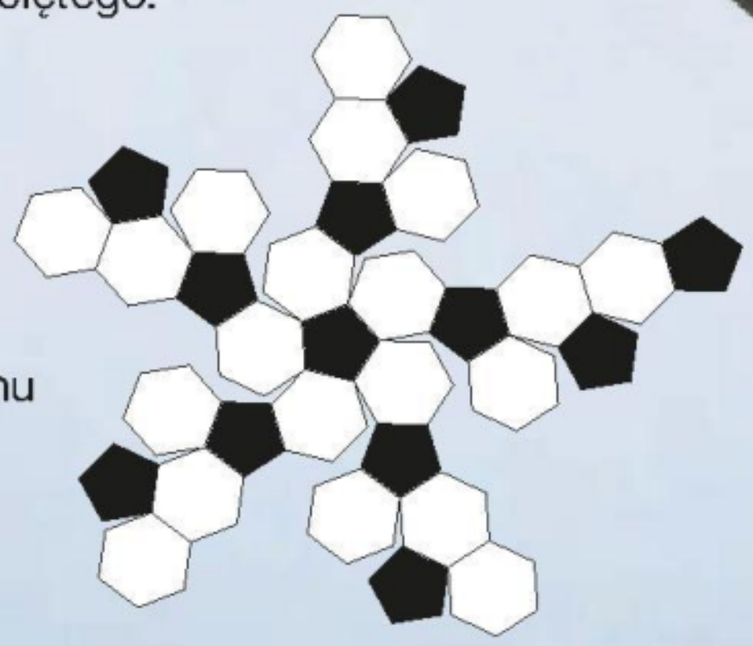
W ten sposób otrzymujemy **dwudziestościan ścięty**: bryłę, której ściany to 20 sześciokątów foremnych i 12 pięciokątów foremnych.



Pięciokąty powstają po obcięciu naroży.

Sześciokąty to pozostałe części ścian dwudziestościanu foremnego.

Siatkę dwudziestościanu ściętego wykorzystuje się jako szablon do uszycia tradycyjnej **piłki do gry w piłkę nożną**. Zewnętrzna warstwa takiej piłki składa się z białych i czarnych paneli (łatek): pierwsze to sześciokąty, drugie – pięciokąty. Po nadmuchaniu piłki panele się wybrzuszają, dzięki czemu piłka jest kulista, co ją odróżnia od modelu dwudziestościanu ściętego.



siatka dwudziestościanu ściętego

Inne szablony

Wierzchnie warstwy piłek wycina się z różnych szablonów. Niektóre ich kształty pokazano na ilustracji.

Piłka tenisowa jest pokryta dwoma kawałkami filcu.

Piłkę baseballową obszywa się dwoma kawałkami skóry.

Szablon piłki do siatkówki to sześć paneli złożonych z trzech kawałków skóry.

Kopuła geodezyjna

Kopuła geodezyjna to wielościan przypominający kształtem kulę. Ścianami takiego wielościanu są trójkąty równoramienne, układające się w pięciokąty i sześciokąty. Im większa ich liczba, tym bardziej taki wielościan przypomina powierzchnię kuli. Kopuły geodezyjne wykorzystuje się w architekturze – konstrukcje tego typu są niezwykle wytrzymałe i stabilne, a dodatkowo nie wymagają wewnętrznych podpór.

Stacja badawcza wybudowana w 1974 r. na biegunie południowym.

7. Pola powierzchni i objętości brył

Umiejętności:

- stosowanie własności podobieństwa do obliczania długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości
- stosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości

Podobieństwo w przestrzeni

Podobieństwo w przestrzeni definiuje się jak podobieństwo na płaszczyźnie.

Definicja

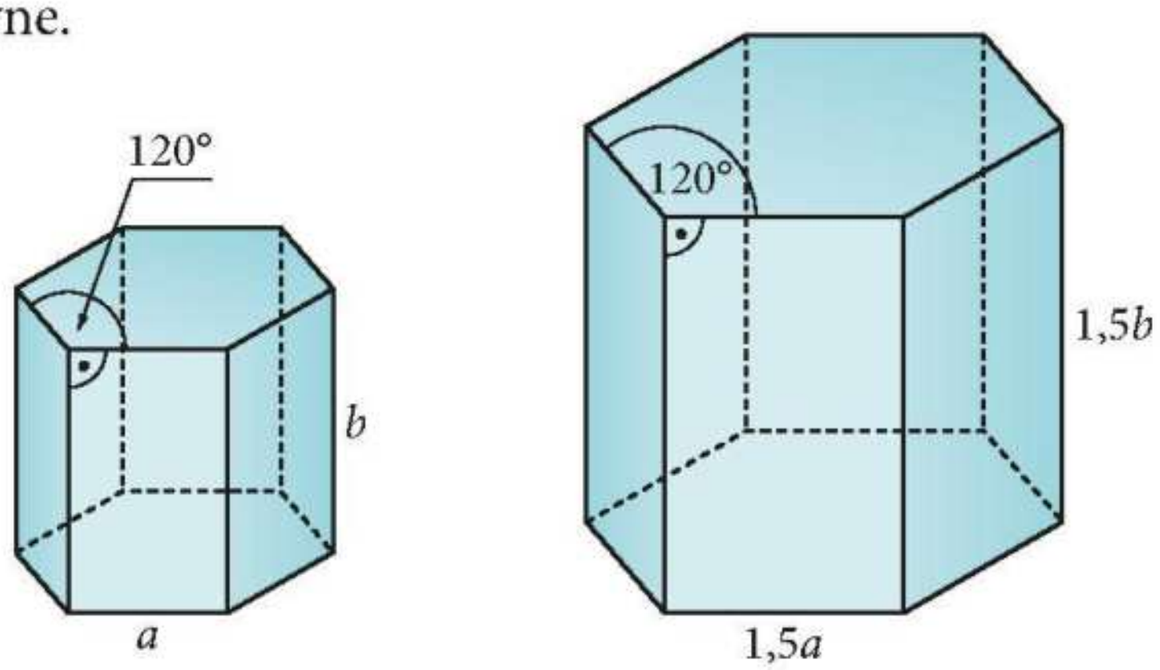
- **Podobieństwo** w skali k $(k > 0)$ jest przekształceniem przestrzeni o tej własności, że dla dowolnych punktów A, B i ich obrazów A', B' zachodzi równość $\left|A'B'\right| = k \cdot |AB|$.
- Figura (bryła) F jest podobna do figury (bryły) F', co zapisujemy symbolicznie $F \sim F'$, gdy istnieje takie podobieństwo P przestrzeni, w którym $P(F) = F'$.

Mówiąc poglądowo, podobieństwo proporcjonalnie zwiększa lub zmniejsza figury w przestrzeni.
Bryły podobne w skali $k = 1$ są przystające.

Oto najważniejsze własności podobieństwa w przestrzeni. Podajemy je bez dowodów.

- Podobieństwo zachowuje współliniowość punktów, czyli przekształca prostą na prostą.
- Podobieństwo nie zmienia kątów, zatem odpowiednie kąty (płaskie oraz dwuścienne) w bryłach podobnych są równe.
- W podobieństwie obrazem prostych równoległych są proste równoległe, tzn. jeżeli proste a i b są równoległe, a ich obrazami są proste a_1 i b_1, to $a_1 \parallel b_1$ (ale niekoniecznie $a_1 \parallel a$).
- Jeżeli figura (bryła) F jest podobna do figury (bryły) F' w skali k, to figura (bryła) F' jest podobna do figury (bryły) F w skali $\frac{1}{k}$.

- Jeżeli $F \sim F'$ i $F' \sim F''$, to $F \sim F''$.
- Dwa wielościany są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy w obu wielościanach odpowiednie krawędzie są proporcjonalne oraz odpowiednie kąty płaskie i kąty dwuścienne są równe.



Przykład 1

Podamy przykłady figur podobnych oraz skale ich podobieństwa.

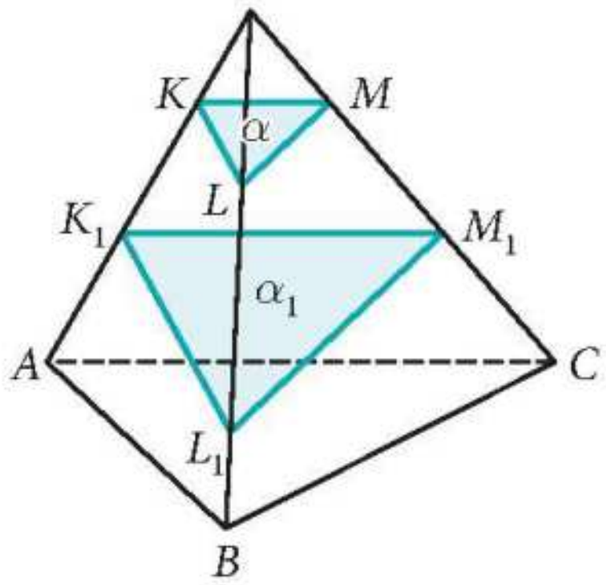
Figury	Skala podobieństwa
dwa odcinki w przestrzeni	stosunek długości tych odcinków
dwa sześciany	stosunek długości krawędzi tych sześcianów
dwa wielościany foremne o tej samej liczbie ścian	stosunek długości krawędzi tych wielościanów
dwie kule	stosunek promieni tych kul
dwa stożki o takim samym kącie rozwarcia	stosunek promieni podstaw tych stożków

- Zauważmy, że skalą podobieństwa stożków o takim samym kącie rozwarcia jest również stosunek ich wysokości lub stosunek długości ich tworzących.
- Jeżeli przekształcimy przez podobieństwo o skali 2 prostopadłościan o wymiarach $3 \times 4 \times 10$, to otrzymamy prostopadłościan o wymiarach $6 \times 8 \times 20$.

Przykład 2

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Płaszczyzny α i α_1 przecinają ostrosłup $ABCD$ i są równoległe. Zatem przekroje, czyli trójkąty KLM oraz $K_1L_1M_1$, są podobne.



Pola powierzchni i objętości brył

W szkole podstawowej wprowadzone zostały wzory na obliczanie pól powierzchni i objętości podstawowych wielościanów. Zbierzemy je w tabeli i uzupełnimy o analogiczne wzory dotyczące brył obrotowych. Wyprowadzenie większości tych wzorów wymaga bardziej zaawansowanej wiedzy matematycznej, dlatego podajemy je bez dowodów.

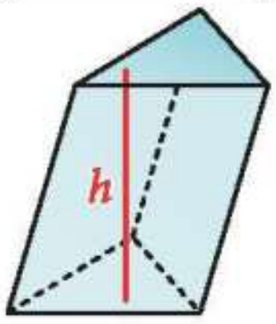
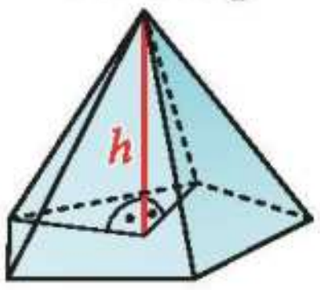
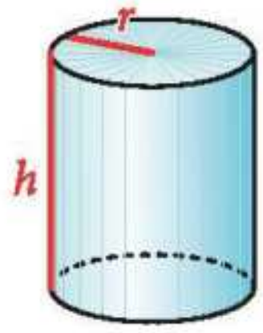
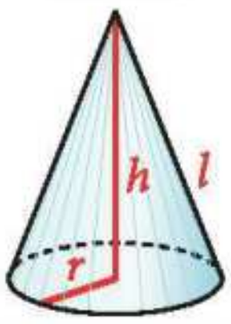
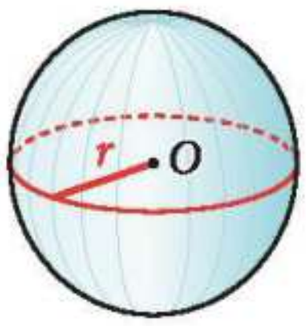
Przypomnijmy najczęściej spotykane oznaczenia:

P_p – pole podstawy,
P_b – pole powierzchni bocznej,
P_c – pole powierzchni całkowitej,
V – objętość,
r – promień podstawy (promień kuli),
h – wysokość graniastosłupa, ostrosłupa, walca, stożka,
l – tworząca walca, stożka.

W poprzednich tematach rysowaliśmy siatki różnych figur przestrzennych. Warto na nie spojrzeć, aby przyswoić sobie następujące uwagi.

- W każdym **graniastosłupie** ściany boczne są równoległobokami. Suma pól tych ścian jest polem P_b powierzchni bocznej. Pole wielokąta leżącego w podstawie graniastosłupa jest polem podstawy P_p. Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe $P_c = P_b + 2P_p$.
- W każdym **ostrosłupie** ściany boczne są trójkątami. Pole P_b powierzchni bocznej jest sumą pól tych trójkątów. Podstawę ostrosłupa może tworzyć dowolny wielokąt. Jego pole jest polem podstawy P_p. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe $P_c = P_b + P_p$.
- Jeżeli rozetniemy powierzchnię boczną **walca** wzdłuż jego tworzącej i rozpłaszczymy ją, to otrzymamy prostokąt. Jeden z boków tego prostokąta ma długość równą wysokości walca, a drugi ma długość równą obwodowi podstawy walca. Pole powierzchni bocznej walca jest równe $P_b = 2\pi r \cdot h$, pole podstawy walca jest równe $P_p = \pi r^2$. Pole powierzchni całkowitej walca jest równe $P_c = 2\pi rh + 2\pi r^2$ albo krócej: $P_c = 2\pi r(h + r)$.
- Powierzchnią boczną **stożka** jest wycinek koła o promieniu l. Długość łuku tego wycinka jest równa obwodowi podstawy stożka, czyli $2\pi r$. Pole powierzchni bocznej stożka jest równe $P_b = \pi rl$, pole podstawy stożka jest równe $P_p = \pi r^2$. Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe $P_c = \pi rl + \pi r^2$ lub inaczej $P_c = \pi r(l + r)$.

Pole powierzchni **kuli**, czyli pole sfery, jest równe $P = 4\pi r^2$, a objętość kuli jest równa $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Bryła	Pole powierzchni całkowitej	Objętość
graniastosłup 	$P_c = P_b + 2P_p$	$V = P_p \cdot h$
ostrosłup 	$P_c = P_b + P_p$	$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$
walec 	$P_b = 2\pi rh$ $P_p = \pi r^2$ $P_c = 2\pi r(r + h)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
stożek 	$P_b = \pi rl$ $P_p = \pi r^2$ $P_c = \pi r(r + l)$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$
kula 	$P_c = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

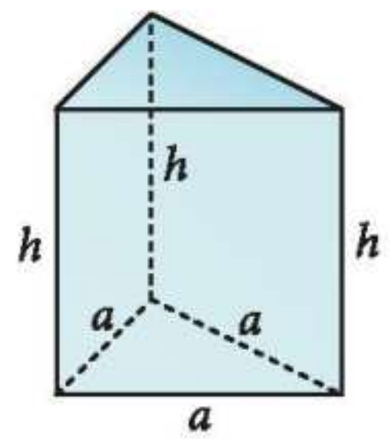
Jeżeli bryła F' jest podobna w skali k do bryły F o polu powierzchni P_F i objętości równej V_F, to:

- pole powierzchni bryły F' jest równe $P_{F'} = k^2 \cdot P_F$; mówimy – stosunek pól powierzchni brył podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa tych brył,
- objętość bryły F' jest równa $V_{F'} = k^3 \cdot V_F$; mówimy – stosunek objętości brył podobnych jest równy sześcianowi skali podobieństwa tych brył.

Na przykład jeśli zbudujemy model pomnika warszawskiej Syrenki w skali $1 : 10$, to pochłonie on 1000 razy mniej materiału niż oryginał.

Przykład 3 ◂ zad. 7.6

Obliczymy pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości $h = 5$ i krawędzi podstawy $a = 3$.



Rozwiązanie

Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny o boku $a = 3$.

Pole podstawy jest równe:

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

Powierzchnia boczna składa się z trzech identycznych prostokątów o wymiarach 3×5, zatem:

$$P_b = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$$

Pole powierzchni całkowitej jest równe:

$$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} + 45 = \frac{9\sqrt{3}}{2} + 45$$

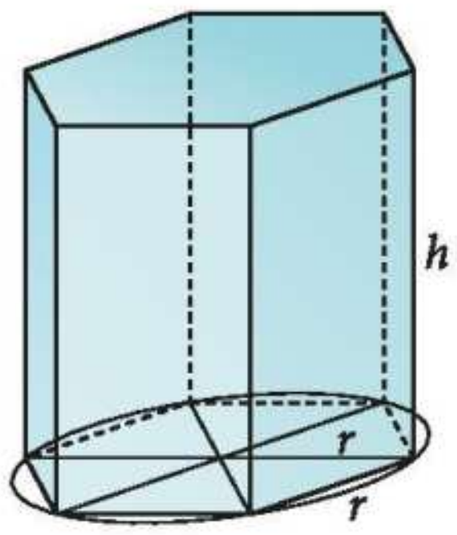
Wysokość graniastosłupa $h = 5$, więc jego objętość jest równa:

$$V = P_p \cdot h = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = \frac{45\sqrt{3}}{4}$$

Odp.: $P_c = 45 + \frac{9\sqrt{3}}{2}$, $V = \frac{45\sqrt{3}}{4}$

Przykład 4 ◂ zad. 7.8

Obliczymy objętość i pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym wysokość $h = 7$, a okrąg opisany na podstawie ma promień $r = 4$.



Rozwiązanie

Podstawą graniastosłupa jest sześciokąt foremny.

Bok sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg jest równy promieniowi okręgu. Taki sześciokąt jest sumą sześciu trójkątów równobocznych.

$$P_p = 6 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

$$V = P_p \cdot h = 24\sqrt{3} \cdot 7 = 168\sqrt{3}$$

$$P_c = 6 \cdot rh + 2P_p = 6 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 24\sqrt{3} = 24\left(7 + 2\sqrt{3}\right)$$

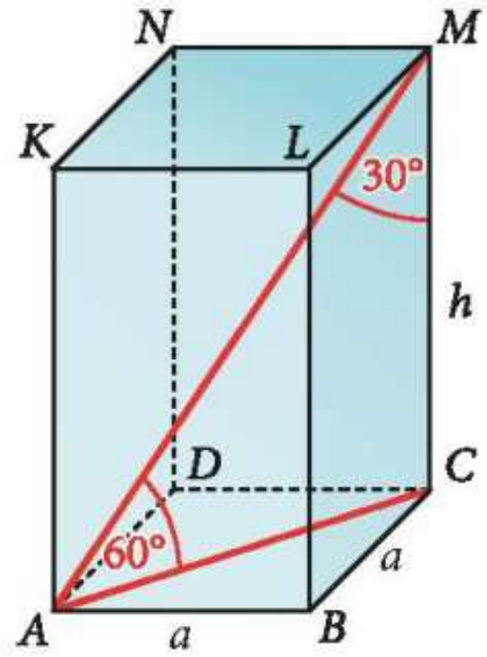
Odp.: $V = 168\sqrt{3}$, $P_c = 24\left(7 + 2\sqrt{3}\right)$

Przykład 5 ◂ zad. 7.10

Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Przekątna tego prostopadłościanu ma długość $8\sqrt{2}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Obliczymy pole powierzchni całkowitej i objętość prostopadłościanu.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$ABCD$ jest kwadratem.

$$|AM| = 8\sqrt{2}, \quad \sphericalangle MAC = 60°$$

Dla prostopadłościanu o podstawie kwadratowej:

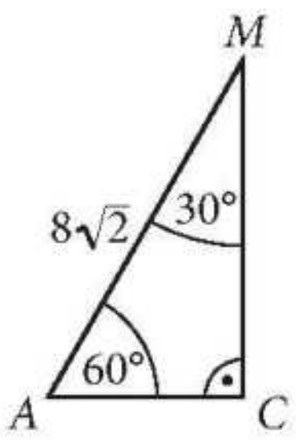
$$P_c = 2a^2 + 4ah$$
$$V = a^2h$$

Do obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej potrzebne są więc:
a – długość krawędzi podstawy (bok kwadratu $ABCD$),
h – wysokość prostopadłościanu.

Zauważmy, że:

- AC jest przekątną kwadratu $ABCD$, czyli $|AC| = a\sqrt{2}$,
- trójkąt ACM jest połową trójkąta równobocznego o boku $|AM| = 8\sqrt{2}$.

W trójkącie ACM:



$$|AC| = \frac{1}{2}|AM| = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$
$$h = \frac{|AM|\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6}$$

Do obliczenia długości a wykorzystamy związek $|AC| = a\sqrt{2}$:

$$4\sqrt{2} = a\sqrt{2}$$
$$a = 4$$

Podstawiamy wyznaczone wielkości do wzorów.

$$P_p = a^2 = 16$$
$$P_b = 4ah = 4 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{6} = 64\sqrt{6}$$
$$P_c = P_b + 2P_p = 64\sqrt{6} + 32 = 32\left(1 + 2\sqrt{6}\right)$$
$$V = P_p \cdot h = 16 \cdot 4\sqrt{6} = 64\sqrt{6}$$

Odp.: $P_c = 32\left(1 + 2\sqrt{6}\right)$, $V = 64\sqrt{6}$

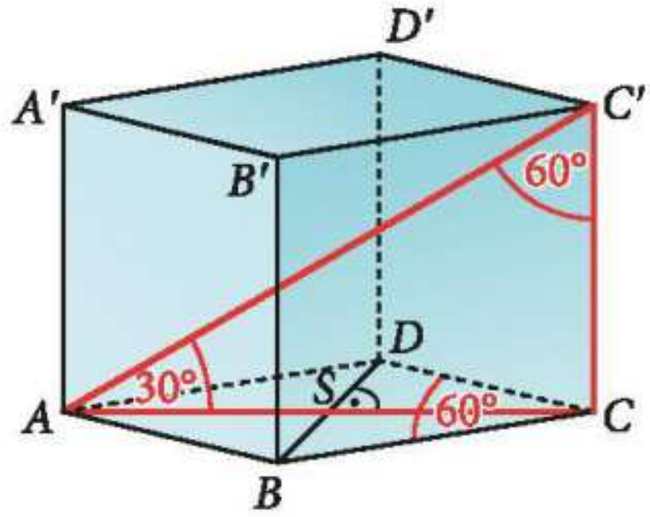
Przykład 6

Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym 60°. Dłuższa przekątna graniastosłupa, o długości 4, tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30°. Obliczymy objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
$ABCD$ jest rombem o kącie ostrym 60°.

$$\left|AC'\right| = 4, \quad \sphericalangle C'AC = 30^\circ$$



Do obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej potrzebne są: długość boku rombu, np. $|AB|$, oraz wysokość prostopadłościanu, np. $\left|CC'\right|$.

Zauważmy, że:

- trójkąt ACC' jest połową trójkąta równobocznego (kąty 90°, 30° i 60°) o boku $\left|AC'\right| = 4$, czyli:

$$\left|CC'\right| = \frac{1}{2}\left|AC'\right| = 2 \qquad \longleftarrow \text{połowa boku}$$

$$|AC| = \frac{\left|AC'\right|\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \qquad \longleftarrow \text{wysokość trójkąta równobocznego}$$

- trójkąty ADB i DBC są równoboczne, czyli:

$$|AS| = \frac{1}{2}|AC| = \sqrt{3} \text{ i } |AS| = \frac{|AB|\sqrt{3}}{2}$$

Zatem $|AB| = \frac{2|AS|}{\sqrt{3}} = 2.$

Pole podstawy graniastosłupa jest równe:

$$P_p = 2 \cdot \frac{|AB|^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$$

W graniastosłupie mamy wysokość CC' równą 2. Zatem objętość jest równa:

$$V = P_p \cdot \left|CC'\right| = 2\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$$

Ścianami bocznymi graniastosłupa są kwadraty o wymiarach 2×2, czyli:

$$P_b = 4 \cdot 2^2 = 16$$

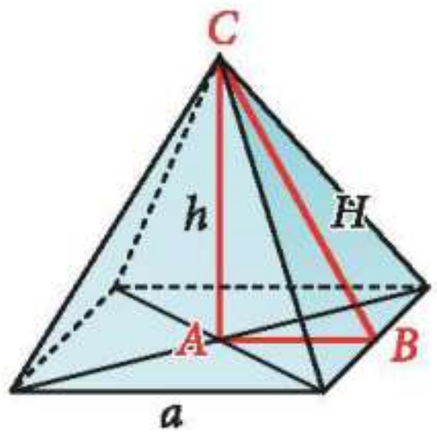
a pole powierzchni całkowitej jest równe:

$$P_c = 16 + 2 \cdot 2\sqrt{3} = 16 + 4\sqrt{3} = 4\left(4 + \sqrt{3}\right)$$

Odp.: $V = 4\sqrt{3}$, $P_c = 4\left(4 + \sqrt{3}\right)$

Przykład 7 ◂ zad. 7.15

Obliczymy objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy $a = 6$ i wysokości $h = 4$.



Rozwiązanie

Podstawą tego ostrosłupa jest kwadrat o boku $a = 6$.

$$P_p = a^2 = 36$$

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48$$

Powierzchnię boczną tworzą cztery identyczne trójkąty równoramienne o podstawie $a = 6$ i nieznanej wysokości. Aby wyznaczyć tę wysokość, oznaczoną na rysunku literą H, skorzystamy z własności trójkąta prostokątnego ABC, którego wierzchołek B jest środkiem krawędzi podstawy.

$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ ⟵ na mocy twierdzenia Pitagorasa

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = H^2,\ 3^2 + 4^2 = H^2,$ czyli $H = 5.$

Pole jednej ściany bocznej jest równe $\frac{1}{2}a \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15.$

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa: $P_c = 4 \cdot 15 + 36 = 96$

Odp.: $V = 48,\ P_c = 96$

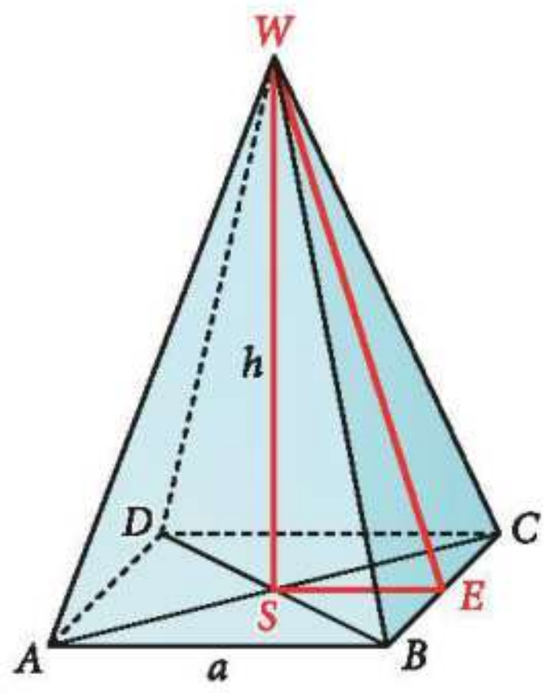
Przykład 8 ◂ zad. 7.16

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość d, a krawędź boczna ostrosłupa jest 5 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Obliczymy pole powierzchni bocznej i objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $ABCD$ o boku a, ścianami bocznymi są cztery przystające trójkąty równoramienne. Punkt E jest środkiem krawędzi podstawy.



$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot |WE| = 2a \cdot |WE|$$

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$$

Do obliczenia pola powierzchni bocznej i objętości potrzebne są więc trzy wielkości: a, h i $|WE|$. Wyznaczymy je w kolejnych krokach.

Krok 1: Wyznaczamy a.

Odcinek AC o długości d jest przekątną kwadratu, więc $d = a\sqrt{2}$, czyli $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$.

Krok 2: Wyznaczamy h.

Krawędź boczna ostrosłupa jest 5 razy dłuższa od a. Zatem $|BW| = \frac{5d}{\sqrt{2}}$.

W trójkącie prostokątnym WSB:

$$h^2 = |BW|^2 - |SB|^2 = \frac{25d^2}{2} - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{49}{4}d^2$$

$$h = \frac{7}{2}d$$

Krok 3: Wyznaczamy wysokość $|WE|$ ściany bocznej.

W trójkącie prostokątnym WSE:

$$|WE|^2 = h^2 + |SE|^2$$

$$|WE|^2 = \frac{49}{4}d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}d^2 + \frac{d^2}{8} = \frac{99}{8}d^2$$

$$|WE| = \sqrt{\frac{99}{8}}d = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{11}{2}}d$$

Teraz możemy obliczyć objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2}{2} \cdot \frac{7}{2}d = \frac{7}{12}d^3$

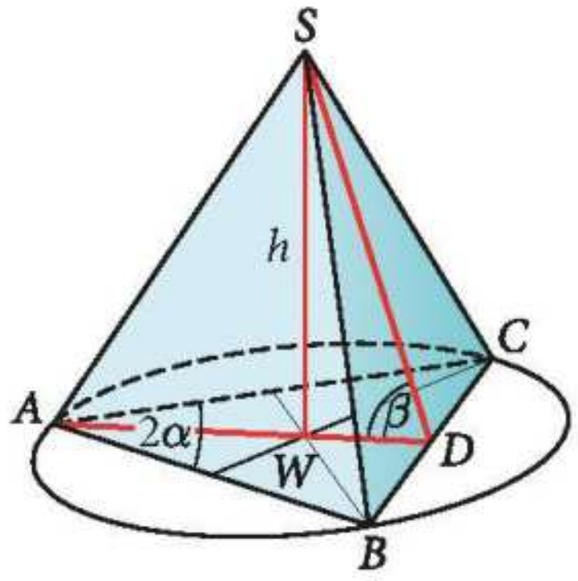
oraz jego pole powierzchni bocznej: $P_b = 2 \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}d = \frac{3\sqrt{11}}{2}d^2$.

Odp.: $P_b = \frac{3\sqrt{11}}{2}d^2$, $V = \frac{7}{12}d^3$

Przykład 9 ◂ zad. 7.21

Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny o ramionach długości $|AB| = |AC| = b$ i kącie ostrym między nimi o mierze 2α. Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie. Ściana boczna o krawędzi BC jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β.

Wyznaczymy objętość ostrosłupa.



Rozwiązanie

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, w którym kąt pomiędzy ramionami jest ostry, więc środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Zauważmy, że:

1.	$\|AS\| = \|BS\| = \|CS\|$	⟵ spodek W wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie
2.	wysokość trójkąta BCS poprowadzona z wierzchołka S dzieli bok BC na połowy	⟵ $\|BS\| = \|CS\|$
3.	wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka A dzieli bok BC na połowy	⟵ $\|AB\| = \|AC\|$ (z założenia)
4.	punkt D jest spodkiem dwóch wysokości: AD w trójkącie ABC i SD w trójkącie BSC	⟵ z punktów 2 i 3 powyżej

Zatem proste DS i AD są prostopadłe do krawędzi BC i wyznaczają kąt β nachylenia ściany bocznej BCS do płaszczyzny podstawy.

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$.

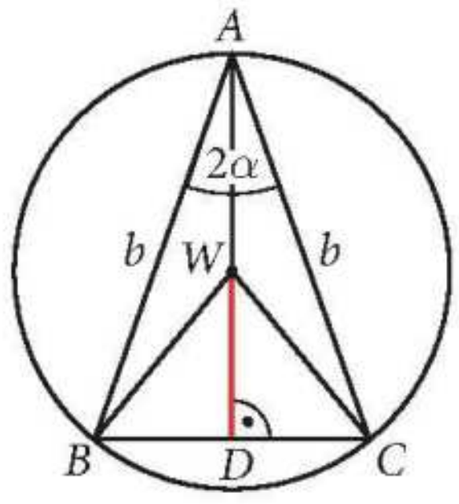
Pole podstawy możemy wyznaczyć z danych w zadaniu: $P_p = \frac{1}{2}b^2 \sin 2\alpha$.

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu jego boków pomnożonego przez sinus kąta zawartego między tymi bokami.

Aby wyznaczyć objętość, musimy więc znaleźć jeszcze wysokość h ostrosłupa, czyli długość odcinka WS. Wykonamy to w kolejnych krokach.

Krok 1: Wyznaczamy $|WD|$.

Popatrzmy na podstawę ostrosłupa i opisany na niej okrąg. Zauważmy, że w prostokątnym trójkącie ABD:



$$\frac{|BD|}{b} = \sin\alpha, \text{ stąd } |BD| = b\sin\alpha.$$

Ponadto kąt BWC jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany BAC. Zatem $\sphericalangle BWC = 4\alpha$, a $\sphericalangle BWD = \frac{1}{2}\cdot 4\alpha = 2\alpha$. W prostokątnym trójkącie BDW:

$$\frac{|BD|}{|WD|} = \operatorname{tg} 2\alpha, \text{ stąd } |WD| = \frac{|BD|}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{b\cdot\sin\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}.$$

Krok 2: Wyznaczamy h. W prostokątnym trójkącie SWD:

$$\frac{h}{|WD|} = \operatorname{tg}\beta, \text{ stąd } h = |WD|\cdot\operatorname{tg}\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg} 2\alpha}.$$

Teraz możemy obliczyć objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot b^2\sin 2\alpha\cdot\frac{b\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}$$

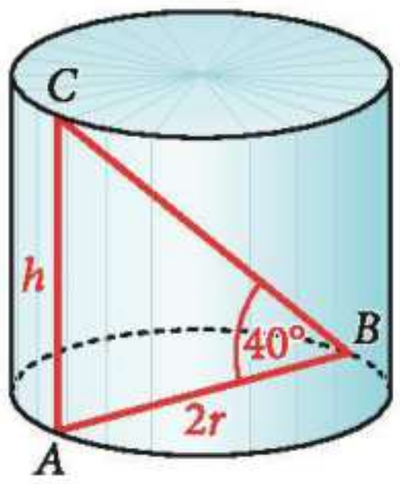
Odp.: $V = \frac{1}{6}\cdot b^3\cdot\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$

Przykład 10 ◂ zad. 7.26

Obwód podstawy walca jest równy 12π. Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $40°$. Obliczymy pole powierzchni całkowitej i objętość walca. Wyniki zaokrąglimy do pierwszego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Obwód podstawy walca jest równy $2\pi r = 12\pi$. Zatem $r = 6$, a średnica AB ma długość 12.

W prostokątnym trójkącie ABC mamy więc $\frac{|AC|}{|AB|} = \operatorname{tg} 40°$, czyli:

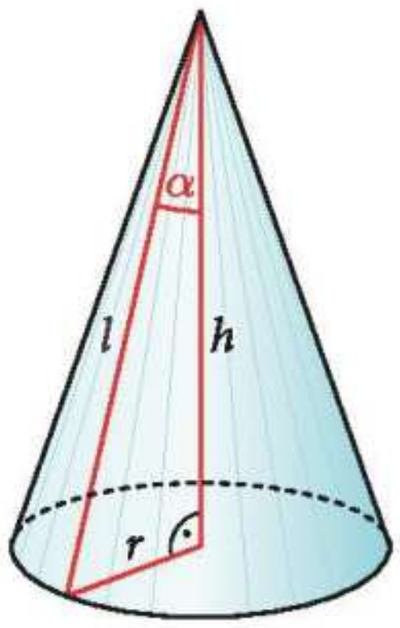
$$h = |AC| = |AB| \cdot \operatorname{tg} 40° \approx 12 \cdot 0{,}8391 = 10{,}0692$$
$$P_c = 2\pi r\,(r + h) \approx 12\pi\,(6 + 10{,}0692) \approx 605{,}8$$
$$V = \pi r^2 h \approx \pi \cdot 36 \cdot 10{,}0692 \approx 1138{,}8$$

Odp.: $P_c \approx 605{,}8$, $V \approx 1138{,}8$

Przykład 11 ◂ zad. 7.31

Półkole o promieniu 12 cm zwinięto w stożek. Obliczymy objętość i kąt rozwarcia tego stożka.

Rozwiązanie



Promień półkola jest tworzącą stożka, a obwód podstawy jest długością łuku półkola.
Jeżeli oznaczymy literą r promień podstawy stożka (w cm), a literą l – jego tworzącą (w cm), to $l = 12$ oraz $2\pi r = \pi \cdot 12$.
Zatem:

$$r = 6, \quad h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot 36 \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\pi\ \left[\text{cm}^3\right]$$

$l = 2r$, więc przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym i kąt rozwarcia stożka $2\alpha = 60°$.

Odp.: $V = 72\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3$, kąt rozwarcia stożka jest równy $60°$.

Przykład 12 ◂ zad. 7.36

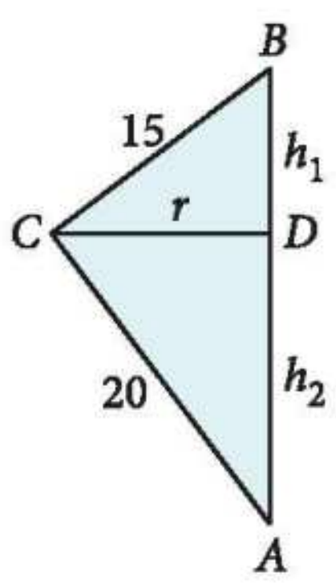
Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 15 i 20 obraca się dookoła przeciwprostokątnej. Obliczymy objętość i pole powierzchni całkowitej powstałej bryły.

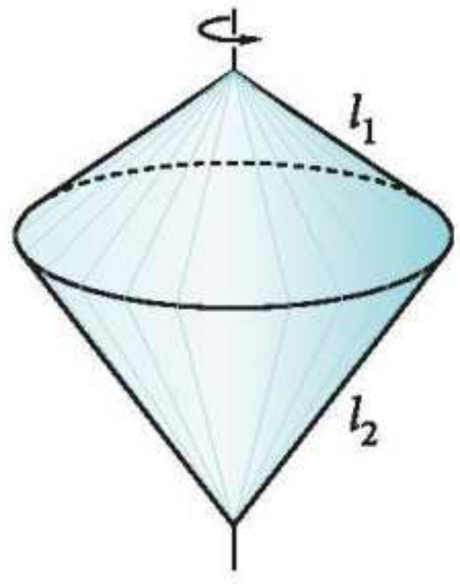
Rozwiązanie

Otrzymana bryła jest sumą dwóch stożków sklejonych podstawami. Zauważmy, że w obracanym trójkącie:

- przeciwprostokątna AB jest sumą $h_1 + h_2$ wysokości obydwu stożków,
- wysokość CD poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest promieniem r wspólnej podstawy,
- przyprostokątne są tworzącymi l_1, l_2.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.





Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC:

$$|AB| = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$$

Z porównania pola trójkąta ABC obliczanego na dwa sposoby mamy:

$$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot |CD|$$

Zatem $|CD| = 12 = r$.

Objętość V bryły jest sumą objętości obydwu stożków:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi \cdot 144 \cdot 25 = 1200\pi$$

Pole powierzchni całkowitej P_c bryły jest sumą pól powierzchni bocznych obydwu stożków:

$$P_c = \pi r l_1 + \pi r l_2 = \pi r (l_1 + l_2) = 12\pi \cdot 35 = 420\pi$$

Odp.: $V = 1200\pi$, $P_c = 420\pi$

Przykład 13 ◂ zad. 7.42

Promień podstawy stożka jest równy r, a kąt rozwarcia tego stożka wynosi 2α. Wyznaczymy objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego opisanego na tym stożku.

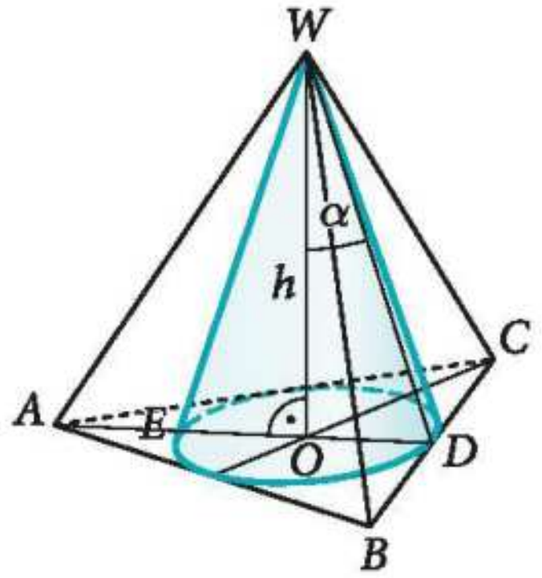
Rozwiązanie

Objętość ostrosłupa wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

gdzie P_p oznacza pole podstawy tego ostrosłupa, a h – jego wysokość.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny ABC o boku a, opisany na kole, którego promień jest równy r i które jest podstawą stożka.

$$r = \frac{1}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = 2r\sqrt{3}$$

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3r^2\sqrt{3}$$

Wysokość ostrosłupa jest równa wysokości stożka. W przekroju osiowym stożka znamy r i α, zatem:

$$\frac{r}{h} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ czyli } h = \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Po podstawieniu do wzoru na objętość mamy:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{r^3\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Odp.: $V = \dfrac{r^3\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha}$

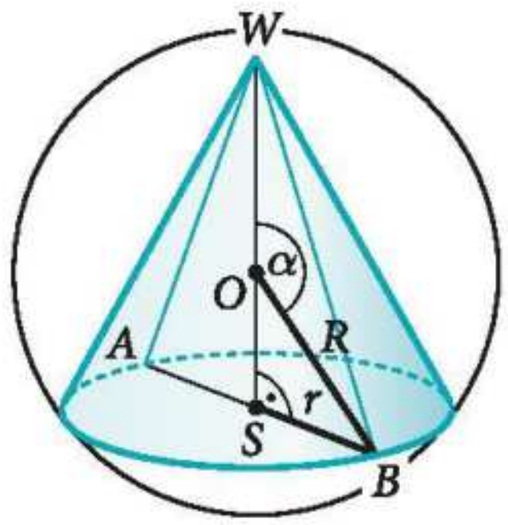
Przykład 14 ◀ zad. 7.43

W kulę o promieniu R wpisano stożek. Ze środka tej kuli widać tworzącą stożka pod kątem α. Wyznaczymy objętość i pole powierzchni całkowitej stożka.

Jeżeli dany jest odcinek AB i punkt M nienależący do prostej zawierającej ten odcinek, to kąt wypukły AMB nazywamy kątem, pod którym widać odcinek AB z punktu M.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Objętość stożka wyraża się wzorem $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$,

a jego pole powierzchni całkowitej: $P_c = \pi r\,(r + l)$.

Do rozwiązania zadania potrzebne są trzy wielkości:
$r = |SB|$, $h = |SW|$ i $l = |BW|$.

$$\frac{r}{R} = \sin(180^\circ - \alpha) \qquad \longleftarrow \text{ w } \triangle OSB$$

$$r = R\sin\alpha \qquad \longleftarrow \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

Zauważmy, że trójkąt WOB jest równoramienny, zatem:

$$\sphericalangle OWB = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{r}{h} = \operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \qquad \longleftarrow \text{ w } \triangle WSB$$

$$h = \frac{r}{\operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{R\sin\alpha}{\operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} \qquad \longleftarrow r = R\sin\alpha$$

$$\frac{r}{l} = \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \qquad \longleftarrow \text{w } \triangle WSB$$

$$l = \frac{R\sin\alpha}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Upraszczamy wyznaczoną wartość tworzącej l – stosujemy dwa wzory trygonometryczne: redukcyjny $\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}$ oraz wzór na sinus kąta podwojonego w postaci $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Po przekształceniach otrzymujemy:

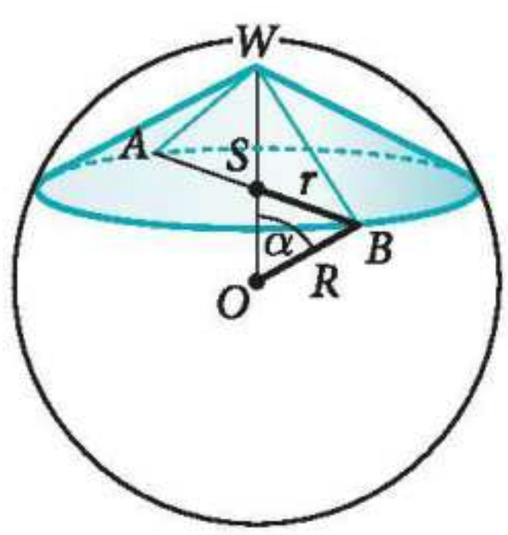
$$l = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$$

Po podstawieniu wyznaczonych wielkości r, h i l do wzorów na objętość i pole powierzchni całkowitej stożka otrzymujemy:

$$V = \frac{\pi R^3 \sin^3\alpha}{3\operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$P_c = \pi R^2 \sin\alpha\left(\sin\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

W powyższym rozwiązaniu korzystaliśmy z zależności geometrycznych związanych ze szczególnym położeniem stożka w kuli – gdy środek kuli należy do wysokości stożka. Proponujemy samodzielne wykazanie, że w innych położeniach stożka (np. jak na rysunku obok) rozwiązanie będzie identyczne.



Odp.: $V = \frac{\pi R^3 \sin^3\alpha}{3\operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$, $P_c = \pi R^2 \sin\alpha\left(\sin\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Objętość walca otrzymanego w wyniku obrotu prostokąta o bokach a i $2a$ wokół krótszego boku jest równa V_1, a objętość walca otrzymanego w wyniku obrotu tego samego prostokąta wokół dłuższego boku jest równa V_2. Wskaż stosunek $\frac{V_1}{V_2}$.

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 2 **D.** 4

7.2. Kula o promieniu 5 cm i stożek o promieniu podstawy 10 cm mają takie same objętości. Wskaż wysokość stożka.

A. 5 cm **B.** 10 cm **C.** $\frac{25}{\pi}$ cm **D.** 2 cm

7.3. Stosunek objętości dwóch sześcianów jest równy 3. Wskaż stosunek długości krawędzi tych sześcianów.

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt[3]{3}$ **D.** 27

7.4. Dwie krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$ i $b = 20$. Pole powierzchni całkowitej bryły jest równe 350. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

7.5. Do zbiornika w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 6 dm wlano 100 litrów wody, która wypełniła $\frac{2}{3}$ pojemności zbiornika. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

7.6. Krawędź boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa krawędzi podstawy. Objętość tego graniastosłupa wynosi $16\sqrt{3}$ cm^3. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

7.7. Podstawa graniastosłupa jest trójkątem prostokątnym, w którym przeciwprostokątna ma długość 8 cm, a jeden z kątów ostrych ma 30°. Powierzchnia boczna tego graniastosłupa po rozwinięciu na płaszczyznę jest kwadratem. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa.

7.8. Oblicz objętość i pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym wysokość jest równa 5, a okrąg wpisany w podstawę ma promień 3.

7.9. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu S, wiedząc, że sześcian o krawędzi krótszej o 5 cm ma objętość mniejszą o 665 cm^3 niż sześcian S.

7.10. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Przekątna tego prostopadłościanu ma długość 12 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

7.11. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość $\sqrt{2}$ dm. Przekątna ściany bocznej tworzy z płaszczyzną sąsiedniej ściany bocznej kąt 30°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

7.12. Podstawa graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego jest wpisana w koło o promieniu $2\sqrt{3}$. Najdłuższa przekątna tego graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 70°. Oblicz objętość graniastosłupa (z dokładnością do całości).

7.13. Wysokość prostopadłościanu jest równa 20, a jego podstawą jest kwadrat o boku długości $5\sqrt{2}$. Prostopadłościan przecięto płaszczyzną wyznaczoną przez wychodzące z jednego wierzchołka przekątną podstawy i przekątną ściany bocznej.

a) Wyznacz z dokładnością do 1° kąt nachylenia otrzymanego przekroju do płaszczyzny podstawy.
b) Oblicz pole otrzymanego przekroju.
c) Oblicz objętości brył, na które płaszczyzna sieczna podzieliła prostopadłościan.

7.14. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekrój zawierający krawędź boczną graniastosłupa i wysokość jego podstawy jest kwadratem o polu 36 cm^2. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

7.15. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 12 i wysokości 2.

7.16. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a, a krawędź boczna ostrosłupa jest 2 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

7.17. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy jest równa $10\sqrt{6}$, a kąt między poprowadzonymi z wierzchołka ostrosłupa wysokościami przeciwległych ścian bocznych ma miarę 120°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

7.18. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym miara kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równa 60°. Wysokość ostrosłupa ma $6\sqrt{3}$ cm. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

7.19. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 24 cm, a miara kąta między krawędzią boczną i wysokością ostrosłupa jest równa 30°. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

7.20. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 20, a kąt płaski ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę 64°. Oblicz objętość tego ostrosłupa (z dokładnością do całości).

7.21. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 16 i 12. Każda krawędź boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość ostrosłupa.

7.22. Podstawą ostrosłupa jest romb o boku 16 i kącie ostrym 60°. Jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa przechodzących przez wierzchołek kąta rozwartego rombu jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Krawędzie boczne ostrosłupa przechodzące przez wierzchołki kątów ostrych rombu tworzą kąt 48°. Oblicz objętość ostrosłupa (z dokładnością do całości).

7.23. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o kącie ostrym α. Każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość b i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β. Oblicz objętość ostrosłupa (z dokładnością do całości) dla $\alpha = 20°$, $b = 3$ dm, $\beta = 46°$.

7.24. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez prostokątny, którego podstawy mają długości 3 cm i 8 cm. Krótsza przekątna graniastosłupa jest równa 12 cm i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

7.25. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Płaszczyzna przechodząca przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

7.26. Wysokość walca jest równa 7. Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 68°. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca. Wyniki zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

7.27. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem, w którym przekątna o długości 12,4 cm tworzy z bokiem równym wysokości walca kąt 33°. Oblicz objętość walca (z dokładnością do 1 cm^3).

7.28. Prostokąt o polu równym 800 cm^2 obraca się dookoła jednego z boków. Objętość otrzymanej bryły jest równa $16\,000\pi$ cm^3. Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły.

7.29. Stosunek pola powierzchni bocznej walca do jego pola powierzchni całkowitej jest równy 2 : 3. Wyznacz stosunek wysokości tego walca do promienia jego podstawy.

7.30. Tworząca stożka ma długość 12 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 25°. Oblicz objętość stożka (z dokładnością do całości).

7.31. Objętość stożka jest równa 240π cm^3, a pole jego przekroju osiowego wynosi 180 cm^2. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka (z dokładnością do 1 cm^2).

7.32. Dwa równe koła rozcięto w następujący sposób: pierwsze na cztery, a drugie – na trzy przystające wycinki. Wszystkie wycinki zwinięto w stożki. Przy którym podziale suma objętości stożków jest większa?

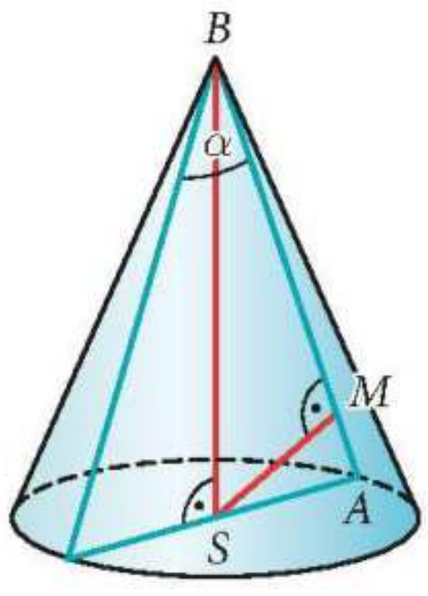
7.33. Kula i stożek mają równe objętości. Promień kuli jest równy 5 cm, a promień podstawy stożka jest równy 8 cm. Oblicz wysokość stożka.

7.34. Chociaż spadło niewiele śniegu, Maciek postanowił ulepić bałwana. Według niego idealny bałwan powinien składać się z trzech kul o średnicach w stosunku 5 : 4 : 3 oraz mieć wysokość 1,2 m. Oblicz, z ilu m^2 ogródka musi pochodzić śnieg potrzebny na bałwana. Przyjmij, że warstwa śniegu możliwego do wykorzystania ma grubość 1 cm.

7.35. Stopiono 1000 mosiężnych kulek o promieniu 1 cm każda i z otrzymanego stopu wykonano stożek o wysokości 10 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

7.36. Trapez prostokątny o wysokości 2 cm, dłuższej podstawie równej 5 cm i kącie ostrym o mierze 45° obraca się dookoła prostej zawierającej krótszą podstawę. Oblicz objętość otrzymanej w ten sposób bryły.

D **7.37.** Wykaż, że stosunek objętości stożka o promieniu SM i wysokości MB do objętości stożka przedstawionego na rysunku jest równy $\cos^3\frac{\alpha}{2}$.



7.38. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym poprowadzono płaszczyznę równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta dzieli wysokość ostrosłupa w stosunku 3 : 1, licząc od wierzchołka. Oblicz stosunek objętości brył, na które ta płaszczyzna podzieliła ostrosłup.

7.39. Ostrosłup pięciokątny o polu podstawy S podzielono płaszczyzną równoległą do podstawy na dwie części o jednakowych objętościach. Wyznacz pole tej części płaszczyzny, która jest zawarta wewnątrz ostrosłupa.

7.40. Stożek o wysokości H podzielono dwiema płaszczyznami równoległymi do podstawy na trzy części o jednakowych objętościach. Wyznacz wysokość środkowej z tych części.

7.41. W kulę wpisano walec. Promień podstawy walca jest mniejszy od promienia kuli o 2 dm, a wysokość walca jest mniejsza od promienia kuli o 1 dm. Oblicz promień kuli.

7.42. Na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, w którym krawędź podstawy jest równa a i kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę α, opisano stożek. Wyznacz objętość tego stożka.

7.43. W kulę o promieniu R wpisano stożek o tworzącej długości a. Wyznacz pole powierzchni bocznej stożka.

7.44. W stożek o wysokości h wpisano kulę o promieniu r. Wyznacz objętość stożka.

7.45. W kulę o promieniu R wpisano ostrosłup prawidłowy czworokątny. Kąt płaski przy wierzchołku tego ostrosłupa ma miarę α. Wyznacz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

7.46. W graniastosłup prosty, którego podstawą jest trapez równoramienny o kącie ostrym α, wpisano kulę o promieniu r. Wyznacz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Istnieje kula, której objętość wyraża się liczbą
A. mniejszą niż jej pole. **B.** równą jej polu. **C.** większą niż jej pole.

2. Oblicz z dokładnością do całości pole powierzchni całkowitej i objętość stożka, w którym kąt rozwarcia ma 70°, a wysokość jest równa 10.

3. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 4,2 dm. Wierzchołek górnej podstawy połączono ze środkami krawędzi dolnej podstawy odcinkami zawartymi w sąsiednich ścianach bocznych. Odcinki te tworzą kąt 50°. Oblicz objętość (z dokładnością do 1 dm^3) i pole powierzchni całkowitej (z dokładnością do 1 dm^2) tego graniastosłupa.

4. Pole powierzchni bocznej walca jest równe P, a jego pole powierzchni całkowitej wynosi Z. Wyznacz objętość tego walca.

5. Podstawą graniastosłupa jest równoległobok o bokach długości a i b oraz kącie α między nimi. Krawędź boczna graniastosłupa ma długość c i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β. Wyznacz objętość V graniastosłupa.

8. Zadania optymalizacyjne

Umiejętności:

- stosowanie pochodnych do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych

Zadania optymalizacyjne rozwiązywaliśmy już wcześniej. Początkowo sprowadzały się one do tego, że w określonym przedziale dziedziny znajdowaliśmy wartość największą lub najmniejszą funkcji kwadratowej. W trzeciej klasie, dzięki zastosowaniu własności pochodnej, można już było poszerzyć zakres badań o bardziej skomplikowane funkcje.

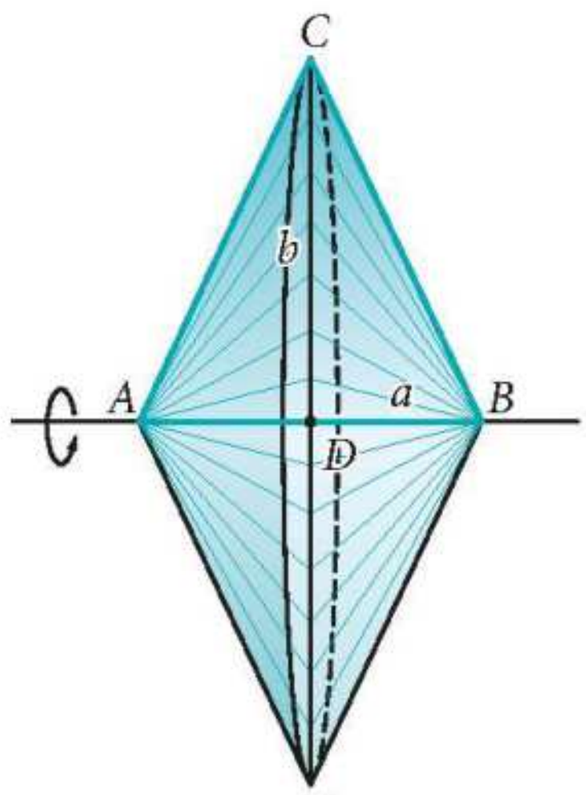
Teraz wykorzystamy pochodne do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych z geometrii przestrzeni.
Prześledźmy to na przykładach.

Przykład 1 ◂ zad. 8.4

Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 24 cm. Jakie długości powinny mieć boki tego trójkąta, aby objętość bryły powstałej z jego obrotu dookoła prostej zawierającej podstawę była największa?

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Otrzymana bryła jest sumą dwóch przystających stożków o wspólnej podstawie otrzymanej w wyniku obrotu wysokości DC trójkąta ABC. Zatem:
$|DC| = b$ – promień podstawy każdego z dwóch stożków,
$|DB| = a$ – wysokość każdego z dwóch stożków.

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi b^2 \cdot a = \frac{2}{3} \cdot \pi b^2 a$$

Skorzystamy z danych w zadaniu, aby wyrazić objętość za pomocą tylko jednej zmiennej:

$2|BC| + 2a = 24$

$|BC| = 12 - a$

$b^2 + a^2 = (12 - a)^2$ ⟵ twierdzenie Pitagorasa w $\triangle DBC$

$b^2 = 144 - 24a = 24(6 - a)$

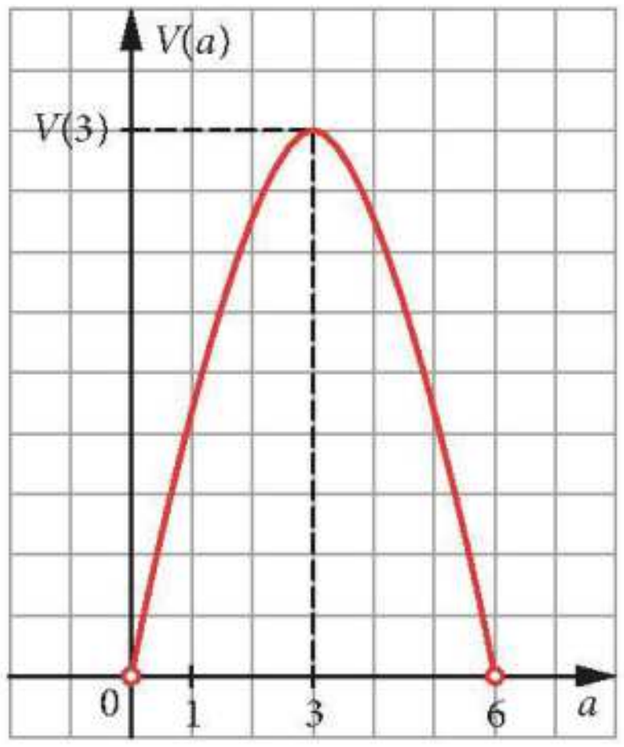
$V(a) = \frac{2}{3} \cdot \pi a \cdot 24(6 - a) = 16\pi \cdot (6 - a)a$

I sposób

Korzystamy z własności funkcji kwadratowej.

$$V(a) = 16\pi(6 - a)a$$

Współczynnik przy a^2 jest ujemny, czyli ramiona paraboli są skierowane do dołu. Funkcja $V(a)$ przyjmuje więc wartość największą dla a_w, które jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych, czyli dla $a = 3$.



Funkcję $V(a)$ rozpatrujemy w przedziale $(0; 6)$, ponieważ tylko dla argumentów z tego przedziału jej wartości odpowiadają objętości opisanej bryły. Zatem największa objętość wynosi:

$$V(3) = 144\pi \approx 452{,}16 \ \left[\text{cm}^3\right]$$

Dla $a = 3$ boki trójkąta ABC mają odpowiednio długości: podstawa $|AB| = 6$ cm i ramiona $|BC| = |AC| = 6$ cm.

II sposób

Korzystamy z własności pochodnej funkcji różniczkowalnej.

$$V(a) = 16\pi \cdot \left(6a - a^2\right)$$
$$V'(a) = 16\pi \cdot (6 - 2a)$$
$$D_V = D_{V'} = (0; 6)$$
$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 3$$
$$V'(a) > 0 \Leftrightarrow a \in (0; 3)$$
$$V'(a) < 0 \Leftrightarrow a \in (3; 6)$$

Dana jest funkcja f określona i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$.

- Jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a; b)$, to funkcja f jest w tym przedziale **rosnąca**.
- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a; b)$, to funkcja f jest w tym przedziale **malejąca**.

Zebrane informacje zestawiamy w tabeli.

a	$(0; 3)$	3	$(3; 6)$
$V'(a)$	$+$	0	$-$
$V(a)$	$\nearrow$	$V(3) = 144\pi$ maks.	$\searrow$

W punkcie, w którym funkcja różniczkowalna ma ekstremum, pochodna tej funkcji **zmienia znak**.

Funkcja $V(a)$ przyjmuje największą wartość dla $a = 3$ cm. Zatem wszystkie boki trójkąta powinny mieć tę samą długość, równą 6 cm.

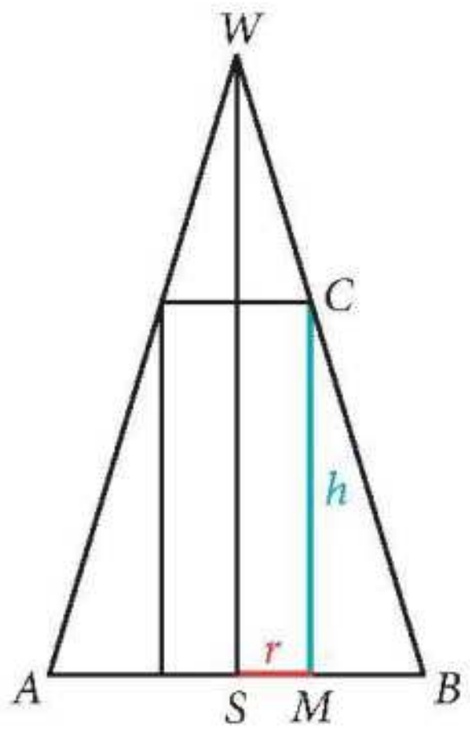
Odp.: $|AB| = |BC| = |AC| = 6$ cm

Przykład 2 ◂ zad. 8.8

W stożek o promieniu podstawy R i wysokości H wpisano walec o największej objętości. Wyznaczymy wymiary tego walca.

Rozwiązanie

Przekrojem osiowym stożka z wpisanym walcem jest trójkąt równoramienny z wpisanym w niego prostokątem.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:
r jest promieniem podstawy walca,
h – wysokością tego walca.

Objętość walca wyraża się wzorem $V = \pi r^2 h$ – jest zależna od dwóch zmiennych.

Zauważmy, że $\triangle SBW \sim \triangle MBC$, zatem $\frac{|WS|}{|SB|} = \frac{|CM|}{|MB|}$,

czyli:

$$\frac{H}{R} = \frac{h}{R-r}$$

$$h = \frac{H(R-r)}{R}$$

Objętość V walca możemy teraz wyrazić za pomocą jednej zmiennej r:

$$V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{H(R-r)}{R} \qquad \longleftarrow H \text{ oraz } R \text{ są wielkościami danymi}$$

$$V(r) = \frac{H\pi}{R}(R-r)r^2$$

$$D_V = D_{V'} = (0;\ R)$$

Do wyznaczenia pochodnej wygodniej jest zapisać funkcję w postaci uporządkowanego wielomianu ze stałą wyłączoną przed nawias.

$$V(r) = \frac{H\pi}{R}\left(-r^3 + Rr^2\right)$$

$$V'(r) = \frac{H\pi}{R} \cdot \left(-3r^2 + 2Rr\right) = \frac{-H\pi}{R} \cdot r(3r - 2R)$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}R$$

$$V'(r) > 0 \Leftrightarrow r \in \left(0;\ \frac{2}{3}R\right)$$

$$V'(r) < 0 \Leftrightarrow r \in \left(\frac{2}{3}R;\ R\right)$$

r	$\left(0;\ \frac{2}{3}R\right)$	$\frac{2}{3}R$	$\left(\frac{2}{3}R;\ R\right)$
$V'(r)$	$+$	0	$-$
$V(r)$	$\nearrow$	maks.	$\searrow$

Walec o największej objętości ma więc promień $r = \frac{2}{3}R$.

Wyznaczamy teraz wysokość tego walca.

$$h = \frac{H\left(R - \frac{2}{3}R\right)}{R} = \frac{H}{3}$$

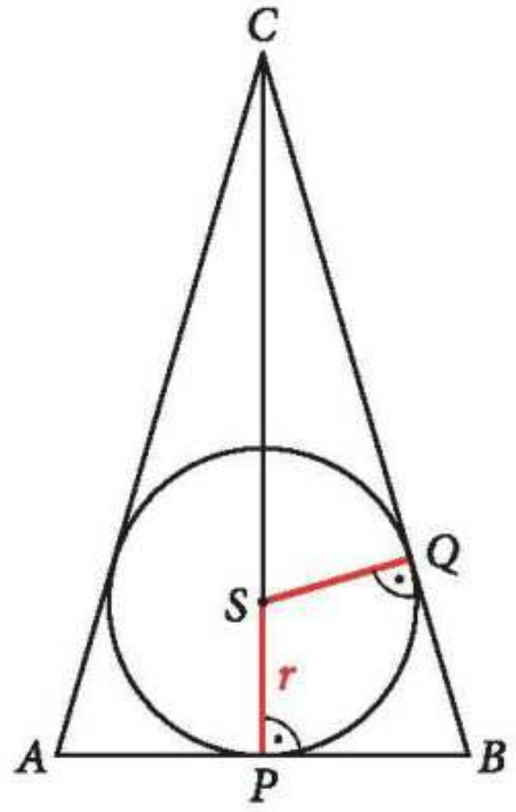
Odp.: Walec o największej objętości ma promień $r = \frac{2}{3}R$ i wysokość $h = \frac{1}{3}H$.

Przykład 3 ◂ zad. 8.11

Na kuli o promieniu r i środku S można opisać stożek. Jaka powinna być wysokość tego stożka, aby jego objętość była jak najmniejsza?

Rozwiązanie

Narysujmy przekrój osiowy stożka opisanego na kuli i przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku. Otrzymamy trójkąt równoramienny ABC opisany na okręgu o promieniu r.



Do wyznaczenia objętości stożka potrzebna jest jego wysokość $|CP| = h$ oraz promień podstawy $|PB|$. Obie te wielkości oraz dany promień r kuli są wzajemnie powiązane. Znajdziemy te zależności, korzystając z podobieństwa trójkątów CPB i CQS oraz z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CPB.

$$\frac{|PB|}{|QS|} = \frac{|CB|}{|CS|} \qquad \longleftarrow \triangle CPB \sim \triangle CQS$$

$$\frac{|PB|}{r} = \frac{|CB|}{h - r}$$

$$|CB| = \frac{|PB|(h - r)}{r} = |PB|\left(\frac{h}{r} - 1\right)$$

Na mocy twierdzenia Pitagorasa w trójkącie CPB otrzymujemy drugie równanie.

$$h^2 + |PB|^2 = |CB|^2$$

$$h^2 + |PB|^2 = |PB|^2\left(\frac{h^2}{r^2} - 2\frac{h}{r} + 1\right) \qquad \longleftarrow \text{obie strony równania mnożymy przez } r^2$$

$$h^2r^2 + |PB|^2r^2 = |PB|^2h^2 - 2|PB|^2hr + |PB|^2r^2$$

$$h^2r^2 = |PB|^2h^2 - 2|PB|^2hr \qquad \longleftarrow \text{obie strony równania dzielimy przez } h$$

$$hr^2 = |PB|^2 h - 2|PB|^2 r$$

$$|PB|^2(h - 2r) = hr^2 \qquad \longleftarrow \text{obie strony równania dzielimy przez } h - 2r$$

$$|PB|^2 = \frac{hr^2}{h - 2r}$$

Możemy teraz wyznaczyć objętość stożka w zależności od danego promienia r kuli oraz zmiennej wysokości h stożka:

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi|PB|^2 h = \frac{\pi h^2 r^2}{3(h - 2r)} = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{h^2}{h - 2r}$$

Z warunków zadania wynika, że $h > 2r$, zatem dziedziną wyznaczonej funkcji jest $D = (2r;\ \infty)$.

Szukamy takiego argumentu h funkcji $V(h)$, dla którego ta funkcja przyjmuje najmniejszą wartość.

Zwróćmy uwagę, że r jest w tym wypadku wielkością daną, więc przy obliczaniu pochodnej traktujemy ją jako stałą.

$$V'(h) = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{2h(h - 2r) - h^2}{(h - 2r)^2} = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{h^2 - 4rh}{(h - 2r)^2} = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{h(h - 4r)}{(h - 2r)^2},\ D' = (2r;\ \infty)$$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{h(h - 4r)}{(h - 2r)^2} = 0 \ \text{ i } \ h \in D' \Leftrightarrow h = 4r$$

$$V'(h) > 0 \Leftrightarrow h \in (4r;\ \infty)$$

$$V'(h) < 0 \Leftrightarrow h \in (2r;\ 4r)$$

h	$(2r;\ 4r)$	$4r$	$(4r;\ \infty)$
$V'(h)$	$-$	0	$+$
$V(h)$	$\searrow$	min.	$\nearrow$

W punkcie $h = 4r$ funkcja ma minimum. Jest ono jednocześnie najmniejszą wartością funkcji w całej dziedzinie.

Odp.: Wysokość stożka o najmniejszej objętości jest równa $4r$.

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

8.1. Objętości pewnych brył są liczone według wzoru $V(x) = 3\pi(9 - x)x$ dla $x \in (0;\ 9)$. Największą objętość ma bryła, dla której x jest

A. równe 4,5. **B.** równe 6. **C.** równe 3. **D.** różne od 4, 5, 6 i 3.

8.2. Objętości pewnych brył są liczone według wzoru $V(x) = \pi(6 - x)x^2$ dla $x \in (0; 6)$. Największa objętość wynosi

A. 36π. **B.** 16π. **C.** 12π. **D.** 32π.

8.3. Funkcja $P_c(h)$ opisuje pole powierzchni całkowitej stożka opisanego na kuli o promieniu 6 w zależności od jego wysokości. Dziedziną tej funkcji jest zbiór

A. $(0; 6)$. **B.** $(0; 12)$. **C.** $(6; \infty)$. **D.** $(12; \infty)$.

8.4. Romb o boku długości a obraca się wokół jednej z przekątnych. Wyznacz długości przekątnych tego rombu tak, aby objętość powstałej bryły była jak największa.

8.5. Wyznacz wysokość tego ze stożków o tworzącej a, którego objętość jest największa.

8.6. W ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a i wysokości H wpisano walec w ten sposób, że dolna podstawa walca jest zawarta w podstawie ostrosłupa, a górna podstawa jest styczna do czterech ścian bocznych ostrosłupa. Wyznacz wymiary walca o największej objętości oraz oblicz tę objętość.

8.7. Jakie wymiary powinna mieć puszka do konserw w kształcie walca o objętości V, aby na jej wykonanie trzeba było zużyć jak najmniej blachy o ustalonej grubości?

8.8. W stożek o wysokości 8 i polu powierzchni bocznej 60π wpisano walec o największej objętości. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

8.9. Rozpatrujemy ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których odległość środka podstawy od krawędzi bocznej jest równa d. Wyznacz wysokość takiego ostrosłupa, którego objętość jest najmniejsza.

8.10. Wyznacz największą objętość walca wpisanego w kulę o promieniu R.

* **8.11.** Na kuli opisano ostrosłup prawidłowy czworokątny o najmniejszej objętości. Oblicz stosunek objętości ostrosłupa do objętości kuli.

* **8.12.** W stożek o promieniu podstawy R i wysokości H wpisano prostopadłościan, w którym stosunek krawędzi podstawy jest równy 2. Wyznacz wymiary prostopadłościanu o największej objętości.

* **8.13.** W kulę o promieniu 3 wpisano ostrosłup prawidłowy trójkątny o największej objętości. Jaka jest wysokość tego ostrosłupa?

* **8.14.** Wyznacz największą objętość stożka wpisanego w kulę o promieniu 1.

* **8.15.** Jedna z krawędzi ostrosłupa trójkątnego ma długość x, a pozostałe krawędzie mają długość 1. Dla jakiej wartości x objętość ostrosłupa jest największa?

Prosto do matury

1. Obwód przekroju osiowego walca jest równy 4. Funkcja $V(r)$ opisuje objętość tego walca w zależności od promienia r jego podstawy.
Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Wysokość tego walca jest równa $2 - 2r$.
B. Funkcję $V(r)$ można opisać wzorem $V(r) = -2\pi r^3 + 2\pi r^2$.
C. Dziedziną funkcji $V(r)$ jest zbiór $(0; 2)$.

2. Wyznacz największe pole powierzchni bocznej stożka, którego przekrój osiowy ma obwód równy 12.

3. Suma długości wszystkich krawędzi podstawy i wysokości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 36. Wyznacz długość krawędzi podstawy ostrosłupa, którego objętość jest największa, i oblicz tę objętość.

D **4.** Wykaż, że objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół przeciwprostokątnej jest największa, jeśli ten trójkąt jest równoramienny.

5. Wyznacz największą objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wpisanego w kulę o promieniu R.

9. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–19 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Ile jest płaszczyzn przechodzących przez punkt A i prostopadłych do danej prostej k takiej, że $A \notin k$?

A. zero **B.** jedna **C.** dwie **D.** nieskończenie wiele

2. Proste PA i PB są prostopadłe i nachylone do płaszczyzny π pod kątem 45°. Punkt P jest oddalony od płaszczyzny π o 3 cm. Odległość między punktami A i B leżącymi na płaszczyźnie π jest równa

A. $3\sqrt{2}$ cm. **B.** 4 cm. **C.** $6\sqrt{2}$ cm. **D.** 6 cm.

3. Krysia przesypała piasek z wypełnionej foremki sześciennej o krawędzi 5 cm do foremki w kształcie stożka o wysokości i promieniu podstawy równych 5 cm. Jaką część stożkowej foremki wypełnił przesypany piasek?

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** $\frac{3}{\pi}$ **D.** Piasku było za dużo, więc się wysypał.

4. W pewnym gospodarstwie stoi zbiornik na deszczówkę. Zbiornik ma kształt prostopadłościanu o wysokości 0,5 m. Ile czasu musi padać deszcz dający 20 mm opadu na godzinę, aby zbiornik całkowicie się zapełnił?

A. 7 godzin **B.** 5 godzin **C.** 25 godzin **D.** 50 godzin

5. Objętość sześcianu jest równa 343 cm^3. Wskaż pole powierzchni tego sześcianu.

A. 126 cm^2 **B.** 294 cm^2 **C.** $343\sqrt{2}$ cm^2 **D.** 360 cm^2

6. Dzieci mają w ogrodzie plastikowy basen. Podłogą basenu jest koło o średnicy 2 m, a jego ściany są prostopadłe do podłogi. Wodę do tego basenu trzeba nalewać dziesięciolitrowym wiadrem. Jaka będzie wysokość słupa wody po wlaniu 20 wiader? Wybierz najlepsze przybliżenie wyniku.

A. 64 cm **B.** 6,4 cm **C.** 10 cm **D.** 12 cm

7. Przyjmijmy, że pomarańcza jest kulą o średnicy 7 cm. Wyciśnięty sok stanowi 60% objętości owocu. Ile pomarańczy trzeba zużyć, aby otrzymać 0,5 litra soku?

A. 4 **C.** 6

B. 5 **D.** 7

8. Które z podanych zdań jest fałszywe?
A. Ostrosłup trójkątny jest czworościanem.
B. Czworościan foremny jest ostrosłupem prawidłowym trójkątnym.
C. Czworościan, który ma wszystkie krawędzie równe, jest foremny.
D. Ostrosłup prawidłowy trójkątny jest czworościanem foremnym.

9. V_1 jest objętością kuli o promieniu r_1, V_2 jest objętością kuli o promieniu r_2 i $V_2 = 3V_1$. Zatem
A. $\frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{3}$. **B.** $r_2 = 3r_1\sqrt[3]{3}$. **C.** $r_2^3 - r_1^3 = 3r_1^3$. **D.** $r_2 = r_1\sqrt{3}$.

10. Suma odległości dowolnego punktu sześcianu o krawędzi 5 cm od wszystkich ścian sześcianu jest równa
A. 15 cm. **B.** 20 cm. **C.** 25 cm. **D.** 30 cm.

11. Wskaż liczbę przekątnych graniastosłupa o podstawie pięciokątnej.
A. 5 **B.** 10 **C.** 15 **D.** 20

12. Wskaż liczbę krawędzi graniastosłupa o 12 ścianach.
A. 24 **B.** 30 **C.** 32 **D.** 36

13. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna o długości a tworzy z podstawą kąt 60°. Wskaż objętość tego ostrosłupa.
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **C.** $\frac{1}{3}a^3$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

14. Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej czworościanu foremnego do płaszczyzny podstawy jest równy
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15. Czworościan ma pięć krawędzi o długości l cm, a szóstą o długości 10 cm. Zatem l jest
A. równe 5.
B. mniejsze od 5.
C. równe $2\sqrt{3}$.
D. większe od 5.

16. Kąt rozwarcia stożka, którego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest półkolem, jest równy
A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

17. V_a oznacza objętość sześcianu o krawędzi a, zaś V_{3a} – objętość sześcianu o krawędzi $3a$. Zatem
A. $V_{3a} = 3V_a$. **B.** $V_{3a} = 9V_a$. **C.** $V_a = \frac{1}{18}V_{3a}$. **D.** $V_{3a} = 27V_a$.

18. Krawędzie czworościanu są przekątnymi ścian pewnego sześcianu o krawędzi a. Zatem wysokość tego czworościanu wynosi

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. **D.** $3\sqrt{3}a$.

19. Stosunek pól powierzchni dwóch ośmiościanów foremnych jest równy $1 : 4$. Stosunek objętości tych ośmiościanów jest równy

A. $1 : 2$. **B.** $1 : 8$. **C.** $1 : 16$. **D.** $1 : 64$.

W zadaniach 20–32 oceń prawdziwość podanych zdań.

20. Płaszczyzna jest wyznaczona jednoznacznie przez

A. dwie różne proste. **B.** trzy niewspółliniowe punkty. **C.** prostą i punkt.

21. Punkty A, B, C i D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Skośne są zatem proste

A. AB i CA. **B.** BC i AD. **C.** AC i BD.

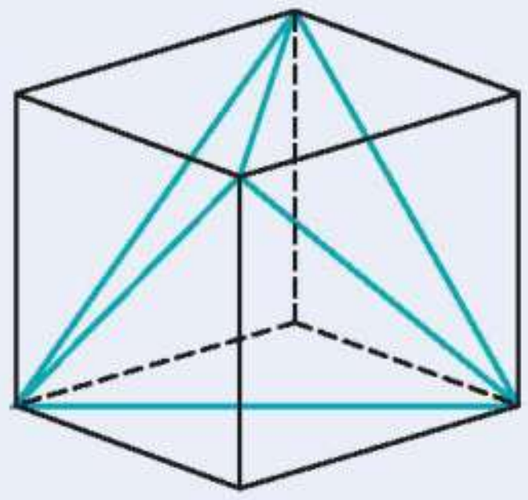
22. Każdy wielościan wypukły ma mniej

A. wierzchołków niż krawędzi.

B. ścian niż wierzchołków.

C. ścian niż krawędzi.

23. Cztery wierzchołki sześcianu o krawędzi 1 cm łączymy nitką każdy z każdym, jak na rysunku, i otrzymujemy szkielet pewnego wielościanu T.



A. Wielościan T jest czworościanem foremnym.

B. Objętość wielościanu T jest równa $\frac{1}{4}$ cm^3.

C. Pole powierzchni wielościanu T jest równe $2\sqrt{3}$ cm^2.

24. Drewnianą, pomalowaną kostkę sześcienną rozpiłowano na 125 przystających sześcianików. Wśród nich

A. 27 jest niepomalowanych.

B. 36 ma pomalowane dokładnie dwie ściany.

C. 81 ma pomalowaną co najwyżej jedną ścianę.

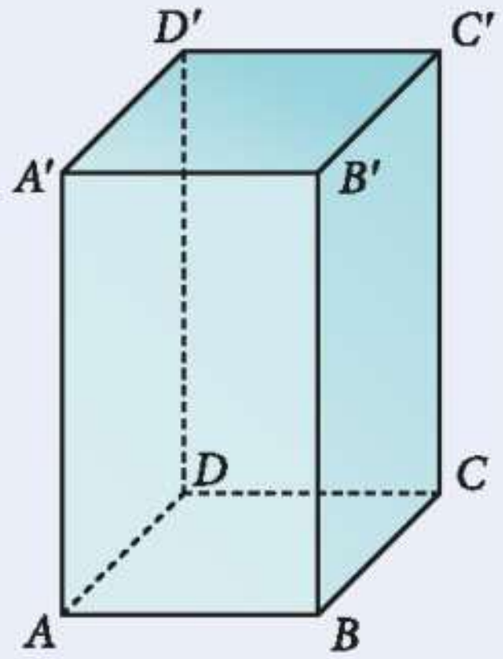
25. Dany jest graniastosłup prosty prawidłowy o podstawie dziesięciokątnej. Przekrojem płaskim tego graniastosłupa

A. może być wielokąt foremny.

B. może być prostokąt.

C. jest wielokąt o co najwyżej dwudziestu bokach.

26. Na rysunku przedstawiono prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$.



A. Prosta DC' jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$.

B. Prosta DC jest prostopadła do płaszczyzny $ADD'A'$.

C. Prosta DC' jest równoległa do płaszczyzny $ABB'A'$.

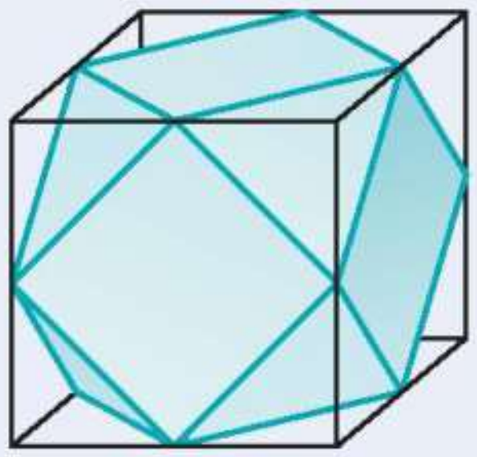
27. W pewnym czworościanie cztery krawędzie mają długość a i dwie długość b, gdzie $a \neq b$.

A. Każda ze ścian tego czworościanu jest trójkątem równoramiennym.

B. Co najwyżej jedna ze ścian tego czworościanu jest trójkątem równobocznym.

C. Każda ze ścian tego czworościanu może być trójkątem nierównobocznym.

28. Z kostki sześciennej odcięto we wszystkich narożach takie same ostrosłupy jak na rysunku. Otrzymany w ten sposób wielościan ma



A. 12 wierzchołków.

B. 24 krawędzie.

C. 14 ścian.

29. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny.

A. Kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi tego graniastosłupa ma miarę $120°$.

B. Przekrój, do którego należą środki okręgów opisanych na podstawach tego graniastosłupa, jest prostokątem.

C. Kąt nachylenia przekątnej tego graniastosłupa do płaszczyzny podstawy jest nie większy niż $60°$.

30. Istnieje ostrosłup prawidłowy sześciokątny o polu powierzchni całkowitej 1514, który ma

A. objętość mniejszą niż $\frac{1}{1514}$.

B. pole powierzchni bocznej równe 514.

C. pole podstawy równe 514.

31. Dany jest n-kątny ostrosłup prawidłowy $(n > 3)$.
A. Spodek wysokości tego ostrosłupa może być jednym z wierzchołków podstawy.
B. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod takim samym kątem.
C. Ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi.

32. Punkt O jest spodkiem wysokości ostrosłupa trójkątnego, w którym wszystkie krawędzie boczne tworzą z płaszczyzną podstawy kąty o równych miarach.
A. Punkt O jest punktem przecięcia środkowych trójkąta w podstawie.
B. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa są tej samej długości.
C. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

33. Pole powierzchni sześcianu jest równe 150. Oblicz stosunek długości krawędzi sześcianu do długości jego przekątnej.

34. Oblicz cosinus kąta między przekątną sześcianu a płaszczyzną jego podstawy.

35. Wymiary prostopadłościanu są w stosunku $1 : 2 : 3$. Najkrótsza krawędź ma długość $\sqrt{2}$. Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu.

36. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego każda krawędź ma długość 6.

37. Przekątna podstawy prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest dwa razy dłuższa od wysokości tego prostopadłościanu. Wyznacz kąt, który tworzy płaszczyzna przechodząca przez przekątną podstawy i jeden wierzchołek prostopadłościanu z płaszczyzną podstawy tego prostopadłościanu.

38. Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadrat o boku a. Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi. W tym ostrosłupie wyznacz
a) jego wysokość.
b) kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy (z dokładnością do 1°).
c) kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

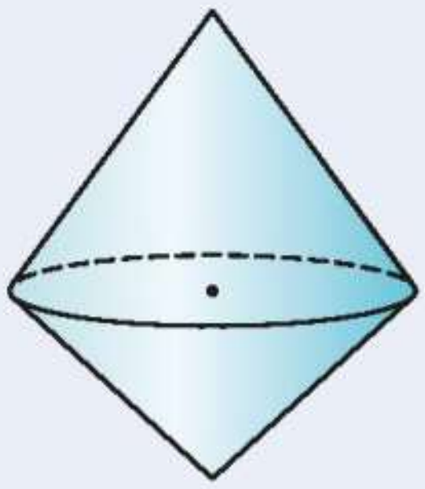
39. Promień kuli i promień podstawy stożka są równe 2. Objętości tych brył są równe. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

40. Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy jest cztery razy krótsza od wysokości, jest równa 256. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

41. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka o kącie rozwarcia 90° i średnicy podstawy równej 18.

42. Średnica podstawy stożka jest trzy razy dłuższa od jego wysokości. Objętość bryły jest równa 144π. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

43. Stosunek długości tworzących stożków połączonych wspólną podstawą (zob. rysunek) jest równy $3:5$, a pole powierzchni bocznej mniejszego stożka wynosi 18. Oblicz pole powierzchni całej bryły.



44. Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoboczny o boku a. Objętość i pole powierzchni bocznej tego stożka wyrażają się taką samą liczbą. Oblicz wartość a.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

45. W prostopadłościanie przekątne ścian bocznych wychodzące z tego samego wierzchołka tworzą kąt 50°. Każda z tych przekątnych ma długość 5 dm. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość prostopadłościanu (z dokładnością do całości).

46. Do prostopadłościennego naczynia z wodą wpadła metalowa kostka sześcienna o krawędzi długości 2 cm. O ile milimetrów podniósł się poziom wody, jeśli z naczynia nie wylała się ani kropla, a podstawa naczynia ma wymiary 10 cm × 20 cm?

47. W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\sin\alpha = 0{,}4$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

48. Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią podstawy o długości 12 kąt o mierze 61°. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa (z dokładnością do całości).

49. Sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi $5\sqrt{2}$ przecięto płaszczyzną wyznaczoną przez punkty A, C i środek krawędzi $A'D'$. Oblicz pole przekroju.

50. Krótsza przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $4\sqrt{3}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

51. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prostego, w którym podstawa jest rombem o przekątnych długości 12 cm i 16 cm, a przekątna ściany bocznej ma długość 15 cm.

52. Pionowy przekrój poprzeczny wału ochronnego ma kształt trapezu równoramiennego, którego górna podstawa jest równa 5 m, a ramiona o długości 6 m są nachylone do poziomu pod kątem 60°. Oblicz dolną szerokość wału. Ile metrów sześciennych ziemi potrzeba do usypania takiego wału o długości 1 km (z dokładnością do 1 m^3)?

53. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ściany bocznej opuszczona z wierzchołka ostrosłupa jest równa 10, a kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy ma miarę 63°. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa (z dokładnością do całości).

54. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o objętości $2\sqrt{26}$ jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz krawędź podstawy.

55. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi. Miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równa 2α. Wyznacz objętość tego ostrosłupa. Podaj warunek, który musi spełniać kąt α.

56. Dany jest czworościan foremny o krawędzi długości a.

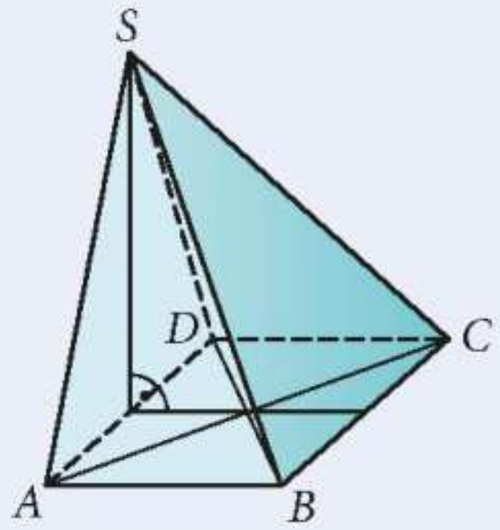
a) Wyznacz objętość V i pole P_c powierzchni całkowitej czworościanu.

b) Wyznacz cosinus kąta α między sąsiednimi ścianami tego czworościanu. Podaj miarę tego kąta z dokładnością do 1°.

c) Wyznacz pole S przekroju czworościanu płaszczyzną poprowadzoną przez wybraną krawędź i przecinającą przeciwległą krawędź pod danym kątem β.

57. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przez krawędź podstawy o długości a poprowadzono płaszczyznę, która dzieli kąt dwuścienny α między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy ostrosłupa na połowy. Wyznacz pole otrzymanego przekroju.

58. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt. Ściana ADS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy, $|AB| = 4$, $|BC| = 6$, $|AS| = |DS| = 2\sqrt{21}$. Wyznacz kąt nachylenia krawędzi CS do płaszczyzny podstawy.



59. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej c. Wszystkie krawędzie boczne mają długość b. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

60. Podstawą ostrosłupa jest trapez prostokątny o podstawach 12 i 6. Wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

61. Obracając prostokąt dookoła jednego boku, otrzymujemy walec o objętości V_1, a obracając go dookoła drugiego boku, otrzymujemy walec o objętości V_2. Wyznacz pole tego prostokąta. Wykonaj obliczenia dla $V_1 = 1{,}44\pi$ i $V_2 = 1{,}2\pi$.

62. Promień podstawy walca jest równy r, a przekątna przekroju osiowego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wyznacz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.

63. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej stożka o kącie rozwarcia 2α i promieniu podstawy równym r.

64. W podstawę stożka wpisano kwadrat o boku a. Płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek stożka i zawierająca jeden z boków tego kwadratu tworzy w przecięciu z powierzchnią stożka trójkąt, w którym kąt przy wierzchołku jest równy α. Wyznacz objętość stożka. Jaki warunek musi spełniać kąt α, aby zadanie miało rozwiązanie?

65. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 i 8 obrócono najpierw wokół krótszej, a następnie wokół dłuższej przyprostokątnej. Oblicz stosunek pól powierzchni i stosunek objętości powstałych stożków.

66. Wyznacz stosunek pól powierzchni kuli i sześcianu mających równe objętości.

67. Poprowadzono płaszczyznę równoległą do podstawy stożka, dzielącą wysokość tego stożka w stosunku 2 : 3, licząc od wierzchołka. W ten sposób otrzymano dwie bryły. Wyznacz stosunek objętości tych brył.

68. Promień kuli wpisanej w stożek wynosi r, a kąt rozwarcia stożka ma miarę 2α. Wyznacz objętość stożka.

69. Na stożku, którego pole powierzchni bocznej jest trzykrotnie większe od pola podstawy, opisano kulę o promieniu R. Wyznacz wysokość stożka.

70. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest trójkąt o boku a. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wyznacz objętość stożka wpisanego w ten ostrosłup.

71. Stożek wpisano w walec o wysokości h. Podstawa stożka jest podstawą walca, a wierzchołek stożka leży w środku górnej podstawy walca. Pola powierzchni bocznych stożka i walca są równe. Wyznacz objętość stożka oraz kąt α, który tworzy wysokość stożka z jego tworzącą.

72. W ostrosłupie $ABCS$ wpisanym w stożek podstawa ABC jest trójkątem równoramiennym, w którym $|AC| = |AB| = a$ i $\sphericalangle BAC = \alpha$. Ściana boczna BCS ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β. Wyznacz objętość stożka.

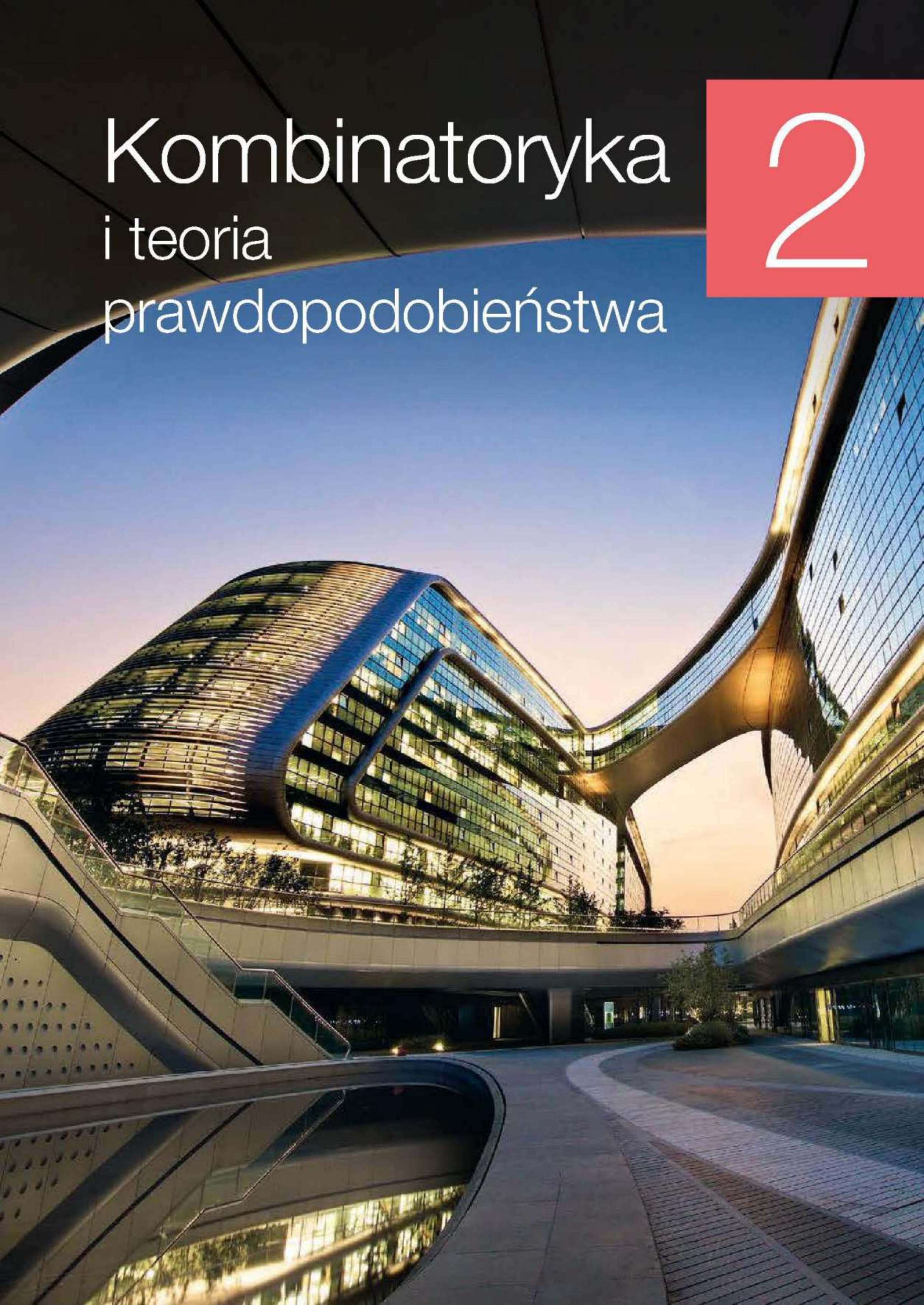
73. W stożek, którego przekrojem osiowym jest trójkąt równoboczny, wpisano walec o największej objętości. Wyznacz stosunek wysokości walca do promienia podstawy stożka.

74. Wyznacz długość krawędzi podstawy takiego ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego opisanego na kuli o promieniu 3, którego objętość jest jak najmniejsza.

75. Wyznacz największą objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o polu powierzchni całkowitej S.

Kombinatoryka i teoria prawdopodobieństwa

2



1. Permutacje i wariacje

Umiejętności:

- wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych

Korzystanie z klasycznej definicji prawdopodobieństwa wymaga precyzyjnego wyznaczenia liczby wszystkich zdarzeń elementarnych w danym doświadczeniu losowym oraz liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających interesującemu nas zdarzeniu losowemu.

Zanim przejdziemy do zagadnień poświęconych rachunkowi prawdopodobieństwa, zajmiemy się uporządkowaniem i rozszerzeniem teorii związanej ze zliczaniem liczby zdarzeń w danym doświadczeniu losowym, inaczej mówiąc – zagadnieniami **kombinatorycznymi**.

Nauka zajmująca się zliczaniem, na ile sposobów może zajść dane zdarzenie losowe, jest częścią działu nazywanego w matematyce **kombinatoryką**.

Przypomnijmy reguły, z których korzystaliśmy wcześniej.

Twierdzenie

Reguła mnożenia

Jeśli zbiór A ma m elementów, a zbiór B ma n elementów, to liczba par (x, y) takich, że $x \in A$ i $y \in B$, jest równa $m \cdot n$.

Regułę mnożenia można uogólnić na n ($n \in \mathbf{N}$, $n > 1$) zbiorów, z których każdy ma skończoną liczbę elementów.

Twierdzenie

Reguła dodawania

Jeżeli zbiory A i B są rozłączne, to $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$.

Przykład 1

a) O godzinie 12^{00} w karcie dań było 5 zup, 7 drugich dań i 3 desery. Na ile sposobów można było wybrać zestaw obiadowy składający się z zupy, drugiego dania i deseru?

b) Po godzinie 13^{00} do menu dodano 4 zupy, 3 drugie dania i 2 desery. Ile obecnie jest możliwości wyboru pełnych zestawów obiadowych?

Rozwiązanie

a) Korzystamy z reguły mnożenia. Wszystkich zestawów obiadowych było:

$5 \cdot 7 \cdot 3 = 105$

b) W tym przypadku możliwych zestawów jest:

$(5 + 4) \cdot (7 + 3) \cdot (3 + 2) = 450$ ⟵ reguła mnożenia i reguła dodawania

Odp.: a) 105 b) 450

Przypomnijmy dwa omówione w trzeciej klasie sposoby losowania.

Zakładamy, że w urnie mamy pewną liczbę ponumerowanych kul. Czynność wyjmowania kuli z urny można wielokrotnie powtarzać. Rozróżniamy dwa sposoby losowania – obydwa uwzględniające kolejność losowanych numerów.

1. Przed każdym losowaniem stan urny jest taki sam. Inaczej mówiąc, po wylosowaniu (i zanotowaniu wyniku) wyciągnięta kula wrzucana jest z powrotem do urny. W takiej sytuacji mówimy o **losowaniu ze zwracaniem**.
2. Raz wyjęta kula nie wraca do urny. Taki sposób losowania nazywamy **losowaniem bez zwracania**.

Permutacje

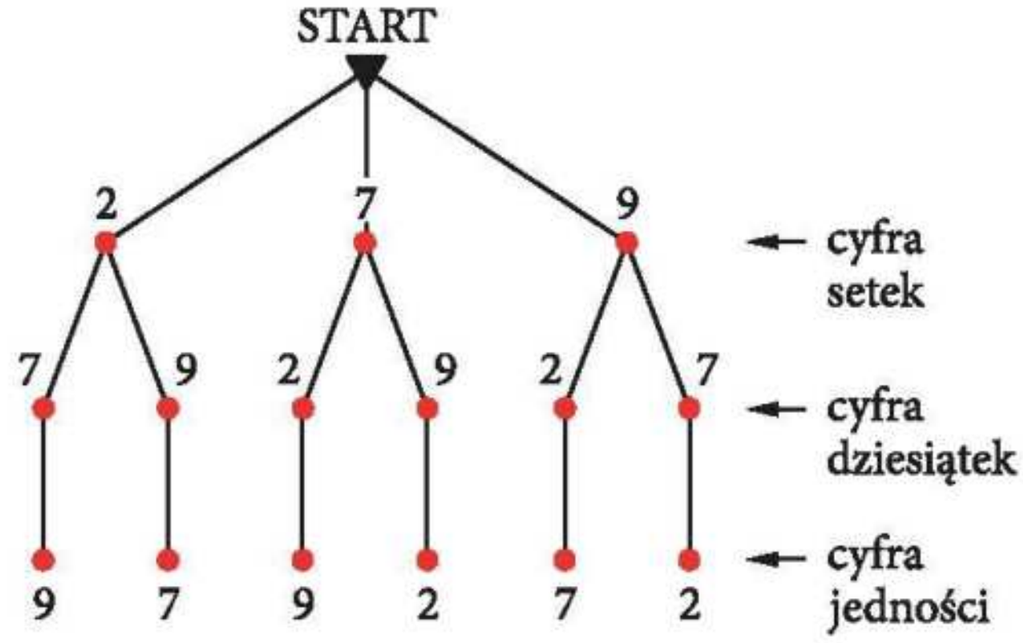
Szczególnym przypadkiem losowania kolejno elementów bez zwracania jest wybieranie **wszystkich** kul z urny. Oznacza to, że jeżeli mamy w niej n ponumerowanych kul, to losujemy n razy bez zwracania i interesuje nas kolejność wylosowanych kul.

Przykład 2

Trzy klocki podpisane 2, 7, 9 ustawiamy tak, aby przedstawiały trzycyfrowe liczby. Ile jest możliwości takich ustawień?

Rozwiązanie

Możemy sobie wyobrazić, że klocki są w worku. Pierwszy wyciągnięty klocek postawimy na miejscu setek układanej liczby, drugi – na miejscu dziesiątek, trzeci – na miejscu jedności.
Na rysunku obok przedstawiono drzewko wszystkich możliwości.



Mamy więc $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ możliwych wyników. Zbudowane w ten sposób liczby to:
279, 297, 729, 792, 927, 972
Zapisane są za pomocą tych samych cyfr, tylko ustawionych w różnej kolejności.

Odp.: 6

Przykład 3 ◂ zad. 1.5

Ustawiamy pięć osób w szeregu. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Rozwiązanie

Osobę, którą ustawimy w szeregu jako pierwszą, wybieramy spośród pięciu osób, drugą – spośród czterech itd. Wszystkich możliwych ustawień jest zatem:
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Odp.: 120

Takie ustawianie wszystkich elementów skończonego zbioru w ciąg nazywamy permutowaniem zbioru, a każde konkretne ustawienie – **permutacją** jego elementów. Powiemy więc, że jest:

- 6 permutacji zbioru {2, 7, 9},
- 120 permutacji zbioru pięciu osób.

Wniosek

Liczba wszystkich permutacji zbioru n-elementowego jest równa:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Przykład 4 ◂ zad. 1.8

Ile jest takich permutacji zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, w których 3 i 4 występują obok siebie w kolejności wzrastania?

Rozwiązanie

Dobrymi ustawieniami są np.: 23456, 34625, 52346.
Jak obliczyć wszystkie możliwości bez ich wypisywania? Wyobraźmy sobie taki przebieg losowania, w którym otrzymamy wyłącznie sprzyjające zdarzenia. Do urny wrzucamy klocki z cyframi 2, 3, 4, 5, 6, z tym, że te dwa oznaczone „3” i „4” sklejamy w odpowiedniej kolejności. Teraz, tak naprawdę, mamy w urnie 4 klocki. Możemy je kolejno ustawić na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sposoby.

Odp.: 24

Silnia

Definicja

Dla liczby naturalnej $n > 1$ symbol $n!$ (n **silnia**) oznacza iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Przyjmujemy również, że $0! = 1$ i $1! = 1$.

Mamy więc:

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 2 \cdot 1 = 2$
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ itd.

n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5 040
3	6	8	40 320
4	24	9	362 880
5	120	10	3 628 800

Wniosek

Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$: $\quad n! = n \cdot (n-1)!$

Możemy teraz krótko zapisać, że liczba permutacji zbioru:

- 3-elementowego jest równa 3!,
- 10-elementowego jest równa 10! itd.

Przykład 5 ◀ zad. 1.10

Obliczymy:

a) $\frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

b) $\frac{3! \cdot 4!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5}$

c) $\frac{8!}{7!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 8$

d) $\frac{114!}{113!} = \frac{113! \cdot 114}{113!} = 114$

e) $\frac{27!}{25!} = \frac{25! \cdot 26 \cdot 27}{25!} = 26 \cdot 27 = 702$

f) $\frac{4! \cdot 4! \cdot 8!}{3! \cdot 6!} = \frac{4 \cdot 4! \cdot 8!}{6!} = \frac{4 \cdot 4! \cdot 7 \cdot 8}{1} = 5376$

Zauważmy, że:

- $2! \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$, ale $(2 \cdot 3)! = 6! = 720$,
- $\frac{5!}{2!} = 60$, ale $\left(\frac{5}{2}\right)!$ nie jest określone.

Przykład 6 ◂ zad. 1.11

Na użytek zadania wyrazami będziemy nazywać dowolne ciągi liter, niekoniecznie znaczące.
Ile różnych wyrazów można ułożyć z liter słowa
a) ANAGRAM? b) NIANIA?

Rozwiązanie

a) Przykładami ułożonych wyrazów są:
ANAGRAM, GANARAM, AAGRAMN, ARNAGAM
Do dyspozycji mamy 7 liter, które możemy permutować na 7! sposobów. Jednak niektóre spośród permutacji dadzą identyczne wyrazy, gdyż przestawienie w nich liter A niczego nie zmieni. Zatem liczba wszystkich możliwości jest 3! razy mniejsza, bo na tyle sposobów możemy w jednym wyrazie permutować literę A.

Z liter słowa ANAGRAM można ułożyć $\frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$ wyrazów.

b) Litery słowa NIANIA możemy permutować na 6! sposobów. Wyrazów otrzymamy $2! \cdot 2! \cdot 2!$ razy mniej, gdyż trzy litery: N, I oraz A, powtarzają się po dwa razy.
Z liter słowa NIANIA można zatem ułożyć $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 3 \cdot 5 \cdot 6 = 90$ wyrazów.

Odp.: a) 840 b) 90

Przykład 7

Sylwia pożyczyła od koleżanki 5 płyt z filmami – dwie komedie oraz trzy horrory. Komedie są oznaczone literami *a*, *b*, natomiast horrory numerami 2, 7 i 9. Sylwia może obejrzeć filmy (oczywiście po kolei) na 5! sposobów. Jeżeli jednak będzie chciała rozdzielić gatunki, czyli zacząć od horroru, potem zobaczyć komedię i dalej na zmianę, to ma $3! \cdot 2! = 12$ możliwości takiego ustawienia repertuaru, ponieważ:

1. horrory może ustawić na $3! = 6$ sposobów: 279, 297, 729, 792, 927, 972,
2. komedie może ustawić na $2! = 2$ sposoby: *ab*, *ba*,
3. po połączeniu układu horrorów z układem komedii (zgodnie z regułą mnożenia) może ułożyć dwa razy więcej pełnych zestawów filmów:
   2*a*7*b*9, 2*a*9*b*7, 7*a*2*b*9, 7*a*9*b*2, 9*a*2*b*7, 9*a*7*b*2,
   2*b*7*a*9, 2*b*9*a*7, 7*b*2*a*9, 7*b*9*a*2, 9*b*2*a*7, 9*b*7*a*2.

Wariacje

Spójrzmy na poniższe przykłady.

- Losujemy siedem razy ze zwracaniem jedną cyfrę ze zbioru wszystkich cyfr. Utworzony w ten sposób siedmiocyfrowy kod 2237351 różni się od kodu 2133752.

- Losujemy cztery razy bez zwracania jedną cyfrę ze zbioru wszystkich cyfr. Utworzony w ten sposób PIN 8253 różni się od PIN-u 8235.
- Losujemy dziesięć razy bez zwracania jedną cyfrę ze zbioru wszystkich cyfr. Utworzony w ten sposób numer banknotu 2014538796 różni się od numeru 8725413069.

Każde z powyższych zdarzeń elementarnych zapisywaliśmy w postaci jakiegoś ciągu. W opisywanych sytuacjach interesuje nas odpowiedź na pytanie, **ile jest wszystkich ciągów** zbudowanych według określonych reguł.

Aby wyróżnić ciągi rozważane w kombinatoryce i rachunku prawdopodobieństwa, zamiast słowa „ciąg" wprowadzono pojęcie „wariacja".

W powyższych przykładach powiemy więc, że:

- 2237351 jest siedmioelementową **wariacją z powtórzeniami** utworzoną z elementów zbioru dziesięcioelementowego,
- 8253 jest czteroelementową **wariacją bez powtórzeń** utworzoną z elementów zbioru dziesięcioelementowego,
- 2014538796 jest dziesięcioelementową wariacją bez powtórzeń utworzoną z elementów zbioru dziesięcioelementowego – w takiej sytuacji częściej używamy nazwy **permutacja**.

Wprowadzimy od razu wygodne uproszczenie. Zamiast mówić: „zdarzenia elementarne możemy zapisać w postaci k-elementowych wariacji bez powtórzeń utworzonych z elementów zbioru n-elementowego", powiemy krócej: „zdarzeniami elementarnymi są k-elementowe wariacje bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego".

Liczbę wszystkich wariacji bez powtórzeń możemy zapisać za pomocą symbolu silni.

Przykład 8

a) Jeżeli ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno bez zwracania trzy razy po jednej cyfrze, to liczba wszystkich wyników – trzyelementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru siedmioelementowego – jest równa $7 \cdot 6 \cdot 5$. Po losowaniu zostały 4 niewybrane elementy.

Liczbę $7 \cdot 6 \cdot 5$ możemy zapisać w postaci $7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!}$.

b) Jeżeli ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno bez zwracania pięć razy po jednej cyfrze, to liczba wszystkich wyników – pięcioelementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru siedmioelementowego – jest równa $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ lub inaczej $\frac{7!}{2!}$. Tym razem 2 elementy zostały niewykorzystane.

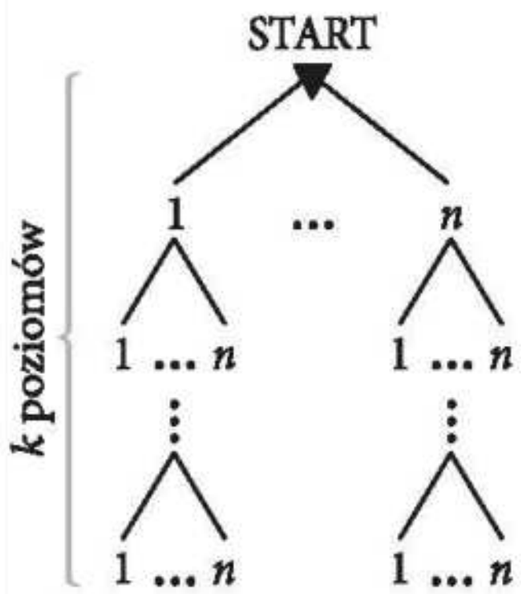
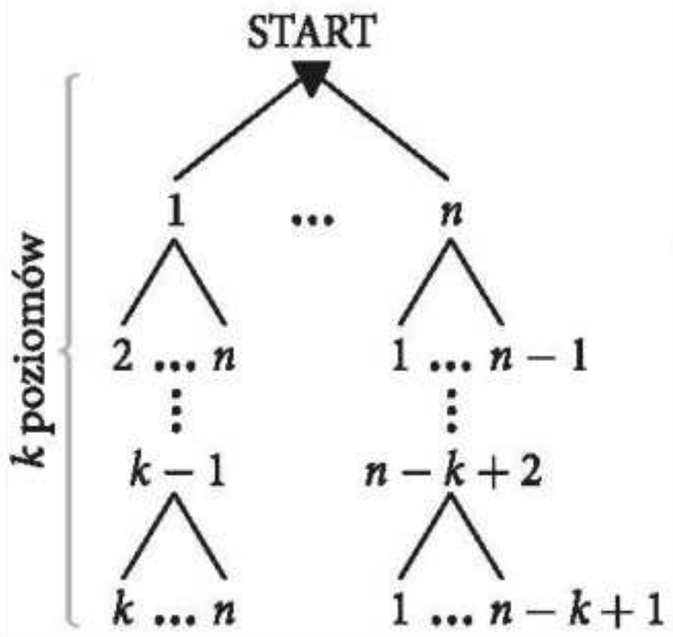
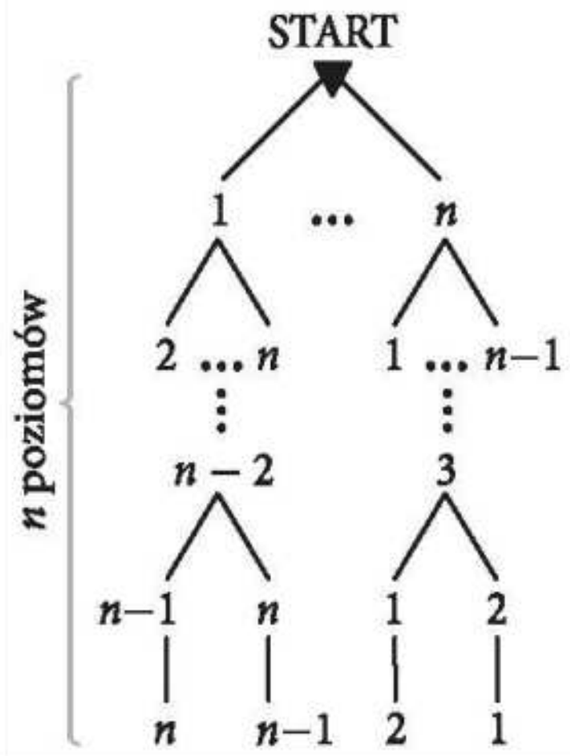
Twierdzenie

Dla dowolnych liczb naturalnych n i k takich, że $k \leqslant n$, zachodzi równość:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dowód wzoru powyżej pozostawiamy do samodzielnego przeprowadzenia.

Podsumujmy w tabeli dotychczasowe rozważania.

Doświadczenie losowe	Drzewko	Nazwa zdarzenia elementarnego	Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych
losujemy kolejno ze zwracaniem k elementów ze zbioru n-elementowego		k-elementowa wariacja z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego	n^k
losujemy kolejno bez zwracania k elementów ze zbioru n-elementowego, $0 < k \leqslant n$		k-elementowa wariacja bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego	$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
ustawiamy w ciągu wszystkie elementy zbioru n-elementowego		n-elementowa permutacja	$n!$

Przykład 9

Walizki firmy Tobołek mają instalowane w zamkach czterocyfrowe kody szyfrowe. Ile walizek musi wyprodukować firma, aby co najmniej dwóm walizkom trzeba było nadać identyczny kod?

Rozwiązanie

Obliczymy najpierw, ile różnych czterocyfrowych kodów można utworzyć z 10 cyfr. Modelem sytuacji jest losowanie cztery razy kolejno ze zwracaniem po jednej kuli z urny zawierającej 10 ponumerowanych kul.
Zdarzenia elementarne są czteroelementowymi wariacjami z powtórzeniami ze zbioru 10-elementowego. Jest ich zatem 10^4.
Jeżeli firma Tobołek wyprodukuje 10 001 walizek, to przynajmniej dwie będą musiały mieć identyczne kody.

Odp.: 10 001

Przykład 10

Właściciel firmy Tobołek otrzymał (w ramach promocji) 30 darmowych biletów na seans filmowy do kina. Na ile różnych sposobów może rozdzielić bilety, jeżeli firma zatrudnia 27 pracowników i każdy z nich otrzyma jeden bilet?

Rozwiązanie

Biletów jest o 3 za dużo. Modelem w tej sytuacji będzie losowanie kolejno bez zwracania 27 razy po jednym elemencie ze zbioru 30-elementowego, a zdarzeniami elementarnymi są 27-elementowe wariacje bez powtórzeń. Wszystkich możliwości jest więc $\frac{30!}{(30-27)!} = \frac{30!}{3!}$.

Odp.: $\frac{30!}{3!}$

Przykład 11

Każdy z 27 pracowników firmy Tobołek musi podpisać regulamin pracy. Na ile sposobów mogą ustawić się w kolejkę do złożenia podpisu?

Rozwiązanie

Modelem jest tu losowanie kolejno bez zwracania wszystkich elementów ze zbioru 27-elementowego lub krócej – permutowanie tego zbioru.
Wszystkich permutacji jest 27!.

Odp.: 27!

Przykład 12 ◂ zad. 1.14

Grupa przyjaciół – 5 chłopców i 4 dziewczyny – wybiera się na wycieczkę górskim szlakiem, po którym należy wędrować gęsiego. Chcą iść na zmianę: chłopak, dziewczyna, chłopak, dziewczyna itd. Na ile sposobów mogą się ustawić w takim szyku?

Rozwiązanie

Jeśli oznaczymy chłopców c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, a dziewczęta d_1, d_2, d_3, d_4, to przykładem ustawienia spełniającego założenia zadania jest ciąg:

$$c_1, d_1, c_2, d_2, c_3, d_3, c_4, d_4, c_5$$

Powstał on w ten sposób, że do ustawienia c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 chłopców dopisane zostały kolejno elementy d_1, d_2, d_3, d_4 ustawienia dziewcząt.
Do tego samego ustawienia c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 chłopców można dopisać każdą z 4! permutacji zbioru dziewcząt.

Jest 5! permutacji zbioru chłopców. Dla każdej z nich jest 4! ustawień całego szyku wycieczki. Zatem wszystkich możliwości jest $5! \cdot 4! = 2880$.

Zauważmy na koniec, że:
- liczba ustawień będzie identyczna, gdy założymy, że np. dziewczęta prowadzą, a chłopcy idą za nimi (lub na odwrót),
- rozwiązanie zadania można było sprowadzić do zastosowania reguły mnożenia, czyli podobnie jak w przykładzie 7 (s. 118), istotne było zliczenie permutacji dwóch rozłącznych zbiorów i pomnożenie otrzymanych wyników.

Odp.: 2880

Przykład 13 ◂ zad. 1.17

Rozważamy liczby sześciocyfrowe o różnych cyfrach.
a) Ile jest takich liczb?
b) Ile wśród nich jest liczb parzystych?
c) Ile wśród nich jest liczb mniejszych od 475 000?

Rozwiązanie

a) Obliczamy, ile jest możliwości wyboru kolejnych cyfr.

Pierwsza cyfra nie może być zerem – wybieramy ją więc spośród 9 cyfr (wszystkie cyfry oprócz 0).

Cyfry tej liczby mają być różne, więc pozostałe 5 cyfr otrzymamy, losując ze zbioru jeszcze niewybranych pięć razy bez zwracania po jednej cyfrze (tym razem uwzględniamy 0). Tych możliwości jest $\frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!}$. Szukanych liczb sześciocyfrowych jest więc $9 \cdot \frac{9!}{4!}$.

b) O parzystości liczby decyduje jej cyfra jedności. Wygodnie jest rozważyć dwa przypadki.

- Jeżeli cyfrą jedności jest 0, to na pozostałych pięciu miejscach możemy rozmieścić dowolnie pozostałe cyfry. Wszystkich możliwości jest $\frac{9!}{4!}$.
- Jeżeli cyfrą jedności jest 2, 4, 6 lub 8, to pierwszą cyfrą może być jedna z ośmiu cyfr, a na pozostałych czterech miejscach możemy rozmieścić dowolnie pozostałe cyfry. Wszystkich możliwości jest $8 \cdot \frac{8!}{4!} \cdot 4$.

Razem (zgodnie z regułą dodawania) otrzymujemy:

$$\frac{9!}{4!} + 8 \cdot \frac{8!}{4!} \cdot 4 = \frac{9 \cdot 8! + 4 \cdot 8 \cdot 8!}{4!} = \frac{41 \cdot 8!}{4!} \text{ liczb.}$$

c) Rozpatrzmy trzy przypadki.

- Jeżeli pierwszą cyfrą jest 1, 2 lub 3, to pozostałe cyfry mogą być dowolne. Wszystkich możliwości jest:

$$3 \cdot \frac{9!}{4!}$$

wybór pierwszej cyfry; wybór pozostałych pięciu cyfr

- Jeżeli pierwszą cyfrą jest 4, a drugą 0, 1, 2, 3, 5 lub 6, to pozostałe cyfry mogą być dowolne. Wszystkich możliwości jest $6 \cdot \frac{8!}{4!}$.
- Jeśli dwiema pierwszymi cyframi są 4 i 7, to trzecią może być 0, 1, 2 lub 3, a pozostałe cyfry mogą być dowolne. Wszystkich możliwości jest $4 \cdot \frac{7!}{4!}$.

Razem (zgodnie z regułą dodawania) otrzymujemy:

$$3 \cdot \frac{9!}{4!} + 6 \cdot \frac{8!}{4!} + 4 \cdot \frac{7!}{4!} = \frac{(3 \cdot 9 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 1) \cdot 4 \cdot 7!}{4!} = \frac{67 \cdot 7!}{3!} \text{ liczb.}$$

Odp.: a) $9 \cdot \frac{9!}{4!}$ b) $\frac{41 \cdot 8!}{4!}$ c) $\frac{67 \cdot 7!}{3!}$

Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Liczb trzycyfrowych, w których nie powtarza się żadna cyfra, jest
A. $10 \cdot 9 \cdot 8$. **B.** 1000. **C.** $9 \cdot 8 \cdot 7$. **D.** 648.

1.2. W urnie jest 5 kul podpisanych cyframi 2, 2, 3, 7 i 8. Losujemy kolejno bez zwracania 5 razy po jednej kuli i zapisujemy wynik. Ile jest możliwości utworzenia w ten sposób różnych liczb pięciocyfrowych? Wskaż odpowiedź fałszywą.
A. $3 \cdot 4 \cdot 5$ **B.** 60 **C.** $5!$ **D.** $\frac{5!}{2!}$

1.3. Ile można utworzyć różnych sześciocyfrowych numerów telefonicznych, w których pierwszą cyfrą jest 5, 6 lub 7?
A. $3! \cdot 10^5$ **B.** $3 \cdot 5^{10}$ **C.** $3 \cdot 10^5$ **D.** $3^3 \cdot 10^5$

1.4. Określ, czy w opisanym doświadczeniu zdarzenia elementarne są wariacjami z powtórzeniami, wariacjami bez powtórzeń czy permutacjami. Podaj liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.
a) Marcin typuje wyniki 10 rozgrywek piłkarskich, wypełniając losowo kupon totalizatora literami: w – wygrana gospodarzy, p – przegrana gospodarzy, r – remis.
b) Kuba rzuca 5 razy kostką do gry.
c) Pelagia ma do dyspozycji 20 wolnych autokarów i przydziela je losowo dwunastu grupom wycieczkowym.
d) Pielęgniarka losuje dla każdego z 27 uczniów klasy 4d dzień tygodnia (powszedni) na zgłoszenie się do przeglądu dentystycznego.
e) Nowa pani przedszkolanka próbuje usadzić w rządku grupę 8 rozbrykanych maluchów.
f) Pewien statystyk rejestruje miesiąc urodzenia każdego ucznia z losowo wybranej 35-osobowej grupy.
g) Każdy z 17 robotników ekipy budowlanej losuje jeden dzień wolny z zaplanowanych 35 dni pracy, z uwzględnieniem zasady, że każdego dnia tylko jeden pracownik może być nieobecny.

1.5. Malutka Ola uczy się liczyć do pięciu na paluszkach, ale ciągle jeszcze myli kolejność. Na ile różnych sposobów może podać te liczby?

1.6. Tata Oli kupił dziecku kolejkę złożoną z elektrowozu oraz sześciu różnych wagoników i bardzo lubi sam się nią bawić. Ile czasu zajmie mu przetestowanie wszystkich układów pociągu (jadącego w pełnym składzie), jeżeli jeden przejazd trwa 2 minuty? Pomijamy czas potrzebny do ustawienia wagoników.

1.7. Ile permutacji można zbudować z liter słowa PAJĄCZEK? Ile spośród tych permutacji zaczyna się od litery Ą? Ile zaczyna się od liter PA?

1.8. Ile jest permutacji zbioru wszystkich cyfr? Ile wśród tych permutacji jest takich, w których cyfry 1, 2, 3 występują obok siebie
a) w porządku rosnącym?
b) w porządku malejącym?
c) w dowolnej kolejności?

1.9. Zapisz w prostszej postaci.
a) $4! \cdot 5,\ 6! \cdot 7 \cdot 8,\ 10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$
b) $\frac{10!}{10},\ \frac{8!}{7 \cdot 8},\ \frac{9!}{7 \cdot 8 \cdot 9},\ \frac{17 \cdot 16!}{15!}$
c) $n! \cdot (n+1),\ (n-1)! \cdot n \cdot (n+1),\ (n+2)!(n+3)$
d) $\frac{n!}{n},\ \frac{n!}{(n-1)!},\ \frac{(n+1)!}{n!},\ \frac{(n-2)!}{(n-3)!}$
e) $\frac{n!}{(n+1)!},\ \frac{(n-2)!}{(n-1)!},\ \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$

1.10. Oblicz.
a) $\frac{6!}{4!},\ \frac{10!}{8!},\ \frac{7!}{4! \cdot 3!},\ \frac{5!}{0! \cdot 2!}$
b) $\frac{10!}{6! \cdot 4!},\ \frac{7! \cdot 3!}{10!},\ \frac{9!}{1! \cdot 8!},\ \frac{12!}{10! \cdot 2!}$

1.11. Ile różnych wyrazów można ułożyć z liter podanego słowa?
a) LALKA b) EUZEBIUSZ c) ABRAKADABRA

1.12. Ile jest liczb siedmiocyfrowych, w których występują trzy jedynki, dwie dwójki i dwie trójki?

1.13. Na ile sposobów można ułożyć w rzędzie 5 klocków zielonych, 4 czerwone i 3 żółte?

1.14. Pani ustawiła w rzędzie sześcioro przedszkolaków: Anię, Basię, Czarka, Dorotkę, Ewę i Filipa. Ile jest takich ustawień, w których

a) najpierw stoją dziewczynki, a potem chłopcy?
b) Basia stoi bezpośrednio za Anią?
c) Czarek stoi za Filipem (niekoniecznie bezpośrednio)?
d) między Czarkiem a Filipem stoją co najmniej dwie dziewczynki?

1.15. Przy okrągłym stole o dziesięciu numerowanych miejscach rozmieszczamy dziesięć osób. Na ile sposobów można to zrobić tak, aby

a) Agata i Bożena siedziały obok siebie, w dowolnej kolejności?
b) Grzegorz i Igor siedzieli naprzeciwko siebie, a Helena siedziała obok jednego z nich?
c) Celina, Danuta i Elżbieta siedziały obok siebie w dowolnej kolejności, natomiast ani Franciszek, ani Jacek nie sąsiadowali z żadną z nich?

1.16. Dane są zbiory: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

a) Ile jest wszystkich funkcji, których dziedziną jest zbiór A, a wartości są elementami zbioru B?
b) Ile jest wszystkich funkcji rosnących, których dziedziną jest zbiór A, a wartości są elementami zbioru B?
c) Ile jest wszystkich funkcji niemalejących, których dziedziną jest zbiór A, a wartości są elementami zbioru $\{5, 6\}$?

1.17. Ze zbioru $\{1, 3, 5, 7\}$ losujemy pięć razy po jednej cyfrze ze zwracaniem. Wylosowane cyfry w kolejności losowania tworzą liczbę pięciocyfrową. Na ile sposobów możemy wylosować w ten sposób liczbę

a) podzielną przez 5? b) większą od 30 000? c) mniejszą od 55 000?

1.18. Rozważamy liczby siedmiocyfrowe o różnych cyfrach.

a) Ile wśród nich jest liczb parzystych?
b) Ile wśród nich jest liczb podzielnych przez 5?
c) Ile wśród nich jest liczb podzielnych przez 25?

1.19. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Oznaczamy je w kolejności losowania n i k. Ile jest takich wyników losowania, w których $n + k = 111$?

1.20. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem dwie liczby. Oznaczamy je w kolejności losowania n i k. Ile jest takich wyników losowania, w których $|n - k| \leqslant 2$?

1.21. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ losujemy kolejno bez zwracania trzy liczby. Oznaczamy je w kolejności losowania a, b, c. Ile jest takich wyników losowania, w których $a + b + c = 21$?

* **1.22.** W grze sudoku trzeba wypełnić diagram 9×9 w taki sposób, aby w każdym wierszu, w każdej kolumnie i w każdym z 9 wyróżnionych kwadratów znalazła się każda z cyfr od 1 do 9. Na ile sposobów można, zgodnie z podanymi zasadami, rozmieścić w pustym diagramie dziewięć jedynek?

4	5	1	2	9	6	3	7	8
3	2	9	8	5	7	4	6	1
8	6	7	1	4	3	5	9	2
7	4	5	3	2	9	8	1	6
6	9	8	5	1	4	7	2	3
2	1	3	7	6	8	9	5	4
5	3	6	4	7	1	2	8	9
9	7	4	6	8	2	1	3	5
1	8	2	9	3	5	6	4	7

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.
Liczba wszystkich sposobów ustawienia 12 osób w kolejce
A. jest podzielna przez 120.
B. jest podzielna przez 144.
C. jest podzielna przez 39.

2. Ile jest takich permutacji zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 13, 14\}$, w których
a) liczby są ustawione w kolejności rosnącej lub malejącej?
b) najpierw ustawione są wszystkie liczby parzyste?
c) liczby parzyste nie sąsiadują ze sobą?

D **3.** Wykaż, że liczba $\frac{18!}{13! \cdot 7!}$ jest liczbą naturalną.

4. Ile jest liczb ośmiocyfrowych mniejszych od $57 \cdot 10^6$, których wszystkie cyfry są nieparzyste?

5. Ile jest podzielnych przez 4 liczb sześciocyfrowych o różnych cyfrach?

2. Kombinacje

Umiejętności:

- wykorzystanie wzorów na liczbę kombinacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych

Dotychczas zajmowaliśmy się takimi doświadczeniami losowymi, które uwzględniały kolejność losowanych elementów. Łatwo jednak podać przykłady z życia codziennego odbiegające od tego schematu. Na przykład wiele osób śledzi przebieg losowania gry w lotto – nie ma znaczenia, w jakiej kolejności maszyna losująca wybierze szczęśliwe numery. Podobnie jest z rozdawaniem kart – w większości gier ważne są kolory, wartości kart i układy karciane, a nie kolejność, w jakiej karty trafiają do ręki grającego. Poszukamy teraz odpowiedzi na pytanie o liczbę wszystkich możliwych wyników również w takich doświadczeniach.

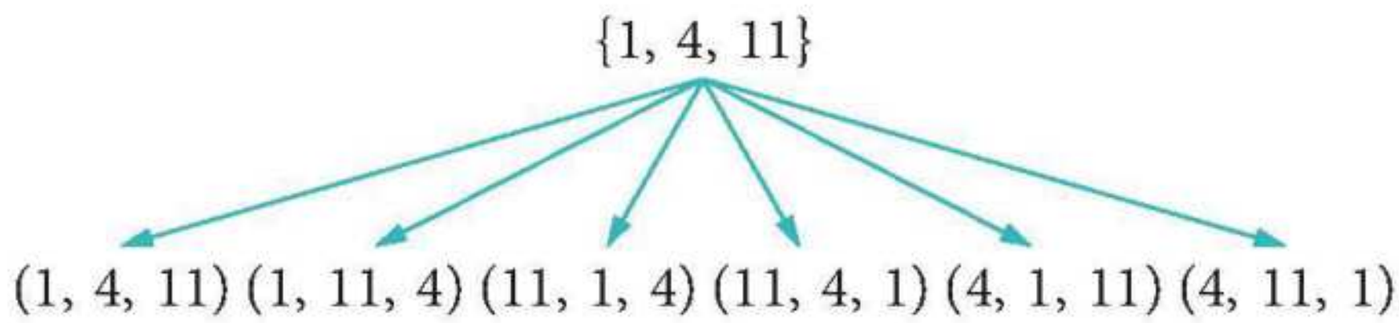
Przykład 1

W koszu jest 13 piłek tenisowych. Tenisista wyciąga z kosza 3 piłki. Na ile sposobów może to zrobić?

Rozwiązanie

Jeżeli uwzględnialibyśmy kolejność wyciąganych piłek, to odpowiedź byłaby oczywista: $13 \cdot 12 \cdot 11$. Tyle jest bowiem trzyelementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru 13-elementowego.

Załóżmy, że piłki w koszu są oznaczone liczbami 1, 2, 3, …, 13. Wtedy trzy konkretne piłki, np. 1, 4 i 11, możemy wyciągnąć na 3! sposobów:



Jeżeli więc oznaczymy przez x liczbę wszystkich takich zestawów $\{a, b, c\}$ trzech piłek, z których były tworzone wariacje, to zachodzi równość:

$$x \cdot 3! = 13 \cdot 12 \cdot 11$$

Stąd $x = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!}$, czyli $x = 286$.

Tenisista nie jest zainteresowany kolejnością wyciąganych piłek (praktycznie może je wyjąć z kosza wszystkie na raz) – ma zatem do dyspozycji 286 różnych zestawów trzech piłek.

Jeśli – jak w tym przykładzie – w doświadczeniu nie interesuje nas kolejność losowanych elementów, zapisujemy zdarzenia elementarne w nawiasach klamrowych, jako podzbiory zbioru wszystkich elementów:

$$\Omega = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \ldots, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \ldots, \{11, 12, 13\}\}$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!}$$

Odp.: 286

Przykład 2

Ile różnych zestawów kart może otrzymać brydżysta?

Rozwiązanie

Talia liczy 52 karty, a brydżysta dostaje do ręki 13 spośród nich. Pytamy więc, ile różnych 13-elementowych podzbiorów możemy wybrać ze zbioru 52 elementów.

Ponownie rozwiążemy zadanie od końca, tzn. najpierw uwzględnimy kolejność losowanych kart. Tworzymy zatem 13-elementowe wariacje bez powtórzeń. Ich liczba jest równa:

$$\frac{52!}{39!}$$

Brydżysta z jednego zestawu kart trzymanego w ręku może ułożyć 13! permutacji, zatem liczba wszystkich zestawów jest 13! razy mniejsza od $\frac{52!}{39!}$. Innymi słowy, zachodzi równość:

$$\frac{52!}{39!} = x \cdot 13!$$

gdzie x oznacza liczbę wszystkich 13-elementowych podzbiorów zbioru 52-elementowego. Stąd:

$$x = \frac{52!}{39! \cdot 13!} \approx 635 \text{ miliardów}$$

Odp.: $\frac{52!}{39! \cdot 13!}$

Twierdzenie

Jeżeli ze zbioru n-elementowego losujemy k elementów $(k \leqslant n)$ bez uwzględniania kolejności, to liczba wszystkich możliwych wyników losowania jest równa $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Inaczej mówiąc, liczba wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego $(k \leqslant n)$ jest równa $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Podobnie jak słowo „wariacja" zastępuje w kombinatoryce słowo „ciąg", tak określeniem „kombinacja" zastępujemy słowo „podzbiór". W powyższych przykładach powiemy zatem:

- liczba wszystkich trzyelementowych kombinacji ze zbioru 13-elementowego jest równa $\frac{13!}{10! \cdot 3!}$,
- liczba wszystkich 13-elementowych kombinacji ze zbioru 52-elementowego jest równa $\frac{52!}{39! \cdot 13!}$.

I ogólnie:

- liczba wszystkich k-elementowych kombinacji ze zbioru n-elementowego $(k \leqslant n)$ jest równa $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Symbol Newtona

Definicja

Jeżeli $n, k \in \mathbf{N}$ i $k \leqslant n$, to wyrażenie $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ nazywamy **symbolem Newtona** i oznaczamy $\binom{n}{k}$ (czytamy: „n po k").

Ze sposobu wprowadzenia symbolu Newtona można wywnioskować, że jego wartość jest zawsze liczbą naturalną.

Przykład 3 ◀ zad. 2.5

a) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 5 = 10$

b) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 5 \cdot 3 = 15$

c) $\binom{27}{24} = \frac{27!}{3! \cdot 24!} = \frac{24! \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 24!} = 25 \cdot 13 \cdot 9 = 2925$

d) $\binom{14}{3} = \frac{14!}{11! \cdot 3!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{11! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 13 \cdot 14 = 364$

Z definicji symbolu Newtona wynika, że liczba wszystkich k-elementowych kombinacji ze zbioru n-elementowego wynosi $\binom{n}{k}$.

Zauważmy, że tworzenie np. 5-elementowych kombinacji ze zbioru 17-elementowego można interpretować dwojako. Z jednej strony – z urny z 17 kulami wyciągamy zbiór 5-elementowy. Z drugiej strony – w urnie zostaje zbiór 12-elementowy. Można powiedzieć, że tworzenie kombinacji 5-elementowych jest czynnością symetryczną do tworzenia kombinacji 12-elementowych. Wartości symboli Newtona muszą być w obydwu przypadkach równe. Istotnie:

$$\binom{17}{5} = \frac{17!}{12! \cdot 5!}, \quad \binom{17}{12} = \frac{17!}{5! \cdot 12!}, \quad \text{czyli} \quad \binom{17}{5} = \binom{17}{12}.$$

Takie samo rozumowanie możemy przeprowadzić dla ogólnych danych. Zatem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Wniosek

Dla dowolnych liczb naturalnych n i k $(k \leqslant n)$:

- $\binom{n}{k}$ jest liczbą naturalną,
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Przykład 4

Rozpatrzymy charakterystyczne przypadki losowania k-elementowych podzbiorów kul z urny zawierającej n kul, czyli dla

a) $k = 0$. b) $k = 1$. c) $k = n$.

Rozwiązanie

a) Istnieje tylko jedna kombinacja zeroelementowa – jest nią zbiór pusty. Potwierdzimy ten wynik, jeżeli zastosujemy symbol Newtona:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

Zgodnie z definicją silni:

$0! = 1$
$1! = 1$

b) Kombinacje jednoelementowe są podzbiorami utworzonymi z pojedynczych kul. Jest ich więc n. Oczywiście również:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)!} = n$$

c) Istnieje tylko jedna kombinacja n-elementowa. Jest nią cały zbiór:

$$\binom{n}{n} = 1$$

Przykład 5 ◂ zad. 2.7

Na kuponie do gry lotto jest 49 liczb od 1 do 49. Grający wybiera 6 liczb. Obliczymy, ile jest możliwych wyników losowania.

Rozwiązanie

Liczby wybrane przez grającego stanowią 6-elementową kombinację ze zbioru 49-elementowego. Liczba wszystkich możliwości jest więc równa:

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 11 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 8 \cdot 49 = 13\,983\,816$$

Jedyną szczęśliwą szóstkę liczb wybiera maszyna, która losuje 6 spośród 49 ponumerowanych kulek. Aby wygrać główną nagrodę, grający w lotto musi zatem trafić w jedną kombinację spośród prawie 14 milionów.

Odp.: 13 983 816

Przykład 6 ◂ zad. 2.11

W siedmioosobowej grupie przedszkolaków jest czterech chłopców. Pani ma wybrać czteroosobową delegację złożoną z dwóch chłopców i dwóch dziewczynek. Ile jest różnych czwórek utworzonych zgodnie z taką regułą?

Rozwiązanie

Zbudujmy model doświadczenia, w wyniku którego wychowawczyni otrzyma zamierzony skład delegacji. Do jednej urny wkładamy cztery losy z imionami chłopców, a do drugiej – trzy z imionami dziewcząt. Z pierwszej urny wychowawczyni może wylosować $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ par chłopców, a z drugiej urny $\binom{3}{2} = 3$ pary dziewczynek. Do każdej pary chłopców może teraz dołączyć dowolną parę dziewczynek. Liczba wszystkich zdarzeń sprzyjających jest zatem równa $\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} = 6 \cdot 3 = 18$.

Odp.: 18

Przykład 7 ◂ zad. 2.16

Z talii 52 kart losujemy 13 kart. Ile jest możliwości wylosowania

a) 13 kierów?
b) 13 kart czerwonych?
c) 10 kart czerwonych i 3 kart czarnych?
d) 8 pików i 5 kierów?
e) 10 kart jednego koloru (kolory w kartach to: trefl, karo, kier, pik)?
f) 8 pików, 3 kierów i 2 trefli?

Rozwiązanie

a) W talii jest dokładnie 13 kierów, więc jest tylko 1 zdarzenie sprzyjające.

b) W talii jest 26 kart czerwonych. Losujemy spośród nich 13 kart. Liczba możliwości jest więc równa $\binom{26}{13}$.

c) Rozdzielamy talię na dwa podzbiory: same czerwone i same czarne. Z czerwonych losujemy 10 kart, z czarnych – 3 karty, po czym łączymy je w jeden zestaw. Mamy więc $\binom{26}{10} \cdot \binom{26}{3}$ możliwości.

d) Wyciągamy z talii wszystkie piki (13 kart) oraz wszystkie kiery (również 13). Ze zbioru pików losujemy 8 kart na $\binom{13}{8}$ sposobów, a ze zbioru kierów 5 kart na $\binom{13}{5}$ sposobów. Sprzyjających układów jest więc $\binom{13}{8} \cdot \binom{13}{5}$.

e) Po pierwsze, mamy 4 możliwości ustalenia koloru. Sprzyjające układy to:

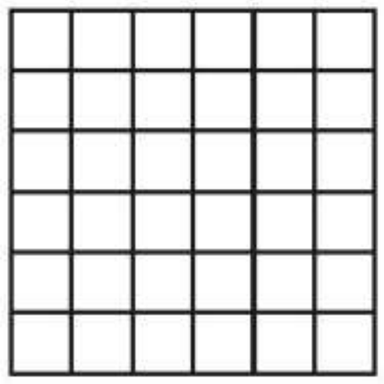
- 10 pików i 3 karty inne niż piki,
- 10 kierów i 3 karty inne niż kiery,
- 10 kar i 3 karty inne niż kara,
- 10 trefli i 3 karty inne niż trefle.

Każdy z nich uzyskamy, jeżeli rozdzielimy talię na dany kolor (13 kart) i pozostałe kolory (39 kart).
Po drugie, dobre układy otrzymamy, jeśli wylosujemy 10 kart z danego koloru i 3 z pozostałych kolorów.
Liczba możliwości jest więc równa $4 \cdot \binom{13}{10} \cdot \binom{39}{3}$.

f) $\binom{13}{8} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{2}$

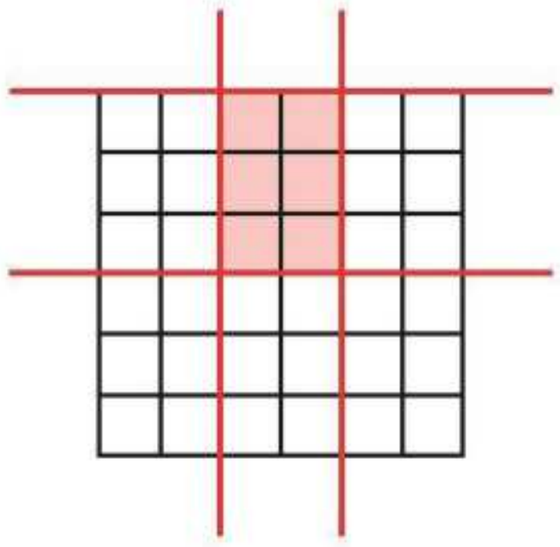
Przykład 8 ◂ zad. 2.22

Ile prostokątów znajduje się na rysunku obok?



Rozwiązanie

Bezpośrednie liczenie wszystkich prostokątów, nawet odpowiednio pogrupowanych, byłoby bardzo kłopotliwe. Zauważmy jednak, że każdy prostokąt jest jednoznacznie wyznaczony przez dwie proste poziome i dwie proste pionowe, które go ograniczają.
Na rysunku obok prezentujemy przykładowy prostokąt i wyznaczające go proste.



Dwie proste poziome możemy poprowadzić na $\binom{7}{2} = 21$ sposobów. Tyle samo jest też par prostych pionowych. Wszystkich prostokątów jest więc $\binom{7}{2}^2 = 441$.

Odp.: 441

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Wskaż wartość wyrażenia $\binom{15}{14}$.

A. 1 **B.** 15 **C.** $15 \cdot 14$ **D.** $1\frac{1}{14}$

2.2. Z talii 52 kart losowano dwie bez zwracania i uwzględniania kolejności. Ile różnych zestawów mogło w ten sposób powstać? Wskaż odpowiedź fałszywą.

A. $\binom{52}{50}$ **B.** $2 \cdot \binom{50}{2}$ **C.** $\frac{52!}{2! \cdot 50!}$ **D.** $51 \cdot 26$

2.3. Dwie siostry dzielą losowo między siebie 9 cukierków, każdy o innym smaku. Na ile sposobów mogą to zrobić, jeśli starsza ma dostać 5, a młodsza 4?

A. $\binom{9}{5}$ **B.** $\binom{9}{5} \cdot \binom{9}{4}$ **C.** 180 **D.** $\binom{9}{5} \cdot 4$

2.4. Oblicz: $\binom{8}{2}$, $\binom{10}{8}$, $\binom{12}{10}$, $\binom{197}{1}$, $\binom{37}{36}$.

2.5. Zapisz w postaci iloczynu liczb.

a) $\binom{24}{20}$ b) $\binom{100}{97}$ c) $\binom{13}{5}$ d) $\binom{26}{13}$

2.6. Wyznacz n.

a) $\binom{n}{3} - \binom{n}{4} = 0$

b) $\frac{1}{3}\binom{n-1}{n-3} + 2\frac{2}{3} = n$

c) $5 \cdot \binom{n}{3} = \binom{n+2}{4}$

d) $\binom{3n}{2} + 3 \cdot \binom{4n}{2} = 21$

e) $\binom{n}{3} - \binom{n}{2} = 14$

f) $\binom{n}{2} \cdot \binom{2n}{2} = 450$

2.7. W przechowalni bagażu jest 13 wolnych schowków. Euzebiusz Pajączek musi zająć trzy z nich. Ile ma możliwości wyboru schowków?

2.8. Rysiek wybiera 30 egzemplarzy ze swojej kolekcji 1000 guzików. Ile ma możliwości wyboru takiego zbioru?

2.9. Martyna ma w słoju kolekcję jednogroszówek wartą dokładnie 30 zł. Ile jest różnych zestawów monet z tego słoja o wartości 5 zł?

2.10. Na płaszczyźnie zaznaczonych jest 7 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Ile jest prostych przechodzących przez dowolne dwa z tych siedmiu punktów?

2.11. W skład układanki wchodzą elementy w różnych kształtach: 4 kwadraty, 7 trójkątów i 5 kółek. Elementy o jednakowym kształcie różnią się kolorami. Ala chce ułożyć na podłodze figurę złożoną z jednego kółka, trzech trójkątów i dwóch kwadratów. Ile ma możliwości wybrania odpowiedniego zestawu?

2.12. Trener ma w zespole 3 bramkarzy, 8 obrońców, 8 pomocników i 6 napastników. Na ile sposobów może wybrać skład zestawiony z bramkarza, 3 obrońców, 4 pomocników i 3 napastników?

2.13. W urnie jest 10 kul zielonych i 8 żółtych. Losujemy jednocześnie 5 kul. Na ile sposobów możemy losowo wyjąć
a) 3 kule zielone i 2 żółte?
b) 5 kul zielonych?
c) 5 kul jednego koloru?
d) co najmniej 4 kule żółte?

2.14. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ losujemy jednocześnie trzy liczby. Ile jest możliwości wyboru takich liczb, aby
a) ich iloczyn był nieparzysty?
b) ich suma była nieparzysta?
c) ich suma była podzielna przez 3?
d) suma ich kwadratów była podzielna przez 3?

2.15. Na ile sposobów możemy rozmieścić 10 osób w trzech pokojach: 5-osobowym, 3-osobowym i 2-osobowym?

2.16. W grze w tysiąca (wariant dla 3 osób) każdy z graczy otrzymuje zestaw 7 kart z 24-elementowej talii (zawierającej cztery kolory od dziewiątki do asa).
a) Ile jest różnych układów kart dla jednego gracza?
b) Ile zestawów jest złożonych wyłącznie z kierów i pików?
c) Ile zestawów jest złożonych z 3 asów, 2 króli i 2 dam?

2.17. Do gry w scrabble wykorzystuje się 100 płytek z literami, w tym: siedem z literą E, cztery z R, trzy z P, po dwie z literami B, J, U i jedną z literą Ó.
a) Na ile sposobów gracz może wyciągnąć z woreczka 7 płytek?
b) Ile takich układów pozwala na ułożenie słowa PRÓBUJE?

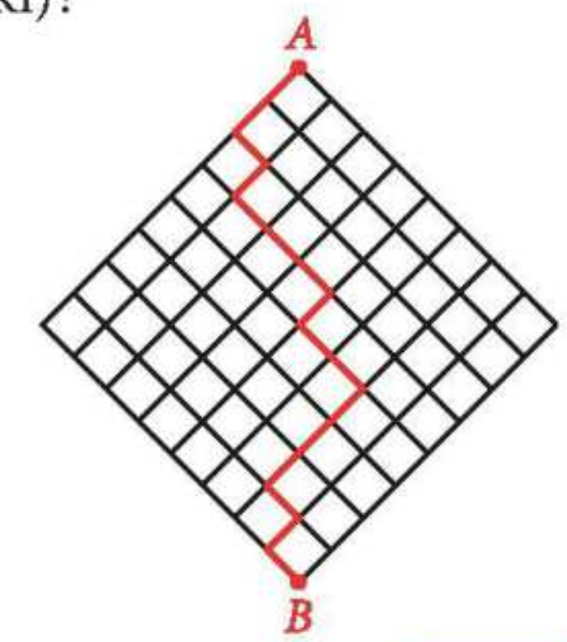
2.18. W książce *Szatan z siódmej klasy* Adam Cisowski musi odgadnąć nazwiska trzech uczniów 30-osobowej klasy, którzy mają być pytani na lekcji historii. Ile jest wszystkich możliwości? Czy do ich zapisania wystarczyłby zeszyt 100-kartkowy, gdyby Adam na każdej stronie umieścił 20 zestawów nazwisk?

2.19. Ile jest liczb sześciocyfrowych podzielnych przez 3, do których zapisania można użyć tylko cyfr 1 i 2?

2.20. Z talii 24 kart (od dziewiątki do asa w każdym z 4 kolorów) losujemy 5 kart. Na ile sposobów możemy tak wylosować karty, by znalazły się wśród nich 3 karty tej samej wartości i 2 karty innej wartości (np. 3 asy i 2 dziesiątki)?

2.21. Ile jest liczb dziewięciocyfrowych, których suma cyfr jest równa 3?

* **2.22.** Na rysunku pokazano przykładową drogę z punktu A do punktu B, która prowadzi zawsze w dół (w prawo lub w lewo) po zaznaczonych kratkach. Ile takich dróg można narysować?



Prosto do matury

1. W urnie jest 5 kul białych, 3 czarne i 2 niebieskie. Losujemy jednocześnie 3 kule. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Liczba sposobów, na które możemy wylosować 3 kule różnych kolorów, jest równa 30.

B. Liczba sposobów, na które możemy wylosować zestaw zawierający co najmniej 2 kule białe, jest równa 60.

C. Liczba sposobów, na które możemy wylosować zestaw zawierający dokładnie 2 kule białe, jest równa 50.

2. Ze zbioru liczb dwucyfrowych losujemy jednocześnie trzy liczby. Na ile sposobów możemy wylosować takie liczby, których iloczyn jest nieparzysty?

3. Wyznacz liczbę naturalną n spełniającą równanie $\binom{n}{2} + \binom{2n}{2} = 112$.

4. Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Liczba wszystkich trójkątów, których wierzchołkami mogą być te punkty, jest równa 35. Wyznacz n.

5. Ile jest liczb dwunastocyfrowych, których suma cyfr wynosi 3?

3. Trójkąt Pascala i dwumian Newtona

Umiejętności:

- stosowanie podstawowych własności symbolu Newtona
- stosowanie podstawowych własności trójkąta Pascala
- korzystanie ze wzorów na $(a+b)^n$ i $(a-b)^n$

Wprowadzimy teraz kolejną własność symbolu Newtona.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb naturalnych n i k $(k \leqslant n)$ prawdziwy jest wzór:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Dowód

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))!} =$$

$$= \frac{(k+1) \cdot n!}{(k+1)k! \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)} = \quad \longleftarrow \text{doprowadzamy oba składniki do takich samych mianowników}$$

$$= \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Koniec dowodu

Podany wzór można zinterpretować następująco.
Jeżeli w pojemniku znajduje się 1 kula czarna i n białych, to liczba wszystkich kombinacji $(k+1)$-elementowych tego $(n+1)$-elementowego zbioru kul jest równa:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

Wśród nich jest $\binom{n}{k+1}$ kombinacji składających się wyłącznie z kul białych oraz $\binom{n}{k}$ kombinacji zawierających kulę czarną i k kul białych. Liczba wszystkich kombinacji jest sumą liczb w obu wymienionych przypadkach, stąd:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Przykład 1 ◀ zad. 3.4

Zapiszemy podane liczby i wyrażenia w postaci jednego symbolu Newtona.

a) $\binom{15}{4}+\binom{15}{5}+\binom{16}{10}$

b) $\binom{2n}{n-1}+2\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n+1}$

Rozwiązanie

a) $\binom{15}{4}+\binom{15}{5}+\binom{16}{10}=\binom{16}{5}+\binom{16}{10}=$ $\longleftarrow \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

$=\binom{16}{5}+\binom{16}{6}=\binom{17}{6}$ $\longleftarrow \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

b) $\binom{2n}{n-1}+2\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n+1}=$

$=\left(\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}\right)+\left(\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n+1}\right)=$

$=\binom{2n+1}{n}+\binom{2n+1}{n+1}=\binom{2n+2}{n+1}$

Odp.: a) $\binom{17}{6}$ b) $\binom{2n+2}{n+1}$

Trójkąt Pascala

Zestawmy teraz w kolejnych wierszach współczynniki symbolu Newtona dla kolejnych n i k.

$\binom{0}{0}$ $\longleftarrow n=0$

$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$ $\longleftarrow n=1$

$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$ $\longleftarrow n=2$

$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$ $\longleftarrow n=3$

$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$ $\longleftarrow n=4$

Zgodnie z udowodnionym poprzednio wzorem, suma dwóch współczynników znajdujących się w jednym wierszu obok siebie równa jest współczynnikowi znajdującemu się bezpośrednio pod nimi.

Łatwo to sprawdzić, obliczając wartości liczbowe podanych współczynników.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Otrzymaliśmy w ten sposób **trójkąt Pascala**.

Każda liczba w tym trójkącie jest sumą dwóch znajdujących się nad nią. Na miejscach skrajnych znajdują się zawsze jedynki, bo $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ dla każdej liczby naturalnej n.

Zauważmy, że z samej zasady budowy trójkąta Pascala wynika jego symetria. Jest to potwierdzenie wzoru $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Obliczymy sumę wszystkich liczb znajdujących się w jednym wierszu tego trójkąta.

Proste rachunki pokazują, że sumy liczb w kolejnych początkowych wierszach wynoszą odpowiednio 1, 2, 4, 8, 16 itd.

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Dowód

Rozważmy n-elementowy zbiór A. Wiadomo, że $\binom{n}{k}$ (gdzie $k \leqslant n$) jest liczbą k-elementowych podzbiorów zbioru A. Zatem:

- $\binom{n}{0}$ jest liczbą 0-elementowych podzbiorów zbioru A,
- $\binom{n}{1}$ jest liczbą 1-elementowych podzbiorów zbioru A,
- $\binom{n}{2}$ jest liczbą 2-elementowych podzbiorów zbioru A itd.

Liczba elementów dowolnego podzbioru zbioru A może być równa:

$0, 1, 2, \ldots, n-1, n$

Zatem liczba wszystkich podzbiorów zbioru A jest równa:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

Aby udowodnić twierdzenie, wystarczy więc wykazać, że liczba wszystkich podzbiorów zbioru A wynosi 2^n.

Ustawiamy wszystkie elementy zbioru A w pewnej kolejności. Następnie rozpatrujemy wszystkie n-wyrazowe ciągi o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$. Zauważmy, że każdemu z takich ciągów możemy jednoznacznie przyporządkować pewien podzbiór zbioru A, na przykład:

- ciąg $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ przyporządkowujemy podzbiorowi będącemu zbiorem pustym,
- ciąg $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ przyporządkowujemy podzbiorowi, do którego należy tylko pierwszy element zbioru A,
- ...
- ciąg $(0, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ przyporządkowujemy podzbiorowi, do którego należy tylko czwarty element zbioru A,
- ...
- ciąg $(1, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ przyporządkowujemy podzbiorowi, do którego należą tylko pierwszy i trzeci element zbioru A,
- ...
- ciąg $(1, 1, 1, \ldots, 1, 0)$ przyporządkowujemy podzbiorowi, do którego należą wszystkie elementy zbioru A z wyjątkiem ostatniego,
- ciąg $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ przyporządkowujemy podzbiorowi, do którego należą wszystkie elementy zbioru A.

Wiadomo, że liczba n-wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$ jest równa 2^n.
Zatem liczba wszystkich podzbiorów zbioru A jest równa 2^n.

Koniec dowodu

Wniosek

Liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego jest równa 2^n.

Przykład 2 ◂ zad. 3.7

Obliczymy liczbę wszystkich naturalnych dzielników liczby 210.

Rozwiązanie

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Jeśli wybierzemy dowolny podzbiór zbioru $\{2, 3, 5, 7\}$, to po pomnożeniu jego elementów otrzymamy pewien dzielnik liczby 210, przy czym wybór zbioru pustego oznacza otrzymanie dzielnika równego 1. Zatem dzielników liczby 210 jest tyle, ile wszystkich podzbiorów zbioru $\{2, 3, 5, 7\}$, czyli $2^4 = 16$.

Odp.: 16

Dwumian Newtona

Przyjrzyjmy się teraz współczynnikom występującym we wzorach skróconego mnożenia stopnia drugiego i trzeciego. Uzupełnimy je o oczywiste przypadki w stopniach niższych i zapiszemy w jednolity sposób.

$$(a+b)^0 = 1a^0b^0$$
$$(a+b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$$
$$(a+b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^1b^2 + 3a^2b^1 + 1a^0b^3$$

Jak widać, poszczególne współczynniki występujące w rozwinięciu $(a+b)^n$ pokrywają się z liczbami w kolejnych wierszach trójkąta Pascala. Ta prawidłowość jest zachowana również dla wyższych potęg.

Przykład 3

Przeanalizujemy sposób, w jaki wyznaczane są współczynniki w rozwinięciu potęgi dwumianu dla $n = 5$.

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b)^3 =$$
$$= \left(a^2 + 2ab + b^2\right)\left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right) \quad \longleftarrow \text{wzory skróconego mnożenia}$$

Teraz należy pomnożyć każdy wyraz sumy znajdującej się w pierwszym nawiasie przez każdy wyraz sumy znajdującej się w drugim nawiasie, a następnie zredukować wyrazy podobne. Te przekształcenia zostawiamy do samodzielnego wykonania. Końcowy wynik, po uporządkowaniu wyrazów, możemy zapisać w postaci:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \qquad (*)$$

Zastanówmy się, w jaki sposób powstał w powyższym rozwinięciu składnik $10a^3b^2$.

Wróćmy do początkowego zapisu potęgi w postaci iloczynu pięciu czynników.

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

Zgodnie z prawami arytmetyki, aby otrzymać końcowy wynik, należy każdy element z każdego czynnika pomnożyć przez każdy element z pozostałych czynników.

Wyrazy (przed redukcją) postaci a^3b^2 otrzymamy wtedy, gdy z wybranych trzech czynników, np. pierwszego, trzeciego i czwartego, pomnożymy element a, a następnie a^3 pomnożymy przez b wzięte z pozostałych dwóch – drugiego i piątego czynnika.

Mamy 5 czynników. Wyboru trzech z nich możemy dokonać na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów. Zatem po zredukowaniu wyrazów podobnych otrzymamy 10 składników postaci a^3b^2. W analogiczny sposób uzasadniamy otrzymanie każdego spośród pozostałych pięciu składników sumy we wzorze (*).

Zauważmy, że:

- każdy składnik sumy we wzorze (*) jest jednomianem stopnia piątego, co zrozumiałe, skoro mnożymy przez siebie 5 czynników stopnia pierwszego.
- otrzymaliśmy wszystkie możliwe układy potęg a^nb^k, dla których $n + k = 5$.

Zatem już bez wyprowadzania napiszemy wzór dla $(a+b)^6$:

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6b^0 + \binom{6}{1}a^5b^1 + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}a^1b^5 + \binom{6}{6}a^0b^6$$

i po podstawieniu odpowiednich wartości współczynników Newtona mamy ostatecznie:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Jeżeli powtórzymy powyższe rozważania dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$, otrzymamy wzór na rozwinięcie dwumianu $(a+b)^n$, nazywany **wzorem dwumianowym Newtona** lub krótko **dwumianem Newtona**.

Twierdzenie

Dwumian Newtona

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Dowód

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ czynników}}$$

Składnik zawierający $a^{n-k}b^k$ otrzymujemy, gdy:

- z wybranych $n-k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ czynników mnożymy element a, ⟵ otrzymujemy a^{n-k}
- z pozostałych k czynników mnożymy element b, ⟵ otrzymujemy b^k
- mnożymy a^{n-k} przez b^k.

Możliwości takiego wyboru czynników jest $\binom{n}{n-k}$, a ponieważ $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, dla elegancji zapisu wzoru korzystamy z tej postaci współczynnika Newtona. Innym uzasadnieniem jest fakt, że wystarczy wybrać czynniki, z których mnożymy liczbę b.

Podsumujmy:

- w rozwinięciu $(a+b)^n$ występuje $\binom{n}{k}$ składników postaci $a^{n-k}b^k$,
- każdy składnik rozwinięcia dwumianu Newtona jest jednomianem stopnia n, co zrozumiałe, skoro mnożymy przez siebie n czynników stopnia pierwszego,
- otrzymaliśmy wszystkie możliwe układy potęg $a^p b^q$, dla których $p+q=n$, ponieważ k przyjmuje wszystkie wartości naturalne od 0 do n.

Koniec dowodu

Przykład 4 ◂ zad. 3.8

Zapiszemy podane wyrażenie w postaci uporządkowanej sumy.

a) $(x+3)^5$ b) $\left(k^2-2m\right)^6$

Rozwiązanie

a) $(x+3)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot 3^1 + \binom{5}{2}x^3 \cdot 3^2 + \binom{5}{3}x^2 \cdot 3^3 + \binom{5}{4}x^1 \cdot 3^4 + \binom{5}{5} \cdot 3^5 =$

$= x^5 + 5x^4 \cdot 3 + 10x^3 \cdot 3^2 + 10x^2 \cdot 3^3 + 5x^1 \cdot 3^4 + 3^5 =$

$= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$

b) $\left(k^2-2m\right)^6 = \left(k^2\right)^6 + 6\left(k^2\right)^5(-2m) + \binom{6}{2}\left(k^2\right)^4(-2m)^2 + \binom{6}{3}\left(k^2\right)^3(-2m)^3 +$

$+ \binom{6}{4}\left(k^2\right)^2(-2m)^4 + 6k^2(-2m)^5 + (-2m)^6 =$

$= k^{12} - 12k^{10}m + 60k^8m^2 - 160k^6m^3 + 240k^4m^4 - 192k^2m^5 + 64m^6$

Odp.: a) $x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$

b) $k^{12} - 12k^{10}m + 60k^8m^2 - 160k^6m^3 + 240k^4m^4 - 192k^2m^5 + 64m^6$

Przykład 5 ◀ zad. 3.11

Wyznaczymy ten wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{18}$, w którym występuje x^{10}.

Rozwiązanie

Każdy z wyrazów rozwinięcia dwumianu $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{18}$ ma postać:

$$\binom{18}{k}\left(x^3\right)^{18-k} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^k = \binom{18}{k}x^{54-3k} \cdot (-2)^k \cdot x^{-k} = (-2)^k\binom{18}{k}x^{54-4k}$$

Aby wyznaczyć wyraz, w którym występuje x^{10}, wystarczy rozwiązać równanie:

$$54 - 4k = 10$$

Otrzymujemy $k = 11$. Zatem szukany wyraz jest równy $-2^{11}\binom{18}{11}x^{10}$.

Odp.: $-2^{11}\binom{18}{11}x^{10}$

D **Przykład 6** ◀ zad. 3.12

Wykorzystamy wzór dwumianowy Newtona, aby udowodnić, że:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Dowód

Wystarczy podstawić do wzoru rozwinięcia $(a+b)^n$ wartości $a = b = 1$.
Otrzymujemy wówczas:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} \cdot 1^n \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot 1 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot 1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot 1 \cdot 1^n$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Koniec dowodu

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Na podstawie podanego fragmentu trójkąta Pascala podaj wartość liczby x.

495 x
715 1287 1716

A. 429 **B.** 792 **C.** 924 **D.** 1067

3.2. Wskaż wynik działania $\binom{2n}{n-3}+\binom{2n}{n+2}$.

A. $\binom{2n}{2n+1}$ **B.** $\binom{2n+1}{n-2}$ **C.** $\binom{2n+1}{n+1}$ **D.** $\binom{4n}{2n-1}$

3.3. Wskaż liczbę podzbiorów zbioru dziesięcioelementowego.

A. $\binom{10}{10}$ **B.** 45 **C.** 1024 **D.** 10!

3.4. Zapisz podane liczby i wyrażenia w postaci jednego symbolu Newtona.

a) $\binom{56}{17}+\binom{56}{18}$

b) $\binom{100}{32}+\binom{100}{67}$

c) $\binom{47}{13}+\binom{47}{14}+\binom{47}{32}+\binom{47}{33}$

d) $\binom{3n+2}{2n-1}+\binom{3n+2}{n+2}$

3.5. Skorzystaj z fragmentu jednego z wierszy trójkąta Pascala i oblicz $\binom{14}{4}$.

1 12 66 220 495

3.6. W klasie 4a jest 30 uczniów. Wychowawca poprosił, aby co najmniej jeden z uczniów został po lekcji i posprzątał pracownię. Na ile sposobów uczniowie mogą wypełnić to polecenie?

3.7. Znajdź liczbę wszystkich naturalnych dzielników podanej liczby.

a) 66 b) 209 c) 2310 d) 5005

3.8. Zapisz wyrażenie w postaci uporządkowanej sumy.

a) $(a-b)^4$

b) $\left(2c^2+3\right)^4$

c) $\left(x^3+\frac{2}{x}\right)^5$

d) $\left(\frac{m}{t^2}-\frac{t^3}{m}\right)^6$

3.9. Zapisz wyrażenie w postaci uporządkowanej sumy.

a) $\left(1+\sqrt{2}\right)^4$

b) $\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt{3}\right)^4$

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)^5$

d) $\left(2-\sqrt{2}\right)^6$

3.10. Wyznacz ten składnik sumy będącej rozwinięciem $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^5$, który jest liczbą naturalną.

3.11. Wyznacz ten wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(x^2+\sqrt[4]{x}\right)^{24}$, w którym występuje x^{13}.

D * **3.12.** Wykaż, że $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\cdot\binom{n}{n}=0$.

D * **3.13.** Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba:

$$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+4\binom{n}{2}+\ldots+2^n\binom{n}{n}$$

jest potęgą liczby naturalnej.

Prosto do matury

1. Wielomian $W(x)=(2x+1)^6$ zapisano w postaci uporządkowanej sumy. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Współczynnik przy x jest równy 12.

B. Współczynnik przy x^4 jest równy 30.

C. Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x)$ jest równa 3^6.

2. Dany jest zbiór A składający się z 10 punktów leżących na jednym okręgu. Ile jest wszystkich wielokątów o wierzchołkach w punktach należących do zbioru A?

3. Wyznacz ten wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(x^3+\frac{2}{x}\right)^8$, w którym występuje x^4.

4. Zapisz w postaci uporządkowanej sumy wyrażenie $\left(2-\sqrt{3}\right)^5$.

D **5.** Wykaż, że:

$$\binom{10}{0}\cdot 4^{10}-\binom{10}{1}\cdot 4^9\cdot 3+\binom{10}{2}\cdot 4^8\cdot 3^2-\ldots-\binom{10}{9}\cdot 4\cdot 3^9+\binom{10}{10}\cdot 3^{10}=1$$

4. Warto powtórzyć – prawdopodobieństwo i jego własności

Definicja

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Zakładamy, że Ω jest skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych w danym doświadczeniu losowym.

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w tym doświadczeniu jest równe stosunkowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

Przykład 1

Rzucamy 2 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma liczb oczek w obu rzutach jest nieparzysta?

Rozwiązanie

W tym doświadczeniu losowym:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$$

A – suma liczb oczek jest nieparzysta, czyli za pierwszym razem wypadł wynik parzysty, a za drugim – nieparzysty lub odwrotnie.

Zatem:

$$\overline{\overline{A}} = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

Zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, więc:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Odp.: $\frac{1}{2}$

$\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16,$
$21, 22, 23, 24, 25, 26,$
$31, 32, 33, 34, 35, 36,$
$41, 42, 43, 44, 45, 46,$
$51, 52, 53, 54, 55, 56,$
$61, 62, 63, 64, 65, 66\}$

Zależności między zdarzeniami losowymi

Przyjmijmy, że Ω jest zbiorem zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego oraz A, B są pewnymi zdarzeniami w tym doświadczeniu, czyli $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$.

- **Alternatywą** lub **sumą zdarzeń** A i B nazywamy zdarzenie C, które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A albo zachodzi zdarzenie B, albo zachodzą obydwa te zdarzenia jednocześnie. Zdarzeniu C sprzyjają tylko zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom A lub B, co oznacza, że $C = A \cup B$.

- **Koniunkcją** lub **iloczynem zdarzeń** A i B nazywamy zdarzenie D, które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy jednocześnie zachodzą: zdarzenie A i zdarzenie B. Zdarzeniu D sprzyjają tylko zdarzenia elementarne sprzyjające jednocześnie zdarzeniom A i B, czyli $D = A \cap B$.

- **Różnicą zdarzeń** A i B nazywamy zdarzenie E, które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A i nie zachodzi zdarzenie B. Zdarzeniu E sprzyjają tylko te zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu A i nie sprzyjają zdarzeniu B, czyli $E = A - B$.

- Zdarzenia A i B są **identyczne**, jeżeli zdarzenie A zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie B. Oznacza to, że zdarzeniom A i B sprzyjają te same zdarzenia elementarne, czyli zbiory A i B są równe: $A = B$.

- Zdarzenie A **pociąga za sobą** zdarzenie B, jeżeli każde zdarzenie elementarne sprzyjające zajściu zdarzenia A sprzyja jednocześnie zajściu zdarzenia B. Oznacza to, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B: $A \subset B$.

- Zdarzenia A i B **wykluczają się (wyłączają się)**, gdy ich iloczyn jest zdarzeniem niemożliwym. Inaczej mówiąc, zdarzenia A i B nie mogą zajść jednocześnie. Zbiory A i B są rozłączne: $A \cap B = \emptyset$.

- **Zdarzeniem przeciwnym** do A nazywamy zdarzenie A' polegające na tym, że nie zaszło zdarzenie A. Zdarzenie elementarne sprzyja zdarzeniu A' wtedy i tylko wtedy, gdy nie sprzyja zdarzeniu A.

  Oznacza to, że $A' = \Omega - A$.

Zauważmy, że jeżeli $A \subset \Omega$, to:

$A \cap A' = \emptyset$
$A \cup A' = \Omega$

W teorii zbiorów zbiór A' nazywamy **dopełnieniem** zbioru A do przestrzeni (zbioru) Ω.

Własności prawdopodobieństwa

Definicja

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych. Jeżeli każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba $P(A)$ taka, że:

(1) $P(A) \geqslant 0$,

(2) dla każdej pary $A, B \subset \Omega$ wykluczających się zdarzeń zachodzi $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,

(3) $P(\Omega) = 1$,

to mówimy, że **na zdarzeniach w zbiorze Ω określone jest prawdopodobieństwo** P, a liczbę $P(A)$ nazywamy **prawdopodobieństwem zdarzenia** A.

Twierdzenie

Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P – prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach w zbiorze Ω i $A, B \subset \Omega$. Wtedy:

(1) $P(\emptyset) = 0$.

(2) jeżeli $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$.

(3) dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ prawdziwa jest nierówność $P(A) \leqslant 1$.

(4) $P(A) + P(A') = 1$.

(5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Rzucono trzema monetami. Wskaż prawdopodobieństwo, że każda z monet upadła na stół tą samą stroną (orłem lub reszką) do góry.

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{1}{3}$

4.2. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe $\frac{x}{5}$ i $x \neq 0$. Zatem prawdopodobieństwo tego, że zdarzenie A nie zajdzie, wynosi

A. $\frac{1-x}{5}$. **B.** $\frac{5-x}{x}$. **C.** $\frac{5-x}{5}$. **D.** $\frac{5}{x}$.

4.3. Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$, $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{7}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Wskaż wartość $P(A \cap B)$.

A. $\frac{1}{28}$ **B.** $\frac{1}{84}$ **C.** $\frac{25}{28}$ **D.** $\frac{5}{84}$

4.4. Wiadomo, że $A, B, C \subset \Omega$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

B. $B \cap C \subset B \cup C$

C. $A' \cup B' = (A \cup B)'$

4.5. Rzucamy dwiema kostkami sześciennymi. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma liczb oczek na obu kostkach będzie podzielna przez 5?

4.6. Rzucamy kostką i dwiema monetami. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wypadną dwie reszki i liczba nieparzysta?

4.7. W urnie są kule białe, czarne i zielone, razem 64 sztuki. Prawdopodobieństwo wylosowania z tej urny kuli czarnej wynosi $\frac{9}{16}$, a kuli zielonej $\frac{1}{4}$. Podaj liczbę kul białych znajdujących się w tej urnie.

4.8. W skarbonce są następujące monety: 6 złotówek, 4 dwuzłotówki i 2 pięciozłotówki. Oblicz prawdopodobieństwo, że moneta losowo wyjęta ze skarbonki ma wartość równą średniej wartości monet w skarbonce.

4.9. Z urny, w której jest 12 kul białych i 13 czarnych, losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul w jednakowym kolorze?

4.10. Z talii 52 kart losujemy ze zwracaniem dwa razy po jednej karcie. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dwa razy asa?

4.11. Na loterii jest 100 losów, w tym 12 wygrywających. Kupujemy kolejno dwa losy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pierwszy kupiony los będzie przegrywający, a drugi – wygrywający?

4.12. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana liczba naturalna dwucyfrowa jest podzielna przez 5 lub przez 8?

4.13. Rzucamy 8 razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wypadnie orzeł?

5. Obliczanie prawdopodobieństwa z zastosowaniem kombinatoryki

Umiejętności:

- obliczanie prawdopodobieństwa z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa
- zliczanie obiektów z wykorzystaniem wzorów kombinatorycznych

Przypomnijmy – jeżeli w danym doświadczeniu losowym wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to **prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia** A wynosi:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

gdzie $\overline{\overline{A}}$ oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A, a $\overline{\overline{\Omega}}$ – liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

Powyższy wzór możemy stosować tylko wówczas, gdy $A \subset \Omega$. Jeżeli więc uwzględniamy kolejność (wariacje) w zapisie wyników w zbiorze Ω, to musimy również uwzględnić ją w zapisie zbioru A. Jeżeli natomiast w zapisie zbioru Ω wykorzystujemy kombinacje, to do zapisu zbioru A także musimy użyć kombinacji.

Zastosujemy teraz poznane wzory kombinatoryczne do obliczania wartości $\overline{\overline{\Omega}}$ i $\overline{\overline{A}}$. W pewnych sytuacjach będziemy też wykorzystywać metodę drzew.

Przykład 1 ◀ zad. 5.6

W urnie jest 5 kul zielonych i 4 czarne. Losujemy cztery kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul dokładnie dwie będą zielone?

Rozwiązanie

W doświadczeniu nie odgrywa roli kolejność kul. Zatem zdarzenia elementarne możemy rozpatrywać jako czteroelementowe kombinacje utworzone ze zbioru 9 elementów.

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 2 \cdot 9$$

Oznaczmy jako A zdarzenie polegające na wylosowaniu dokładnie dwóch kul zielonych (zatem układ sprzyjający to 2 zielone + 2 czarne). Aby uzyskać wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające, możemy następująco wyobrazić sobie doświadczenie: rozdzielamy kulki na dwa podzbiory (oddzielnie zielone oraz czarne) i losujemy 2 kule ze zbioru czarnych oraz 2 kule ze zbioru zielonych. Mamy więc:

$$\overline{\overline{A}} = \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 4 \cdot 5 \cdot 3, \text{ czyli } P(A) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 3}{7 \cdot 2 \cdot 9} = \frac{10}{21}$$

Odp.: $\frac{10}{21}$

Przykład 2 ◂ zad. 5.8

W urnie są 3 kule zielone i 4 czarne. Losujemy bez zwracania trzy razy po jednej kuli. Obliczymy prawdopodobieństwo, że ostatnią wylosowaną kulą jest kula czarna.

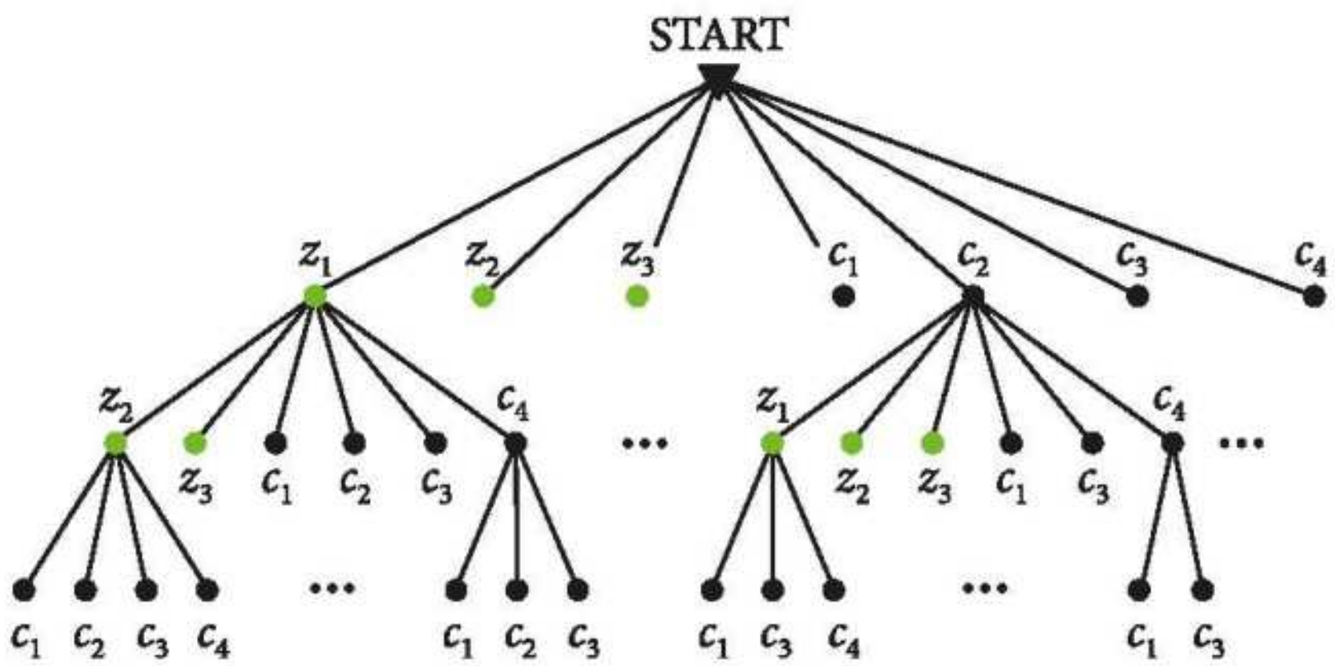
Rozwiązanie

Skoro interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzenia A – ostatnia (a więc trzecia) wylosowana kula jest czarna, musimy uwzględnić kolejność kul. Zatem zdarzeniami elementarnymi w tym doświadczeniu są 3-elementowe wariacje bez powtórzeń ze zbioru 7-elementowego, czyli $\overline{\overline{\Omega}} = 7 \cdot 6 \cdot 5$.

Zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzenia A to następujące układy kul:

zielona – zielona – czarna,
zielona – czarna – czarna,
czarna – zielona – czarna,
czarna – czarna – czarna.

Przyjmijmy, że kule zielone są opisane z_1, z_2, z_3, a kule czarne – c_1, c_2, c_3, c_4.



Z powyższego drzewka odczytujemy:

$$\overline{\overline{A}} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 4 \cdot 10$$

$$P(A) = \frac{3 \cdot 4 \cdot 10}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{4}{7}$$

Odp.: $\frac{4}{7}$

Przykład 3 ◀ zad. 5.9

Obliczymy prawdopodobieństwo, z jakim brydżysta otrzyma do ręki 8 pików.

Rozwiązanie

Doświadczenie polega na losowaniu 13 kart z talii 52 kart, kolejność wylosowanych kart nie jest istotna, zatem:

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{52}{13} = \frac{52!}{13! \cdot 39!}$$

Zdarzeniem A jest wylosowanie 8 pików i 5 kart niebędących pikami. Rozdzielamy więc talię na dwa podzbiory – 13 pików i resztę (czyli $52 - 13 = 39$) kart i losujemy 8 kart z pików oraz pozostałe 5 ze zbioru kart innych niż piki. Liczba wszystkich zdarzeń sprzyjających jest więc równa:

$$\overline{\overline{A}} = \binom{13}{8} \cdot \binom{39}{5} = \frac{13!}{8! \cdot 5!} \cdot \frac{39!}{5! \cdot 34!}$$

$$P(A) = \frac{\binom{13}{8} \cdot \binom{39}{5}}{\binom{52}{13}} = \frac{(13!)^2 \cdot (39!)^2}{(5!)^2 \cdot 8! \cdot 34! \cdot 52!} \approx 0{,}001$$

Odp.: $\frac{(13!)^2 \cdot (39!)^2}{(5!)^2 \cdot 8! \cdot 34! \cdot 52!}$

Przykład 4

Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne – wylosowanie przez brydżystę zestawu „4 asy, 4 króle, 4 damy, walet pik" czy zestawu „$5_\spadesuit$, $8_\spadesuit$, $A_\spadesuit$, $3_\heartsuit$, $10_\heartsuit$, $D_\heartsuit$, $K_\heartsuit$, $5_\diamondsuit$, $8_\diamondsuit$, $D_\diamondsuit$, $3_\clubsuit$, $8_\clubsuit$, $K_\clubsuit$"?

Rozwiązanie

Oznaczmy wylosowane zestawy:

A – „4 asy, 4 króle, 4 damy, walet pik",

B – „$5_\spadesuit$, $8_\spadesuit$, $A_\spadesuit$, $3_\heartsuit$, $10_\heartsuit$, $D_\heartsuit$, $K_\heartsuit$, $5_\diamondsuit$, $8_\diamondsuit$, $D_\diamondsuit$, $3_\clubsuit$, $8_\clubsuit$, $K_\clubsuit$".

Każde z tych zdarzeń jest reprezentowane przez jedno zdarzenie elementarne (konkretny układ kart), zatem:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = 1$$

i prawdopodobieństwa ich zajścia są **identyczne**.

W doświadczeniu losowym wylosowanie np. zestawu 13 konkretnych kart przez brydżystę czy 6 konkretnych liczb w lotto jest zawsze **pojedynczym** zdarzeniem elementarnym. Nie ma więc bardziej lub mniej prawdopodobnych układów. Podobnie – po wyrzuceniu kolejno 26 reszek prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w 27. rzucie monetą nie wzrosło i nadal wynosi $\frac{1}{2}$.

Przykład 5 ◂ zad. 5.11

Pani przewodnik na wycieczce ustawia losowo w rządku dwanaścioro dzieci, w tym Antosia, Basię i Cesię. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wymienione dzieci zostaną ustawione obok siebie w dowolnej kolejności?

Rozwiązanie

Doświadczeniem losowym jest ustalenie kolejności dwanaściorga dzieci.
Zdarzenia elementarne są permutacjami zbioru dwunastoelementowego, więc:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 12!$$

Zdarzenie A polega na takim ustawieniu dzieci, w którym Antoś, Basia i Cesia sąsiadują ze sobą. Obliczymy, ile jest takich zdarzeń.
Trójkę Antoś – Basia – Cesia możemy umieścić wśród innych dzieci na 10 sposobów, na miejscach:

- pierwszym, drugim i trzecim,
- drugim, trzecim i czwartym,
- ...
- dziesiątym, jedenastym i dwunastym.

Dla każdego z nich jest 3! sposobów ustalenia kolejności tych dzieci oraz 9! sposobów ustalenia kolejności pozostałych dzieci. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających jest więc równa:

$$\overline{\overline{A}} = 10 \cdot 3! \cdot 9!$$

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{10 \cdot 3! \cdot 9!}{12!} = \frac{6 \cdot 10!}{12 \cdot 11 \cdot 10!} = \frac{1}{22}$$

Odp.: $\frac{1}{22}$

Przykład 6

Rzucamy 9 razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uzyskamy dokładnie 5 orłów?

Doświadczenia „rzut monetą (kostką) k razy" i „rzut k monetami (kostkami)" możemy zinterpretować i opisać dokładnie tak samo. Identyczne są zatem zbiory zdarzeń elementarnych takich doświadczeń.

Rozwiązanie

Zdarzenia elementarne są dziewięcioelementowymi wariacjami z powtórzeniami, więc $\overline{\overline{\Omega}} = 2^9 = 512$.
Zdarzenie A polega na wyrzuceniu pięciu orłów i czterech reszek. Przykładem zdarzenia elementarnego sprzyjającego zajściu zdarzenia A jest OORORORRO.

Do wyznaczenia wszystkich takich zdarzeń sprzyjających wystarczy znaleźć w zbiorze Ω wszystkie ciągi, w których reszka R występuje dokładnie 4 razy*. W tym celu możemy odpowiednio spreparować doświadczenie, na przykład poprzez pomocnicze losowanie, w którym zamiast rzutów monetą losujemy numery miejsc, na których wpiszemy R.

W ciągu OORORORRO litera R występuje na trzecim, piątym, siódmym i ósmym miejscu. Odpowiada to wylosowaniu liczb 3, 5, 7, 8 ze zbioru {1, 2, …, 8, 9}. Zauważmy, że nie jest istotna kolejność wylosowanych numerów, natomiast nie mogą się one powtarzać. Zatem w pomocniczym losowaniu mamy $\binom{9}{4}$ wszystkich możliwości i tyle jest w zbiorze Ω zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A.

$$\overline{\overline{A}} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 2 \cdot 9, \text{ czyli } P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 9}{512} = \frac{63}{256}$$

Odp.: $\frac{63}{256}$

Przykład 7

W urnie jest 10 kul czarnych i 2 białe. Wszystkie kule dzielimy losowo na dwa podzbiory po 6 kul. Obliczymy prawdopodobieństwo, że w każdym z nich znajdzie się kula biała.

Rozwiązanie

Aby podzielić kule na dwa podzbiory, losujemy 6 z 12 kul. Wybór sześciu kul oznacza bowiem zostawienie w urnie 6 kul. Kolejność wylosowanych kul nie jest istotna, zatem:

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{12}{6}$$

Oznaczmy zdarzenie A – w każdym z dwóch podzbiorów znajdzie się kula biała. Zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A polega na wylosowaniu 5 kul czarnych i jednej białej. Mamy więc:

$$\overline{\overline{A}} = \binom{10}{5} \cdot \binom{2}{1}$$

⟵ kule czarne losujemy spośród 10 czarnych, a kulę białą – spośród 2 białych

$$P(A) = \frac{\binom{10}{5} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{12}{6}} = \frac{10! \cdot 2 \cdot (6!)^2}{(5!)^2 \cdot 12!} = \frac{6}{11}$$

Odp.: $\frac{6}{11}$

---

* W temacie ósmym (s. 182) przedstawiamy inny sposób rozwiązywania zadań tego typu.

Przykład 8 ◂ zad. 5.19

Z urny, w której jest 10 kul białych i pewna liczba kul czarnych, losujemy 2 kule. Ile kul czarnych jest w urnie, jeżeli prawdopodobieństwo wylosowania z tej urny dwóch kul białych jest równe $\frac{3}{7}$?

Rozwiązanie

Oznaczmy liczbę kul czarnych literą n ($n \in \mathbf{N}$ i $n > 0$). W doświadczeniu nie odgrywa roli kolejność wylosowanych kul – zdarzenia elementarne są dwuelementowymi kombinacjami ze zbioru $(n + 10)$-elementowego.

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{n+10}{2} = \frac{(n+10)!}{2! \cdot (n+8)!} = \frac{(n+9)(n+10)}{2}$$

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch kul białych.

$$\overline{\overline{A}} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

$$P(A) = \frac{90}{(n+9)(n+10)} \qquad \longleftarrow \text{z warunków zadania wiemy, że } P(A) = \frac{3}{7}$$

$$\frac{90}{(n+9)(n+10)} = \frac{3}{7}$$

Dziedziną tego równania jest zbiór dodatnich liczb naturalnych, więc nie musimy już robić żadnych dodatkowych założeń dotyczących mianownika.

$$(n+9)(n+10) = 30 \cdot 7$$

$$n^2 + 19n - 120 = 0$$

$$n = -24 \text{ lub } n = 5 \qquad \longleftarrow \text{tylko drugie z otrzymanych rozwiązań należy do dziedziny}$$

Odp.: W urnie jest 5 kul czarnych.

Przykład 9 ◂ zad. 5.20

Ile razy należy rzucić sześcienną kostką do gry, aby prawdopodobieństwo, że szóstka ani razu nie wypadnie, było mniejsze od $\frac{1}{3}$?

Rozwiązanie

Prawdopodobieństwo, że w jednym rzucie szóstka nie wypadnie, jest równe $\frac{5}{6}$, w dwóch rzutach – $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ itd.

Szukamy takiego n (gdzie n oznacza liczbę rzutów), aby:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{3}$$

Obydwie strony nierówności są dodatnie, możemy je więc zlogarytmować.

$$\log\left(\frac{5}{6}\right)^n < \log\frac{1}{3}$$

$$n\log\frac{5}{6} < \log\frac{1}{3} \qquad \longleftarrow \log_a b^n = n\log_a b$$

$$n > \frac{\log\frac{1}{3}}{\log\frac{5}{6}} \qquad \longleftarrow \log\frac{5}{6} < 0$$

$$n > \frac{\log 1 - \log 3}{\log 5 - \log 6} = \frac{-\log 3}{-\left(\log 6 - \log 5\right)} = \qquad \longleftarrow \log_a\frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$= \frac{\log 3}{\log 6 - \log 5} \approx 6{,}03$$

Zatem należy wykonać co najmniej 7 rzutów kostką.

Odp.: Co najmniej 7 razy.

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Z cyfr 1, 2, 3, 4 układamy losowo czterocyfrowe liczby o różnych cyfrach. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba będzie zawarta między liczbami 2000 i 4000.

A. $\frac{5}{6}$ **B.** $\frac{5}{12}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{1}{2}$

5.2. Z sześciu odcinków o długościach 1, 3, 5, 6, 7, 9 wybieramy losowo trzy różne odcinki. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że z wybranych odcinków można zbudować trójkąt.

A. $\frac{2}{5}$ **B.** $\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{3}{20}$ **D.** $\frac{7}{10}$

5.3. W urnie są 3 kule zielone i 4 czarne. Losujemy cztery kule. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul dokładnie dwie są czarne.

A. $\frac{2}{7}$ **B.** $\frac{3}{35}$ **C.** $\frac{6}{35}$ **D.** $\frac{18}{35}$

5.4. Pięcioro klientów o różnym wzroście ustawia się losowo w kolejkę przed kasą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) ustawią się w kolejności od najwyższego do najniższego.
b) najwyższy stanie na początku kolejki, a najniższy na jej końcu.

5.5. Rzucamy 10 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w żadnych dwóch kolejnych rzutach nie powtórzy się ten sam wynik.

5.6. Z urny, w której jest 12 kul białych i 8 czarnych, losujemy 3 kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul dokładnie jedna będzie czarna?

5.7. Rzucamy 3 razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn liczb oczek we wszystkich rzutach będzie mniejszy od 200.

5.8. W pudełku jest 6 losów wygrywających i 24 losy puste. Kupujemy kolejno trzy losy. Oblicz prawdopodobieństwo, że ostatni z kupionych losów będzie wygrywający.

5.9. Z talii 24 kart (6 kart w każdym z czterech kolorów) wyciągamy losowo 5 kart. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy dokładnie 3 piki.

5.10. Przy okrągłym stole o 10 miejscach usiadło w przypadkowej kolejności 10 osób, w tym jedno małżeństwo. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że małżonkowie nie sąsiadują ze sobą.

5.11. Sześciu finalistów konkursu, w tym Anna i Jan, losuje kolejność, w jakiej będą odpowiadać przed komisją. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Anna nie będzie odpowiadać jako pierwsza i jednocześnie Jan będzie odpowiadać po niej (niekoniecznie bezpośrednio).

5.12. Spośród kartek z liczbami 1, 2, …, 9 wybieramy losowo jedną, zwracamy ją i losujemy po raz drugi. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
a) wartość bezwzględna różnicy wylosowanych liczb jest nie większa niż 1.
b) różnica wylosowanych liczb jest liczbą parzystą.

5.13. Dziesięć osób wybrało się na biwak nad jeziorem. Po przyjeździe cztery z nich wzięły się za rozbijanie namiotów, a pozostali postanowili pójść do lasu po chrust na ognisko. Z jakim prawdopodobieństwem Marta – jedna z uczestniczek biwaku – pójdzie po chrust, jeżeli podziału na grupy dokonano losowo?

5.14. Uczniowie 36-osobowej klasy Izydora nie mogli dojść do porozumienia, jak podzielić się obowiązkami związanymi z przygotowaniem studniówki. Ostatecznie postanowili losować z własnego grona 15 osób do wykonania dekoracji, 7 osób do zrobienia i wręczenia zaproszeń gościom, a pozostałych zatrudnić do sprzątania po zabawie. Z jakim prawdopodobieństwem Izydor i Jolka znajdą się w jednej grupie?

5.15. Z jakim prawdopodobieństwem Izydor zatańczy na studniówce poloneza z Jolką, jeżeli w ich klasie jest 18 uczniów i 18 uczennic, a dobór w pary jest przeprowadzany losowo?

5.16. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że trzy losowo wybrane wierzchołki sześcianu są wierzchołkami trójkąta równobocznego?

5.17. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy trzy razy kolejno bez zwracania po jednej cyfrze. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że

a) zapisując cyfry w kolejności losowania, otrzymamy liczbę 451?
b) wylosujemy trzy cyfry występujące w zapisie liczby 451?
c) zapisując cyfry w kolejności losowania, otrzymamy liczbę mniejszą od 451?

5.18. W pudełku znajduje się 6 kul białych i 10 czarnych.

a) Losujemy dwie kule kolejno ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul w tym samym kolorze.
b) Losujemy dwie kule kolejno bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul o różnych kolorach.
c) Do pudełka dołożono b kul białych, a następnie wylosowano dwie kule kolejno bez zwracania. Oblicz b, dla którego prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul o różnych kolorach jest równe prawdopodobieństwu wylosowania dwóch kul w tym samym kolorze.

5.19. W pudełku jest 400 kul, w tym n czerwonych. Wybieramy losowo dwie kule. Prawdopodobieństwo wylosowania obu kul czerwonych jest równe $\frac{1}{760}$.

a) Ile kul czerwonych jest w tym pudełku?
b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że żadna z wylosowanych kul nie jest czerwona.

5.20. Wśród n losów na loterii są cztery wygrywające. Kupujemy 3 losy. Dla jakich n prawdopodobieństwo tego, że wszystkie losy będą wygrywające, jest większe od 0,2?

5.21. W urnie jest 20 kul białych i 2 czarne. Losujemy bez zwracania n kul. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wylosowania samych kul białych jest większe od $\frac{1}{2}$?

5.22. Spośród liczb 1, 2, 3, 4, 5, 8 wybieramy trzy różne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrane liczby są długościami boków
a) trójkąta? b) trójkąta prostokątnego? c) trójkąta rozwartokątnego?

* **5.23.** Rzucamy 12 razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda liczba oczek wypadnie dokładnie 2 razy?

Prosto do matury

1. Przy okrągłym stole o ośmiu miejscach usiadło w sposób przypadkowy osiem osób. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Prawdopodobieństwo tego, że osoby X i Y nie siedzą obok siebie, jest równe $\frac{5}{7}$.

B. Prawdopodobieństwo tego, że osoby X, Y i Z siedzą obok siebie, jest równe $\frac{1}{7}$.

C. Prawdopodobieństwo tego, że osoby X i Y siedzą obok siebie, a osoba Z nie sąsiaduje z żadną z nich, jest równe $\frac{4}{21}$.

2. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 układamy wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana spośród nich liczba jest mniejsza od 320.

3. Z grupy, w której jest pięciu mężczyzn i cztery kobiety, wybrano losowo 3-osobową delegację. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w skład delegacji weszła dokładnie jedna kobieta.

4. W windzie dziesięciopiętrowego domu jedzie trzech pasażerów. Zakładamy, że wszystkie możliwe rozkłady wysiadania pasażerów na piętrach są jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każdy pasażer wysiądzie na innym piętrze.

5. Z pudełka, w którym jest n kul, w tym 6 białych, losujemy dwie kule. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych jest większe od $\frac{1}{3}$?

6. Prawdopodobieństwo warunkowe

Umiejętności:

- obliczanie prawdopodobieństwa warunkowego

W rachunku prawdopodobieństwa mamy często do czynienia z sytuacjami, gdy szanse zajścia pewnych zdarzeń zależą od innych zdarzeń. Mówimy wówczas o **prawdopodobieństwie warunkowym**. Aby wyjaśnić to pojęcie, przeanalizujemy poniższy przykład.

Przykład 1

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie kostką sześcienną. Rozpatrzmy zdarzenia:
A – suma liczb oczek w rzutach I i II jest równa 6,
B – w rzucie I wypadła parzysta liczba oczek.

W tabelach zaznaczyliśmy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zajściu odpowiednio zdarzenia A i zdarzenia B.

$$P(A) = \frac{5}{36},\ P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Załóżmy teraz, że w pierwszym rzucie wypadła parzysta liczba oczek, czyli że zaszło zdarzenie B. Ile wtedy wynosi prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A?

Ponieważ zdarzenie B już zaszło, bierzemy pod uwagę tylko zdarzenia mu sprzyjające i do nich ograniczamy zbiór zdarzeń elementarnych (kolor niebieski w tabeli). Następnie sprawdzamy, ile spośród nich sprzyja zajściu zdarzenia A, co jest równoznaczne z wyznaczeniem liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia $A \cap B$. W tabeli obok widać, że są dwa takie zdarzenia: (2, 4) i (4, 2).

II \ I	1	2	3	4	5	6
1					A	
2				A		
3			A			
4		A				
5	A					
6						

II \ I	1	2	3	4	5	6
1		B		B		B
2		B		B		B
3		B		B		B
4		B		B		B
5		B		B		B
6		B		B		B

II \ I	1	2	3	4	5	6
1					A	
2				A		
3			A			
4		A				
5	A					
6						

$$\overline{\overline{B}} = 18,\ \overline{\overline{A \cap B}} = 2$$

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, jest więc równe $\frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$.

Szukane prawdopodobieństwo jest różne od prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A. Prawdopodobieństwo to oznaczamy $P(A|B)$ i nazywamy prawdopodobieństwem warunkowym: $P(A|B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}}$.

Zauważmy, że możemy w inny sposób zapisać wzór na $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}} = \frac{\frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}}{\frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Powyższy wzór został przyjęty jako definicja prawdopodobieństwa warunkowego.

Definicja

Niech $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$. **Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B**, nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe spełnia warunki aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa, a więc ma te same własności co prawdopodobieństwo zdefiniowane w sposób aksjomatyczny i klasyczny.

Przykład 2 ◂ zad. 6.6

Ze wszystkich liczb trzycyfrowych, których cyfry należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, losujemy jedną liczbę. Obliczymy prawdopodobieństwo, że cyfry wylosowanej liczby są różne, pod warunkiem, że ta liczba jest parzysta.

Rozwiązanie

Wszystkich liczb trzycyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ jest $5^3 = 125$.
Losujemy jedną taką liczbę, zatem $\overline{\overline{\Omega}} = 125$.

Oznaczmy zdarzenia:
A – wylosowana liczba ma różne cyfry, B – wylosowana liczba jest parzysta.

Szukamy $P(A|B)$. Musimy więc obliczyć $P(B)$ i $P(A \cap B)$.

$\overline{\overline{B}} = 2 \cdot 5^2 = 50$ ⟵ o parzystości decyduje ostatnia cyfra

$P(B) = \frac{50}{125}$

Zdarzenie $A \cap B$ polega na tym, że wylosowana liczba ma różne cyfry i jej ostatnią cyfrą jest 2 lub 4.

$\overline{\overline{A \cap B}} = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

$$P(A \cap B) = \frac{24}{125}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{24}{125}}{\frac{50}{125}} = \frac{12}{25}$$

Odp.: Prawdopodobieństwo, że cyfry wylosowanej liczby są różne, pod warunkiem, że ta liczba jest parzysta, wynosi $\frac{12}{25}$.

Przykład 3 ◂ zad. 6.10

W wyścigu żużlowym startuje czterech zawodników: Tomasz, Jarosław, Krzysztof i Adam. Niech T, J, K, A będą zdarzeniami oznaczającymi kolejno zwycięstwo każdego z nich. Eksperci szacują, że $P(T) = 0{,}5$, $P(J) = 0{,}2$, $P(K) = 0{,}2$, $P(A) = 0{,}1$. W czasie drugiego okrążenia Krzysztof się przewrócił. Jakie szanse zwycięstwa mają teraz pozostali zawodnicy?

Rozwiązanie

Wiemy, ze zdarzenie K nie zaszło, czyli zaszło zdarzenie K'. Należy więc obliczyć prawdopodobieństwa warunkowe: $P(T|K')$, $P(J|K')$ i $P(A|K')$. Zdarzenia T, J, K i A wykluczają się nawzajem, czyli:

$T \cap K' = T$ ⟵ „wygra Tomasz i przegra Krzysztof" oznacza po prostu, że „wygra Tomasz"

$J \cap K' = J$

$A \cap K' = A$

Zatem:

$$P(T|K') = \frac{P(T \cap K')}{P(K')} = \frac{P(T)}{P(K')} = \frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}625$$

$$P(J|K') = \frac{P(J \cap K')}{P(K')} = \frac{P(J)}{P(K')} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25$$

$$P(A|K') = \frac{P(A \cap K')}{P(K')} = \frac{P(A)}{P(K')} = \frac{0{,}1}{0{,}8} = 0{,}125$$

Odp.: Szanse zwycięstwa Tomasza, Jarosława i Adama wynoszą teraz odpowiednio 0,625, 0,25 i 0,125.

Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń

Po przekształceniu wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe otrzymujemy wzór na prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Przykład 4

Z pudełka, w którym jest 8 kul białych i 5 czarnych, losujemy kolejno bez zwracania 2 kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwsza kula jest biała, a druga czarna?

Rozwiązanie

Możemy zastosować schemat klasyczny. Ale zadanie można też rozwiązać inaczej.

Określmy zdarzenia:
A – pierwsza z wylosowanych kul jest biała,
B – druga z wylosowanych kul jest czarna.

Z warunków zadania wynika od razu, że $P(A) = \frac{8}{13}$ i $P(B|A) = \frac{5}{12}$, bo jeśli jako pierwszą wylosowaliśmy kulę białą, to w urnie zostało 7 kul białych i 5 czarnych.

Stosujemy wzór na prawdopodobieństwo iloczynu:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12} = \frac{10}{39}$$

Odp.: $\frac{10}{39}$

Przykład 5 ◀ zad. 6.12

Egzamin na studiach składa się z części pisemnej i ustnej. Aby go zdać, trzeba zaliczyć obie części. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany z grupy zdających student zaliczy część pisemną, jest równe 0,6. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany student, który przeszedł przez część pisemną, zaliczy część ustną, wynosi 0,8. Jakie jest prawdopodobieństwo, że student losowo wybrany z grupy zdających nie zda egzaminu?

Rozwiązanie

Wśród studentów zdających egzamin określamy zdarzenia:
A – losowo wybrany student zda część pisemną;
B – losowo wybrany student zda część ustną.

Z warunków zadania wynika, że $P(A) = 0{,}6$ i $P(B|A) = 0{,}8$.

Zauważmy, że zdanie egzaminu, czyli zaliczenie obu jego części, oznacza zajście zdarzenia $A \cap B$.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$$

Szukamy prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia przeciwnego do $A \cap B$.

$$P\left((A \cap B)'\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$$

Odp.: Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany z grupy zdających student nie zda egzaminu, jest równe 0,52.

D **Przykład 6** ◀ zad. 6.16

Rozważamy doświadczenie losowe, w którym Ω jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Niech $A, B \subset \Omega$. Wykażemy, że jeżeli $P(A) = \frac{4}{5}$ i $P(B) = \frac{3}{10}$, to $P(A|B) \geqslant \frac{1}{3}$.

Dowód

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0{,}3}$$

Musimy więc oszacować $P(A \cap B)$.

$P(A \cup B) \leqslant 1$ ⟵ własność prawdopodobieństwa

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leqslant 1$ ⟵ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0{,}8 + 0{,}3 - P(A \cap B) \leqslant 1$

$P(A \cap B) \geqslant 0{,}1$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{0{,}3} \geqslant \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$$

Koniec dowodu

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Ω jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego. Wiemy, że $A, B \subset \Omega$, $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$ oraz $P(B') = \frac{1}{3}$. Wskaż $P(A|B)$.

A. $\frac{2}{5}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{2}{30}$ **D.** $\frac{4}{5}$

6.2. Ω jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego. Wiemy, że $A, B \subset \Omega$, $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(A|B) = \frac{1}{5}$ i $P(B|A) = \frac{1}{4}$. Wskaż $P(B)$.

A. $\frac{8}{25}$ **B.** $\frac{1}{10}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{1}{2}$

6.3. Z pudełka, w którym jest 10 kul białych i 6 czerwonych, losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Prawdopodobieństwo, że pierwsza kula jest czerwona, a druga biała, wynosi

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

6.4. Rzucamy 5 razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej dwóch orłów, jeżeli za pierwszym razem wypadł orzeł?

6.5. Rzucamy 3 razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że za każdym razem uzyskamy inną liczbę oczek, pod warunkiem, że suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 15.

6.6. Ze zbioru wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że ta liczba jest podzielna przez 5, pod warunkiem, że jest to liczba nieparzysta.

6.7. Z talii 52 kart losujemy 3 karty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie dwóch pików, pod warunkiem, że nie wylosujemy żadnego kiera.

6.8. Przyjmijmy, że prawdopodobieństwo urodzenia się dziewczynki i chłopca jest takie samo. W pewnej rodzinie jest dwoje dzieci. Wiadomo, że co najmniej jedno z nich jest chłopcem. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że oboje dzieci to chłopcy?

6.9. Prawdopodobieństwo tego, że reprezentacja klasy 4c dojdzie do finału szkolnych rozgrywek piłki nożnej, jest równe 60%, a prawdopodobieństwo tego, że wygra w meczu finałowym, jest równe 70%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że reprezentacja klasy 4c zdobędzie mistrzostwo?

6.10. W teleturnieju startują cztery osoby. Do finału zakwalifikowują się trzy spośród nich. Prawdopodobieństwo odpadnięcia przed finałem wynosi:

- dla pani Agnieszki 0,2,
- dla pani Grażyny 0,1,
- dla pani Małgosi 0,4,
- dla pana Bogdana 0,3.

Po pierwszej rundzie pani Grażyna zapewniła już sobie udział w finale. Jakie jest prawdopodobieństwo, że do finału zakwalifikuje się pan Bogdan?

6.11. Karol typuje, że prawdopodobieństwo zdobycia tytułu mistrzowskiego w piłce nożnej przez drużynę Manchesteru United wynosi 30%, przez drużynę Chelsea London – 20%, a przez jedną z pozostałych drużyn – 50%. Uwzględniając te dane, oblicz prawdopodobieństwo zdobycia tytułu mistrzowskiego przez drużynę Manchesteru United, pod warunkiem, że drużyna Chelsea London nie zdobędzie tego tytułu.

6.12. Adam nie przygotował się dziś do lekcji. Prawdopodobieństwo tego, że zostanie zapytany, ocenia na 20%, a prawdopodobieństwo tego, że za odpowiedź otrzyma ocenę niedostateczną – na 90%. Przyjmując te dane, oblicz prawdopodobieństwo, że Adam otrzyma dziś ocenę niedostateczną z odpowiedzi.

6.13. Oblicz $P(A|B)$, wiedząc, że $A, B \subset \Omega$, $P(B') = 0{,}2$ i $P(A \cap B) = 0{,}75$.

6.14. Oblicz $P(A|B)$, wiedząc, że $A, B \subset \Omega$, $P(A) = P(B) = 0{,}7$ i $P(A \cup B) = 0{,}8$.

6.15. Oblicz $P(A|B)$, wiedząc, że $A, B \subset \Omega$ i $B \subset A$.

D **6.16.** Niech $A, B \subset \Omega$. Wykaż, że jeżeli $P(B) = 0{,}4$ i $P(A|B) = 0{,}6$, to $P(A) \leqslant 0{,}84$.

* **6.17.** Krzysztof średnio raz na trzy dni spóźnia się do szkoły. Tłumaczy to tym, że średnio co czwarty dzień za późno wychodzi z domu i spóźnia się na autobus, a nawet jeśli wyjdzie punktualnie, autobus często zatrzymuje się w korku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że mimo wyjścia z domu o odpowiedniej porze Krzysztof spóźni się do szkoły?

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ i $P(A|B) = \frac{1}{3}$. Wynika z tego, że

A. $P(A) = \frac{1}{3}$. **B.** $P(B) = 1$. **C.** $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

2. Oblicz $P(A|B')$, wiedząc, że $A, B \subset \Omega$, $P(B) = 0{,}2$ i $P(A \cup B) = 0{,}35$.

3. Prawdopodobieństwo, że kierowca zostanie na pewnym odcinku drogi zatrzymany i będzie ukarany mandatem, wynosi 4%. Prawdopodobieństwo, że na tym odcinku kierowca w ogóle zostanie zatrzymany do kontroli, wynosi 5%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kierowca, który został zatrzymany, będzie ukarany mandatem?

4. Rzucamy trzema kostkami sześciennymi do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek na wszystkich kostkach będzie liczbą parzystą, jeżeli ich iloczyn jest liczbą parzystą?

D **5.** Wykaż, że jeżeli $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$, to $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$.

7. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Umiejętności:

- wykorzystywanie w zadaniach twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym

Omawiane w poprzednim temacie prawdopodobieństwo warunkowe stosujemy przede wszystkim w sytuacjach, gdy mamy do czynienia z doświadczeniem losowym przeprowadzanym w kilku etapach. Przeanalizujmy najpierw przykład.

Przykład 1

W pierwszym pudełku jest 1 los wygrywający i 9 pustych, a w drugim są 3 losy wygrywające i 12 pustych. Rzucamy monetą. Jeśli wypadnie orzeł, wyciągamy jeden los z pierwszego pudełka, jeśli reszka – jeden los z drugiego pudełka. Obliczymy prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego.

Rozwiązanie

Doświadczenie składa się z dwóch etapów:

I. Rzut monetą.

Oznaczamy: O – wypadnięcie orła, R – wypadnięcie reszki.

$$P(O) = P(R) = \frac{1}{2}$$

II. Losowanie jednego losu z pudełka.

Niech W będzie zdarzeniem polegającym na wyciągnięciu losu wygrywającego. Prawdopodobieństwo zdarzenia W zależy od wyniku pierwszego etapu doświadczenia. Jeśli zaszło zdarzenie O, to sięgamy do pierwszego pudełka i wtedy prawdopodobieństwo wylosowania losu wygrywającego wynosi $\frac{1}{10}$. Jeśli natomiast zaszło zdarzenie R, to sięgamy do drugiego pudełka i prawdopodobieństwo wylosowania losu wygrywającego wynosi $\frac{3}{15}$. Zatem:

$$P(W|O) = \frac{1}{10}$$

$$P(W|R) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Szukamy odpowiedzi na pytanie, z jakim prawdopodobieństwem zajdzie alternatywa: „wypadnie orzeł i wyciągniemy los wygrywający z pierwszego pudełka” lub „wypadnie reszka i wyciągniemy los wygrywający z drugiego pudełka”.

Symbolicznie zapiszemy to jako: $P(W) = P\left[(W \cap O) \cup (W \cap R)\right]$.
Wiemy, że:

$$P(W \cap O) = P(W|O) \cdot P(O)$$
$$P(W \cap R) = P(W|R) \cdot P(R)$$

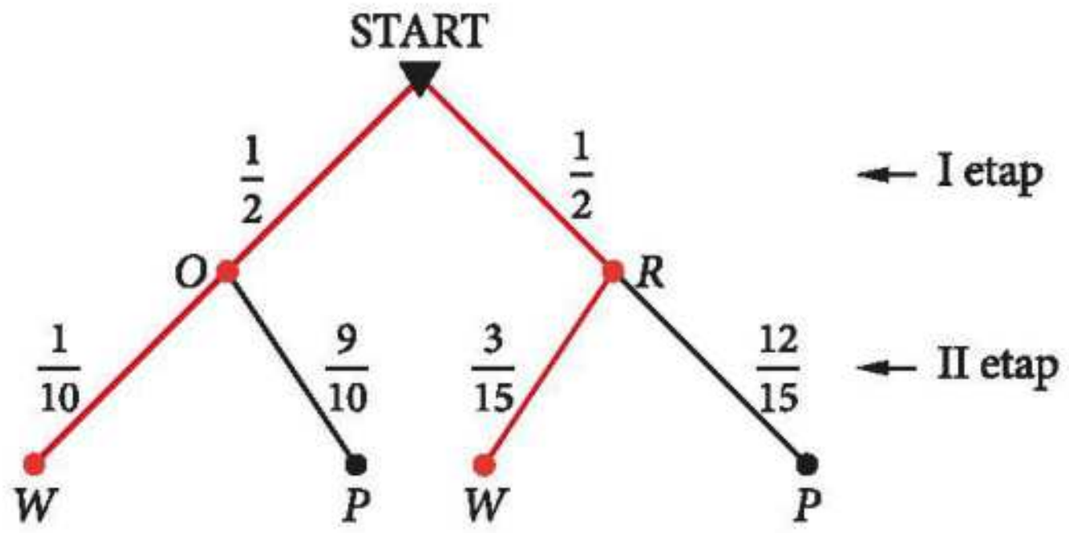
Ponadto:

$$P\left[(W \cap O) \cap (W \cap R)\right] = 0$$ ⟵ zdarzenia $(W \cap O)$ i $(W \cap R)$ się wykluczają

Zatem:

$$P(W) = P\left[(W \cap O) \cup (W \cap R)\right] = P(W \cap O) + P(W \cap R) =$$
$$= P(W|O) \cdot P(O) + P(W|R) \cdot P(R) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$$

Popatrzmy na ilustrację graficzną rozwiązania.



$$P(W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$$

Odp.: Prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego jest równe $\frac{3}{20}$.

Układ zupełny zdarzeń. Prawdopodobieństwo całkowite

W powyższym przykładzie istotne było to, że zdarzenia O i R się wykluczały, a ich alternatywa była zdarzeniem pewnym. Taki układ zdarzeń będziemy nazywać **układem zupełnym**. To określenie rozszerzymy na większą liczbę zdarzeń.

Definicja

Zdarzenia $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n \subset \Omega$ tworzą **układ zupełny zdarzeń**, jeżeli spełniają równocześnie następujące warunki:

- $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$,
- $P(B_i) > 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$,
- $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n$.

Oznacza to, że jeśli zdarzenia tworzą układ zupełny, to musi zajść dokładnie jedno z nich.

Uogólnieniem przykładu 1 jest twierdzenie, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n \subset \Omega$ tworzą układ zupełny i $A \subset \Omega$, to:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

Przykład 2 ◂ zad. 7.8

Z pudełka, w którym jest 5 kul białych i 3 czarne, wyciągamy losowo jedną kulę, zwracamy ją do pudełka i dokładamy jeszcze dwie kule w takim samym kolorze jak wylosowana kula. Następnie po raz drugi losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kula wylosowana za drugim razem będzie biała?

Rozwiązanie

Oznaczmy zdarzenia:

B_1 – kula wylosowana za pierwszym razem jest biała,

B_2 – kula wylosowana za pierwszym razem jest czarna,

A – kula wylosowana za drugim razem jest biała.

$$P(B_1) = \frac{5}{8}, \quad P(B_2) = \frac{3}{8}$$

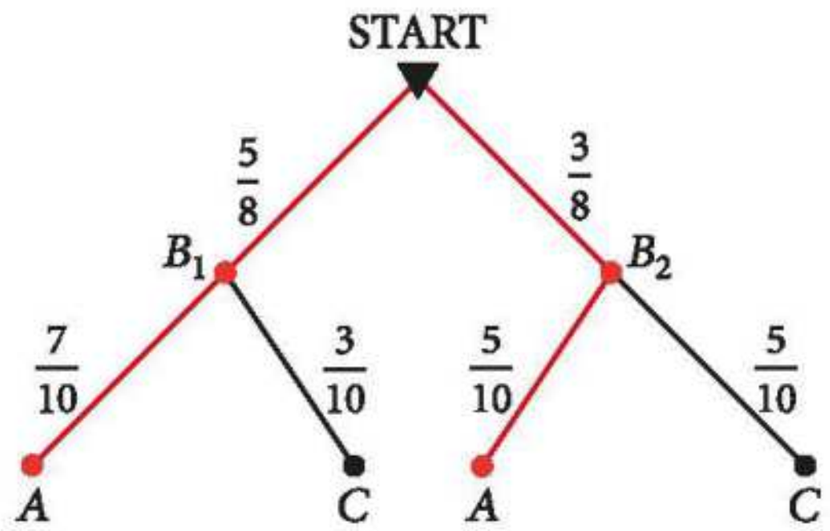
$B_1 \cup B_2 = \Omega$ i $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, zatem zdarzenia B_1 i B_2 tworzą układ zupełny.

$P(A|B_1) = \frac{7}{10}$ ⟵ dołożono 2 kule białe i w pudełku jest 7 kul białych i 3 czarne

$P(A|B_2) = \frac{5}{10}$ ⟵ dołożono 2 kule czarne i w pudełku jest 5 kul białych i 5 czarnych

Zgodnie z twierdzeniem o prawdopodobieństwie całkowitym:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{50}{80} = \frac{5}{8}$$



$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{10} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{10} = \frac{5}{8}$$

Odp.: Prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem kuli białej jest równe $\frac{5}{8}$.

Przykład 3

Pan Jacek prowadzi firmę montującą systemy alarmowe w domu klienta i zatrudnia trzech pracowników: pan Stanisław wykonuje 50% zleceń w firmie, pan Tomasz 40%, a pan Bogdan 10%. Klienci, u których zlecenie wykonywał pan Stanisław, zgłaszają reklamację z prawdopodobieństwem 2%, klienci pana Tomasza – z prawdopodobieństwem 5%, a pana Bogdana – z prawdopodobieństwem aż 20%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany klient firmy pana Jacka zgłosi reklamację?

Rozwiązanie

Oznaczamy zdarzenia:

B_1 – zlecenie wykonuje pan Stanisław,
B_2 – zlecenie wykonuje pan Tomasz,
B_3 – zlecenie wykonuje pan Bogdan,
A – losowo wybrany klient zgłasza reklamację.

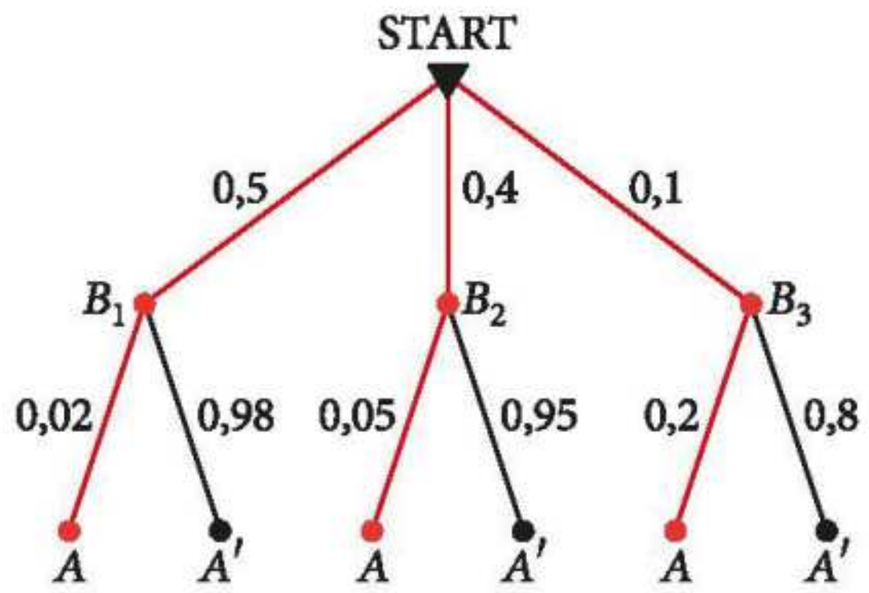
$$P(B_1) = 0{,}5, \quad P(A|B_1) = 0{,}02$$
$$P(B_2) = 0{,}4, \quad P(A|B_2) = 0{,}05$$
$$P(B_3) = 0{,}1, \quad P(A|B_3) = 0{,}2$$

Zdarzenia B_1, B_2 i B_3 tworzą układ zupełny:

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega,$$
$$B_1 \cap B_2 = \emptyset, \quad B_1 \cap B_3 = \emptyset, \quad B_2 \cap B_3 = \emptyset$$

Zatem możemy zastosować twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) =$$
$$= 0{,}02 \cdot 0{,}5 + 0{,}05 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}05$$



$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}02 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}05$$

Odp.: Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany klient firmy pana Jacka zgłosi reklamację, wynosi 5%.

Wzór Bayesa

Przykład 4

Załóżmy, że do firmy pana Jacka z przykładu 3 przyszedł klient z reklamacją. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zareklamowane zlecenie wykonywał u niego pan Stanisław, jakie – że pan Tomasz, a jakie – że pan Bogdan?

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak w przykładzie 3.
Szukamy $P(B_1|A)$, $P(B_2|A)$ i $P(B_3|A)$.

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)}$$

Wykorzystując obliczenia z przykładu 3, otrzymujemy: $P(B_1|A) = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}5}{0{,}05} = 20\%$.

Analogicznie:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}4}{0{,}05} = 40\%$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}05} = 40\%$$

Odp.: Prawdopodobieństwo, że zareklamowane zlecenie wykonywał pan Stanisław, jest równe 20%, pan Tomasz – 40%, pan Bogdan – 40%.

Rozumowanie podane w przykładzie 4 można uogólnić. Otrzymujemy wówczas następujące twierdzenie, które podajemy bez dowodu.

Twierdzenie

Wzór Bayesa

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n \subset \Omega$ tworzą układ zupełny, $A \subset \Omega$ i $P(A) > 0$, to dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ zachodzi równość:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}$$

Przykład 5 ◂ zad. 7.21

Dane są trzy pudełka z losami. W pierwszym pudełku jest 6 losów wygrywających i 14 pustych, w drugim są 4 losy wygrywające i 16 pustych, a w trzecim są 2 losy wygrywające i 18 pustych. Z losowo wybranego pudełka wyciągnięto 2 losy. Okazało się, że oba są wygrywające. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięto je z trzeciego pudełka?

Rozwiązanie

Oznaczamy zdarzenia:

B_1 – losowano z pierwszego pudełka,

B_2 – losowano z drugiego pudełka,

B_3 – losowano z trzeciego pudełka,

A – wyciągnięto dwa losy wygrywające.

Interesujące nas prawdopodobieństwo $P(B_3|A)$ wyznaczymy ze wzoru Bayesa:

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{P(A)}$$

Wyznaczamy kolejno prawdopodobieństwa występujace w ułamku powyżej.

Zauważmy, że:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3} \qquad \longleftarrow \text{założenie w treści zadania}$$

Zdarzenia B_1, B_2 i B_3 tworzą układ zupełny:

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$$

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset,\ B_1 \cap B_3 = \emptyset,\ B_2 \cap B_3 = \emptyset$$

Zatem możemy zastosować twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Kolejność dwóch losów wyciągniętych z pudełka nie jest istotna, dlatego wykorzystamy wzór na liczbę kombinacji.

$$P(A|B_1) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{15}{190} \qquad \longleftarrow \text{w pudełku } B_1 \text{ jest } (6+14) \text{ losów}$$

$$P(A|B_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{6}{190} \qquad \longleftarrow \text{w pudełku } B_2 \text{ jest } (4+16) \text{ losów}$$

$$P(A|B_3) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{1}{190} \qquad \longleftarrow \text{w pudełku } B_3 \text{ jest } (2+18) \text{ losów}$$

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) =$$

$$= \frac{15}{190} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{190} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{190} \cdot \frac{1}{3} = \frac{22}{190} \cdot \frac{1}{3}$$

Stosujemy teraz wzór Bayesa.

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{190} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{22}{190} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{22}$$

Odp.: Prawdopodobieństwo tego, że losy wyciągnięto z trzeciego pudełka, jest równe $\frac{1}{22}$.

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Ze zbioru $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ losujemy jedną liczbę, a następnie z pozostałych – drugą. Prawdopodobieństwo tego, że druga z wylosowanych liczb jest podzielna przez 3, wynosi

A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{3}{10}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

7.2. W pierwszym pudełku jest 5 kul białych i 2 czarne, w drugim – 2 kule białe i 3 czarne. Z losowo wybranego pudełka wyciągamy jedną kulę. Prawdopodobieństwo, że będzie to kula czarna, wynosi

A. $\frac{5}{12}$. **B.** $\frac{31}{70}$. **C.** $\frac{5}{24}$. **D.** $\frac{31}{35}$.

7.3. W trzech pudełkach znajdują się piłki w kolorze zielonym i czerwonym. W pierwszym pudełku jest 6 piłek zielonych i 4 czerwone, w drugim 4 zielone i 5 czerwonych, a w trzecim 3 zielone i 3 czerwone. Losujemy jedną piłkę z pierwszego pudełka. Jeśli jest to piłka zielona, to losujemy jedną piłkę z drugiego pudełka, a jeśli czerwona, to jedną piłkę z pudełka trzeciego. Prawdopodobieństwo tego, że w drugim losowaniu otrzymaliśmy piłkę zieloną, wynosi

A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{10}$. **D.** $\frac{7}{10}$.

7.4. Czy następujące zdarzenia tworzą układ zupełny? Odpowiedź uzasadnij.

a) doświadczenie – rzut monetą
A – wypadnięcie orła, B – wypadnięcie reszki

b) doświadczenie – rzut dwiema monetami
A – wypadnięcie dwóch orłów, B – wypadnięcie dwóch reszek

c) doświadczenie – wyciągnięcie karty z talii
A – wylosowanie kiera, B – wylosowanie kara,
C – wylosowanie karty czarnego koloru

7.5. Doświadczenie polega na rzucie kostką i monetą. Czy następujące zdarzenia tworzą układ zupełny? Odpowiedź uzasadnij.

a) A – wypadnięcie orła, B – wypadnięcie reszki

b) A – wypadnięcie orła i parzystej liczby oczek, B – wypadnięcie reszki

c) A – wypadnięcie orła i parzystej liczby oczek,
B – wypadnięcie reszki i nieparzystej liczby oczek

7.6. W pierwszym pudełku jest 5 kul białych i 3 czarne, w drugim – 3 kule białe i 3 czarne. Z losowo wybranego pudełka wyciągamy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to kula biała?

7.7. Rzucamy trzema monetami, a następnie jeszcze raz tymi, na których wypadł orzeł. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania w sumie dwóch orłów.

7.8. W pierwszej urnie są 4 kule białe i 3 czarne, a w drugiej 5 białych i 3 czarne. Z drugiej urny przekładamy 2 kule do pierwszej urny, z której następnie losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.

7.9. W urnie znajdują się 3 kule czerwone, 4 zielone i 5 kul białych. Wybieramy losowo jedną kulę, zatrzymujemy ją, a z pozostałych losujemy dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że

a) obie kule z drugiego losowania są białe.

b) kule wylosowane za drugim razem są różnych kolorów.

7.10. Ze zbioru $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13\}$ losujemy jedną liczbę, a następnie z pozostałych drugą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że druga liczba jest

a) nieparzysta.

b) niepodzielna przez 4.

7.11. Średnio pięciu mężczyzn na stu i dwie kobiety na tysiąc nie rozróżniają kolorów. Z grupy, w której stosunek liczby kobiet do liczby mężczyzn wynosi $3 : 7$, wybrano losowo jedną osobę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrana osoba nie rozróżnia kolorów.

7.12. W pierwszym pudełku są 2 kule zielone i 6 kul pomarańczowych, a w drugim pudełku są 4 zielone i 5 pomarańczowych. Losujemy jedną kulę z pierwszego pudełka, dobieramy do niej jeszcze trzy kule tego samego koloru i wrzucamy wszystkie cztery do drugiego pudełka. Następnie losujemy dwie kule z drugiego pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie wylosowane wtedy kule będą pomarańczowe.

7.13. Do każdej z trzech urn wkładamy identyczny zestaw kul, w którym jest tyle samo kul białych co czarnych. Następnie z każdej urny losujemy jedną kulę i nie oglądając jej, wrzucamy do czwartej, początkowo pustej urny. Na koniec losujemy z tej urny jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z czwartej urny.

7.14. Z urny, w której są 3 kule białe i 2 czarne, wybieramy losowo 3 kule, a następnie rzucamy sześcienną kostką do gry tyle razy, ile białych kul wylosowaliśmy. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz sześciu oczek.

D **7.15.** W pudełku jest n losów, w tym k wygrywających. Dwie osoby kolejno losują po jednym losie bez zwracania. Wykaż, że prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego jest jednakowe dla każdej z tych osób.

7.16. Wybieramy losowo jeden ze zbiorów: $A = \{1, 2, \ldots, 62\}$ lub $B = \{1, 2, \ldots, 124\}$. Z wybranego zbioru losujemy jedną liczbę i oznaczamy ją x. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba $x^2 + 1$ jest podzielna przez 10.

7.17. W urnie jest 6 kul białych i 4 czarne. Rzucamy trzy razy monetą. Jeżeli reszka wypadnie trzy razy, losujemy bez zwracania trzy kule, jeśli wypadnie dwa razy – dwie kule, w pozostałych przypadkach – jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie jednej kuli białej?

7.18. W pierwszej urnie jest 20 kul, w tym 4 białe. W drugiej urnie jest 15 kul, w tym 6 białych. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Jeżeli suma liczb oczek jest równa co najwyżej 5, losujemy kulę z pierwszej urny. W przeciwnym razie losujemy kulę z drugiej urny. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

7.19. Rzucamy raz sześcienną kostką do gry, a następnie dwiema monetami tyle razy, ile oczek wypadło na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia samych orłów.

7.20. W dwóch pudełkach są kule białe i czarne. Wiadomo, że w pierwszym są 2 czarne, w drugim – 1 czarna, a suma liczb kul białych w obu pudełkach jest równa 3. Rzucamy sześcienną kostką. Jeżeli wypadnie mniej niż 5 oczek, losujemy jedną kulę z pierwszego pudełka. W przeciwnym razie losujemy jedną kulę z drugiego pudełka. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej w tym doświadczeniu jest największe. Jak są rozmieszczone kule białe?

7.21. W pierwszym pudełku było 6 kul białych i 4 czarne, a w drugim 2 kule białe i 3 czarne. Z pierwszego pudełka wylosowano dwie kule i bez oglądania przełożono do drugiego. Następnie wylosowano jedną kulę z drugiego pudełka. Okazało się, że wylosowana kula jest biała. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie kule przełożone do drugiego pudełka były białe?

7.22. Ola średnio raz na 5 dni dojeżdża do szkoły autobusem, a w pozostałe dni – tramwajem. Prawdopodobieństwo, że spóźni się do szkoły w dniu, kiedy jedzie autobusem, wynosi 20%, natomiast gdy jedzie tramwajem – 2%. Pewnego dnia Ola spóźniła się do szkoły. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jechała autobusem.

7.23. Pewna rzadka choroba genetyczna występuje u 0,05% ludności. Test wykrywający tę chorobę daje wynik pozytywny u 99,5% osób chorych oraz 0,3% osób zdrowych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba, u której test dał wynik pozytywny, rzeczywiście jest chora? Wynik podaj z dokładnością do 1%.

Prosto do matury

1. Gramy w następującą grę. Rzucamy kostką sześcienną. Wygramy, jeżeli wyrzucimy 6 oczek. Jeżeli wyrzucimy 5 oczek, mamy prawo rzucić jeszcze raz (ostatni), żeby ponownie spróbować wyrzucić szóstkę. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Prawdopodobieństwo wygranej w tej grze jest równe $\frac{1}{3}$.

B. Prawdopodobieństwo wygranej w tej grze jest równe $\frac{7}{36}$.

C. Gdyby wyrzucenie 5 oczek nie dawało możliwości dodatkowego rzutu, prawdopodobieństwo wygranej nie zmieniłoby się.

2. W pierwszym pudełku są 4 losy wygrywające i 6 pustych, a w drugim – 4 wygrywające i 5 pustych. Rzucamy kostką do gry. Jeżeli wypadną mniej niż 3 oczka, wyciągamy jeden los z pierwszego pudełka, w przeciwnym razie – z drugiego. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrany los jest wygrywający.

3. W dwóch pojemnikach zgromadzono losy. W pierwszym znajduje się 7 losów wygrywających i 5 pustych, a w drugim – 5 wygrywających i 7 pustych. Przeniesiono jeden los z pojemnika pierwszego do drugiego, z którego następnie wyciągnięto jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to los wygrywający.

4. W klasie 1a jest 10 dziewczynek i 20 chłopców, a w klasie 1b – 18 dziewczynek i 12 chłopców. Rzucamy monetą. Jeżeli wypadnie orzeł, losujemy 3 osoby z klasy 1a, w przeciwnym razie losujemy 3 osoby z klasy 1b. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie dwóch chłopców?

5. Mamy dwie monety. Jedna z nich jest symetryczna. Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła na drugiej jest równe $\frac{1}{4}$. Przypadkowo wybraną monetą wykonaliśmy 5 rzutów i otrzymaliśmy same reszki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucaliśmy monetą niesymetryczną?

TELETURNIEJ

Przed graczem biorącym udział w teleturnieju znajduje się troje zamkniętych drzwi. Zadaniem gracza jest wybranie jednych z nich: to, co za nimi, należy do niego! Może trafić na nagrodę główną – samochód, lub na nagrodę pocieszenia – kozę, bo za dwojgiem drzwi zamknięto po jednej kozie.

Gracz dokonuje wyboru i wskazuje jedne drzwi. Prowadzący (który wie, co się kryje za każdymi drzwiami) otwiera jedne z tych, których gracz nie wskazał – takie, za którymi stoi koza. Pozostałe drzwi pozostawia zamknięte. I pyta gracza: „**Czy chcesz zmienić swój wybór?**”.

WŁAŚCIWA STRATEGIA

Prześledźmy możliwy tok rozumowania gracza.

*Jeżeli wskazałem **drzwi z nagrodą** (prawdopodobieństwo tego zdarzenia to 1/3), prowadzący mógł otworzyć dowolne inne drzwi – za dwojgiem pozostałych drzwi jest koza.*
*Zmiana decyzji spowoduje, że **przegram**.*

*Jeżeli wskazałem **drzwi z kozą** (prawdopodobieństwo tego zdarzenia to 2/3), prowadzący musiał otworzyć drugie drzwi, za którymi jest koza. Zatem za trzecimi drzwiami na pewno jest samochód.*
*Zmiana decyzji spowoduje, że **wygram**.*

Z porównania obu prawdopodobieństw wynika, że zdecydowanie bardziej opłaca mi się w następnym ruchu zmienić wybór drzwi.

Graczowi biorącemu udział w takim teleturnieju opłaca się zawsze przyjąć propozycję zmiany wcześniejszego wyboru. Wygra bowiem wtedy średnio dwa teleturnieje na trzy.

OBLICZENIE „NA PIECHOTĘ"

Załóżmy, że samochód ukryty jest za pierwszymi drzwiami. Rozpiszmy w kolejnych wierszach tabeli wszystkie możliwe sytuacje w momencie, w którym gracz ma podjąć końcową decyzję. Widzimy początkowy wybór gracza (ludzik przed drzwiami) i drzwi, które otworzył prowadzący.

Drzwi nr 1	Drzwi nr 2	Drzwi nr 3	Szansa zajścia danej sytuacji	
			$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$	ukrycie nagrody za drzwiami nr 1 wybór przez gracza drzwi nr 1 wybór przez prowadzącego drzwi nr 2 (prowadzący ma dwoje drzwi do wyboru)
			$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$	
			$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{9}$	ukrycie nagrody za drzwiami nr 1 wybór przez gracza drzwi nr 2 wybór przez prowadzącego drzwi nr 3 (prowadzący ma jedne drzwi do wyboru)
			$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{9}$	

W ten sam sposób należy rozpisać przypadki, gdy samochód jest ukryty za drzwiami nr 2 i 3, i obliczyć odpowiednie prawdopodobieństwa. Zsumowanie prawdopodobieństw wszystkich sytuacji, w których gracz za pierwszym razem wskazuje drzwi z kozą, oznacza szansę wygrania głównej nagrody pod warunkiem, że gracz po otwarciu drzwi zmieni decyzję:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$$

ISTOTNA RÓŻNICA

Załóżmy, że po tym, jak prowadzący otworzył drzwi, gracza zastępuje osoba, która nie wie, co się wcześniej wydarzyło. Ma przed sobą dwoje zamkniętych drzwi i ma wybrać jedne z nich. Jaka jest szansa, że trafi na samochód? Oczywiście $\frac{1}{2}$. Dlaczego więc w przypadku pierwszego gracza prawdopodobieństwo wygranej może wynieść aż $\frac{2}{3}$? Otóż ten gracz zna początkowy etap teleturnieju i zanim wybierze drzwi w następnym kroku, może obrać skuteczniejszą strategię postępowania. Drugi gracz jest tej szansy pozbawiony – wyboru dokonuje losowo.

TEORIA GIER

Działem matematyki zajmującym się badaniem sytuacji konfliktowych zwanych grami jest **teoria gier**. Uczestnicy gier (**gracze**) podejmują decyzje (tzw. **strategie**), które pociągają za sobą określone skutki (tzw. **wypłaty**). Teoria gier ma szerokie zastosowania m.in. w informatyce, wojskowości, ekonomii, biologii i socjologii.

8. Schemat Bernoulliego

Umiejętności:

- wykorzystywanie w zadaniach schematu Bernoulliego

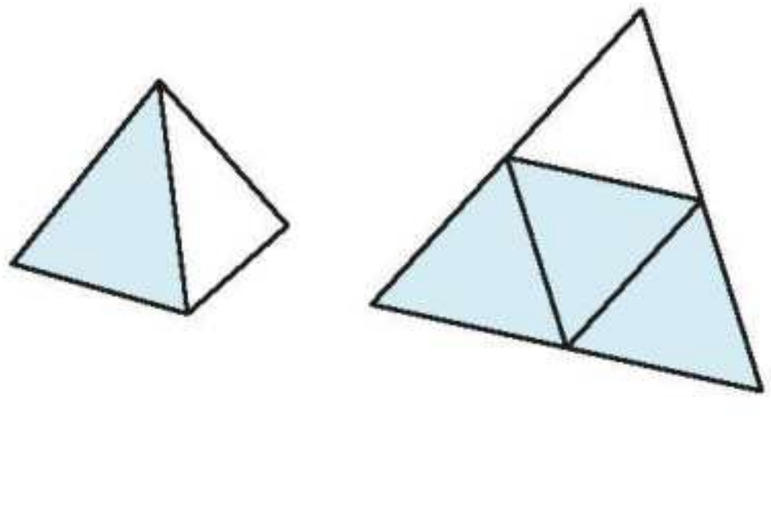
Teorię rachunku prawdopodobieństwa zakończymy omówieniem doświadczenia losowego, w którym interesują nas wyłącznie dwa możliwe wyniki, symbolicznie określane jako **sukces**, którego prawdopodobieństwo oznaczamy p, $0 < p < 1$, oraz **porażka**, której prawdopodobieństwo wynosi $q = 1 - p$.
Doświadczenie tego typu nosi nazwę **próby Bernoulliego**.
Na przykład, jeżeli próbą jest rzut kostką i sukcesem nazwiemy wypadnięcie szóstki, to $p = \frac{1}{6}$, natomiast porażką będzie każdy wynik różny od szóstki i $q = \frac{5}{6}$.

Jacob Bernoulli (1654–1705) szwajcarski matematyk i fizyk, zajmował się rachunkiem różniczkowym i całkowym, a także rachunkiem prawdopodobieństwa.

Schemat Bernoulliego jest ciągiem powtórzeń tej samej próby Bernoulliego, wykonanych przy założeniu, że próby przeprowadzane są niezależnie* i prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu w każdej z nich pozostaje niezmienne.
Zadanie, którym się teraz zajmiemy, polega na obliczeniu prawdopodobieństwa wystąpienia określonej liczby k sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego $(0 \leqslant k \leqslant n)$.
Zacznijmy od analizy przykładu.

Przykład 1

W doświadczeniu korzystamy z kostki, która jest czworościanem foremnym o trzech ścianach pomalowanych na niebiesko i jednej białej. Kostkę podrzucamy i notujemy kolor ścianki, na którą czworościan upadł na podłogę.
Próbą Bernoulliego jest rzut kostką. Sukcesem nazwiemy uzyskanie koloru białego, porażką – koloru niebieskiego.



---

* Dokładna definicja pojęcia „niezależność" wymaga bardziej zaawansowanej matematyki. Tu można je rozumieć potocznie (choć niezbyt ściśle): wynik pojedynczej próby nie wpływa na wyniki innych prób.

Na każdą ze ścian kostka może upaść z identycznym prawdopodobieństwem równym $\frac{1}{4}$, zatem w pojedynczej próbie sukces osiągamy z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{4}$, a porażkę z prawdopodobieństwem $q = \frac{3}{4}$.

a) Zbadamy, jak wygląda zbiór zdarzeń elementarnych w doświadczeniu, które jest schematem dwóch opisanych prób Bernoulliego.

b) Rzucamy kostką pięć razy. Obliczymy prawdopodobieństwo, że trzy z tych pięciu prób Bernoulliego zakończą się sukcesem, czyli – w pięciu rzutach dokładnie trzy razy kostka upadnie na białą ściankę.

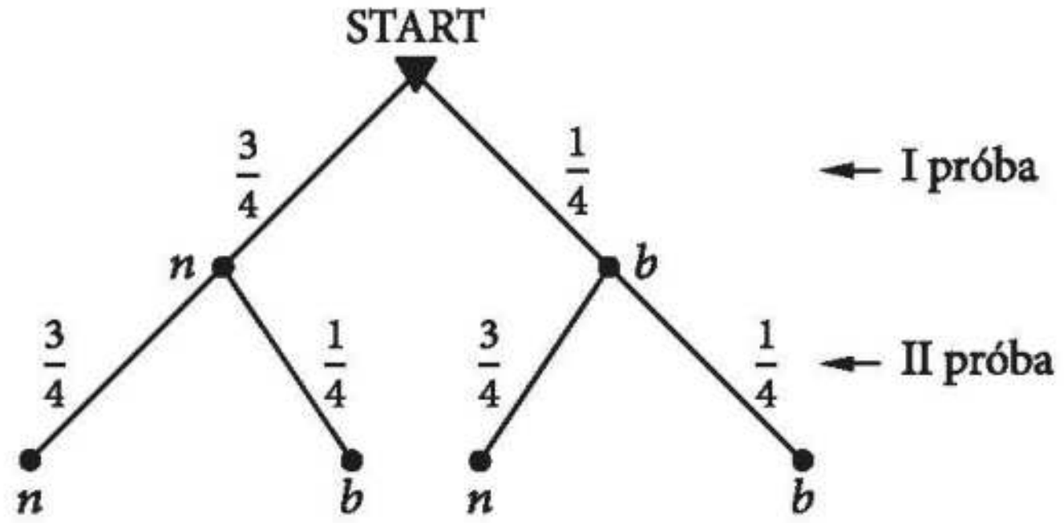
Rozwiązanie

a) Niech n oznacza sytuację, w której kostka upadnie na ściankę koloru niebieskiego, a b – na ściankę koloru białego.

Cztery możliwe wyniki doświadczenia, które jest schematem dwóch prób Bernoulliego, zapiszemy jako dwuelementowe ciągi liter:

$$\Omega = \{nn, nb, bn, bb\}$$

Zauważmy, że zdarzenia elementarne nie są tu jednakowo prawdopodobne.
Popatrzmy na ilustrację tego doświadczenia.



Prawdopodobieństwo każdego zdarzenia elementarnego w tym doświadczeniu jest iloczynem** prawdopodobieństw zajścia zdarzeń sprzyjających w pojedynczych próbach.

Zatem:

$$P(nn) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}, \quad P(nb) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{16}, \quad P(bn) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{16}, \quad P(bb) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Można wykazać, że ten sposób obliczania prawdopodobieństwa spełnia założenia definicji wprowadzonej na s. 149, w szczególności:

$$P(\Omega) = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = 1$$

**Uzasadnienie poprawności takiego sposobu obliczania tego prawdopodobieństwa wymaga bardziej zaawansowanego aparatu matematycznego.

b) Interesuje nas prawdopodobieństwo uzyskania $k = 3$ sukcesów w $n = 5$ próbach. Oznaczymy je $P_5(3)$ (ogólnie: $P_n(k)$).

Zdarzenia elementarne są pięcioelementowymi ciągami:

$$\Omega = \{nnnnn, nnnnb, \ldots, bnbnn, \ldots, nbnbb, \ldots, bbbbn, bbbbb\}$$

$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ ⟵ prawdopodobieństwo zajścia sprzyjającego zdarzenia elementarnego (np. *nbnbb*)

Zdarzeń sprzyjających jest tyle, ile jest możliwości wpisania trzech liter *b* na pięciu ponumerowanych miejscach – możemy je wybrać na $\binom{5}{3}$ sposobów (na pozostałych dwóch wpiszemy *n*). Zatem prawdopodobieństwo, że w pięciu rzutach dokładnie trzy razy kostka upadnie na białą ściankę, jest równe $\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$.

Zauważmy, że nie ma znaczenia, czy wybieramy miejsca na wpisanie *b* czy *n*, ponieważ $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$.
Ogólnie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Odp.: $P_5(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$

Jeśli uogólnimy powyższy przykład, możemy stwierdzić, że prawdopodobieństwo otrzymania *k* sukcesów ($k \leqslant n$) w *n* opisanych próbach Bernoulliego (czyli – w *n* rzutach kostka upadnie na białą ściankę dokładnie *k* razy) jest równe:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$$

Powyższe rozumowanie prowadzi do twierdzenia, które podajemy bez dowodu.

Twierdzenie

Twierdzenie Bernoulliego

Prawdopodobieństwo uzyskania *k* sukcesów w schemacie *n* prób Bernoulliego wyraża się wzorem:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

gdzie *p* jest prawdopodobieństwem uzyskania sukcesu w pojedynczej próbie, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ i $0 \leqslant k \leqslant n$.

Przykład 2 ◂ zad. 8.4

Rzucamy 10 razy kostką do gry. Obliczymy prawdopodobieństwo, że szóstka wypadnie dokładnie

a) 5 razy. b) 7 razy.

Rozwiązanie

Mamy do czynienia ze schematem 10 prób Bernoulliego. Sukcesem jest wypadnięcie szóstki: $n = 10,\ p = \frac{1}{6},\ q = \frac{5}{6}$.

a) $k = 5$, zatem $P_{10}(5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5$.

b) $k = 7$, zatem $P_{10}(7) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$.

Zauważmy, że na s. 154 bardzo podobny przykład 6 został rozwiązany bez korzystania ze schematu Bernoulliego.

Przykład 3 ◂ zad. 8.8

Obliczymy prawdopodobieństwo, że w 7 rzutach kostką co najwyżej dwa razy wypadnie szóstka.

Rozwiązanie

Mamy do czynienia ze schematem 7 prób Bernoulliego. Sukcesem jest wypadnięcie szóstki: $n = 7,\ p = \frac{1}{6},\ q = \frac{5}{6}$.

Sukces ma wystąpić co najwyżej dwa razy, zatem interesuje nas zdarzenie A będące alternatywą trzech wykluczających się zdarzeń: $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$, gdzie:

A_0 oznacza zdarzenie – szóstka nie wypadła ani razu,
A_1 oznacza zdarzenie – szóstka wypadła dokładnie raz,
A_2 oznacza zdarzenie – szóstka wypadła dokładnie dwa razy.

Zdarzenia A_0, A_1 i A_2 się wykluczają, czyli żadne dwa nie mogą zajść równocześnie, zatem:

$$P(A) = P(A_0 \cup A_1 \cup A_2) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2)$$

$$P(A_0) = P_7(0) = \binom{7}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

$$P(A_1) = P_7(1) = \binom{7}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{7 \cdot 5^6}{6^7}$$

$$P(A_2) = P_7(2) = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{21 \cdot 5^5}{6^7}$$

$$P(A) = \frac{5^7}{6^7} + \frac{7 \cdot 5^6}{6^7} + \frac{21 \cdot 5^5}{6^7} = \frac{5^5}{6^7}(25 + 35 + 21) = \frac{5^5 \cdot 81}{6^7} \approx 0{,}904$$

Odp.: Prawdopodobieństwo tego, że w siedmiu rzutach kostką szóstka wypadnie co najwyżej dwa razy, jest równe $\frac{5^5 \cdot 81}{6^7}$.

Przykład 4 ◂ zad. 8.13

Rzucamy n razy symetryczną kostką w kształcie ośmiościanu foremnego, na którego ściankach zapisane są liczby od 1 do 8. Wyznaczymy najmniejszą liczbę rzutów, przy której prawdopodobieństwo, że co najmniej raz wypadnie ósemka, jest większe od 50%.

Rozwiązanie

Mamy do czynienia ze schematem n prób Bernoulliego. Sukcesem jest wypadnięcie ósemki.

$$p = \frac{1}{8},\ q = \frac{7}{8}$$

Sukces ma wystąpić co najmniej raz, zatem łatwiej rozważyć zdarzenie przeciwne:
A_0 – ósemka nie wypadła ani razu

$$P(A_0) = P_n(0) = \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^n = \left(\frac{7}{8}\right)^n$$

Z warunków zadania wynika nierówność:

$$1 - P(A_0) > \frac{1}{2}$$

$$1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n > \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^n < \frac{1}{2}$$

Do rozwiązania tej nierówności można wykorzystać kalkulator, można ją również rozwiązać sposobem wskazanym w przykładzie 9 w temacie 5 (s. 156). Ostatecznie:

$$n \geqslant 6$$

Odp.: Prawdopodobieństwo, że ósemka wypadnie co najmniej raz, jest większe od 50%, jeżeli liczba rzutów wynosi co najmniej 6.

Najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego

Rozważmy teraz ciąg $P_n(0), P_n(1), P_n(2), \ldots, P_n(n)$ w schemacie n prób Bernoulliego, w którym prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu w jednej próbie wynosi p, $0 < p < 1,\ q = 1 - p$.

Okazuje się, że w ciągu $(P_n(k))$, gdzie $P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ i $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, można wskazać wartość największą. Przy powyższych założeniach zachodzi bowiem następujące twierdzenie (dowód pomijamy).

Twierdzenie

- Jeżeli $(n+1)p$ nie jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego jest największa liczba całkowita k_0 taka, że:
$$k_0 < (n+1)p$$
- Jeżeli $(n+1)p$ jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobne są liczby sukcesów:
$$(n+1)p - 1 \text{ oraz } (n+1)p$$

i prawdopodobieństwa ich uzyskania są równe.

Przykład 5 ◀ zad. 8.14

Rzucamy trzynaście razy kostką. Obliczymy najbardziej prawdopodobną liczbę wyrzuconych szóstek.

Rozwiązanie

$$n = 13,\ p = \frac{1}{6}$$

$$(n+1)p = \frac{14}{6} = 2\frac{1}{3},\ \text{czyli}\ k_0 = 2$$

Odp.: Najbardziej prawdopodobną liczbą wyrzuconych szóstek jest 2.

Przykład 6

W grze w brydża gracz losuje 13 z 52 kart w talii. Niech sukcesem będzie wylosowanie wśród nich czterech asów. Obliczymy najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w 20 rozdaniach.

Rozwiązanie

$$n = 20$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych w pojedynczej próbie (czyli w jednym rozdaniu): $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{52}{13} = \frac{52!}{13! \cdot 39!}$

Niech A oznacza sukces, czyli wylosowanie przez gracza czterech asów.

$$\overline{\overline{A}} = \binom{4}{4} \cdot \binom{48}{9} = \frac{48!}{9! \cdot 39!}$$

$$p = \frac{48!}{9!39!} \cdot \frac{13!39!}{52!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} = \frac{11}{49 \cdot 5 \cdot 17}$$

$$(n+1)p = \frac{21 \cdot 11}{49 \cdot 5 \cdot 17} = \frac{33}{35 \cdot 17} < 1,\ \text{czyli}\ k_0 = 0$$

Odp.: Najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów jest 0.

Przykład 7 ◂ zad. 8.16

Obliczymy najbardziej prawdopodobną liczbę orłów wyrzuconych w 49 rzutach monetą.

Rozwiązanie

$$n = 49,\ p = \frac{1}{2}$$

$$(n+1)p = \frac{50}{2} = 25$$

Wynik jest liczbą całkowitą, zatem najbardziej prawdopodobne liczby wyrzuconych orłów to 24 i 25.

Odp.: 24 i 25

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

8.1. Rzucamy 5 razy monetą. Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła dokładnie 3 razy wynosi

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{5}{16}$. **C.** $\binom{5}{3} \cdot \frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{16}$.

8.2. Rzucamy 5 razy kostką do gry. Prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek dokładnie 4 razy wynosi

A. $\frac{1}{32}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\binom{5}{4} \cdot \frac{1}{16}$. **D.** $\frac{5}{32}$.

8.3. Rzucamy 7 razy kostką do gry. Prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstki dokładnie 4 razy wynosi

A. $\binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1$. **C.** $\binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$.

B. $\frac{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$. **D.** $\binom{7}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$.

8.4. Rzucamy 8 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia orła dokładnie 3 razy.

8.5. Rzucamy 5 razy kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia dokładnie 2 razy liczby oczek podzielnej przez 3.

8.6. W pudełku są cztery klocki czerwone i trzy niebieskie. Antoś losuje z pudełka trzy razy po dwa klocki ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo dwukrotnego wylosowania samych czerwonych klocków.

8.7. W urnie znajduje się 6 kul zielonych i 4 żółte. Losujemy z urny 7 razy po 2 kule, zwracając je za każdym razem do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania pary kul różnych kolorów dokładnie cztery razy?

8.8. Z talii 52 kart losujemy 6 razy ze zwracaniem po jednej karcie. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kiera co najwyżej 4 razy.

8.9. W pewnej grze prawdopodobieństwo wygranej w jednej rozgrywce wynosi 0,5. Co jest bardziej prawdopodobne: wygranie 2 rozgrywek z 4 czy 3 rozgrywek z 6?

8.10. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Rozważamy zdarzenia:
A – parzysty iloczyn liczb oczek pojawi się dwa razy w 4-krotnym rzucie kostkami,
B – suma liczb oczek na obu kostkach podzielna przez 3 pojawi się trzy razy w 5-krotnym rzucie kostkami.
Oblicz prawdopodobieństwa $P(A)$ oraz $P(B)$. Które z nich jest większe?

8.11. Jedno podejście do gry polega na równoczesnym rzucie kostką i monetą. Gracz wygrywa, gdy wypadnie szóstka i orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania trzy razy w pięciu podejściach?

8.12. Pewien test składa się z 12 zadań, w których należy ocenić, czy zdania są prawdziwe czy fałszywe. Podanie co najmniej 8 poprawnych odpowiedzi zalicza ten test. Jakie jest prawdopodobieństwo zaliczenia testu przez osobę, która na wszystkie pytania odpowiada losowo?

8.13. Harcerze otrzymali polecenie od drużynowego, aby przeprowadzić wywiad z ciekawym człowiekiem. Prawdopodobieństwo tego, że harcerzowi uda się wykonać to zadanie, jest równe 0,4. Ilu harcerzy musi wyruszyć w teren, aby prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden wywiad zostanie przeprowadzony, było większe od 99%?

8.14. Rysiek rzuca 20 razy trzema monetami. Jeśli wypadną trzy orły – zjada ciasteczko. Oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę zjedzonych przez niego ciasteczek.

8.15. Dziadek Stefan twierdzi, że za czasów jego młodości prawdopodobieństwo tego, że na święta Bożego Narodzenia spadnie śnieg, było równe 90%. Przyjmując, że dziadek ma rację, oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę świąt ze śniegiem w ciągu 18 lat jego młodości.

8.16. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń pewnej szkoły spóźni się na lekcję w poniedziałek rano, jest równe 0,15. Oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę tych uczniów 19-osobowej klasy, którzy przyjdą w najbliższy poniedziałek punktualnie.

8.17. W każdej z sześciu urn jest 14 kul. Liczba kul białych w urnie o numerze k jest równa k dla $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pozostałe kule są czarne. Rzucamy kostką sześcienną, a następnie losujemy jedną kulę z urny o numerze równym liczbie wyrzuconych oczek. Procedurę tę powtarzamy cztery razy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dokładnie dwa razy wylosujemy w opisany sposób kulę białą.

Prosto do matury

1. Z talii 52 kart losujemy pięć razy ze zwracaniem po jednej karcie. Oceń prawdziwość podanych zdań.
Prawdopodobieństwo wylosowania

A. dokładnie dwa razy asa wynosi $\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{26}\right)^2 \cdot \left(\frac{25}{26}\right)^2$.

B. dokładnie trzy razy pika wynosi $\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$.

C. co najmniej raz asa kier wynosi $\binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{52}\right)^1 \cdot \left(\frac{51}{52}\right)^4$.

2. W urnie jest 5 kul zielonych i 7 czerwonych. Losujemy z urny 8 razy ze zwracaniem po jednej kuli. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej dokładnie trzy razy?

3. Prawdopodobieństwo opóźnienia autobusu, którym pani Edyta dojeżdża do pracy, jest równe 0,2. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu pięciu dni autobus spóźni się nie więcej niż jeden raz.

D **4.** Rzucamy 10 razy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Wykaż, że prawdopodobieństwo zdarzenia A – dokładnie dwa razy iloczyn liczb wyrzuconych oczek będzie większy od 20, jest równe $\frac{3 \cdot 5^9}{2 \cdot 6^9}$.

5. Prawdopodobieństwo trafienia do celu w jednym strzale wynosi 0,6. Ile strzałów należy oddać, aby z prawdopodobieństwem większym od 99% cel został trafiony co najmniej raz?

9. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–10 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1. Wskaż liczbę podzbiorów zbioru siedmioelementowego.

A. 7^2 **B.** 2^7 **C.** $\binom{7}{2}$ **D.** $7!$

2. Czternastoosobową grupę przedszkolaków, do której należą bliźniaki Jaś i Staś, podzielono losowo na dwa siedmioosobowe zespoły. Prawdopodobieństwo tego, że Jaś i Staś znajdą się w różnych zespołach, wynosi

A. $\frac{7}{13}$. **B.** $\frac{\binom{12}{6}}{\binom{14}{7}}$. **C.** $\frac{6!}{\binom{14}{7}}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

3. W urnie są 2 kule białe i 3 czarne. Losujemy dwie kule bez zwracania. Prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul co najmniej jedna jest czarna, wynosi

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{3}{20}$. **C.** $\frac{9}{10}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

4. Zdarzenia A i B zawarte w zbiorze Ω są takimi zdarzeniami losowymi, że $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ oraz $P(B|A) = \frac{1}{4}$. Wynika stąd, że $P(A')$ jest równe

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

5. W pierwszym koszu jest 14 jabłek i 18 gruszek, a w drugim 20 jabłek i 12 gruszek. Rzucamy sześcienną kostką do gry. Jeżeli wypadnie liczba oczek podzielna przez trzy, to losujemy jeden owoc z pierwszego kosza, w przeciwnym przypadku losujemy jeden owoc z drugiego kosza. Wskaż prawdopodobieństwo wylosowania gruszki.

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{7}{16}$ **D.** $\frac{9}{16}$

6. Rzucamy sześć razy kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej cztery razy liczby oczek większej od dwóch jest równe

A. $\frac{490}{729}$. **B.** $\frac{496}{727}$. **C.** $\frac{496}{729}$. **D.** $\frac{491}{727}$.

7. Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$, $P(A|B) = 0{,}75$, $P(A \cap B) = 0{,}6$. Zatem $P(B)$ jest równe

A. 0,15. **B.** 0,35. **C.** 0,45. **D.** 0,8.

16. Z pudełka, w którym są 3 kule białe i 2 czarne, losujemy trzy razy bez zwracania po jednej kuli. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej
A. za pierwszym razem jest równe 0,6.
B. za drugim razem jest równe 0,6.
C. za trzecim razem jest równe 0,6.

17. Zdarzenia A, B, C tworzą układ zupełny. Zatem
A. $P(A) + P(B) + P(C) = 1$. **B.** $P(A \cup B \cup C) = 1$. **C.** $P(A \cap B \cap C) = 0$.

18. Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ się wykluczają. Wynika z tego, że
A. $A' \cap B' = \emptyset$. **B.** $A \cup B = \Omega$. **C.** $B - A = B$.

19. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}8$. Zatem
A. $P(A \cap B) = 0{,}48$. **B.** $P(A \cap B) \geqslant 0{,}4$ **C.** $P(A \cap B) \leqslant 0{,}6$.

20. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A|B) = P(B|A)$. Wynika z tego, że
A. $P(A) = P(B)$. **B.** $P(A \cap B) = 0$. **C.** $P(A) = 0$ i $P(B) = 0$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

21. Ile liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach i mniejszych od 24 000 możemy ułożyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6?

22. Ile jest wszystkich podzielnych przez 5 liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach?

23. Mamy 12 różnych przypraw. Każdą z nich możemy dodać do sosu. Ile różnych rodzajów sosu możemy w ten sposób przygotować?

24. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B') = \frac{1}{3}$ oraz $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$. Oblicz $P(A \cup B)$.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

D **25.** Wykaż, że suma współczynników $\binom{n}{k}$ rozwinięcia dwumianu Newtona dla k parzystego jest równa sumie współczynników dla k nieparzystego.

26. Na ile sposobów możemy tak poprzestawiać cyfry w liczbie 13 742, aby otrzymać liczbę podzielną przez 4?

27. Ile jest liczb osiemnastocyfrowych, w których żadna cyfra nie jest zerem i żadna cyfra nie występuje więcej niż dwa razy?

28. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = 0{,}5$, $P(B') = 0{,}6$ oraz $P(A \cup B) = 0{,}7$. Oblicz $P(A'|B)$.

Dowody w matematyce

3

1. Dowody w geometrii

Umiejętności:

- dowodzenie twierdzeń z zakresu geometrii płaszczyzny

Od początku nauki w szkole średniej spotykamy się z dowodami – zarówno wartych zapamiętania ogólnych faktów matematycznych (np. twierdzenie Pitagorasa lub wzory skróconego mnożenia), jak i mniej ogólnych, podawanych często w postaci zadań typu „Udowodnij (...)". Ten dział w całości poświęcimy dowodzeniu – omówimy kolejno dowodzenie własności figur geometrycznych oraz dowody w arytmetyce i w algebrze. Uzupełnimy również poznane już twierdzenia o obowiązujące dowody, które zostały wcześniej pominięte.

Przypomnijmy:
Twierdzenie matematyczne to zdanie orzekające prawdziwe, które **można udowodnić**, wykorzystując pojęcia pierwotne, znane definicje, aksjomaty oraz wcześniej udowodnione twierdzenia.

- **Pojęcie pierwotne** – pojęcie niedefiniowane w danej teorii, uznawane za intuicyjnie zrozumiałe.
- **Aksjomat** – w danej teorii stwierdzenie intuicyjnie oczywiste, które przyjmuje się bez dowodu.
- Zdanie zbudowane na wzór twierdzenia, ale nieudowodnione, nazywane jest **hipotezą**.

Większość twierdzeń rozpatrywanych podczas nauki w szkole średniej ma postać:

Jeżeli założenie, to teza.

Założenie opisuje warunki, w których twierdzenie może być stosowane.
Teza to prawdziwe wnioski wynikające z założeń.
Dowód twierdzenia to proces polegający na logicznym wnioskowaniu (dedukcji), prowadzący do wykazania, że podane zdanie jest prawdziwe.

Niektóre twierdzenia mają postać:

***A* wtedy i tylko wtedy, gdy *B*.**

Udowodnienie tak sformułowanego twierdzenia polega na wykazaniu prawdziwości dwóch zdań:

Jeżeli *A*, to *B*. oraz **Jeżeli *B*, to *A*.**

Aby udowodnić własności figur, warto:

I. wykonać czytelny rysunek, czyli: ⟵ zobacz przykłady 1, 4
   - wprowadzić wygodne oznaczenia,
   - oznaczyć znane kąty, boki itp.,
   - wyróżnić równe odcinki, kąty,
   - użyć różnych kolorów lub rodzajów linii,

II. uzupełnić dany rysunek przydatnymi elementami, aby: ⟵ zobacz przykłady 1, 4
- pokazać podane zależności,
- zastosować odpowiednie twierdzenia,

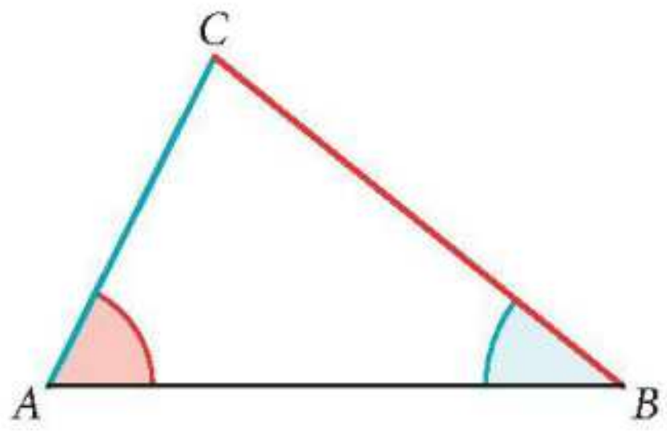
III. zastosować poznane definicje i twierdzenia, ⟵ zobacz podane przykłady

IV. wykonać potrzebne przekształcenia i obliczenia. ⟵ zobacz przykłady 2, 3

Fakty, z których najczęściej będziemy korzystać w dowodach geometrycznych, to:
- własności kątów (kąty: wierzchołkowe, przyległe, utworzone przez prostą przecinającą proste równoległe; suma kątów w wielokącie; kąty w kole; kąt między styczną a cięciwą),
- nierówność trójkąta,
- własności czworokąta wpisanego w okrąg i czworokąta opisanego na okręgu,
- cechy przystawania trójkątów, cechy podobieństwa trójkątów,
- twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do niego,
- twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do niego,
- twierdzenie o dwusiecznej, twierdzenie o środkowych w trójkącie,
- twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów,
- własności wektorów,
- wzory na pola i obwody figur.

Przykład 1

Wykażemy, że jeżeli w trójkącie dwa boki są różnej długości, to naprzeciw dłuższego boku leży większy kąt.



Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

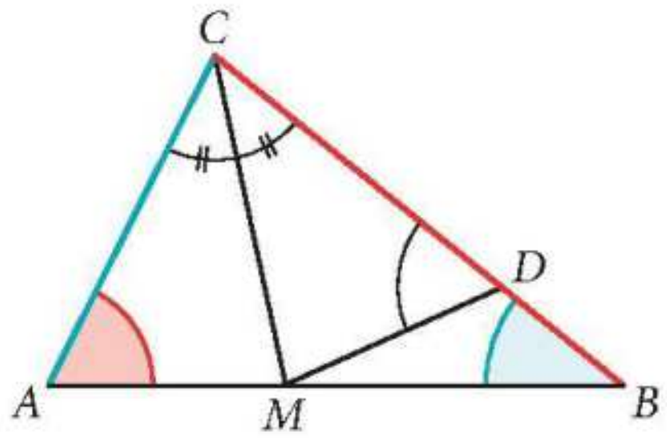
$|CB| > |CA|$

Teza

$\sphericalangle A > \sphericalangle B$

Dowód

Prowadzimy dwusieczną CM, a na półprostej CB odkładamy odcinek CD tak, żeby $|CD| = |CA|$.
Punkt D należy do boku BC trójkąta i jest różny od wierzchołka B, ponieważ $|CB| > |CA|$.
Trójkąty AMC i DMC (zob. rysunek) są przystające na mocy cechy bkb, zatem:



$\sphericalangle MAC = \sphericalangle MDC$ ⟵ odpowiednie kąty w trójkątach przystających

Kąt MDC jest kątem zewnętrznym w trójkącie MBD.

$\sphericalangle MDC = \sphericalangle DMB + \sphericalangle B$ ⟵ twierdzenie o kącie zewnętrznym trójkąta

$\sphericalangle A = \sphericalangle DMB + \sphericalangle B$ ⟵ $\sphericalangle MDC = \sphericalangle A$

Zatem $\sphericalangle A > \sphericalangle B$.

Koniec dowodu

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Udowodnimy teraz twierdzenie, które podaliśmy w drugiej klasie bez dowodu. Jest ono często stosowane w celu sprawdzenia, czy trójkąt o danych bokach jest prostokątny, ostrokątny, czy rozwartokątny.

W starożytnym Egipcie i Babilonie ok. 4000 lat temu to twierdzenie było wykorzystywane jako sposób wyznaczania kąta prostego.

Twierdzenie

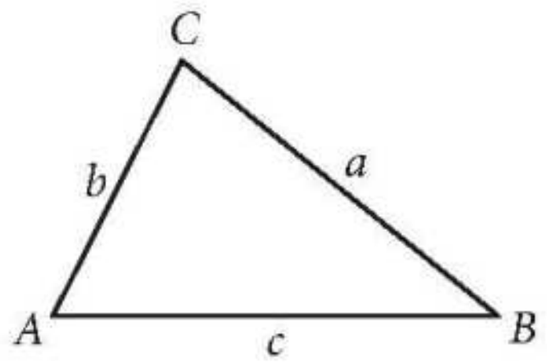
Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli w trójkącie suma kwadratów długości dwóch boków jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to kąt leżący naprzeciw tego boku jest prosty.

Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$c^2 = a^2 + b^2$



Teza

$\sphericalangle ACB = 90°$

Dowód

Dowód twierdzenia odwrotnego przeprowadzimy, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa.

Załóżmy, że dany trójkąt ABC ma boki długości a, b, c spełniające warunek $a^2 + b^2 = c^2$.

Zbudujmy trójkąt $A'B'C'$, w którym:

$|B'C'| = a$, $|A'C'| = b$, $\sphericalangle A'C'B' = 90°$

Na mocy twierdzenia Pitagorasa trzeci bok trójkąta $A'B'C'$ ma długość c, zatem:

$\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$ ⟵ cecha bbb przystawania trójkątów

czyli $\sphericalangle ACB = 90°$.

Koniec dowodu

Zauważmy, że twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do niego moglibyśmy sformułować jako jedno twierdzenie:

Trójkąt o bokach a, b, c takich, że $a \leqslant b \leqslant c$, jest prostokątny o kącie prostym leżącym naprzeciw boku c **wtedy i tylko wtedy, gdy** $a^2 + b^2 = c^2$.

Przykład 2

Sprawdzimy, czy trójkąt o bokach długości 11, 60 i 61 jest prostokątny.

Rozwiązanie

Liczby 11, 60, 61 spełniają nierówność trójkąta, więc trójkąt o bokach podanej długości istnieje.

W trójkącie prostokątnym dwa kąty są ostre, czyli najdłuższym bokiem może być tylko przeciwprostokątna. Wystarczy więc sprawdzić, czy zachodzi równość $11^2 + 60^2 = 61^2$.

$$11^2 + 60^2 = 121 + 3600 = 3721 = 61^2$$

Zatem, na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, badany trójkąt jest prostokątny.

Długość łuku i pole wycinka kołowego

Przypomnijmy:

- Obwód L koła o promieniu r jest równy $L = 2\pi r$.
- Pole P koła o promieniu r jest równe $P = \pi r^2$.
- Wycinkiem kołowym nazywamy każdą z dwóch części, na które dzielą koło dwa niepokrywające się promienie.

Wyprowadzenie wzorów na obwód i pole koła wymaga bardziej zaawansowanego aparatu matematycznego, niż przewiduje to podstawa programowa szkoły ponadpodstawowej. Również bez dowodu podamy dwa twierdzenia, które prowadzą do wyznaczenia długości łuku oraz pola wycinka kołowego w kole o promieniu r.

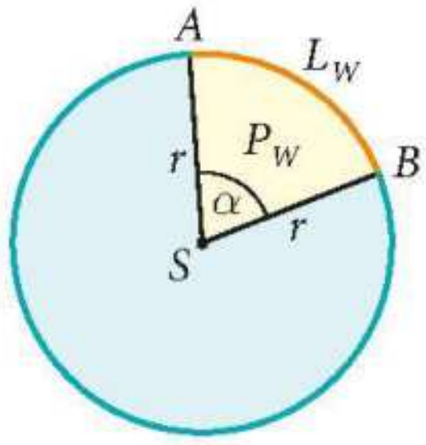
Twierdzenie 1

Długość łuku okręgu jest proporcjonalna do kąta środkowego odpowiadającego temu łukowi.

Twierdzenie 2

Pole wycinka kołowego jest proporcjonalne do kąta środkowego odpowiadającego temu wycinkowi.

- Niech L_W oznacza długość łuku AB wyznaczonego w kole o promieniu r przez kąt środkowy α wyrażony w stopniach (zob. rysunek).



Zauważmy, że jeżeli mamy w tym kole kilka wycinków wyznaczonych przez kąty środkowe α_1, α_2, α_3, …, o łukach odpowiednio L_{W_1}, L_{W_2}, L_{W_3}, …, to na mocy twierdzenia 1 zachodzą równości:

$$\frac{L_{W_1}}{L_{W_2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \frac{L_{W_1}}{L_{W_3}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \quad \frac{L_{W_2}}{L_{W_3}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \text{ itd.}$$

W szczególnym przypadku:

$$\frac{L_W}{\pi r} = \frac{\alpha}{180^\circ}$$ ⟵ kąt środkowy o mierze 180° wyznacza półokrąg

i stąd długość L_W łuku AB jest równa:

$$\boldsymbol{L_W = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r}$$

Wzór na długość łuku często podawany jest też w postaci:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

- Niech P_W oznacza pole wycinka kołowego wyznaczonego w kole o promieniu r przez kąt środkowy α wyrażony w stopniach (zob. rysunek).

Podobnie jak poprzednio skorzystamy z równości stosunków wielkości proporcjonalnych:

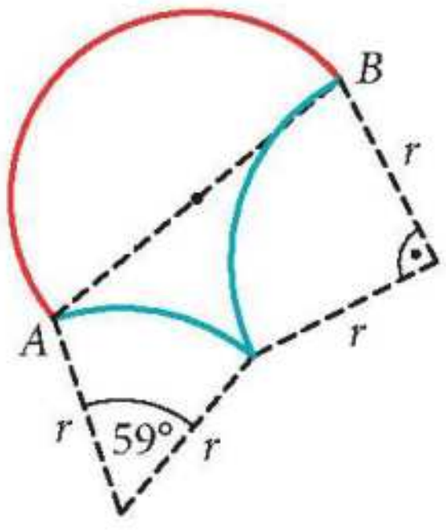
$$\frac{P_W}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$ ⟵ kąt środkowy o mierze 360° wyznacza okrąg

i stąd pole P_W wycinka kołowego wyznaczonego przez kąt środkowy α wynosi:

$$\boldsymbol{P_W = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2}$$

Przykład 3

Wykażemy, że linia czerwona (półokrąg o promieniu 2,5 cm) łącząca punkty A i B jest dłuższa od sumy dwóch niebieskich łuków wyznaczonych przez kąty 59° i 90° w okręgach o promieniach 2,8 cm (zob. rysunek).



Dowód

Długość (w cm) czerwonego półokręgu jest równa $L_1 = 2{,}5\pi$.
Długość (w cm) łuku wyznaczonego przez kąt 90°, czyli jedna czwarta obwodu koła o promieniu 2,8 cm, wynosi $L_2 = 1{,}4\pi$.

Długość (w cm) łuku wyznaczonego przez kąt 59° wynosi:

$$L_3 = \frac{59}{180}\pi \cdot 2{,}8 = \frac{59}{90} \cdot 1{,}4\pi$$

Długość (w cm) niebieskiej linii równa się:

$$L_2 + L_3 = 1{,}4\pi + \frac{59}{90} \cdot 1{,}4\pi = 1{,}4\pi\left(1 + \frac{59}{90}\right) = 1{,}4\pi \cdot \frac{149}{90}$$

Porównamy wielkości L_1 i $L_2 + L_3$. W tym celu zbadamy ich iloraz:

$$\frac{L_2 + L_3}{L_1} = \frac{1{,}4\pi \cdot 149}{90 \cdot 2{,}5\pi} = \frac{2086}{2250} < 1$$

Zatem $L_2 + L_3 < L_1$.

Koniec dowodu

Związki miarowe w wielokątach

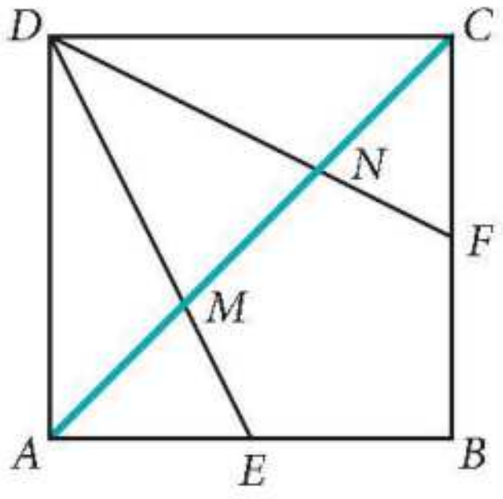
Przykład 4

W kwadracie $ABCD$ punkty E i F są odpowiednio środkami boków AB i BC. Wykażemy, że odcinki DE i DF dzielą przekątną AC na trzy równe części.

Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

- $ABCD$ jest kwadratem.
- $|AE| = |EB|$
- $|BF| = |FC|$

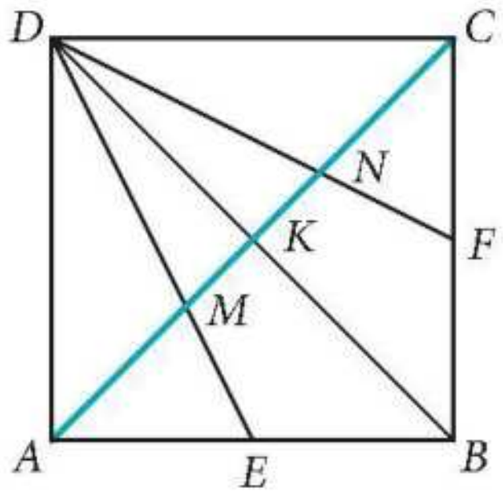


Teza

$$|AM| = |MN| = |NC|$$

Dowód

Prowadzimy przekątną DB i jej punkt przecięcia z AC oznaczamy literą K, jak na rysunku.



$|AM| = |NC|$ i $|MK| = |KN|$ ⟵ prosta BD jest osią symetrii kwadratu $ABCD$

W trójkącie ABD punkt K jest środkiem boku BD. Zatem odcinki AK oraz DE są w tym trójkącie środkowymi i przecinają się w punkcie M. Oznacza to, że:

$|AM| = 2|MK|$ ⟵ twierdzenie o punkcie przecięcia środkowych trójkąta

co, wobec równości $|MK| = |KN|$, kończy dowód.

Koniec dowodu

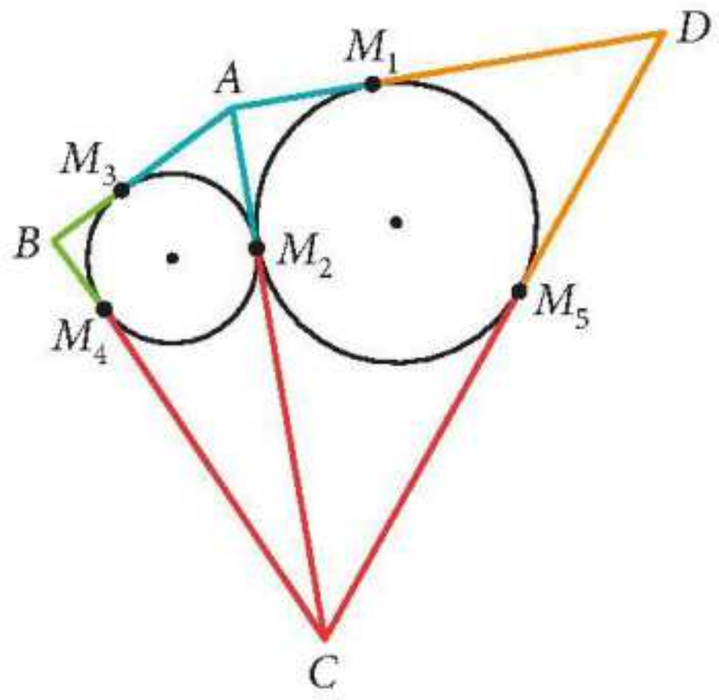
Przykład 5

Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne. Wykażemy, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Założenia

Czworokąt $ABCD$ jest wypukły.

Okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne.



Teza

W czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 to punkty styczności z odpowiednimi bokami trójkątów ABC i ADC.

Na mocy twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy:

$$|AM_1| = |AM_2| = |AM_3| \qquad |BM_4| = |BM_3|$$
$$|CM_4| = |CM_2| = |CM_5| \qquad |DM_1| = |DM_5|$$

Zatem:

$$|AB| + |DC| = |AM_3| + |BM_3| + |DM_5| + |CM_5| =$$
$$= |AM_1| + |BM_4| + |DM_1| + |CM_4| = |BC| + |AD|$$

Wykazaliśmy, że sumy długości przeciwległych boków czworokąta $ABCD$ są równe, co oznacza, że w ten czworokąt można wpisać okrąg.

Koniec dowodu

Przypomnijmy twierdzenie udowodnione w podręczniku do klasy drugiej (s. 290).

Twierdzenie

W trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego jest równy iloczynowi długości odcinków, na które ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

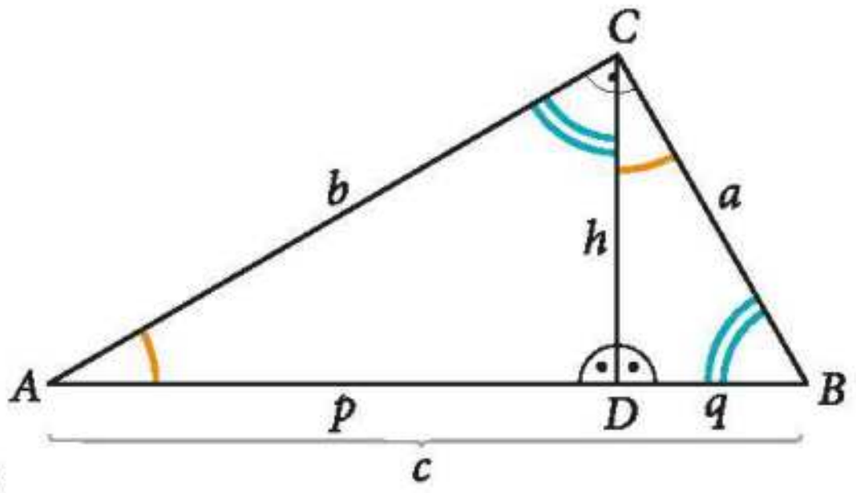
Twierdzenie

Jeśli CD jest wysokością trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym BCA, to:

$$|AC|^2 = |AB| \cdot |AD| \text{ i } |BC|^2 = |AB| \cdot |DB|$$

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$$\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$$

Wykorzystamy następujące proporcje, aby wyprowadzić kolejne związki miarowe dotyczące trójkąta prostokątnego:

- $\frac{b}{c} = \frac{p}{b}$ ⟵ z podobieństwa trójkątów DAC i CAB
- $\frac{a}{c} = \frac{q}{a}$ ⟵ z podobieństwa trójkątów DCB i CAB

Stąd:

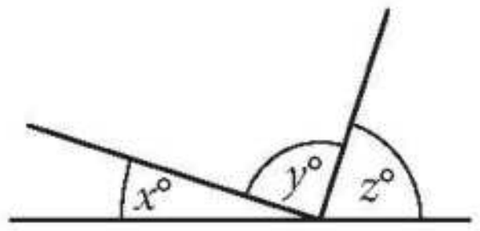
- $b^2 = c \cdot p$
- $a^2 = c \cdot q$

Koniec dowodu

D Zadania

1.1. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $|AB| = |AD|$ i $|BC| = |DC|$. Wykaż, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$.

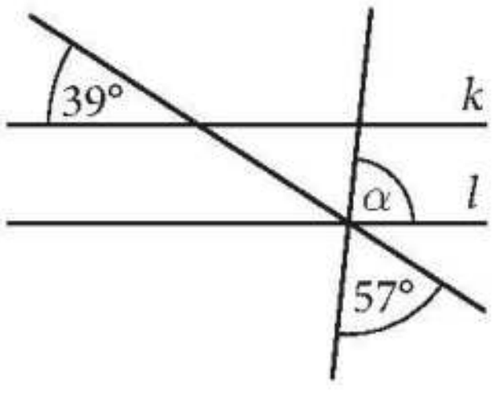
1.2. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wiadomo, że $\frac{y}{x} = 5$ i $\frac{z}{x} = 4$. Wykaż, że $z = 72$.



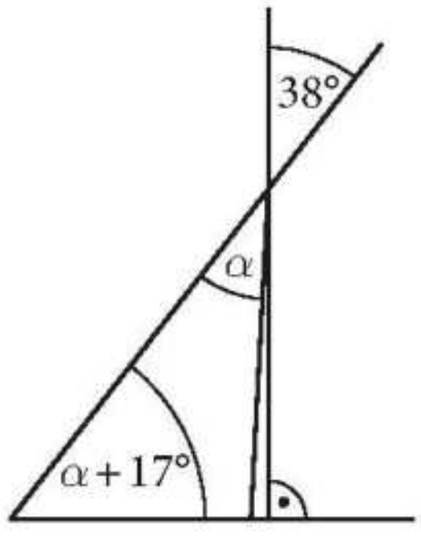
1.3. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1. Proste k i l są równoległe. Udowodnij, że $\alpha = 84°$.

1.4. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 2. Wykaż, że $\alpha = 35°$.

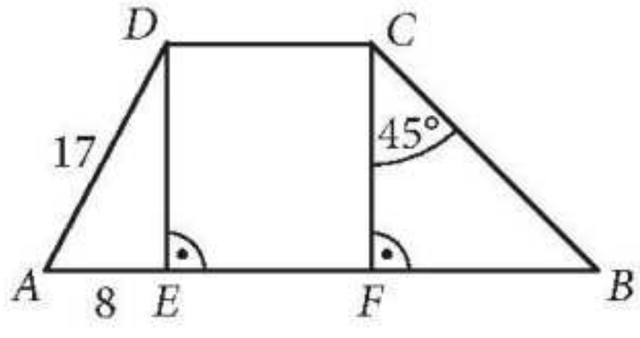
1.5. Dany jest trapez $ABCD$ $(AB \parallel DC)$. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 3. Wykaż, że $|BC| = 15\sqrt{2}$.



Rys. 1.



Rys. 2.

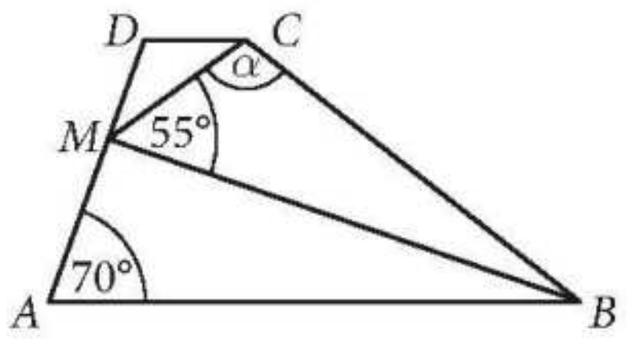


Rys. 3.

1.6. Wykaż, że w czworokącie o bokach równej długości przeciwległe kąty są równe.

1.7. W trójkącie ABC poprowadzono środkową BM, a następnie na półprostej BM wyznaczono taki punkt D (różny od punktu B), że $|BM| = |MD|$. Udowodnij, że $|BC| = |AD|$.

1.8. W trapezie $ABCD$ $(AB \parallel DC)$, w którym $\sphericalangle BAD = 70°$, poprowadzono odcinek BM tak, że $|MD| = |DC|$ (zob. rysunek). Odcinek BM jest zawarty w dwusiecznej kąta ABC, a $\sphericalangle BMC = 55°$. Wykaż, że $\alpha = 105°$.



1.9. W trójkątach ABC oraz $A'B'C'$ poprowadzono dwusieczne BD i $B'D'$. Wiadomo, że $|BD| = |B'D'|$, $\sphericalangle BDC = \sphericalangle B'D'C'$ i $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$. Udowodnij, że trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające.

1.10. Wykaż, że dwa wierzchołki trójkąta są jednakowo oddalone od prostej, która zawiera środkową poprowadzoną do boku łączącego te wierzchołki.

1.11. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego równa jest połowie przeciwprostokątnej i dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty równoramienne.

1.12. Wysokość trójkąta zawiera się w dwusiecznej jednego z jego kątów wewnętrznych. Wykaż, że trójkąt ten jest równoramienny.

1.13. Wykaż, że czworokąt jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

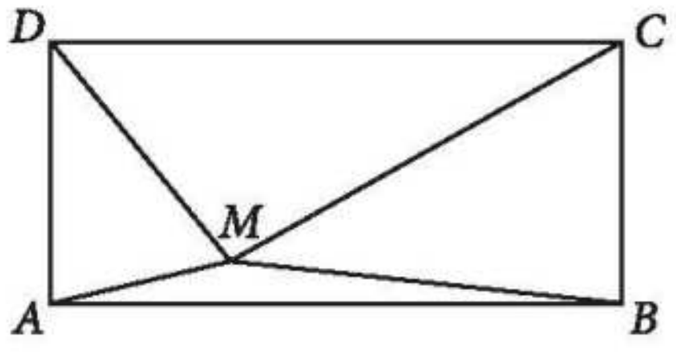
1.14. W trójkącie ABC, w którym miara kąta B jest dwa razy większa od miary kąta A, poprowadzono dwusieczną BD. Udowodnij, że trójkąt BDC jest podobny do trójkąta ABC.

1.15. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 7$, $|AC| = 3$, $\sphericalangle BAC = 60°$. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC trójkąta w punkcie E. Wykaż, że $|AE| = \frac{21\sqrt{3}}{10}$.

1.16. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$, wysokość CD jest równa podstawie. Wykaż, że $\cos\sphericalangle A = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

1.17. Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ jak na rysunku obok. Udowodnij, że:

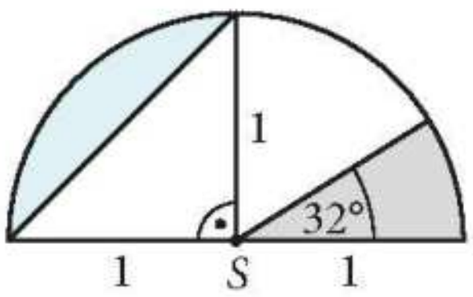
$$|AM|^2 + |CM|^2 = |BM|^2 + |DM|^2$$



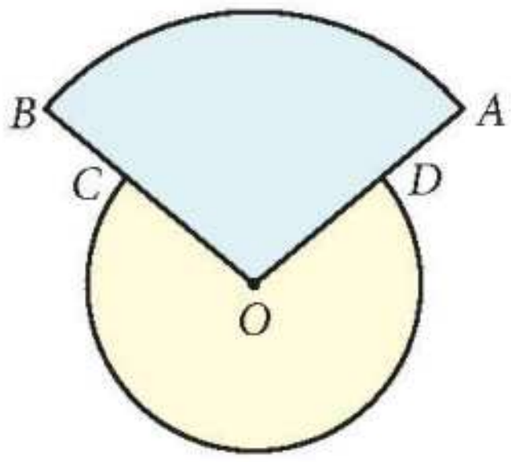
1.18. Promień półkola (rys. 1) jest równy 1. Wykaż, że pole niebieskiej figury jest większe od pola figury szarej.

1.19. Dane są dwa wycinki kołowe (rys. 2) o promieniach $|OA| = \sqrt{13}$ i $|OD| = \sqrt{5}$. Kąt wypukły AOB ma miarę $100°$. Wykaż, że
a) pola obu wycinków są równe.
b) długość łuku wycinka AOB jest mniejsza od długości łuku wycinka COD.

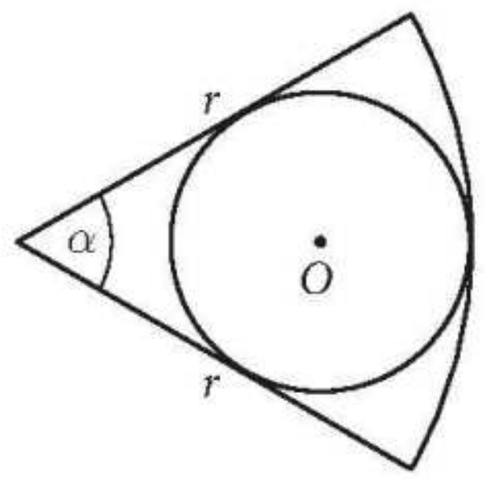
1.20. W wycinek koła o promieniu r wpisano koło o promieniu $\frac{r}{3}$ (rys. 3). Wykaż, że $\alpha = 60°$.



Rys. 1.

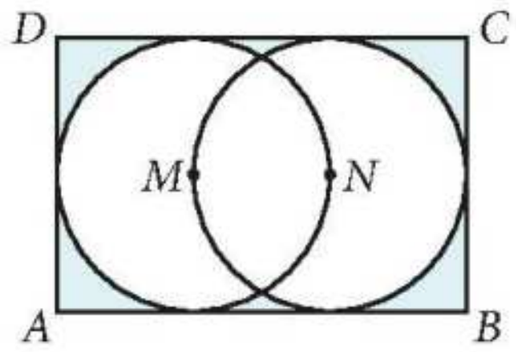


Rys. 2.

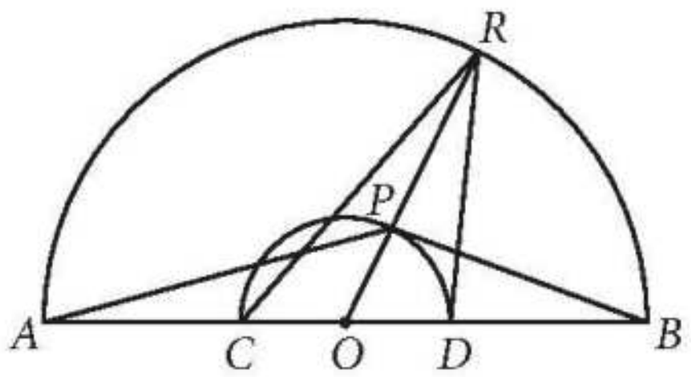


Rys. 3.

1.21. Dwa koła, każde o polu równym S, są zawarte w prostokącie $ABCD$ tak jak na rysunku. Wykaż, że pole
a) prostokąta $ABCD$ jest równe $\frac{6S}{\pi}$.
b) zamalowanego obszaru jest równe $\frac{\left(36 - 8\pi - 3\sqrt{3}\right)S}{6\pi}$.



1.22. Dane są dwa półokręgi o wspólnym środku O i średnicach odpowiednio AB i CD (punkty A, B, C, D i O są współliniowe). Punkt P leży na wewnętrznym półokręgu, punkt R leży na zewnętrznym półokręgu, punkty O, P i R są współliniowe. Udowodnij, że $\sphericalangle APB + \sphericalangle CRD = 180°$.



1.23. Proste zawierające wysokości AE i BF trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Wiadomo, że $|AH| = |BH|$. Wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny.

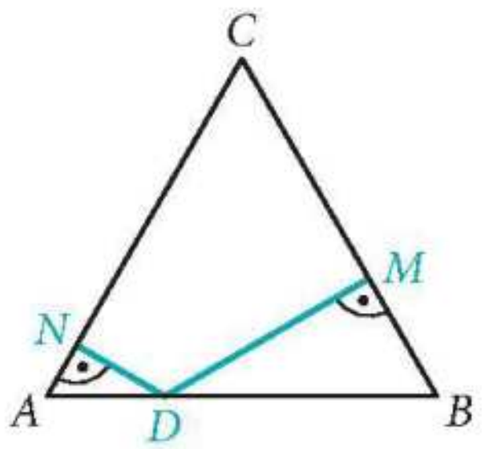
1.24. W ostrokątnym trójkącie ABC poprowadzono wysokości AE i CF. Wykaż, że symetralna odcinka EF przecina bok AC w jego środku.

1.25. Z dowolnego punktu D należącego do boku AB trójkąta równobocznego ABC poprowadzono prostopadle do boków BC i AC odcinki DM i DN – zob. rysunek 1. Wykaż, że suma $|DM| + |DN|$ jest równa wysokości trójkąta ABC.

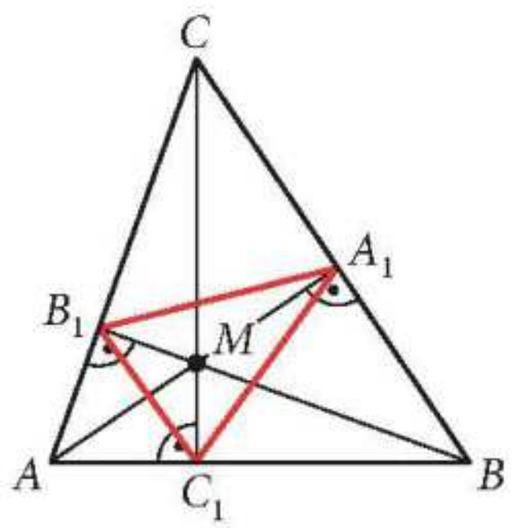
1.26. Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu wewnętrznego trójkąta od jego wierzchołków jest większa od połowy obwodu tego trójkąta.

* **1.27.** W ostrokątnym trójkącie ABC poprowadzono wysokości AA_1, BB_1 i CC_1 (zob. rysunek 2). Wykaż, że
a) trójkąty AC_1B_1, C_1BA_1 i B_1A_1C są podobne.
b) punkt M jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $C_1B_1A_1$.

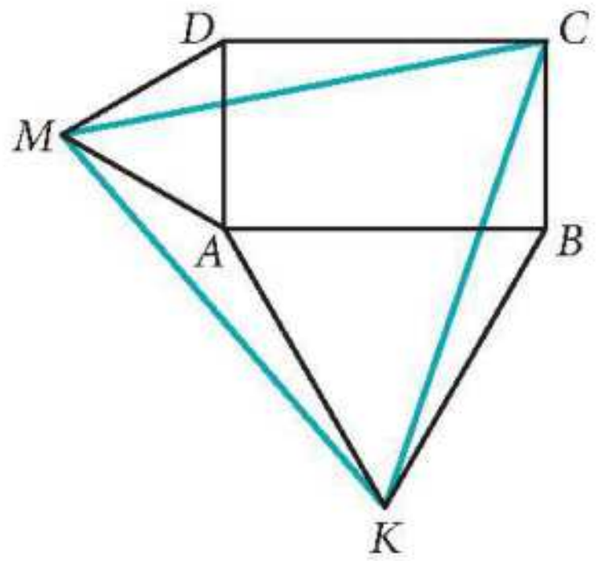
1.28. Na dwóch bokach prostokąta $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne ADM i BAK, jak na rysunku 3. Wykaż, że trójkąt MKC jest równoboczny.



Rys. 1.



Rys. 2.

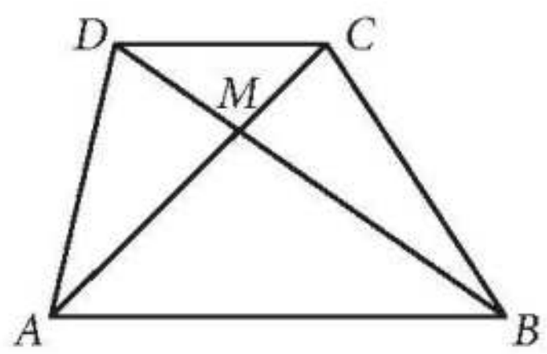


Rys. 3.

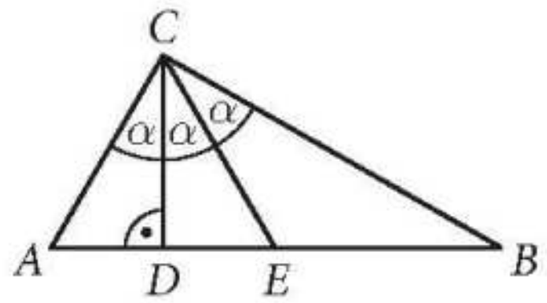
* **1.29.** Przekątna BD trapezu $ABCD$ jest prostopadła do ramienia AD i zawiera się w dwusiecznej kąta ABC. Wykaż, że pole trójkąta ABD jest dwa razy większe od pola trójkąta BCD.

1.30. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie M. Wykaż, że $|MA| \cdot |MD| = |MB| \cdot |MC|$.

* **1.31.** Przekątne trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie M (zob. rysunek). Pole trójkąta ABM jest równe P_1, pole trójkąta DCM jest równe P_2. Wykaż, że pole trapezu $ABCD$ jest równe $P = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}\right)^2$.



1.32. W trójkącie ABC wysokość CD i środkowa CE dzielą kąt ACB na trzy równe części (zob. rysunek). Wykaż, że $\sphericalangle ACB = 90°$.



1.33. Niech w trójkącie prostokątnym a i b oznaczają długości jego przyprostokątnych, c oznacza długość przeciwprostokątnej, r – promień okręgu wpisanego w ten trójkąt, R – promień okręgu opisanego na tym trójkącie. Wykaż, że

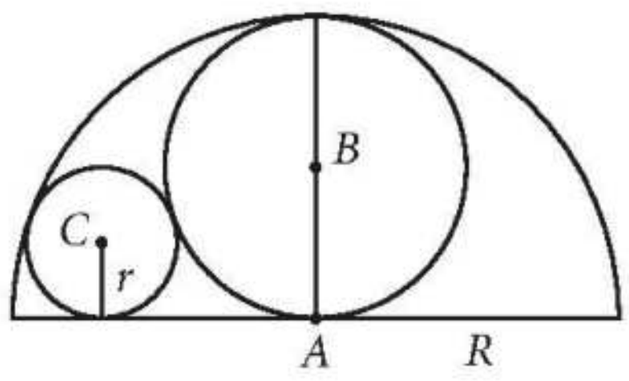
a) $r = \frac{a+b-c}{2}$.

b) $2r + 2R = a + b$.

1.34. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Wykaż, że punkt przecięcia przekątnych tego czworokąta dzieli każdą z przekątnych w stosunku $1:4$.

1.35. Okrąg wpisany w trapez $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ jest styczny do ramion AD i BC odpowiednio w punktach M i N. Wykaż, że $|AM| \cdot |MD| = |BN| \cdot |NC|$.

1.36. W półkole o środku A i promieniu R wpisano okrąg o środku B i promieniu $0{,}5R$ styczny do średnicy, a następnie okrąg o środku C i promieniu r styczny jednocześnie do wpisanego okręgu oraz do średnicy, jak na rysunku. Wykaż, że $r = \frac{1}{4}R$.

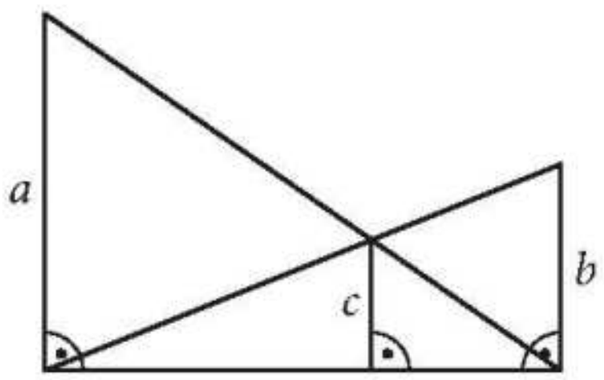


1.37. Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie o boku a. Wykaż, że suma kwadratów odległości punktu P od wierzchołków tego kwadratu ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu.

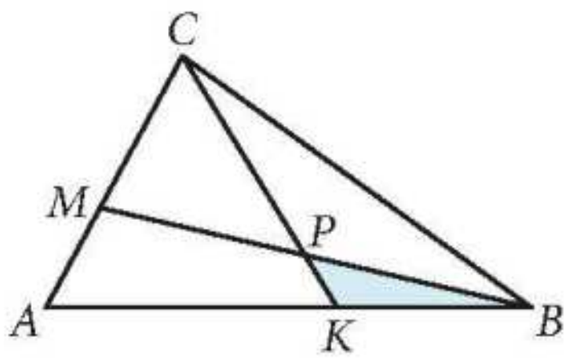
1.38. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zbudowano kwadrat $ANMB$ na zewnątrz tego trójkąta. Środek S kwadratu połączono odcinkiem z wierzchołkiem C trójkąta. Wykaż, że $\sphericalangle ACS = \sphericalangle SCB$.

1.39. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 4. Wykaż, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

1.40. Na bokach AB i AC trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty K i M takie, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CM|}{|MA|} = \frac{3}{2}$. Odcinki BM i CK przecinają się w punkcie P, jak na rysunku 5. Wykaż, że pole trójkąta PKB stanowi $\frac{8}{95}$ pola trójkąta ABC.



Rys. 4.



Rys. 5.

POLSKA SZKOŁA MATEMATYCZNA

Kiedy w 1918 r. Polska odzyskała niepodległość, jedną z dziedzin wymagających odbudowania była nauka. Z ogromnym sukcesem udało się to polskiej matematyce, która przebojem dołączyła do światowej elity. Dziś o matematykach i ich ogromnych osiągnięciach z tamtego okresu mówi się: **polska szkoła matematyczna**.

Warszawa i Lwów

Największy wpływ na sukces polskiej szkoły matematycznej miały dwa środowiska naukowe, działające na uniwersytetach w Warszawie i we Lwowie. Pierwsze było skupione wokół matematyków: Wacława Sierpińskiego, Zygmunta Janiszewskiego i Stefana Mazurkiewicza, drugie – wokół Hugona Steinhausa i Stefana Banacha.

Stefan Mazurkiewicz

Wacław Sierpiński

Zygmunt Janiszewski

Kierunek ich działania nakreślił w 1917 r. Zygmunt Janiszewski w artykule „O potrzebach matematyki w Polsce". Zgodnie z jego wytycznymi naukowcy zajmowali się głównie nowo odkrytymi obszarami matematyki. Jako pierwsi na świecie założyli czasopismo matematyczne o wąskiej specjalizacji. **„Fundamenta Mathematicae"**, wydawane od 1920 r. w Warszawie, poświęcone było głównie **teorii mnogości**. Lwowskie czasopismo **„Studia Mathematica"**, wydawane od 1929 r., uznano za najważniejsze miejsce prezentowania dokonań z zakresu nowoczesnej **analizy funkcjonalnej**.

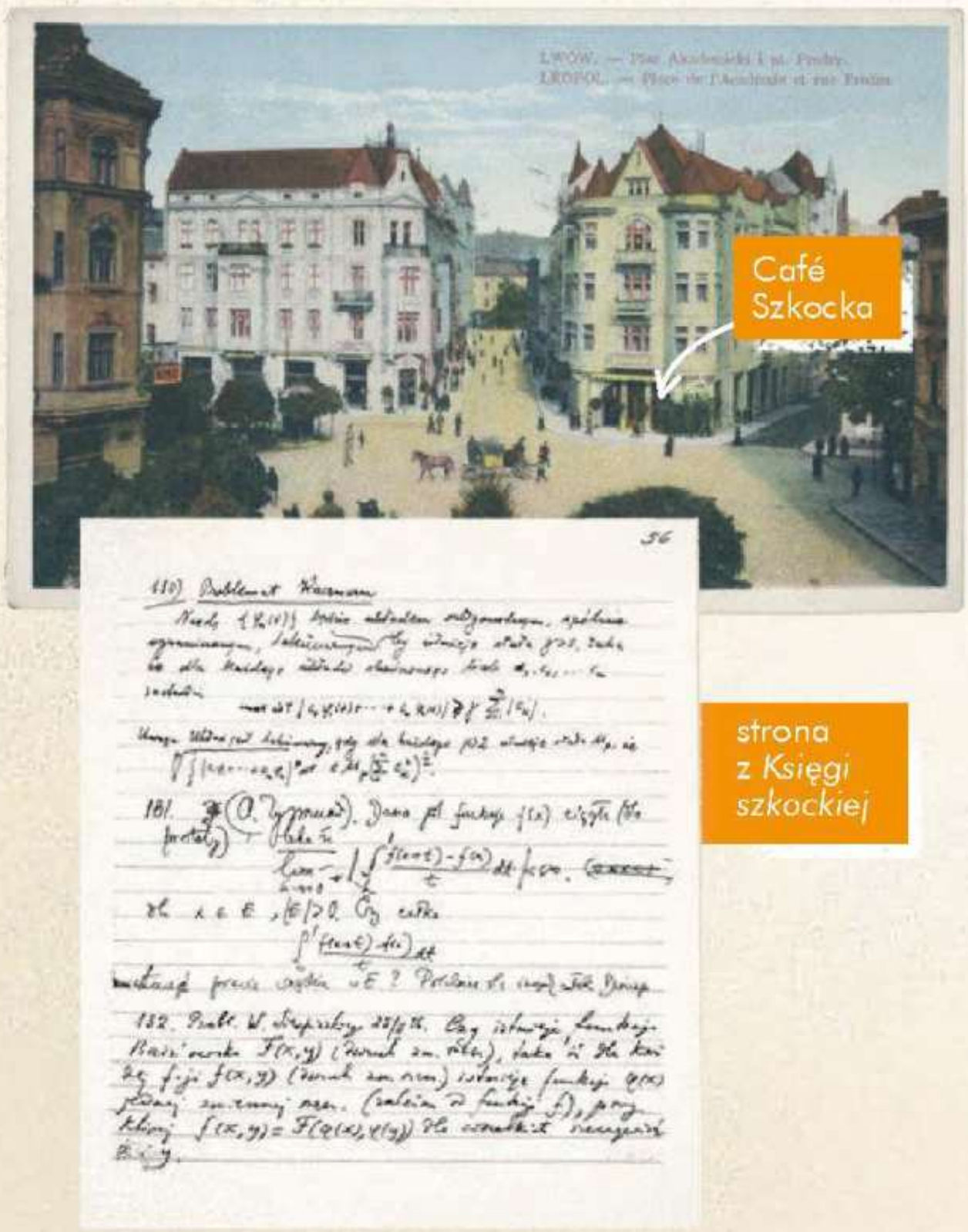
Środowisko lwowskich matematyków słynęło z jeszcze innej rzeczy – niepowtarzalnej atmosfery i aury niezwykłości. Matematyczne dyskusje odbywano często nie w salach wykładowych, ale we lwowskich kawiarniach, przy poczęstunku, kawie i trunkach.

Stefan Banach

Hugo Steinhaus

Księga szkocka

Do historii przeszła szczególnie Café Szkocka. Początkowo matematycy zapisywali swoje rozważania ołówkiem na marmurowych blatach stolików i serwetkach. Po wyczyszczeniu blatu przez obsługę kawiarni wszystkie zapiski ginęły bezpowrotnie. Żona Stefana Banacha kupiła więc zeszyt i do tego zeszytu, nazwanego *Księgą szkocką*, przeniosła się dyskusja. Wpisywano tam matematyczne problemy, które pojawiały się w trakcie kawiarnianych spotkań. Za ich rozwiązanie często przewidywana była nagroda.



strona z *Księgi szkockiej*

Przykładowe nagrody

2 małe piwa | mała kawa | 10 dag kawioru | obiad u George'a | żywa gęś

Problemy i twierdzenia

Przy każdym wpisie w *Księdze szkockiej* widnieje nazwisko jego autora. Na przykład tytuł poniższego fragmentu pochodzi od nazwisk dwóch matematyków: Hermana Auerbacha i Stanisława Mazura.

Twierdzenie Auerbach - Mazur

Jeżeli z rogu bilardu o współmiernych bokach wychodzi kula pod kątem 45°, to po skończonej liczbie odbić dojdzie do jednego z trzech pozostałych rogów.

Dla wyjaśnienia dodajmy, że dwa odcinki nazywamy współmiernymi, jeżeli istnieje trzeci odcinek mieszczący się całkowitą liczbę razy w każdym z tych dwóch odcinków.

Stanisław Mazur

Per Enflo

Problemami zapisanymi w *Księdze szkockiej* matematycy zajmują się nawet dziś. Żywą gęś z rąk Stanisława Mazura odebrał w 1972 r. Szwed Per Enflo za rozwiązanie problemu sformułowanego przez Mazura w 1936 r.

2. Dowody w algebrze

Umiejętności:

- dowodzenie twierdzeń z zakresu algebry

Aby rozwiązać zadanie na dowodzenie dotyczące podzielności liczb, nierówności lub innych zależności między liczbami czy wyrażeniami algebraicznymi, warto:

I. zapisać precyzyjnie założenie i tezę, ⟵ zobacz podane przykłady
II. zastosować poznane definicje i twierdzenia, ⟵ zobacz podane przykłady
III. sprawdzić prawdziwość tezy w rozłącznych przypadkach, wyczerpujących wszystkie możliwości, ⟵ zobacz przykłady 4, 7, 8
IV. przekształcić tezę równoważnie, ⟵ zobacz przykład 11
V. zastosować dowód nie wprost. ⟵ zobacz przykłady 9, 12

Fakty, z których najczęściej będziemy korzystać w dowodach algebraicznych, to:

- cechy podzielności liczb,
- własności działań w zbiorze liczb rzeczywistych (w tym: potęgowania, pierwiastkowania, logarytmowania); wzory skróconego mnożenia,
- własności liczb (naturalnych, całkowitych, wymiernych, niewymiernych),
- wzory Viète'a,
- własności ciągu arytmetycznego, geometrycznego,
- twierdzenie Bézouta, twierdzenie o całkowitych i wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych,
- własności funkcji różniczkowalnych.

Podzielność w zbiorze liczb całkowitych

Przykład 1

Wykażemy, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $7 \cdot 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ jest podzielna przez 19.

Liczba $n \in \mathbf{Z}$ jest **podzielna** przez liczbę $m \in \mathbf{Z} - \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $k \in \mathbf{Z}$ taka, że $n = m \cdot k$.

Założenie

$n \in \mathbf{Z}$

Teza

Liczba $7 \cdot 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ jest podzielna przez 19.

Dowód

$$7 \cdot 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 7 \cdot 3^n + 3^n \cdot 3 + 3^n \cdot 3^2 = 3^n \left(7 + 3 + 3^2\right) = 3^n \cdot 19$$

3^n jest liczbą całkowitą, bo $n \in \mathbf{Z}$, zatem podana liczba jest podzielna przez 19.

Koniec dowodu

Przykład 2

Udowodnimy, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

Założenie

$n \in \mathbf{Z}$

Teza

Liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

Dowód

$$n^3 - n = n\left(n^2 - 1\right) = n(n-1)(n+1)$$

Liczba $n(n-1)(n+1)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych. Zatem:

- co najmniej jedna z nich jest parzysta,
- dokładnie jedna z nich jest podzielna przez 3.

Iloczyn liczb podzielnych przez 2 i przez 3 jest liczbą podzielną przez 6.

Koniec dowodu

Przykład 3

Udowodnimy, że różnica czwartych potęg dwóch kolejnych liczb całkowitych niepa-
rzystych jest podzielna przez 16.

Założenie

$k \in \mathbf{Z}$

Teza

Istnieje takie $p \in \mathbf{Z}$, że:

$$(2k-1)^4 - (2k+1)^4 = 16p$$

Dowód

$$\begin{aligned}
&(2k-1)^4 - (2k+1)^4 = \\
&= \left[(2k-1)^2\right]^2 - \left[(2k+1)^2\right]^2 = \qquad \longleftarrow \text{stosujemy wzór na różnicę kwadratów} \\
&= \left[(2k-1)^2 - (2k+1)^2\right] \cdot \left[(2k-1)^2 + (2k+1)^2\right] = \\
&= \left[\left(4k^2 - 4k + 1\right) - \left(4k^2 + 4k + 1\right)\right] \cdot \left[\left(4k^2 - 4k + 1\right) + \left(4k^2 + 4k + 1\right)\right] = \\
&= -8k\left(8k^2 + 2\right) = 16k\left(-4k^2 - 1\right)
\end{aligned}$$

$k\left(-4k^2 - 1\right)$ jest liczbą całkowitą, bo $k \in \mathbf{Z}$. Zatem szukane p istnieje i $p = k\left(-4k^2 - 1\right)$.

Koniec dowodu

Dwie kolejne liczby nieparzyste dla $n \in \mathbf{Z}$ możemy zapisać na wiele sposobów: $2n+1$, $2n+3$ lub $2n+3$, $2n+5$ itd.
Na ogół z powodów rachunkowych najwygodniejsza postać to $2n-1$ i $2n+1$.

Przykład 4

Udowodnimy, że różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych nieparzystych jest podzielna przez 8.

Założenie

a i b są liczbami całkowitymi nieparzystymi.

Teza

Różnica kwadratów $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 8.

Dowód

Niech $a = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}$ i $b = 2m + 1,\ m \in \mathbf{Z}$.
Wówczas:

$$a^2 - b^2 = (2k+1)^2 - (2m+1)^2 = \quad \longleftarrow \text{wzór na różnicę kwadratów}$$
$$= (2k + 1 - 2m - 1)(2k + 1 + 2m + 1) =$$
$$= (2k - 2m)(2k + 2m + 2) = 2(k - m) \cdot 2(k + m + 1) = 4(k - m)(k + m + 1)$$

Aby wykazać podzielność otrzymanego iloczynu przez 8, wystarczy udowodnić, że jeden z czynników $(k - m),\ (k + m + 1)$ jest liczbą parzystą.

Zauważmy, że:

- jeśli obie liczby k i m są parzyste lub obie są nieparzyste, to liczba $k - m$ jest parzysta,
- jeśli jedna spośród liczb k i m jest parzysta, a druga nieparzysta, to liczba $k + m + 1$ jest parzysta.

Zatem liczba $4(k - m)(k + m + 1)$ jest podzielna przez 8.

Koniec dowodu

Różnica potęg

Znamy wzory skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i różnicę sześcianów:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

Analogiczny wzór na różnicę czwartych potęg wygląda następująco:

$$a^4 - b^4 = (a - b)\left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right)$$

Można go łatwo sprawdzić, wykonując odpowiednie mnożenie.

$$(a - b)\left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right) = a^4 - a^3b + a^3b - a^2b^2 + a^2b^2 - ab^3 + ab^3 - b^4 =$$
$$= a^4 - b^4$$

Uogólnieniem tych zależności jest wzór na **różnicę *n*-tych potęg**.

Twierdzenie

Dla każdej dodatniej liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Dowód

Rozważmy wielomian $W(x) = x^n - b^n$.

$W(b) = b^n - b^n = 0$, zatem na mocy twierdzenia Bézouta wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - b$.

Wielomian $W(x) = x^n - b^n$ ma $n+1$ współczynników, przy czym pierwszym z nich jest 1, ostatnim jest $-b^n$, a każdy z pozostałych $n-1$ współczynników ma wartość 0.

Skorzystamy ze schematu Hornera i wykonamy dzielenie $W(x) : (x - b)$.

	1	0	0	…	0	0	$-b^n$
b	1	b	b^2	…	b^{n-2}	b^{n-1}	0

Zatem:

$$W(x) = x^n - b^n = (x-b)\left(x^{n-1} + bx^{n-2} + b^2x^{n-3} + \ldots + b^{n-2}x + b^{n-1}\right)$$

Podstawiamy a w miejsce x i otrzymujemy tezę.

Koniec dowodu

Jeśli zastosujemy wzór na różnicę *n*-tych potęg dla liczb całkowitych a, b, to otrzymamy następujący wniosek.

Wniosek

Dla dowolnych różnych liczb całkowitych a i b liczba $a^n - b^n$ jest podzielna przez $a - b$.

Przykład 5

Udowodnimy, że liczba $49^{12} - 256^6$ jest podzielna przez 3.

Dowód

$$49^{12} - 256^6 = \left(7^2\right)^{12} - \left(4^4\right)^6 = 7^{24} - 4^{24}$$

Liczba $7^{24} - 4^{24}$ jest podzielna przez $7 - 4 = 3$.

Koniec dowodu

Przykład 6

Udowodnimy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n liczba $81^{3n} - 32^{4n}$ jest podzielna przez 5.

Założenie

$n \in \mathbf{N} - \{0\}$

Teza

Liczba $81^{3n} - 32^{4n}$ jest podzielna przez 5.

Dowód

$$81^{3n} - 32^{4n} = \left(3^4\right)^{3n} - \left(2^5\right)^{4n} = 3^{12n} - 2^{20n} = \left(3^{12}\right)^n - \left(2^{20}\right)^n$$

Liczba $\left(3^{12}\right)^n - \left(2^{20}\right)^n$ jest podzielna przez $3^{12} - 2^{20}$.

Wystarczy wykazać, że liczba $3^{12} - 2^{20}$ jest podzielna przez 5.

$$3^{12} - 2^{20} = \left(3^6 - 2^{10}\right)\left(3^6 + 2^{10}\right) = \left(3^3 - 2^5\right)\left(3^3 + 2^5\right)\left(3^6 + 2^{10}\right) =$$
$$= (27 - 32)\left(3^3 + 2^5\right)\left(3^6 + 2^{10}\right) = -5 \cdot \left(3^3 + 2^5\right)\left(3^6 + 2^{10}\right)$$

Liczby w nawiasach są całkowite, więc liczba $3^{12} - 2^{20}$ jest podzielna przez 5.

Koniec dowodu

Dzielenie z resztą

W szkole podstawowej było omawiane dzielenie z resztą. Przypomnijmy, że na przykład równość:

$$17 = 5 \cdot 3 + 2$$

można odczytać w następujący sposób:

reszta z dzielenia liczby 17 przez 3 jest równa 2

lub

reszta z dzielenia liczby 17 przez 5 jest równa 2.

Reszta z dzielenia nie może być większa od dzielnika, zatem równość:

$$19 = 5 \cdot 3 + 4$$

oznacza, że reszta z dzielenia liczby 19 przez 5 jest równa 4,

ale

nie oznacza, że reszta z dzielenia liczby 19 przez 3 jest równa 4.

Dzielenie z resztą możemy wykonywać również w zbiorze liczb całkowitych. Przyjęto zasadę, że reszta jest w takim przypadku liczbą nieujemną mniejszą od wartości bezwzględnej dzielnika.

Jeżeli na przykład chcemy wyznaczyć resztę z dzielenia liczby −17 przez 3, to korzystamy z równości:

$$-17 = (-6) \cdot 3 + 1$$

Zatem **reszta z dzielenia liczby −17 przez 3 jest równa 1**.

Uogólnieniem tych rozważań jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb całkowitych a i b, $b \neq 0$ (a – dzielna, b – dzielnik), istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych q i r (q – iloraz, r – reszta) takich, że

$$a = q \cdot b + r, \text{ gdzie } r \geqslant 0 \text{ i } r < |b|.$$

Z powyższego twierdzenia będziemy korzystać, zapisując liczby całkowite w odpowiednich postaciach. Na przykład każdą liczbę całkowitą n, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, można zapisać w postaci:

$$n = 5k + 3, \ k \in \mathbf{Z}$$

Przykład 7

Udowodnimy, że kwadrat liczby całkowitej niepodzielnej przez 3 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3.

Założenie

n jest liczbą całkowitą niepodzielną przez 3.

Teza

n^2 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

Dowód

Skoro liczba całkowita n nie jest podzielna przez 3, to są dwie możliwości:

- $n = 3k + 1, \ k \in \mathbf{Z}$

Wtedy $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3\left(3k^2 + 2k\right) + 1$.

- $n = 3m + 2, \ m \in \mathbf{Z}$

Wtedy $n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3\left(3m^2 + 4m + 1\right) + 1$.

W obydwu przypadkach liczbę n^2 można przedstawić w postaci $3p + 1$, gdzie $p \in \mathbf{Z}$, co oznacza, że reszta z dzielenia liczby n^2 przez 3 jest równa 1.

Koniec dowodu

Przykład 8

Udowodnimy, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Założenie

$n \in \mathbf{Z}$

Teza

Liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Dowód

$$n^5 - n = n\left(n^4 - 1\right) = n\left(n^2 - 1\right)\left(n^2 + 1\right) = n(n-1)(n+1)\left(n^2 + 1\right)$$

Liczba $n(n-1)(n+1)$ jest podzielna przez 6 jako iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych (zob. przykład 1). Aby wykazać prawdziwość tezy, wystarczy zatem udowodnić, że liczba $n(n-1)(n+1)\left(n^2 + 1\right)$ jest podzielna przez 5.

Liczba n przy dzieleniu przez 5 może dawać resztę 0 lub 1, lub 2, lub 3, lub 4. Możemy więc zapisać ją w jednej z pięciu postaci ($k \in \mathbf{Z}$):

- $n = 5k$; wtedy liczba $n(n-1)(n+1)\left(n^2 + 1\right) = 5k(5k-1)(5k+1)\left(25k^2 + 1\right)$ jest podzielna przez 5,
- $n = 5k + 1$; wtedy liczba $n(n-1)(n+1)\left(n^2 + 1\right) =$
  $= (5k+1)5k(5k+2)\left(25k^2 + 10k + 2\right)$ jest podzielna przez 5,
- $n = 5k + 2$; wtedy liczba $n(n-1)(n+1)\left(n^2 + 1\right) =$
  $= (5k+2)(5k-1)(5k+3)\left(25k^2 + 20k + 5\right)$ jest podzielna przez 5,
- $n = 5k + 3$; wtedy liczba $n(n-1)(n+1)\left(n^2 + 1\right) =$
  $= (5k+3)(5k+2)(5k+4)\left(25k^2 + 30k + 10\right)$ jest podzielna przez 5,
- $n = 5k + 4$; wtedy liczba $n(n-1)(n+1)\left(n^2 + 1\right) =$
  $= (5k+4)(5k+3)(5k+5)\left(25k^2 + 40k + 17\right)$ jest podzielna przez 5.

W każdym przypadku iloczyn $n(n-1)(n+1)\left(n^2 + 1\right)$ jest więc podzielny przez 5, a skoro jest również podzielny przez 6, to jest podzielny przez 30.

Koniec dowodu

Liczby wymierne i niewymierne

Przykład 9

Wykażemy bez użycia kalkulatora, że $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ jest liczbą wymierną.

Dowód

Zapiszemy różnicę pod pierwiastkiem w postaci kwadratu i skorzystamy z zależności $\sqrt{a^2} = |a|$.

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{4 - 4\sqrt{5} + 5} =$$

$$= \sqrt{\left(2 - \sqrt{5}\right)^2} = \left|2 - \sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - 2 \qquad \longleftarrow 2 - \sqrt{5} < 0$$

Zatem liczba $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -2$ jest całkowita, czyli jest wymierna.

Koniec dowodu

Przykład 10

Udowodnimy, że liczba $\log_3 7$ jest niewymierna.

Dowód (nie wprost)

Przypuśćmy, że teza jest fałszywa, czyli że liczba $\log_3 7$ jest wymierna.
Zauważmy, że $\log_3 7 > \log_3 3 = 1$, zatem liczba $\log_3 7$ jest dodatnia. Istnieją zatem takie liczby naturalne dodatnie n i k, że $\log_3 7 = \frac{n}{k}$.

$$3^{\frac{n}{k}} = 7 \qquad \longleftarrow \text{z definicji logarytmu}$$

$$3^n = 7^k \qquad \longleftarrow \text{z własności działań na potęgach}$$

Otrzymaliśmy równość dwóch liczb naturalnych: 3^n oraz 7^k.

Lewa strona tej równości jest podzielna przez 3, zatem prawa również. Ale gdyby liczba 7^k była podzielna przez 3, to również liczba 7 byłaby podzielna przez 3.

Otrzymaliśmy sprzeczność, co dowodzi, że liczba $\log_3 7$ jest niewymierna.

Koniec dowodu

Nierówności

Przykład 11

Wykażemy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 5 > 0$.

Założenia

$x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$

Teza

$x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 5 > 0$

Dowód

Przekształcamy równoważnie lewą stronę nierówności:

$$\mathrm{L} = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 + 4y + 4 + 1 =$$
$$= (x - y)^2 + (y + 2)^2 + 1 > 0$$

Pierwsze dwa składniki otrzymanej sumy są nieujemne, zatem lewa strona nierówności jest dodatnia.

Koniec dowodu

Przykład 12

Wykażemy, że dla liczb rzeczywistych x, y takich, że $xy > 9$, prawdziwa jest nierówność $x^2 + y^2 \geqslant 18$.

Założenia

$x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, $xy > 9$

Teza

$x^2 + y^2 \geqslant 18$

Dowód (I sposób)

Zauważmy, że:

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$$

Z założenia $xy > 9$, zatem $2xy > 18$. Ponadto $(x - y)^2 \geqslant 0$.

Mamy więc $x^2 + y^2 \geqslant 18$.

Koniec dowodu

Dowód (II sposób, nie wprost)

Przypuśćmy, że dla liczb $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ prawdziwy jest układ nierówności:

$$xy > 9 \text{ i } x^2 + y^2 < 18$$

Wykażemy, że jest to niemożliwe.

Skoro $xy > 9$, to $-2xy < -18$.

Zatem $\begin{cases} x^2 + y^2 < 18 \\ -2xy < -18 \end{cases}$. Po dodaniu stronami tych nierówności otrzymujemy:

$$x^2 - 2xy + y^2 < 0$$
$$(x - y)^2 < 0$$

Ostatnia nierówność jest fałszywa – otrzymaliśmy sprzeczność, co dowodzi, że podane w zadaniu twierdzenie jest prawdziwe.

Koniec dowodu

Dowód (III sposób, graficzny)

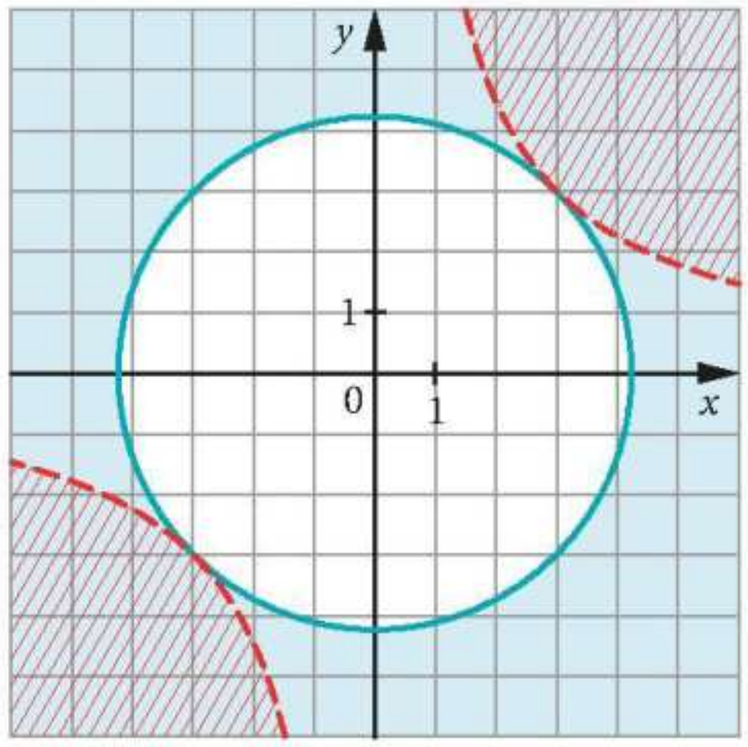
Rozważmy dwa zbiory zawarte w płaszczyźnie kartezjańskiej:

$$A = \{(x, y):\ x, y \in \mathbf{R} \text{ i } xy > 9\}$$

$$B = \left\{(x, y):\ x, y \in \mathbf{R} \text{ i } x^2 + y^2 \geqslant 18\right\}$$

Wystarczy wykazać, że $A \subset B$.

B jest zbiorem wszystkich punktów okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu $3\sqrt{2}$ oraz punktów położonych na zewnątrz tego okręgu.



Wyznaczamy zbiór A.

Rozważamy trzy przypadki.

- Jeżeli $x = 0$, to nierówność $xy > 9$ nie jest spełniona.
- Jeżeli $x > 0$, to nierówność $xy > 9$ jest równoważna nierówności $y > \frac{9}{x}$.
- Jeżeli $x < 0$, to nierówność $xy > 9$ jest równoważna nierówności $y < \frac{9}{x}$.

Równanie $y = \frac{9}{x}$ przedstawia na płaszczyźnie kartezjańskiej hiperbolę. Zbiór A tworzą więc punkty położone nad hiperbolą (dla $x > 0$) lub pod nią (dla $x < 0$). Punktami wspólnymi okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu $3\sqrt{2}$ oraz hiperboli o równaniu $y = \frac{9}{x}$ są punkty $(-3, -3)$ i $(3, 3)$. Z rysunku odczytujemy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B.

Koniec dowodu

D Zadania

2.1. Wykaż, że liczba $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

2.2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $3 \cdot 2^{4n} + 4^{2n+1} + 4^{2n+2}$ jest podzielna przez 23.

2.3. Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych zwiększona o 1 jest liczbą podzielną przez 3.

2.4. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

2.5. Udowodnij, że iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 24.

2.6. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^5 + 5n^3 - 6n$ jest podzielna przez 30.

2.7. Udowodnij, że jeżeli przy dzieleniu przez 7 jedna liczba daje resztę 5, a druga resztę 4, to iloczyn tych liczb przy dzieleniu przez 7 daje resztę 6.

2.8. Udowodnij, że jeśli liczba całkowita przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4.

2.9. Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2, liczba całkowita b przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3. Udowodnij, że różnica czwartych potęg liczb a i b jest podzielna przez 5.

2.10. Udowodnij, że suma kwadratów dwóch liczb całkowitych niepodzielnych przez 3 jest liczbą niepodzielną przez 3.

2.11. Wykaż, że liczba $1918^{10} - 1795^{10}$ jest podzielna przez 123.

2.12. Wykaż, że liczba $25^{21} - 64^{7}$ jest podzielna przez 3.

2.13. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n liczba $17^{6n} - 5^{9n}$ jest podzielna przez 164.

2.14. Liczbę n można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych. Udowodnij, że liczbę $3n$ również można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych.

2.15. Udowodnij, że jeżeli $x - y = 3$ i $x^2 + y^2 = 13$, to $xy = 2$.

2.16. Udowodnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

2.17. Udowodnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a + b = 2c$, to $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$.

2.18. Liczby dodatnie a i b spełniają warunek $4a^2 + 2a = 9b^2 + 3b$. Udowodnij, że $2a = 3b$.

2.19. Udowodnij bez użycia kalkulatora, że $\sqrt{16 + 6\sqrt{7}} + \sqrt{32 - 10\sqrt{7}}$ jest liczbą całkowitą.

2.20. Wykaż bez użycia kalkulatora, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.

2.21. Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{2}$ jest niewymierna.

2.22. Wykaż, że liczba $\log 17$ jest niewymierna.

2.23. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}<2^{26}$.

2.24. Wykaż, że dla każdego $a>0$ prawdziwa jest nierówność $\frac{a^2+1}{a+1}\geqslant\frac{a+1}{2}$.

2.25. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\geqslant\frac{1}{3}$.

2.26. Udowodnij, że jeżeli $a+b\geqslant 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$.

2.27. Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b spełniają nierówność $b>a>1$, to $\frac{a}{a^3+2}>\frac{b}{b^3+2}$.

2.28. Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówność $0<a<b<c$, to $\frac{a+b+c}{3}>\frac{a+b}{2}$.

2.29. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwa jest nierówność $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geqslant 0$.

2.30. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $4x^2+2y^2-4xy+2y+1\geqslant 0$.

2.31. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $4x^2+9y^2-12x-12y+14>0$.

2.32. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $9x^2+y^2+30x+14y+74\geqslant 0$.

2.33. Wykaż, że dla liczb rzeczywistych x, y takich, że $xy<-12$, prawdziwa jest nierówność $x^2+y^2\geqslant 24$.

2.34. Wykaż, że dla dodatnich liczb rzeczywistych x, y takich, że $xy > 3$, prawdziwa jest nierówność $x^4 + y^4 \geqslant 18$.

2.35. Wykaż, że dla liczb rzeczywistych x, y takich, że $x^2 + y^2 \leqslant 8$, prawdziwa jest nierówność $|x| - y \leqslant 4$.

2.36. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $x + y + z = 0$, prawdziwa jest nierówność $xy + yz + zx \leqslant 0$.
Możesz skorzystać z tożsamości $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

2.37. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $\frac{|x| + |y|}{2} \geqslant \sqrt{|xy|}$.

2.38. Wykaż, że jeżeli $A = 3^{4\sqrt{2}+2}$ i $B = 3^{2\sqrt{2}+3}$, to $B = 9\sqrt{A}$.

2.39. Dane są takie dodatnie liczby a i b, że $\log_2(8a) = 10$ i $\log_4 \frac{16}{b} = 3$. Wykaż, że $\log_2(ab) = 5$.

2.40. Niech $\log_3 12 = k$. Wykaż, że $\log_2 9 = \frac{4}{k-1}$.

2.41. Niech $\log_2 20 = a$ i $\log_2 30 = b$. Wykaż, że $\log_3 5 = \frac{a-2}{b-a+1}$.

2.42. Iloraz ciągu geometrycznego wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wykaż, że w tym ciągu każdy wyraz a_n, $n \geqslant 2$, jest równy różnicy dwóch sąsiadujących z nim wyrazów.

2.43. Równanie $x^2 + 2ax - b^2 + 4 = 0$ z niewiadomą x nie ma rozwiązań. Wykaż, że $|a| < 2$ i $|b| < 2$.

2.44. Udowodnij, że równanie $3x^4 + 16x^3 + 6x^2 - 72x + 50 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Powtórzenie 4

1. Liczby, wyrażenia algebraiczne

Definicje

- Liczbę naturalną k, która ma tylko dwa różne dzielniki: samą siebie oraz 1, nazywamy **liczbą pierwszą**.
  Dwie liczby naturalne nazywamy **względnie pierwszymi**, jeżeli ich jedynym wspólnym dzielnikiem jest 1.
- Zbiór liczb wymiernych: $Q = \left\{x:\ x = \frac{p}{q} \text{ i } p \in \mathbf{Z} \text{ i } q \in \mathbf{Z} - \{0\}\right\}$
- Liczbę rzeczywistą, która nie jest wymierna, nazywamy liczbą niewymierną.
- Przedziały liczbowe ograniczone $(a < b)$:
  - domknięty $\langle a; b\rangle = \{x:\ a \leqslant x \leqslant b \text{ i } a, b \in \mathbf{R}\}$
  - otwarty $(a; b) = \{x:\ a < x < b \text{ i } a, b \in \mathbf{R}\}$
  - lewostronnie domknięty $\langle a; b) = \{x:\ a \leqslant x < b \text{ i } a, b \in \mathbf{R}\}$
  - prawostronnie domknięty $(a; b\rangle = \{x:\ a < x \leqslant b \text{ i } a, b \in \mathbf{R}\}$
- Przedziały liczbowe nieograniczone:
  - otwarty $(-\infty; b) = \{x:\ x < b \text{ i } b \in \mathbf{R}\}$
  - otwarty $(a; \infty) = \{x:\ x > a \text{ i } a \in \mathbf{R}\}$
  - lewostronnie domknięty $\langle a; \infty) = \{x:\ x \geqslant a \text{ i } a \in \mathbf{R}\}$
  - prawostronnie domknięty $(-\infty; b\rangle = \{x:\ x \leqslant b \text{ i } b \in \mathbf{R}\}$
- $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dla $a \neq 0$ i $n \in \mathbf{N}$
- Jeżeli n jest dodatnią liczbą parzystą oraz $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$, to $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.
  Jeżeli n jest liczbą nieparzystą większą od 1, to $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.
- Jeżeli $a \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, to $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.
- Jeżeli $a > 0$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, to $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$.
- **Wartością bezwzględną** $|a|$ liczby a nazywamy odległość odpowiadającego jej punktu na osi liczbowej od punktu o współrzędnej 0, mierzoną w odcinkach jednostkowych.
- $|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geqslant 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$

- **1 procent** pewnej **wielkości** to 0,01 tej wielkości: $1\% \cdot w = \frac{1}{100} \cdot w$.
- **Średnią arytmetyczną** dwóch liczb rzeczywistych a i b nazywamy liczbę $\frac{a+b}{2}$.
- **Średnią geometryczną** dwóch nieujemnych liczb rzeczywistych a i b nazywamy liczbę $\sqrt{a \cdot b}$.

Twierdzenia

- Dla dowolnych liczb całkowitych a i b, $b \neq 0$ (a – dzielna, b – dzielnik), istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych q i r (q – iloraz, r – reszta) takich, że $a = q \cdot b + r$, gdzie $r \geqslant 0$ i $r < |b|$.
- **Własności działań na potęgach**
  Jeżeli a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, a p i r dowolnymi liczbami wymiernymi, to:
  $a^p \cdot a^r = a^{p+r}$
  $\frac{a^p}{a^r} = a^{p-r}$
  $\left(a^p\right)^r = a^{p \cdot r}$
  $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$
  $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$
- **Własności działań na pierwiastkach**
  Jeżeli n jest liczbą naturalną większą od 1 i k jest liczbą naturalną, to:
  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, gdy $b \neq 0$
  $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$
  Dla n będącego liczbą parzystą zakładamy, że liczby a i b są nieujemne.
- **Własności wartości bezwzględnej** (dla $a \in \mathbf{R}$ i $b \in \mathbf{R}$):
  $|a| = |-a|$
  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ dla $b \neq 0$
  $|a - b| = |b - a|$
  $\sqrt{a^2} = |a|$
  $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$ dla dodatnich liczb naturalnych n

- Odległość między punktami odpowiadającymi na osi liczbom a i b wyraża się wzorem $|a-b|$.
- **Wzory skróconego mnożenia**

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	kwadrat sumy
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	kwadrat różnicy
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	sześcian sumy
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	sześcian różnicy
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	różnica kwadratów
$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$	różnica sześcianów
$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$	suma sześcianów
$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$	różnica n-tych potęg

Wnioski, uwagi, komentarze…

- Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe.
- Zasady stosowane podczas przybliżania liczb rzeczywistych:
  - jeżeli pierwsza z odrzuconych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest mniejsza od 5, to ostatnią zachowaną cyfrę pozostawiamy bez zmian (**przybliżenie z niedomiarem**),
  - jeżeli pierwsza z odrzuconych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest większa od 5 lub równa 5, to ostatnią zachowaną cyfrę zwiększamy o 1 (**przybliżenie z nadmiarem**).
- **Zaokrąglenie liczby naturalnej do n miejsc znaczących** polega na pozostawieniu jej pierwszych n cyfr i zastąpieniu pozostałych zerami, z tym że do ostatniej cyfry stosujemy reguły przybliżania. Podobnie zaokrąglamy liczby dziesiętne. Na przykład zaokrągleniem liczby 675,3527:
  - do dwóch cyfr znaczących jest liczba 680,
  - do trzech cyfr znaczących jest liczba 675.

  Przy zaokrąglaniu do cyfr po przecinku mówimy o przybliżeniach z dokładnością – do jednego miejsca po przecinku: 675,4, do dwóch miejsc po przecinku: 675,35 itd.

  Liczby dziesiętne mniejsze od 1 zaokrąglamy podobnie, np. zaokrągleniem liczby 0,0004526 do jednego miejsca znaczącego jest liczba 0,0005, do dwóch miejsc znaczących – liczba 0,00045.

Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.21 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Ile razy liczba $0{,}514^2$ jest mniejsza od liczby 514^2?

A. 100 000 razy **B.** 1 000 000 razy **C.** 1000 razy **D.** 10 000 razy

1.2. Różnica między dwiema liczbami jest równa 5, a różnica między ich kwadratami to 95. Ile wynosi suma tych liczb?

A. 90 **B.** 25 **C.** 19 **D.** 24

1.3. Wskaż iloczyn równy wyrażeniu $3x^2 + 24xy + 48y^2$.

A. $(3x + 4y)^2$ **C.** $\left(\sqrt{3}x + 4y\right)^2$

B. $\left(3x + 4\sqrt{3}y\right)^2$ **D.** $3(x + 4y)^2$

1.4. Wskaż wyrażenie, które otrzymamy po wykonaniu działań i redukcji wyrazów podobnych w wyrażeniu $2(x - 3) - [3(2x - 1) - 4]$.

A. $-1 - 3x$ **B.** $4 - 4x$ **C.** $-3 - 4x$ **D.** $1 - 4x$

1.5. Zosia jest o p lat starsza od Jasia. Ile lat ma Jaś, jeżeli razem mają m lat?

A. $2(m - p)$ **B.** $\frac{m + p}{2}$ **C.** $\frac{p - m}{2}$ **D.** $\frac{m - p}{2}$

1.6. W domowej bibliotece Karola 15% stanowią książki przyrodnicze. Ile tomów liczy księgozbiór Karola, jeżeli oprócz książek przyrodniczych ma on jeszcze 748 książek?

A. 1270 **B.** 880 **C.** ponad 4980 **D.** 930

1.7. Najlżejsza z trzech drewnianych belek waży 63 kg, a najcięższa 84 kg. Która z podanych liczb nie może być średnią masą (w kg) tych trzech belek?

A. 69 **B.** 72 **C.** 75,5 **D.** 76

1.8. Masę Ziemi równą $5{,}975 \cdot 10^{27}$ g można wyrazić w kilogramach jako

A. $597{,}5 \cdot 10^{25}$. **B.** $59{,}75 \cdot 10^{24}$. **C.** $597{,}5 \cdot 10^{26}$. **D.** $5975 \cdot 10^{21}$.

1.9. Która z podanych liczb jest równa liczbie $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{75}}{\sqrt{3}}$?

A. $2\sqrt{3}$ **B.** 4 **C.** $\sqrt{22}$ **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

1.10. Która z podanych liczb jest równa liczbie $5^{\frac{7}{3}}$?

A. $5 \cdot \sqrt[3]{5}$ **B.** $25 \cdot \sqrt[3]{5}$ **C.** $5 \cdot \sqrt[3]{5^2}$ **D.** $5^7 \cdot 5^{\frac{1}{3}}$

1.11. Która z podanych liczb nie należy do zbioru rozwiązań nierówności $-3x \geqslant -10$?

A. $-\frac{1}{3}$ **B.** $3\frac{2}{3}$ **C.** $2\frac{1}{3}$ **D.** 2

1.12. O liczbach x, y wiadomo, że $xy < 0$ i $x > y$. Który z podanych warunków jest prawdziwy?

A. $x < 0$ **B.** $x - y < 0$ **C.** $xy + y > 0$ **D.** $y < 0$

1.13. Dwadzieścioro dziewcząt stanowi 62,5% liczby wszystkich uczniów w klasie. Ilu chłopców jest w tej klasie?

A. 9 **B.** 12 **C.** 16 **D.** 32

1.14. Wskaż zależność fałszywą.

A. $\sqrt{(-237)^2} = 237$

B. $2\sqrt[5]{-32} = -4$

C. $-13^2 = 169$

D. $-3\sqrt[3]{-27} = 9$

1.15. Wskaż iloczyn równy wyrażeniu $5x^2 + 30xy + 45y^2$.

A. $(5x + 3y)^2$ **B.** $5(x + 2y)^2$ **C.** $\left(\sqrt{5}x + 3y\right)^2$ **D.** $5(x + 3y)^2$

1.16. O ile zwiększy się pole powierzchni prostokątnego boiska, jeżeli dwukrotnie zwiększymy jego wymiary (długość i szerokość)?

A. o 100% **B.** o 200% **C.** o 300% **D.** o 400%

1.17. Która z wymienionych liczb jest najmniejsza?

A. $\left[\left(\sqrt{5}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}}$ **B.** $\left(\sqrt{5}\right)^{2\frac{1}{3}}$ **C.** $\left(5\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}}$ **D.** $\sqrt{5 \cdot 5^{\frac{1}{3}}}$

1.18. Jurki liczą o 25% więcej mieszkańców niż Jaśki. O ile procent mniej mieszkańców mają Jaśki niż Jurki?

A. o 20% **B.** o 25% **C.** o 75% **D.** o 80%

1.19. Średnia arytmetyczna dwóch liczb, z których jedną jest $\sqrt{7}$, wynosi $\sqrt{5}$. Wskaż drugą liczbę.

A. $2\sqrt{5} - \sqrt{7}$ **B.** $2\sqrt{7} - \sqrt{5}$ **C.** $2\sqrt{35}$ **D.** $2\sqrt{5} + \sqrt{7}$

1.20. W pewnej fabryce liczba kobiet stanowi 35% liczby wszystkich zatrudnionych. Mężczyzn jest o 252 więcej niż kobiet. Wskaż liczbę pracowników tej fabryki.

A. 842 **B.** 752 **C.** 840 **D.** 954

1.21. Liczby $a, b, c \in \mathbf{R}$ spełniają warunek $a(b-c)=0$.

A. Wynika stąd, że $a=0$.

B. Wynika stąd, że $b=0$.

C. Wynika stąd, że $b=c$.

D. Z podanego warunku nie można wywnioskować żadnej z równości wymienionych w punktach A, B, C.

W zadaniach 1.22–1.25 oceń prawdziwość podanych zdań.

1.22. Dane są liczby $a, b \in \mathbf{R}$, gdzie $a<0$.

A. $b-a=-(a-b)$ **B.** $(-a)^2=a^2-2a^2$ **C.** $a>-a$

1.23. Dane są liczby $a, b, c \in \mathbf{R}$ takie, że $0<a<b<c$. Zachodzi nierówność

A. $\frac{b}{a}<\frac{b}{c}$. **B.** $\frac{c-a}{b-c}<\frac{b-a}{b-c}$. **C.** $ac>ab$.

1.24. Liczba

A. $\sqrt{2\sqrt{32}}$ jest wymierna.

B. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ jest równa liczbie $\sqrt{2}+1$.

C. $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ należy do przedziału $(3{,}7;\ 3{,}8)$.

1.25. Suma kilku kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest równa 0.

A. Liczba wszystkich składników rozpatrywanej sumy jest parzysta.

B. Średnia arytmetyczna tych liczb jest równa 0.

C. Iloczyn tych liczb jest równy 0.

1.26. Wskaż **dwa** wyrażenia równe wyrażeniu $2x^2-24xy+72y^2$.

A. $(2x-6y)^2$ **C.** $2(x-6y)^2$ **E.** $\left(\sqrt{2}x-6\sqrt{2}y\right)^2$

B. $\left(2x-6\sqrt{2}y\right)^2$ **D.** $2(x-4y)^2$ **F.** $\sqrt{2}(x-6y)^2$

1.27. Rozwinięcie dziesiętne liczby a jest równe 2,1313131313… **Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1 albo 2.**

Liczba a jest

A.	wymierna,	ponieważ	**1.**	jej rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone.
B.	niewymierna,		**2.**	jej rozwinięcie dziesiętne jest okresowe.

1.28. Znajdź wszystkie liczby całkowite $a \neq 1$, dla których wartość wyrażenia $\frac{a+2}{a-1}$ jest liczbą całkowitą.

1.29. Podaj przykład liczby należącej do przedziału $\left(\sqrt{2};\ \sqrt{3}\right)$, która ma rozwinięcie dziesiętne

a) skończone.

b) nieskończone okresowe.

c) nieskończone nieokresowe.

1.30. Wśród pięciu kolejnych liczb całkowitych środkową liczbą jest 2010. Ile jest równa suma tych liczb?

1.31. Dane są liczby:

$$m = 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} \cdot \left[6{,}4 - 3\frac{3}{5} \cdot 0{,}(3)\right] : 13$$

$$n = 15{,}2 + 3{,}2 \cdot \left(1{,}25 \cdot 7 - \frac{4}{5} \cdot 1{,}25\right) : 6{,}2 - 1\frac{1}{5}$$

Sprawdź, ile razy jedna z liczb m i n jest większa od drugiej.

1.32. Zapisz wyrażenie w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy.

a) $a^2 + 24a + 144$

b) $k^2 - 2\sqrt{6}km + 6m^2$

c) $1 - 4x + 4x^2$

d) $\frac{1}{4}y^2 + 4yz + 16z^2$

1.33. Zapisz wyrażenie w postaci iloczynu.

a) $a^2 - 225$

b) $0{,}25b^2 - 25d^4$

c) $m^2 - 2mp + p^2 - k^2$

d) $x^2 + 4xy + 3y^2$

1.34. Usuń niewymierność z mianownika wyrażenia $\frac{3 - 5\sqrt{2}}{2 - 3\sqrt{2}}$.

1.35. Uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$3\sqrt{2}, \quad 3\frac{1}{5}, \quad 2\sqrt{5}, \quad 2\sqrt{3}$

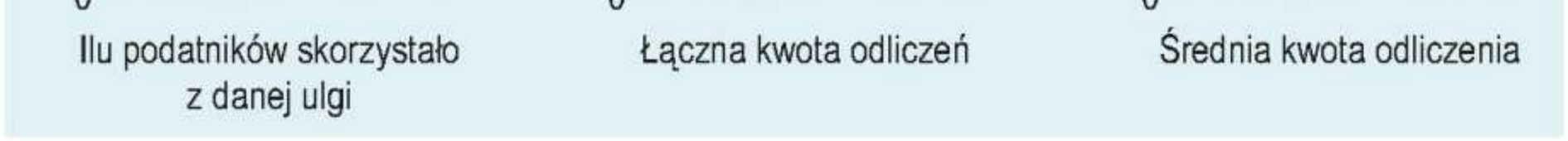
1.36. Tętno zdrowego człowieka wynosi 12 uderzeń serca w ciągu 10 sekund. W jakim czasie naliczymy 150 uderzeń serca?

1.37. Na podstawie diagramu określ

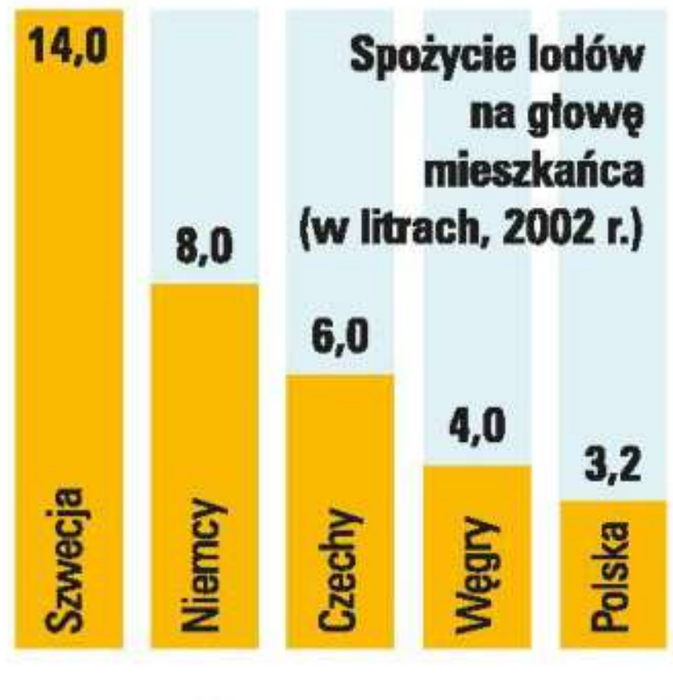
a) jaki procent sumy wszystkich podanych kwot odliczeń stanowiły odliczenia na odpłatne studia.

b) o ile procent podatników więcej skorzystało z ulgi na zakup przyrządów i pomocy naukowych niż z ulgi na dokształcanie i doskonalenie zawodowe.

c) które dane przedstawione na wykresie są sprzeczne.



1.38. Na podstawie diagramu odpowiedz na podane pytanie.



a) O ile procent więcej lodów spożył rocznie Niemiec od Węgra?

b) O ile procent mniej lodów zjadł Węgier od mieszkańca Niemiec?

c) Jaki procent rocznego spożycia lodów przez Szweda stanowiło spożycie lodów przez Polaka?

1.39. O ile punktów procentowych liczniejsza jest grupa osób, które nigdy nie robiły zakupów u akwizytorów, od grupy osób, które takiego zakupu dokonały co najmniej dwa razy?

1.40. Drużyna przegrała 4 z 20 rozegranych meczów. Remisów nie było. Jaki procent liczby rozegranych meczów wygrała ta drużyna?

1.41. Pewien towar po podwyżce o 20%, a następnie obniżce o 36 zł, kosztuje 900 zł. Jaka była cena tego towaru przed zmianami?

1.42. W poczcie elektronicznej Magdy spam stanowi 10% wśród 1600 wiadomości. Ile spamu powinna usunąć, aby pozostały stanowił 4% wszystkich wiadomości?

1.43. Pan Stanisław, właściciel 75% akcji firmy, sprzedał $\frac{1}{5}$ swojej własności za 60 000 zł. Jaka jest wartość wszystkich akcji firmy?

1.44. Czas obrotu Marsa wokół własnej osi jest o 2,6% dłuższy od czasu obrotu Ziemi wokół jej osi. Jak długo trwa obrót Marsa?

1.45. Honorata ma o 60% więcej pocztówek niż jej brat Paweł. O ile procent mniej pocztówek ma Paweł?

1.46. Długość każdego z boków prostokąta zwiększono o 70%. O ile procent wzrosło pole prostokąta?

1.47. Długość boku trójkąta zmniejszono o 30%, a wysokość opuszczoną na ten bok zwiększono o 30%. Czy pole trójkąta się zmieniło? Jeśli tak, to o ile procent?

1.48. Praca domowa z matematyki składała się z dwóch zadań obowiązkowych i trzeciego dodatkowego. Nauczycielka, chcąc zachęcić uczniów 32-osobowej klasy do rozwiązywania trudniejszych zadań, poinformowała, że rozwiązanie zadania dodatkowego zwalnia z obowiązku wykonania zadań pierwszego i drugiego. Ilu uczniów rozwiązało trzecie zadanie, jeżeli tylko pierwsze zadanie zrobiło 3 uczniów, tylko drugie – 5, a pierwsze i drugie – 15 uczniów?

1.49. Wyznacz liczbę, której 0,25% wynosi $\dfrac{8\cdot 4\frac{1}{4}-\left[11{,}2:9\frac{1}{3}+\left(-2\frac{1}{3}\right):\frac{5}{3}\right]}{14:2\frac{2}{9}+8\frac{2}{5}\cdot 1\frac{2}{7}}$.

1.50. Oblicz.

a) $\left(\dfrac{2^{15}-8^4}{4^7}+2^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

b) $\left(12^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$

1.51. Oblicz.

a) $\dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\cdot 5^{-2}}{2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}-3^4\cdot\left(4\frac{1}{2}\right)^{-3}}$

b) $\left[\left(11-2\cdot 10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(11+\left(2^3\cdot 5\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

1.52. Oblicz wartość wyrażenia $a^{-\frac{3}{2}}b\cdot\left(ab^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(a^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^3$ dla $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ i $b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

1.53. Zakładamy, że $a>0$ i $b>0$. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $\left[\dfrac{\sqrt[3]{a^{-2}\cdot b}\cdot\sqrt{a\cdot b^{-1}}}{\sqrt[4]{a\cdot b^2}}\right]^{-2}$ oraz oblicz jego wartość dla $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ i $b=\sqrt{2}$.

1.54. Oblicz.

a) $\dfrac{1}{4}+\left\{1+\left[4\cdot\left(1+3^{-1}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-1}$

b) $\dfrac{3^{-2}\cdot 81^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}}{\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[3]{9^{-\frac{3}{2}}}\cdot\sqrt{27}}$

c) $\dfrac{5^{-2}\cdot 125^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2}{5^{-3}\cdot\sqrt[3]{25^{-\frac{3}{2}}}}$

d) $\dfrac{2\sqrt{5}-10}{5\sqrt{45}-4\sqrt{20}-\sqrt{500}}$

e) $\left|\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{7}+5}{\sqrt{7}+3}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{7}-5\right)^2}\right|$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{-54}-\sqrt[3]{-16}-\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}}{\sqrt[3]{1-4\frac{3}{8}}-\sqrt[7]{6-7}}$

1.55. Która z liczb jest mniejsza: $m=3\sqrt{2}-1$ czy $n=2\sqrt{2}+1$?

1.56. Zbadaj, czy liczby $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ i $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$ są równe czy różne.

2. Funkcje. Funkcja liniowa

Definicje

- Funkcję $f(x) = ax + b,\ x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją liniową zmiennej** x. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** tej funkcji.
- Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy:
  - **oznaczonym**, jeżeli ma dokładnie jedno rozwiązanie; jego wykresem są dwie proste przecinające się,
  - **nieoznaczonym**, jeżeli ma nieskończenie wiele rozwiązań; jego wykresem jest jedna prosta,
  - **sprzecznym**, jeżeli nie ma rozwiązania; jego wykresem są proste równoległe niepokrywające się.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Współczynnik a występujący we wzorze funkcji $f(x) = ax + b$ jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej będącej wykresem tej funkcji do osi x.
- Funkcja $f(x) = ax + b$ jest:
  - rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 0$,
  - malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 0$,
  - stała dla $a = 0$.
- Każda funkcja postaci $f(x) = ax + b$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą, jest monotoniczna.
- Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$, gdzie $x \in \mathbf{R}$:
  - ma jedno miejsce zerowe, gdy $a \neq 0$,
  - ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b = 0$,
  - nie ma miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.
- Wykresem równania postaci $ax + by = c$ z niewiadomymi x, y takiego, że współczynniki a i b nie są jednocześnie równe 0, jest prosta, przy czym:
  - jeżeli $b \neq 0$, to jest to wykres funkcji liniowej o wzorze $f(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$,
  - jeżeli $b = 0$, to jest prosta prostopadła do osi x i przecinająca ją w punkcie $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$.

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.14 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

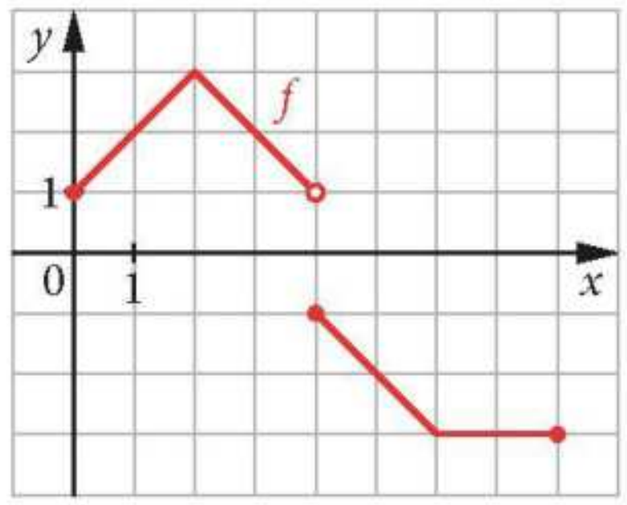
2.1. Wskaż liczbę miejsc zerowych funkcji $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(1-x)(2+x)}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

2.2. Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono na rysunku obok. Dziedziną tej funkcji jest przedział $\langle 0; 8\rangle$. Wskaż przedział, w którym funkcja f jest malejąca.

A. $\langle 0; 2\rangle$ **C.** $\langle 4; 8\rangle$

B. $\langle 2; 6\rangle$ **D.** $\langle 6; 8\rangle$



2.3. Wskaż wzór funkcji, której wykres przechodzi przez punkt $(-3, 5)$.

A. $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ **C.** $f(x) = -\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$

B. $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ **D.** $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

2.4. Wskaż wzór funkcji rosnącej, której miejsce zerowe jest liczbą dodatnią.

A. $f(x) = \left(\sqrt{5}-2\right)x + \sqrt{5} - 2$ **C.** $f(x) = \left(\sqrt{5}-2\right)x + \sqrt{5} - 3$

B. $f(x) = \left(\sqrt{5}-3\right)x + \sqrt{5} - 2$ **D.** $f(x) = \left(\sqrt{5}-3\right)x + \sqrt{5} - 3$

2.5. Wskaż wartość k, dla której miejscem zerowym funkcji $f(x) = 2x + k - 1$ jest liczba 3.

A. $k = -5$ **B.** $k = -1$ **C.** $k = 1$ **D.** $k = 5$

2.6. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $\frac{x+3}{2} - \frac{5-2x}{3} < 2x$.

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right)$ **B.** $\left(-\frac{1}{5}; \infty\right)$ **C.** $\left(-\infty; -\frac{1}{13}\right)$ **D.** $\left(-\frac{1}{13}; \infty\right)$

2.7. Liczby x, y spełniają warunki: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$ oraz $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$. Wskaż wartość y.

A. $\frac{2}{3}$ **B.** 2 **C.** 3 **D.** $\frac{5}{6}$

2.8. O liczbach x, y wiadomo, że $x > 0$ i $y > 0$ oraz $\frac{x-y}{3} = \frac{11}{2{,}5}$. Która z podanych zależności jest prawdziwa?

A. $y < x$ **B.** $y > x$ **C.** $y = x$ **D.** $y \geqslant x$

2.9. Liczba $x = \frac{1}{m+3}$. Ile jest równe $\frac{3}{x}$?

A. $\frac{3}{m+3}$ **B.** $\frac{m+3}{3}$ **C.** $3(m+3)$ **D.** $3m+1$

2.10. Wskaż parę liczb (x, y) spełniającą układ równań $\begin{cases} x-2y=-7 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$.

A. $(1, 4)$ **B.** $(-3, 2)$ **C.** $(-1, 3)$ **D.** $(-7, 0)$

2.11. Wskaż układ równań, który nie ma rozwiązań.

A. $\begin{cases} x-y=7 \\ 2x-2y=14 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} 3x-3y=7 \\ x-y=14 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

2.12. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+my=5 \end{cases}$ z niewiadomymi x, y jest para liczb $(1, -1)$. Wskaż wartość współczynnika m.

A. $m=-2$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=2$ **D.** $m=1$

2.13. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $|2-x|<3$.

A. $(-\infty; -1)$ **B.** $(-\infty; 1)$ **C.** $(-5; 1)$ **D.** $(-1; 5)$

2.14. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $2|x+2|>5+x$.

A. $(-3; \infty)$ **B.** $(1; \infty)$ **C.** $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ **D.** $(-3; 1)$

W zadaniach 2.15–2.17 oceń prawdziwość podanych zdań.

2.15. Dane jest równanie $(m-1)x+m=0$ z niewiadomą x.

A. Dla $m=1$ równanie jest tożsamościowe.

B. Dla $m=1$ równanie jest sprzeczne.

C. Dla $m=\sqrt{2}$ równanie ma jedno rozwiązanie.

2.16. Dane jest równanie $kx-m=2+x$ z niewiadomą x oraz parametrami k i m.

A. Dla $k=0$ i $m=1$ rozwiązaniem równania jest liczba 1.

B. Dla $k=1$ i $m=-2$ równanie jest tożsamościowe.

C. Dla $k=1$ i $m=1$ równanie jest sprzeczne.

2.17. Dany jest układ równań liniowych z niewiadomymi x i y oraz parametrem m:

$$\begin{cases} 3x+2y=4 \\ mx+4y=2m-4 \end{cases}$$

A. Dla $m=-1$ rozwiązaniem tego układu jest para liczb o przeciwnych znakach.

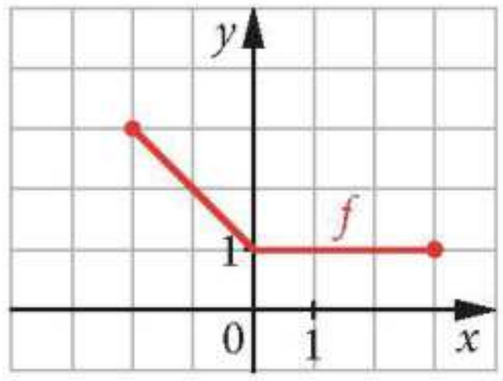
B. Dla $m=6$ ten układ jest nieoznaczony.

C. Dla $m=1$ rozwiązaniem tego układu jest para liczb $(2, -1)$.

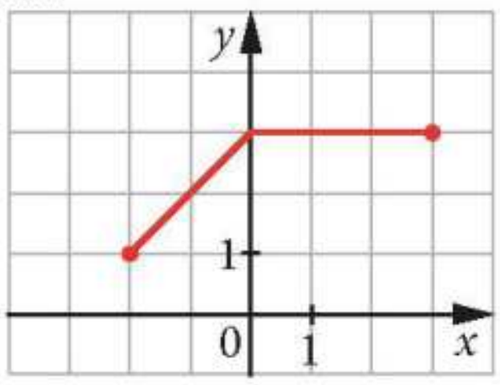
2.18. Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono na rysunku obok. Dziedziną tej funkcji jest przedział $\langle -2; 3\rangle$. Funkcje g oraz h są określone następująco:

$g(x) = f(x - 2)$ i $h(x) = f(-x) + 2$

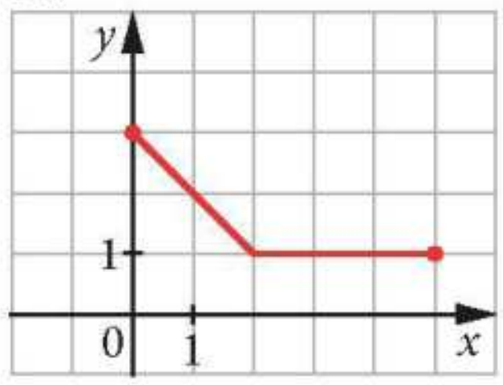
Na rysunkach A–F przedstawiono wykresy różnych funkcji, w tym wykresy funkcji g oraz h. **Dla każdej z funkcji g oraz h wskaż rysunek, na którym jest jej wykres.**



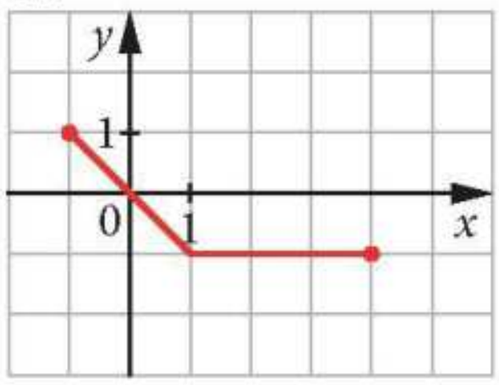
A.



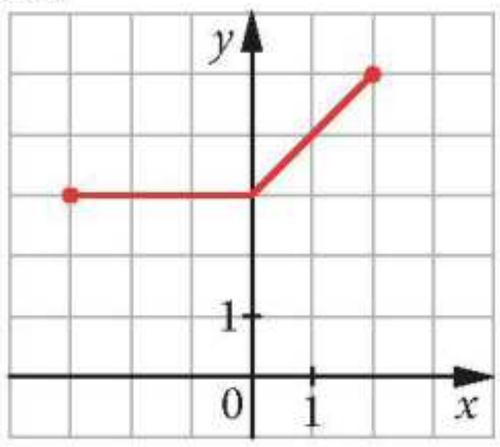
B.



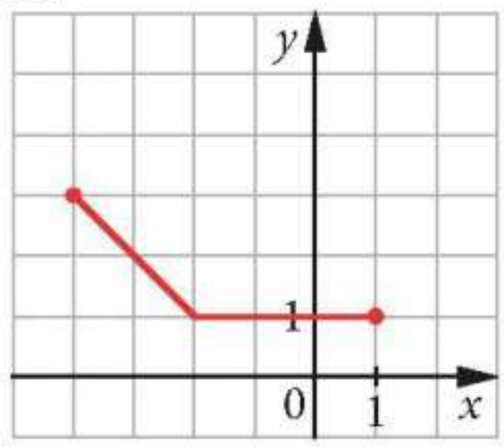
C.



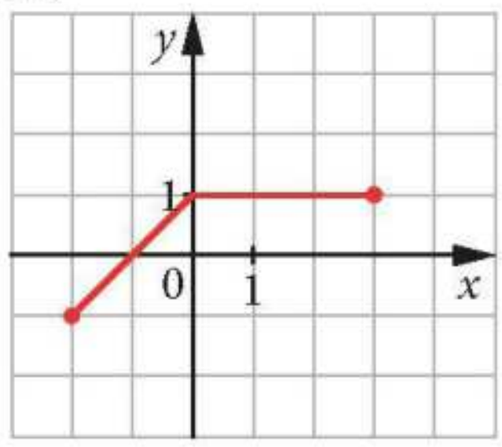
D.



E.



F.



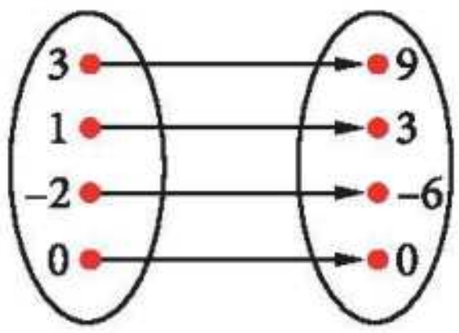
2.19. Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.

Dziedziną funkcji $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - x}$ jest zbiór

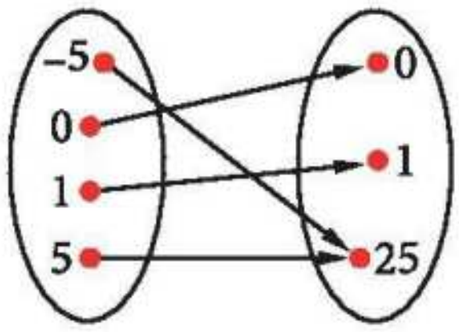
A.	$\mathbf{R} - \{1\}$,	ponieważ	**1.**	$f(x) = \dfrac{1}{x}$.
B.	$\mathbf{R} - \{0\}$,		**2.**	$x^2 - x = 0$ dla $x = 0$ lub $x = 1$.
C.	$\mathbf{R} - \{0, 1\}$,		**3.**	$x - 1 = 0$ dla $x = 1$.

2.20. Czy podany diagram przedstawia funkcję? Jeśli tak, określ jej dziedzinę i zbiór wartości oraz podaj przykład wzoru opisującego podaną zależność.

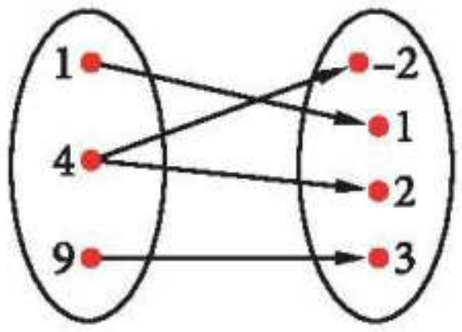
a)



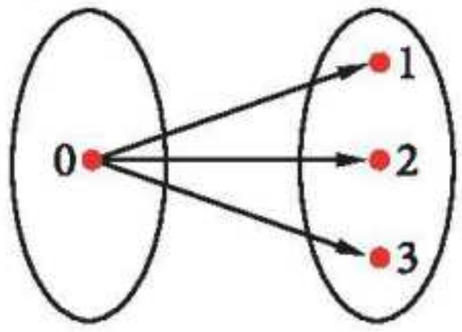
b)



c)



d)



2.21. Sporządź wykres funkcji, która każdej liczbie naturalnej mniejszej od 6 przyporządkowuje wartość dwukrotnie większą od tej liczby i pomniejszoną o 1. Napisz wzór tej funkcji, określ jej dziedzinę i zbiór wartości.

2.22. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4x + 4}$

b) $f(x) = \sqrt{2 + 4x}$

c) $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{5 - x}}$

d) $f(x) = \sqrt{x + 3} - 2\sqrt{4 - x}$

e) $f(x) = \sqrt{3x - 1} + \dfrac{2}{x^2 - 6x + 9}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x - 8}}{x^2 - 4}$

g) $f(x) = \sqrt{x + 3} - \dfrac{3x - 1}{\sqrt{6 - x}}$

h) $f(x) = \dfrac{x + 7}{\sqrt{x^2 - 10x + 25}} - \dfrac{2x}{\sqrt{x + 5}}$

2.23. Dany jest zbiór $A = \left\{-3, -2, 0, \sqrt{2}, 2, 3\right\}$ i funkcja $f(x) = \dfrac{3 - x}{x + 2}$. Oblicz wartość funkcji f dla tych liczb ze zbioru A, które należą do jej dziedziny.

2.24. Dany jest wzór funkcji f i jej zbiór wartości ZW. Wyznacz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które mogą tworzyć dziedzinę tej funkcji.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 2,\ ZW = \{-2, 0, 1\}$

b) $f(x) = -\dfrac{2}{x + 3},\ ZW = \left\{-1, -\dfrac{2}{3}, 2\right\}$

c) $f(x) = 2^x - 1,\ ZW = \{0, 1, 7\}$

d) $f(x) = x^2,\ ZW = \{0, 1, 2\}$

2.25. Sprzedawca oferował rękawiczki, których ceny w zależności od gatunku materiału były równe: 40 zł, 52 zł, 68 zł, 84 zł i 120 zł. Pewnego dnia zmienił ceny, obniżając każdą o 15%, a następnie dodając 5 zł. Napisz wzór funkcji opisującej zmianę cen rękawiczek. Podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

2.26. Każdej dodatniej liczbie naturalnej można przyporządkować liczbę jej naturalnych dzielników. Narysuj wykres tej funkcji, przyjmując, że jej dziedziną jest zbiór wszystkich dodatnich liczb naturalnych nie większych od 15. Jaką wartość ma funkcja dla argumentów będących liczbami pierwszymi? Podaj największą wartość i najmniejszą wartość tej funkcji w rozpatrywanym zbiorze.

2.27. Dany jest graniastosłup prawidłowy n-kątny. Wysokość tego graniastosłupa wynosi 1, a suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa 60. Podaj wzór i określ dziedzinę funkcji, która liczbie n przyporządkowuje długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

2.28. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 12x + 9}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{x - 3}$

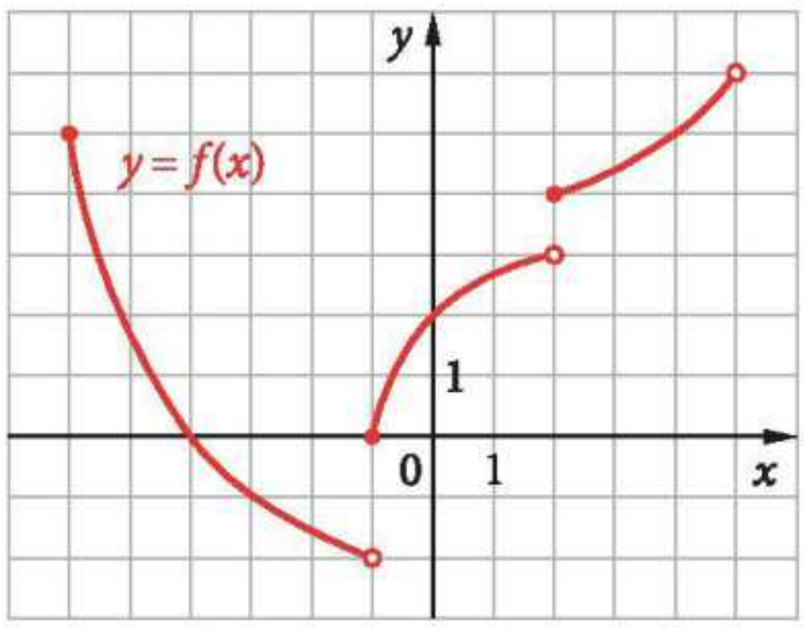
c) $f(x) = (x - 1)(x + 2)\sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - 3,\ x \in \mathbf{N}$

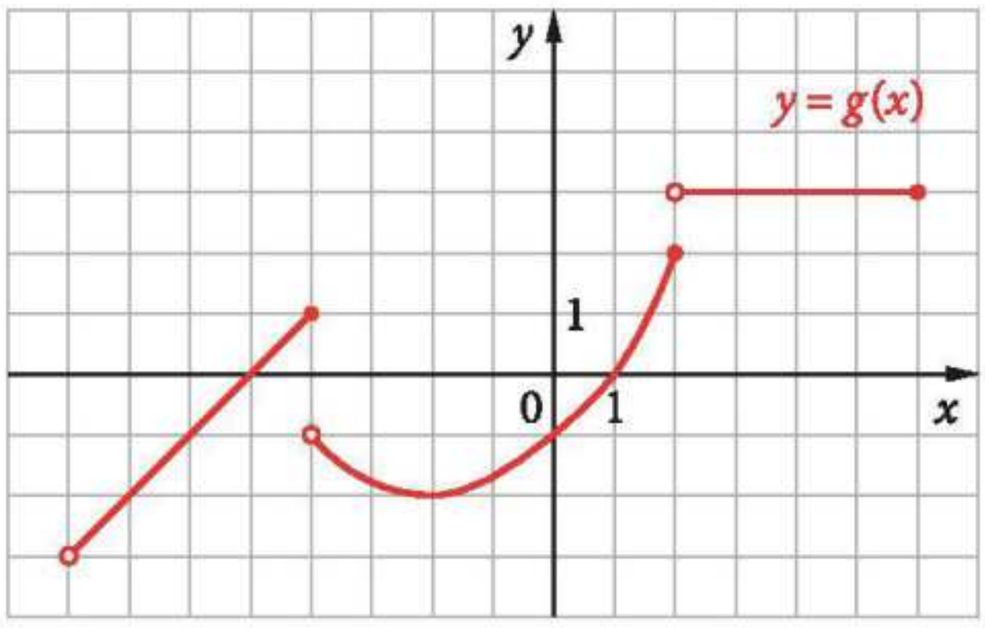
2.29. Odczytaj z podanego wykresu:

- dziedzinę funkcji,
- zbiór wartości funkcji,
- najmniejszą wartość i największą wartość funkcji,
- miejsca zerowe funkcji,
- zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne),
- przedziały monotoniczności funkcji,
- wartości funkcji dla argumentów -6, 0 i 2,
- liczbę rozwiązań równania $y = m$ w zależności od wartości m.

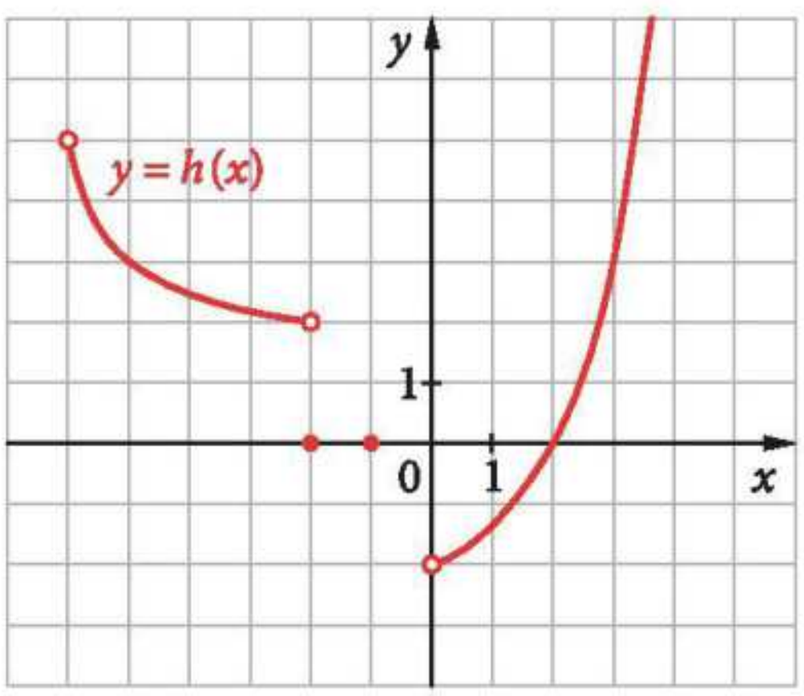
a)



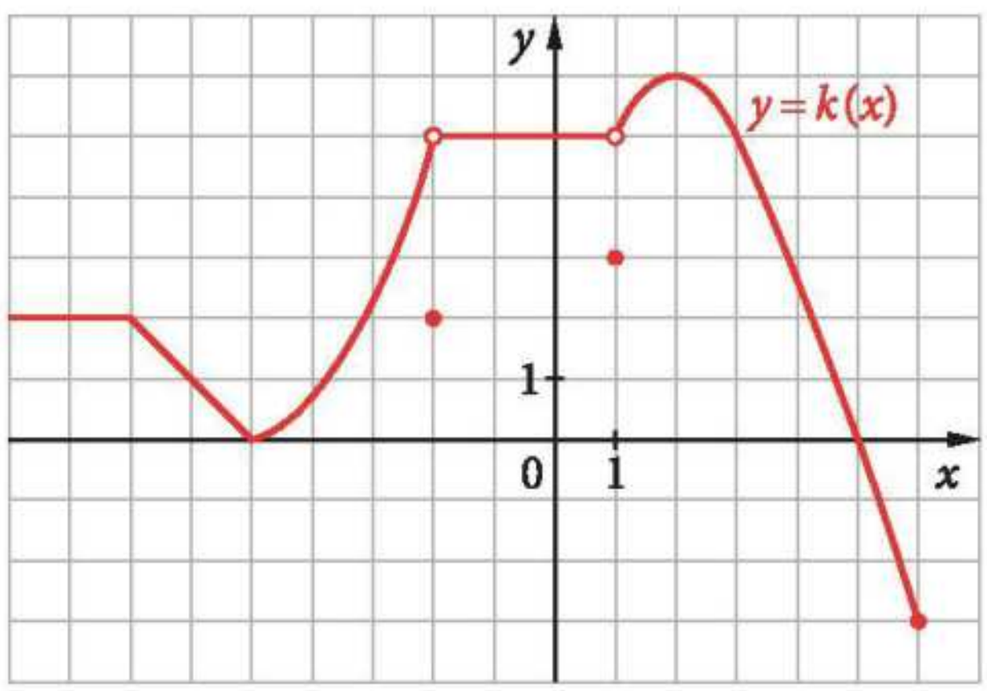
c)



b)



d)



2.30. Skorzystaj z wykresów funkcji z poprzedniego zadania i podaj

a) dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x - 2) + 3$.

b) liczbę rozwiązań równania $-h(x) - 2 = m$ w zależności od wartości m.

c) przedziały monotoniczności funkcji $y = g(x + 1) - 2$.

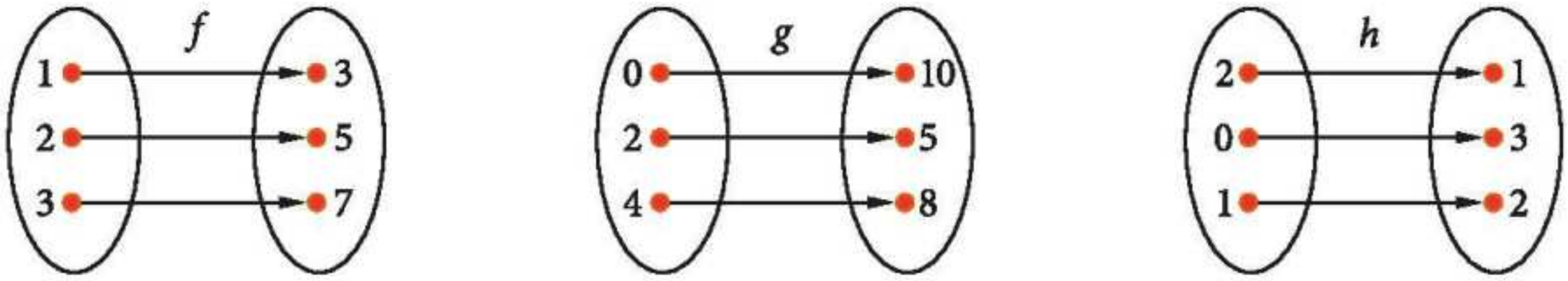
d) wartość najmniejszą i wartość największą funkcji $y = k(-x) + 1$.

2.31. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle -10; 8\rangle$, a jej zbiorem wartości – przedział $\langle 0; 5\rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y = f(x - 2) + 3$.

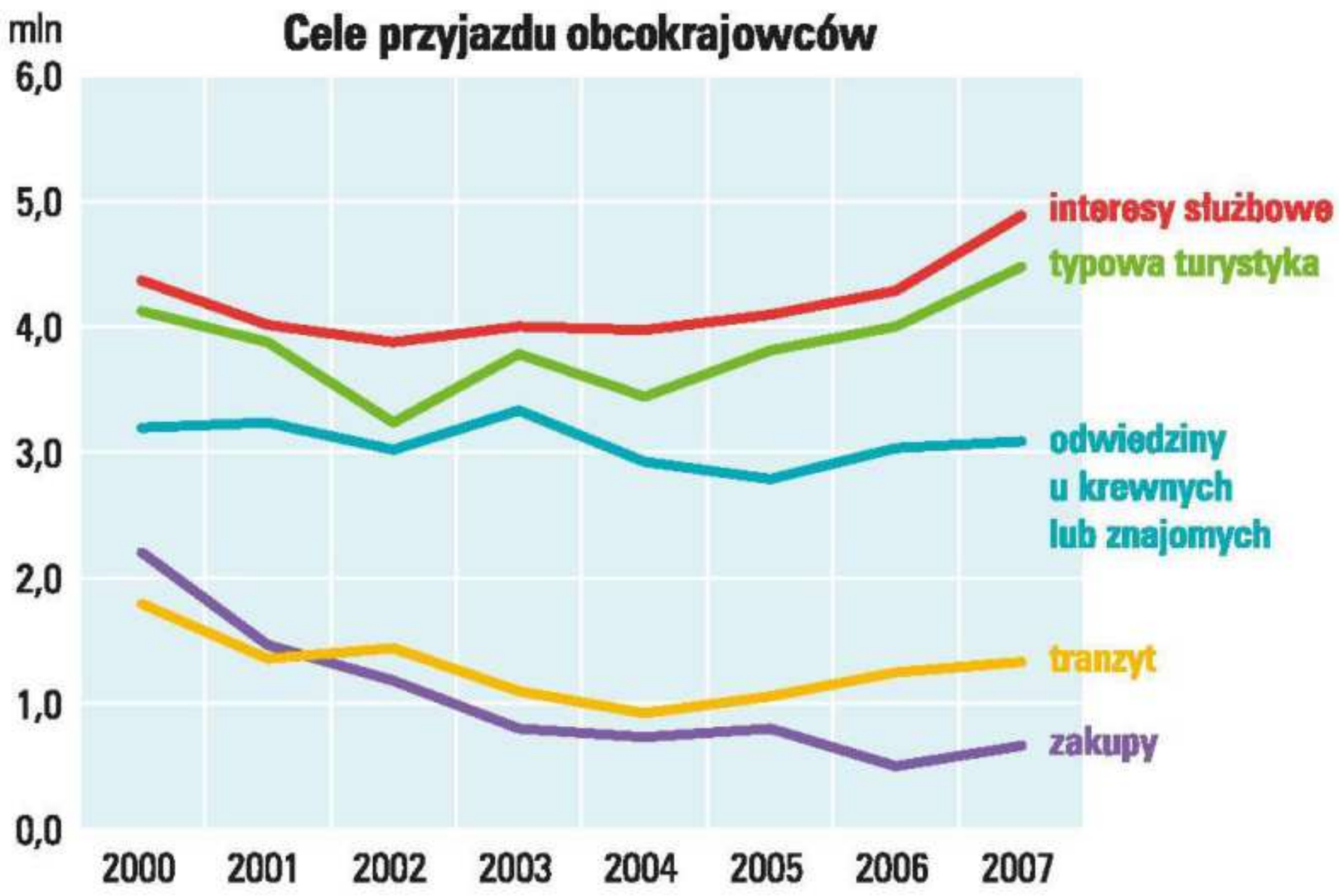
2.32. Funkcja $y = g(x)$ jest rosnąca w przedziale $\langle -2; 1\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 1; 5\rangle$. Określ przedziały monotoniczności funkcji

a) $y = -g(x)$. b) $y = g(-x)$.

2.33. Sprawdź, czy funkcje przedstawione za pomocą diagramów są monotoniczne.

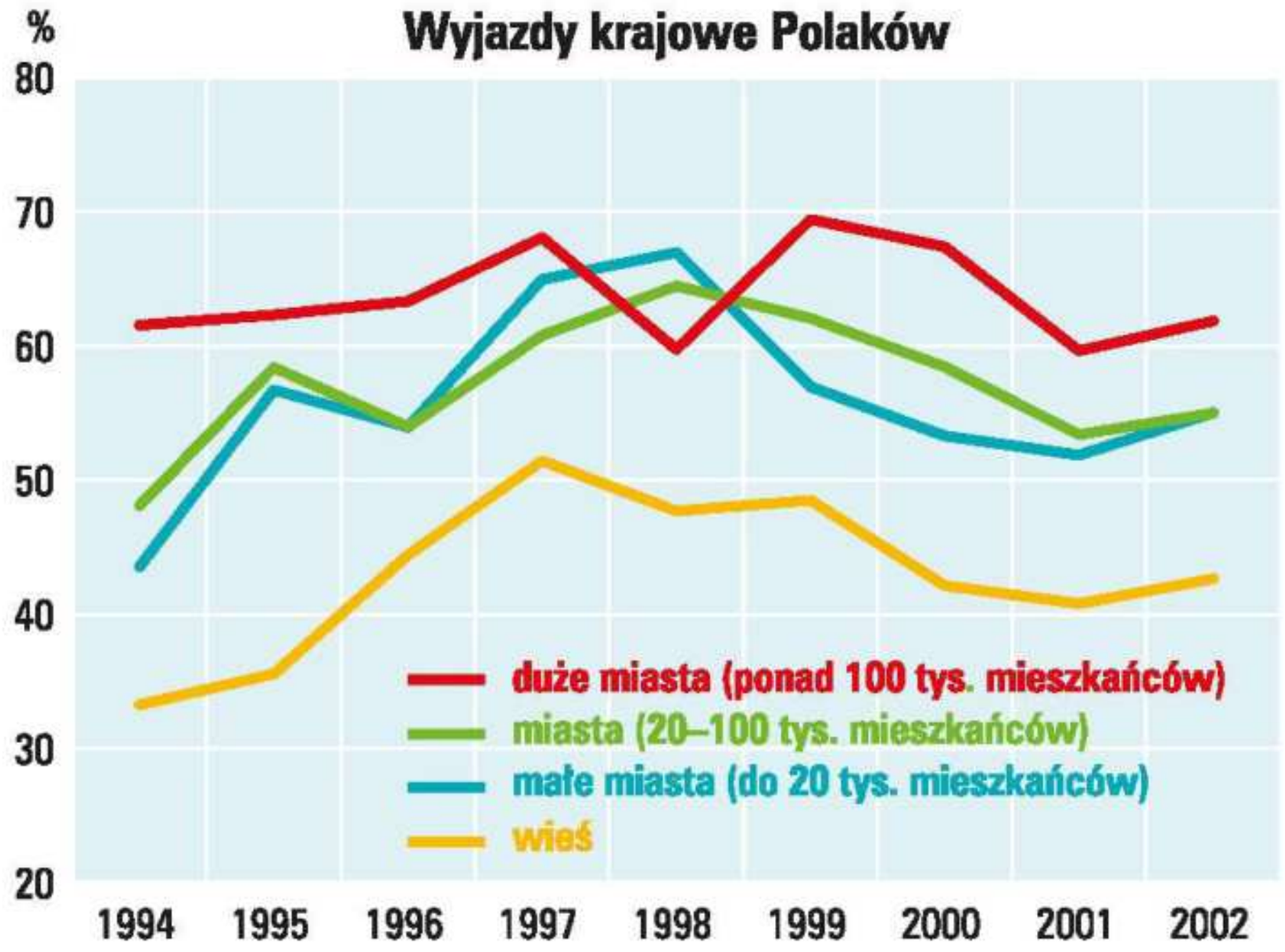


2.34. Na podstawie wykresu przedstawiającego cele przyjazdu obcokrajowców do Polski (źródło: badania i prognozy Instytutu Turystyki, marzec 2004) odpowiedz na pytania.

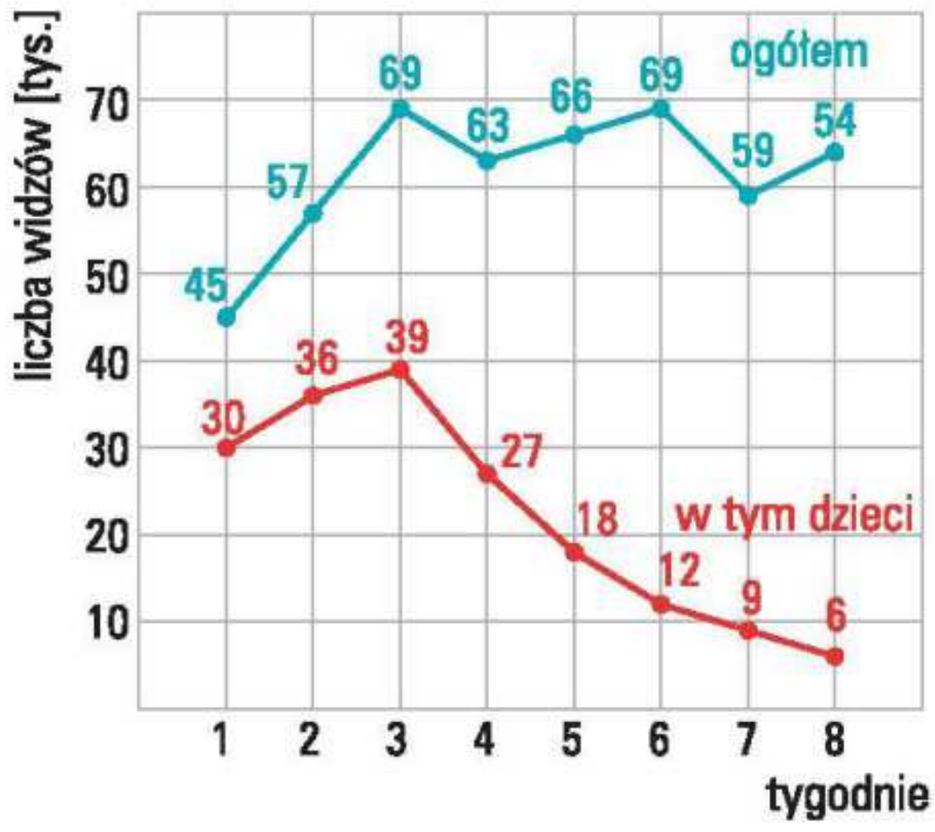


a) Ile osób odwiedziło Polskę w 2003 r. w interesach służbowych?
b) Która z danych funkcji jest monotoniczna i jaki jest rodzaj tej monotoniczności?
c) Podaj prognozowaną na poszczególne lata od 2004 r. do 2007 r. liczbę obcokrajowców, którzy mieli odwiedzić Polskę w celu typowo turystycznym.
d) W którym roku liczba obcokrajowców przejeżdżających przez Polskę tranzytem zrównała się z liczbą obcokrajowców robiących w Polsce zakupy? Oszacuj tę liczbę z dokładnością do 0,1 mln.
e) Który z celów podróży do Polski jest najbardziej stabilny pod względem liczby przybyszów?

2.35. Na wykresie zaprezentowane jest uczestnictwo Polaków w wyjazdach krajowych (krótko- i długoterminowych) w zależności od miejsca zamieszkania (w procentach liczby mieszkańców). Scharakteryzuj na podstawie wykresu różnice między podanymi czterema kategoriami oraz ich wspólne cechy.



2.36. Na wykresie zilustrowano liczbę widzów animowanego filmu *Upiorny Jacuś*, zanotowaną w ciągu kolejnych ośmiu tygodni od dnia premiery.



a) Ilu widzów obejrzało *Upiornego Jacusia* w badanym okresie?
b) Sporządź wykres liczby dorosłych widzów tego filmu w kolejnych tygodniach.
c) W którym tygodniu przewaga liczby widzów dorosłych nad liczbą dzieci była największa?
d) Po ilu tygodniach od dnia premiery łączna liczba widzów dorosłych, którzy obejrzeli ten film, była równa łącznej liczbie dzieci, które go obejrzały?

2.37. Sporządź wykres przykładowej funkcji $y = f(x)$ spełniającej podane warunki.

a) Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -3; 5\rangle$, zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 3\rangle$, miejscami zerowymi funkcji są liczby -1 i 3.

b) Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -4; 4\rangle$, dla argumentu -2 funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą 0, dla argumentu 4 funkcja przyjmuje wartość największą równą 5.

c) Dziedziną funkcji jest przedział $(0; 5\rangle$, funkcja jest rosnąca w przedziale $(0; 3\rangle$, funkcja jest malejąca w przedziale $\langle 3; 5\rangle$, miejscem zerowym funkcji jest liczba 4.

d) Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -2; 4\rangle$, zbiorem wartości jest przedział $(1; 5)$.

e) Dziedziną funkcji jest przedział $(-1; 5)$, zbiorem wartości jest przedział $\langle -2; 2\rangle$.

2.38. Odpłatność za kurs wynosi 150 złotych od każdego z 87 uczestników. Jaka byłaby odpłatność, gdyby uczestników było o 3 więcej, a suma wszystkich wpłat nie uległaby zmianie?

2.39. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego jej miejsce zerowe. Jaką miarę ma kąt nachylenia prostej, która jest wykresem tej funkcji, do osi x? Wynik podaj dokładnością do 1°.

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$

2.40. Naszkicuj wykres funkcji.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ i $x \in \mathbf{N}$

b) $f(x) = 2x - 5$, $x \in \mathbf{N}$ i $x \leqslant 5$

c) $f(x) = -x + 1$ i $x \in \langle -2; 3\rangle$

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$, $x \in \mathbf{Z}$ i $x \in \langle -5; 5\rangle$

2.41. Napisz wzór funkcji liniowej f, która spełnia podane warunki.

a) $f(0) = 3$ i wykres jest nachylony do osi x pod kątem 135°.

b) $f(-2) = 0$ i wykres jest nachylony do osi x pod kątem, którego tangens jest równy 2.

2.42. Sporządź wykres i napisz wzór funkcji liniowej f, o której wiadomo, że

a) jej wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych i punkt $(2, 4)$.

b) jej wykres przecina osie układu współrzędnych w punktach $(-4, 0)$ i $(0, 2)$.

c) jej dziedziną jest przedział $(-5; 4\rangle$, a zbiorem wartości $\{3\}$.

2.43. Napisz wzór funkcji liniowej f, o której wiadomo, że jej wykres przecina oś rzędnych w punkcie o drugiej współrzędnej 2 i funkcja przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x > 6$.

2.44. Napisz wzór funkcji liniowej f, o której wiadomo, że
a) jej miejscem zerowym jest 3 i $f(2) = -3$.
b) $f(x) < 0$ dla $x \in (1; \infty)$ i $f(0) = 4$.
c) $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; 2)$ i $f(1) = -1$.
d) $f(x) > 0$ dla $x \in \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$ i $f(1) = 4$.

2.45. Dla jakich wartości m funkcja f jest rosnąca, a dla jakich malejąca?
a) $f(x) = 3(2 - m)x + 7$ b) $f(x) = -4\left(m + \sqrt{2}\right)x + m - 3$

2.46. Napisz wzór funkcji liniowej g, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt P.
a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$, $P = (0, -1)$ b) $f(x) = \frac{2}{5}x - 7$, $P = (5, 2)$

2.47. Do wykresu funkcji liniowej $f(x) = ax - 8$ należy punkt $P = (-7,13)$. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji.

2.48. Zaznacz część płaszczyzny, w której zawierają się wykresy funkcji $f(x) = ax + b$ dla
a) $a = \frac{1}{3}$ i $b < -1$. b) $a = -3$ i $b \in (-3; 0\rangle$. c) $a < 2$ i $b = 2$.

2.49. Dla jakiej wartości parametru m równanie $2mx + m^2x = 3x + 6$ jest tożsamościowe?

2.50. Dla jakiej wartości parametru k nierówność $\left(k^2 - 3\right)(x + 5) < k$ jest sprzeczna?

2.51. Dla jakiej wartości parametru p rozwiązaniem równania $px + 2x - 5p + 4 = 0$ jest liczba 3?

2.52. Rozwiąż równanie lub nierówność.
a) $\frac{x+2}{6} - \frac{2x-3}{4} = 1$
b) $\frac{3x+2}{2} - 2 = \frac{2(x+5)}{7}$
c) $\left(x - \sqrt{5}\right)\left(2 + \sqrt{5}\right) = 3$
d) $\frac{x-3}{3} + \frac{x-1}{2} = \frac{5x-9}{6}$
e) $14 + 3\left\{1 - 2\left[3\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1\right]\right\} = 2$
f) $\frac{x-5}{15} + 1 \leqslant \frac{2x-1}{20}$
g) $(x + 3)^2 - 2(x - 1) < (x - 5)(x + 5) + 20$
h) $(x - 1)\left(\sqrt{2} - 3\right) + \sqrt{2} \geqslant x\sqrt{2} + 9$

D **2.53.** Wykaż, że liczba 3^{54} jest rozwiązaniem równania $243^{11} - 81^{14} + 7x = 9^{27}$.

2.54. Rozwiąż równanie $4^{23}x - 32^9x = 16^4 \cdot \left(4^4\right)^4$. Zapisz rozwiązanie tego równania w postaci 2^k, gdzie k jest liczbą całkowitą.

2.55. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 1{,}5 - (x - y) = 0{,}5(y - x) + 2 \\ 2y - 4 = 4x \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + 3y = 8 \\ 26x - 39y = 104 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3x - y}{2} - \frac{x + y}{4} = 4 \\ \frac{x - y}{2} + \frac{x + 5y}{5} = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x - 3y = \frac{-5(x + y)}{2} - \frac{5y - 25x}{3} \\ 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0 \end{cases}$

2.56. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} 2(x + 1) - y = 3 \\ 2x + 3(y - 2) = y - 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3(x - 2) + 2(y - 1) = y - 7 \\ \frac{x + 1}{3} + \frac{y - 1}{2} = \frac{1}{3}(y + 1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x + 1)^2 - (y - 2)^2 = x^2 - y^2 + 9 \\ (x - 2)^2 - 4(y - 2) = x^2 + 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x - 1)^2 + 2x = (x - 1)(x + 1) - y \\ 3(x - y) - 2(x + y) = 10 + x \end{cases}$

2.57. W 1999 r. w Polsce na 1000 mieszkańców przypadało 365 telefonów stacjonarnych i komórkowych. Oblicz, ile przypadało telefonów każdego rodzaju, jeżeli telefonów stacjonarnych było o 161 więcej niż komórkowych.

2.58. Państwo Mamutowie zarabiają razem 9200 zł miesięcznie, przy czym ich zarobki są w stosunku 12 : 11. O ile złotych różnią się ich pensje?

2.59. Działka pana Jacka ma kształt prostokąta o polu 800 m^2. Prostokątna działka pana Artura ma pole powierzchni 1120 m^2, jest o 8 m dłuższa i o 3 m szersza od działki pana Jacka. Oblicz wymiary obu działek.

2.60. W ogródku Michała znajduje się oczko wodne o pojemności 1,5 m^3, w którym jest 180 litrów wody. Michał postanowił napełnić je po brzegi, dolewając wodę w tempie 12 litrów na minutę. Napisz wzór funkcji V opisującej zależność ilości wody w tym oczku od czasu t napełniania go (w minutach). Określ dziedzinę tej funkcji. Po jakim czasie Michał zakończy pracę?

2.61. W pewnym państwie każdy obywatel płaci 20% podatku od rocznego dochodu powyżej 1000 euro. Kwota dochodu do 1000 euro włącznie jest nieopodatkowana. Podaj wzór i naszkicuj wykres funkcji $p(x)$, która rocznemu dochodowi przyporządkowuje należny podatek.

2.62. Rozwiąż równanie.

a) $|x-3|=5$
b) $|x+5|=11$
c) $|x+11|=0$
d) $|6+x|=2$
e) $|x-1|=-3$
f) $|7-x|=3$

2.63. Rozwiąż nierówność.

a) $|x-2|<3$
b) $|x+5|>5$
c) $|x-2|\geqslant -1$
d) $|4-x|\leqslant 1$
e) $|x+11|<-12$
f) $|21+x|<15$

2.64. Rozwiąż równanie.

a) $\big||x-2|-1\big|=3$
b) $\big||x|-3\big|=2$
c) $\big||x+4|-3\big|=1$

2.65. Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania $\big||7x-2|-1\big|=3$.

2.66. Rozwiąż równanie.

a) $|x+5|+|x-7|=20$
b) $|x|+2|x-3|=12$
c) $|x+2|-2|x-3|=3$

2.67. Rozwiąż nierówność.

a) $2|3-x|-|2x-1|>3$
b) $|2x+4|+|x-1|\leqslant 6$
c) $|2x-5|-|x+4|\leqslant 2-2x$

2.68. Dana jest funkcja $f(x)=|x-1|-|x+2|$, $x\in\mathbf{R}$.

a) Wyznacz zbiór wartości funkcji f dla $x\in(-\infty;-2)$.
b) Naszkicuj wykres funkcji f.
c) Podaj jej miejsca zerowe.
d) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $f(x)=m$ nie ma rozwiązań.

2.69. Dla jakich wartości parametru k rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 3x+2y=-3k-2 \\ 2x-5y=17k-33 \end{cases}$$

jest para liczb ujemnych?

2.70. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 2x+y=7m-5 \\ 4x-3y=-m-15 \end{cases}$$

jest para liczb (x, y) spełniających warunek $|x+y|=3$?

3. Funkcja kwadratowa, wielomiany i funkcje wymierne

Definicje

- Sumę algebraiczną $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, nazywamy **trójmianem kwadratowym**. Wyrażenie $b^2 - 4ac$ nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego i oznaczamy literą Δ.
- Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ i $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją kwadratową zmiennej x w postaci ogólnej**.
- Funkcję $f(x) = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$ i $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją kwadratową zmiennej x w postaci kanonicznej**.
- **Funkcją wielomianową (wielomianem) stopnia n zmiennej x** $(x \in \mathbf{R})$ nazywamy funkcję postaci:

  $$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

  gdzie n jest ustaloną dodatnią liczbą naturalną, współczynniki $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a_n \neq 0$.
  Funkcję $W(x) = a_0$, gdzie $a_0 \neq 0$, nazywamy **wielomianem stopnia** 0.
  Ponadto przyjmujemy, że funkcja $W(x) = 0$ dla każdego argumentu x jest **wielomianem zerowym** i nie ma stopnia.
- **Pierwiastkiem wielomianu** $W(x)$ nazywamy taką liczbę a, dla której $W(a) = 0$.
- Wielomian $W(x)$ **jest podzielny** przez wielomian $P(x)$, jeżeli istnieje taki wielomian $Q(x)$, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$. Wielomian $P(x)$ nazywamy **dzielnikiem** wielomianu $W(x)$, a wielomian $Q(x)$ – **ilorazem** wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$.
- **Funkcją wymierną zmiennej** x nazywamy funkcję postaci $f(x) = \frac{W(x)}{P(x)}$, gdzie W i P są wielomianami zmiennej x. Dziedziną funkcji f jest zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których $P(x) \neq 0$.

Twierdzenia

- Postacią kanoniczną funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, jest $f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$.

- Wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,$ jest parabola, której wierzchołek ma współrzędne $x_w = \frac{-b}{2a},\ y_w = \frac{-\Delta}{4a}$.

- Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,$ można zapisać w **postaci iloczynowej**, gdy $\Delta \geqslant 0$:
  - jeżeli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$ i $x_0 = \frac{-b}{2a}$,
  - jeżeli $\Delta > 0$, to $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ i $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- **Wielomiany** W i Q **są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają jednakowe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej.

- Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są niezerowymi wielomianami oraz stopień $P(x)$ nie jest większy od stopnia $W(x)$, to istnieją takie dwa wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, że:

  $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$

  gdzie stopień Q = stopień W − stopień P oraz stopień R jest mniejszy od stopnia P albo R jest wielomianem zerowym.
  Jeżeli R jest wielomianem zerowym, to wielomian W **jest podzielny** przez wielomian P.

- **Twierdzenie Bézouta**
  Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

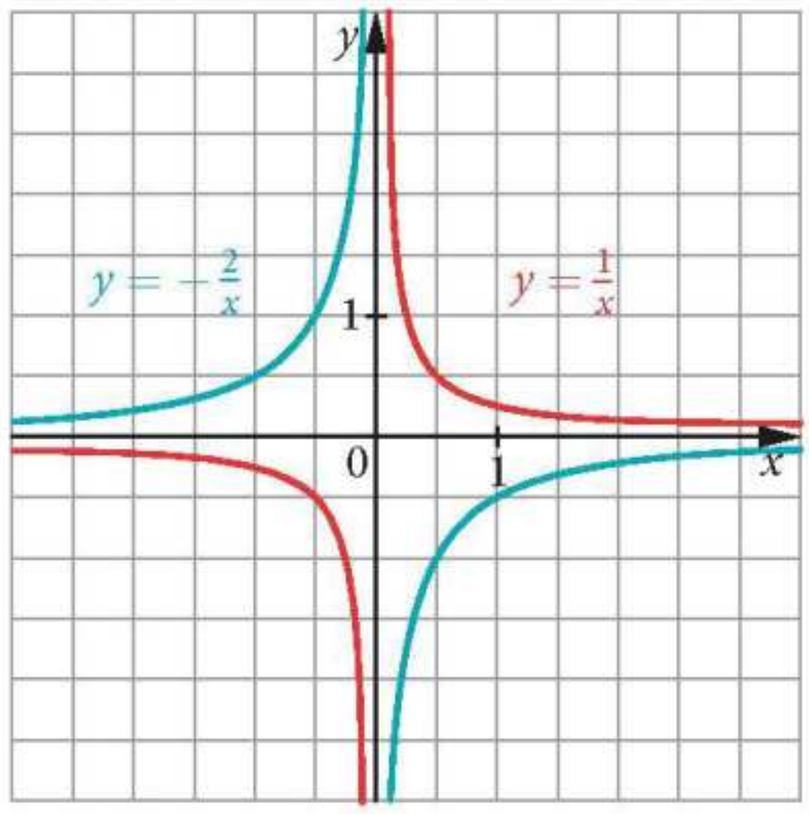
- Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem wielomianu W, którego wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego tego wielomianu.

- Jeżeli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$, gdzie $q \in \mathbf{N}$, $q \neq 0,\ p \in \mathbf{Z}$, jest pierwiastkiem wielomianu stopnia n postaci:

  $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

  którego wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi, to p jest dzielnikiem współczynnika a_0, a q jest dzielnikiem współczynnika a_n.

- Wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x},\ a \neq 0,\ x \neq 0,$ jest hiperbola.



Wnioski, uwagi, komentarze...

- Jeżeli funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2, to pierwsza współrzędna x_w wierzchołka paraboli $y = ax^2 + bx + c$ jest ich średnią arytmetyczną: $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
- **Wzory Viète'a**

  Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki x_1, x_2, to:

  $$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

- Jeżeli $W(x) = (x - a)Q(x) + R$, to $W(a) = R$.

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.10 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wskaż argument, dla którego funkcja $f(x) = x^2 - 4x$ przyjmuje w przedziale $\langle -4; 1\rangle$ wartość najmniejszą.

A. $x = -2$ **B.** $x = 0$ **C.** $x = 1$ **D.** $x = -4$

3.2. Wskaż wartość współczynnika m paraboli $y = m - x^2$, która przecina oś x w punktach $x = \sqrt{3}$ oraz $x = -\sqrt{3}$.

A. $m = 9$ **B.** $m = -3$ **C.** $m = 3$ **D.** Nie istnieje takie m.

3.3. Punkt $P = (-1, 3 + m)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = -3x^2$ dla

A. $m = 6$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = -6$.

3.4. Wskaż równanie paraboli symetrycznej względem osi y do paraboli $y = 5x^2 - x + 4$.

A. $y = 5x^2 + x + 4$

B. $y = -5x^2 + x - 4$

C. $y = -5x^2 - x + 4$

D. $y = 5x^2 + x - 4$

3.5. Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = ax^2 + bx + \frac{3}{2}$ są liczby -1 oraz -3. Wskaż wartości współczynników a i b tej funkcji.

A. $a = 1,\ b = 4$ **B.** $a = \frac{1}{2},\ b = 4$ **C.** $a = \frac{1}{2},\ b = 2$ **D.** $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{4}$

3.6. Dana jest parabola $y = x^2 + kx$. Jakie wartości może przyjmować współczynnik k, aby parabola nie miała punktów wspólnych z osią x?

A. $k > 0$ **B.** $k = 0$ **C.** $k \leqslant -1$ **D.** Nie istnieje takie k.

3.7. Wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 6x + k$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Która prosta jest osią symetrii każdej z tych parabol?

A. $y = -6$ **B.** $x = 6$ **C.** $x = -3$ **D.** $x = 3$

3.8. Wskaż dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - x}$.

A. $\langle -2; 2\rangle$ **B.** $\langle -2; 1\rangle$ **C.** $(-\infty; 1\rangle$ **D.** $(-\infty; 1)$

3.9. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $(x - 1)^2 < 4$.

A. $(-\infty; 5)$ **B.** $(-\infty; 3)$ **C.** $(-1; 3)$ **D.** $(0; 3)$

3.10. Jeden pracownik wykonuje pewną pracę w ciągu 6 dni, a drugi tę samą pracę wykonuje w ciągu 12 dni. W jakim czasie wykonają tę pracę wspólnie?

A. 3 dni **B.** 4 dni **C.** 9 dni **D.** 18 dni

W zadaniach 3.11, 3.12 oceń prawdziwość podanych zdań.

3.11. Zbiorem rozwiązań nierówności $2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 < 0$ jest

A. przedział domknięty. **B.** zbiór jednoelementowy. **C.** zbiór pusty.

3.12. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

A. Wielomian $W(x)$ ma trzy pierwiastki.

B. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x - 1$.

C. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x + 1$.

3.13. Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1 albo 2.

Funkcja $f(x) = -x^2 + x - 1$

A.	przyjmuje w przedziale (1; 2) wartość największą,	ponieważ	**1.**	dla funkcji f zachodzi warunek $\Delta < 0$.
B.	nie przyjmuje w przedziale (1; 2) wartości największej,		**2.**	pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f nie należy do przedziału (1; 2).

3.14. Określ, w jakiej postaci dana jest funkcja kwadratowa f. O ile to możliwe, zapisz funkcję w dwóch pozostałych postaciach.

a) $f(x) = -(x - 4)^2 + 1$

b) $f(x) = 0{,}5x^2 + x - 4$

c) $f(x) = 3x^2 - 6x + 6$

d) $f(x) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 1)$

e) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

f) $f(x) = -2x^2 - 8x - 6$

3.15. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej własności.

a) $f(x) = (x+1)^2 - 4$

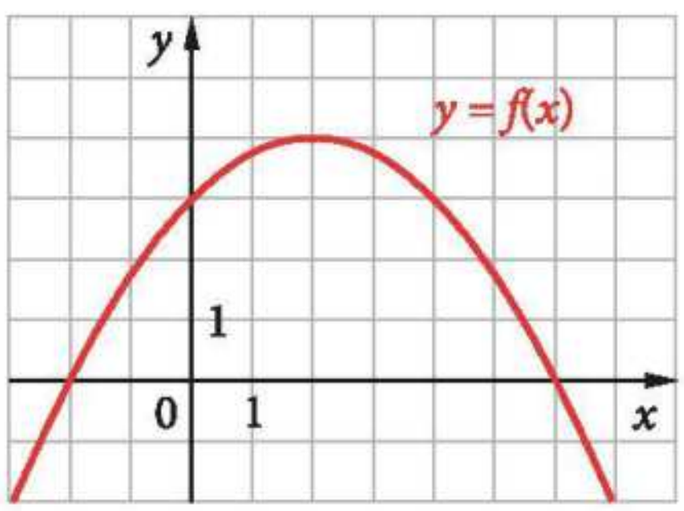
b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$

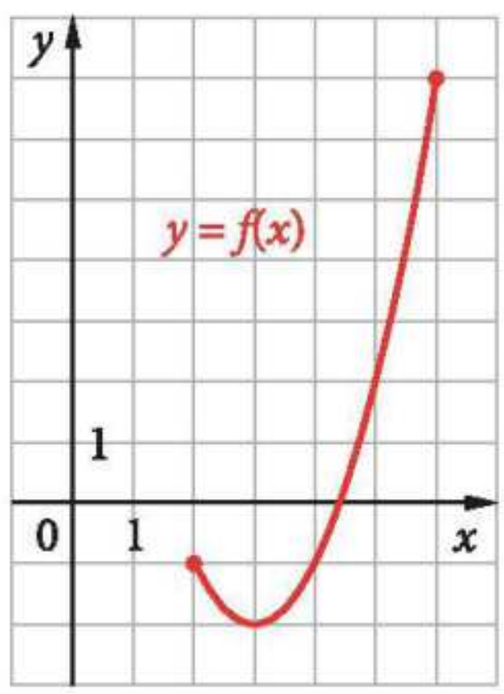
d) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$

3.16. Na podstawie podanego wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ podaj jej wzór ogólny, dziedzinę oraz zbiór wartości.

a)



b)



3.17. Oblicz najmniejszą wartość funkcji i największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = 3x^2 - 6x - 4$, $\langle 0; 3\rangle$

b) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x$, $\langle 0; 1\rangle$

3.18. Liczbę 22 rozłożono na dwa składniki. Oblicz największy iloczyn takich składników.

3.19. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć iloczyn dwóch liczb rzeczywistych różniących się o 6?

3.20. Z drutu o długości 60 cm zrobiono prostokątną ramkę. Jakie wymiary powinien mieć ten prostokąt, aby jego pole było możliwie największe?

3.21. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 i ramionach długości 5 wpisano prostokąt w ten sposób, że jeden bok prostokąta zawiera się w podstawie trójkąta. Jakie może być największe pole takiego prostokąta?

3.22. Rozwiąż równanie lub nierówność.

a) $x^2 - 4x + 1 = 0$

b) $3x^2 + 7 = 5x$

c) $3(x-1)^2 + 13 = 10x$

d) $2(3x+5) + (x+2)(x-3) = 0$

e) $-\frac{1}{2}x^2 + x - 1 \leqslant 0$

f) $3x^2 \geqslant 8$

g) $(x-2)^2 + (x-1)^2 < x^2$

h) $(x-3)^2 \geqslant (x-3)(2x+1)$

3.23. Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb.

3.24. Plac ma kształt prostokąta, w którym przekątna jest o 1 m dłuższa od dłuższego boku. Gdyby powiększyć o 3 m długość każdego boku tego prostokąta, to długość przekątnej zwiększyłaby się o 4 m. Oblicz wymiary placu.

3.25. Dwa wielokąty mają razem 18 kątów i 58 przekątnych. Co to za wielokąty?

3.26. Trzy ścieżki w ogrodzie tworzą trójkąt prostokątny o obwodzie 120 m. Dwie osoby wychodzą równocześnie z punktu, który jest wierzchołkiem kąta prostego. Każda z nich idzie po ścieżce będącej inną przyprostokątną i spotykają się w środku przeciwprostokątnej. Jakiej długości są ścieżki, jeżeli jedna osoba pokonuje 13 m w tym samym czasie co druga 11 m?

3.27. Suma pól dwóch kwadratów jest równa 104, a różnica długości ich przekątnych jest równa 4. Wyznacz długości boków tych kwadratów.

3.28. Dane są funkcje $f(x) = x^2 + 4x - 12$ i $g(x) = 2x - 9$. Wyznacz metodą algebraiczną i graficzną punkty wspólne wykresów tych funkcji.

3.29. Oblicz wartości współczynników b i c, dla których funkcja $f(x) = x^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe równe -1 i 3.

3.30. Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + 1$ ma współrzędne $W = (2, -1)$. Wyznacz wartości współczynników a i b.

3.31. Do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + 16$ należą punkty $A = (-5, 6)$ oraz $B = (-4, 0)$. Wyznacz współczynniki a i b. Oblicz najmniejszą wartość i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle -4; -1 \rangle$.

3.32. Dane są funkcje $f(x) = 2x^2 + 6x + c$ i $g(x) = -x^2 + bx - 25$ określone dla $x \in \mathbf{R}$. Funkcja f ma jedno miejsce zerowe. Dla $x = 5$ funkcja g przyjmuje największą wartość. Wyznacz współczynniki b i c. Dla obliczonych wartości b i c rozwiąż nierówność $2f(x) + g(x) \leqslant 0$.

3.33. Do wykresu funkcji kwadratowej f należą punkty: $K = (-3, -1)$, $L = (0, 8)$, $P = (-5, 3)$. Napisz wzór tej funkcji i naszkicuj jej wykres. W jakim zbiorze wartości funkcji f są większe od 3?

3.34. Dane jest równanie $x^2 - 6x + 1 = -2x - m$.

a) Rozwiąż to równanie graficznie dla $m = -6$.

b) Zbadaj, dla jakich wartości m równanie ma dwa rozwiązania, dla jakich – jedno rozwiązanie, a dla jakich – nie ma rozwiązań.

3.35. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \left(m^2 - 1\right)x^2 - 2mx + 4m + 5$ dla $x \in \mathbf{R}$. Oblicz najmniejszą wartość i największą wartość tej funkcji w przedziale $\langle -2;\ 1\rangle$ dla $m = \frac{1}{2}$.

D **3.36.** Wykaż, że dla $m = 3$ nierówność $x^2 + (2m - 3)x + 2m + 5 > 0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x.

3.37. Dla każdej liczby rzeczywistej b równanie $y = \frac{1}{2}x^2 - bx + 2$ opisuje pewną parabolę. Wyznacz wszystkie wartości b, dla których wierzchołek takiej paraboli leży nad osią x.

3.38. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej g jest przedział $(-\infty;\ 5\rangle$, a zbiorem rozwiązań nierówności $g(x) > 0$ jest przedział $(2;\ 8)$. Wyznacz wzór funkcji g.

3.39. Oblicz sumę czwartych potęg pierwiastków równania $x^2 - 4x + 1 = 0$.

3.40. Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y = -x^2 + 6x$. Punkt C jest wierzchołkiem paraboli, a bok AB trójkąta jest równoległy do osi x. Zilustruj opisaną sytuację rysunkiem w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

3.41. We wzorze funkcji kwadratowej współczynnik przy x^2 jest równy 1. Wykres tej funkcji przechodzi przez punkty $(1,\ 2)$ i $(5,\ m)$.

a) Wyznacz wzór rodziny funkcji kwadratowych spełniających te warunki.

b) Dla jakich wartości parametru m funkcja ma dwa różne miejsca zerowe?

3.42. Dla jakich wartości parametru k wszystkie wartości funkcji $f(x) = (k - 4)x^2 - (2 - k)x + \frac{1}{2}k + 1$ są większe od $1\frac{1}{4}$?

3.43. Dla jakich wartości parametru m najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = (3m - 5)x^2 - (2m - 1)x + \frac{1}{4}(3m - 5)$ jest liczbą dodatnią?

D **3.44.** Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej k równanie $x^2 + 2kx - 6 = k^2 + 2x - 3k$ z niewiadomą x ma dwa różne rozwiązania.

D **3.45.** Wykaż, że suma odwrotności rozwiązań równania $x^2 + 4x + 2 = 0$ jest liczbą całkowitą.

3.46. Dla jakich wartości parametru k równanie $2x + k\left(1 - x^2\right) = 2 + 2x^2$ z niewiadomą x ma tylko jedno rozwiązanie? Podaj to rozwiązanie.

3.47. Równanie $x^2 - a^2x - b^2x + ab = 0$ z niewiadomą x ma dwa pierwiastki: $x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$. Oblicz a i b.

3.48. Oblicz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - (m + 2)x + m + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$.

3.49. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + 2(1 - m)x + m^2 - m = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 \cdot x_2 \leqslant 6m \leqslant x_1^2 + x_2^2$.

3.50. Dla jakich wartości parametru m wartości funkcji $f(x) = (2m + 1)x^2 + (m - 1)x + 3m$ są mniejsze od odpowiednich wartości funkcji $g(x) = (1 - m)x + 3$ dla każdego x?

3.51. Dla jakich wartości parametru k nierówność $kx^2 + (k - 1)x > 1 - k$ jest spełniona przez wszystkie $x \in \mathbf{R}$?

3.52. Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2 - (m + 4)x + m + \frac{5}{2} = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

D **3.53.** Wykaż, że jeżeli funkcja kwadratowa $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + (m + 2)x + k$ ma dwa różne miejsca zerowe i dla argumentu k przyjmuje największą wartość, to $k \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$.

D **3.54.** Dane jest równanie $x^2 + mx + m - 1 = 0$ z niewiadomą x. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej m wszystkie rozwiązania tego równania są liczbami całkowitymi.

3.55. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 - x_2)^2 < 8(m + 1)$.

3.56. Dla jakich wartości parametru m odwrotność sumy kwadratów pierwiastków równania $x^2 - 3mx + m - 4 = 0$ jest największa?

3.57. Dane są wielomiany: $W(x) = x^2 + 2$, $P(x) = 3x - 2$, $R(x) = x^3 + x^2 + 3x + 2$. Wyznacz wielomian $Q(x) = [W(x)]^3 - 2P(x)R(x)$. Określ stopień wielomianu Q i podaj jego wartość dla $x = \sqrt{2}$.

3.58. Rozłóż wielomian W na czynniki nierozkładalne.

a) $W(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

b) $W(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

c) $W(x) = x^3 - 7x + 6$

d) $W(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$

3.59. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

c) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

d) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

3.60. Wyznacz największe rozwiązanie równania $2x^3 - 4x^2 - 3x + 5 = 0$.

3.61. Rozwiąż nierówność.

a) $(x - 2)(x + 5)(x - 3) \leqslant 0$

b) $(x + 1)(x - 4)^2 \geqslant 0$

c) $2x^3 + x^2 - 6x > 0$

d) $x^3 - x^2 - 4 < 0$

3.62. W wyniku dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 1$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = 8x^2 + 4x - 14$ oraz resztę $R(x) = -5$. Oblicz pierwiastki wielomianu $W(x)$.

3.63. Reszta z dzielenia wielomianu $4x^3 - 5x^2 - 23x + m$ przez dwumian $x + 1$ jest równa 20. Oblicz wartość współczynnika m oraz pierwiastki tego wielomianu.

3.64. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ taki, że $W(2) = 7$ i reszta z dzielenia $W(x)$ przez $x - 3$ jest równa 10. Oblicz wartości współczynników a i b tego wielomianu.

3.65. Liczby 1 i 2 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 - bx - 6$. Rozwiąż nierówność $W(x) > 0$.

3.66. Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego, których współczynniki są całkowite oraz współczynniki przy drugich potęgach zmiennej są równe 1.

3.67. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $(x - 2)\left(mx^2 - x - m - 1\right) = 0$ ma dwa różne rozwiązania.

3.68. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x} - 1$. Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $\frac{4}{x} - 1 > 0$.

3.69. Sporządź wykres funkcji $g(x) = -\frac{6}{x + 4} + 3$. Odczytaj z wykresu zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji g.

3.70. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{x+5}{3x-1}$

b) $\frac{3}{x+5} + 2 = \frac{5x-2}{x-2}$

c) $\frac{x^2+1}{x-1} + \frac{x-5}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = 0$

d) $\frac{2x-1}{x^2+3x-4} = \frac{1}{2}$

3.71. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{2x-3}{x+4} \geqslant 0$

b) $-\frac{2}{x-1} > 1$

c) $\frac{2x-3}{x+1} < \frac{x+6}{2x-2}$

d) $\frac{4x+3}{x+2} \geqslant \frac{4x}{x-1} - 3$

3.72. Dane są funkcje $h(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = h(-x)$ i $f(x) = h(x) \cdot g(x)$. Dla jakich argumentów wartości funkcji f są nie większe od 3?

3.73. Pociąg wyruszył na trasę o długości 280 km z 40-minutowym opóźnieniem. Całą trasę przebył ze średnią prędkością o 10 km/h większą od planowej i w rezultacie zmniejszył opóźnienie do 10 minut. Z jaką średnią prędkością jechał?

3.74. Pociąg miał przebyć 840 km w określonym czasie. W połowie drogi został zatrzymany na pół godziny. Aby przybyć punktualnie na miejsce przeznaczenia, maszynista zwiększył prędkość o 2 km/h. Jak długo pociąg był w drodze?

3.75. Na kolonie nad morzem zgłosiło się 130 dzieci, dla których zaangażowano odpowiednią liczbę wychowawców. Ponieważ przyjęto jeszcze dodatkowo 14 dzieci, a jeden z wychowawców nie zgłosił się do pracy, każdemu z zatrudnionych wychowawców przydzielono po dwoje dzieci więcej, niż planowano na początku. Ilu wychowawców było na tej kolonii i iloma dziećmi każdy z nich się opiekował?

3.76. Pełny zbiornik z wodą o pojemności 90 m^3 można opróżnić przy użyciu dwóch zaworów. W ciągu jednej godziny przez pierwszy zawór wypływa ze zbiornika o 1,5 m^3 wody więcej niż przez drugi. Czas opróżniania zbiornika tylko przez pierwszy zawór jest o 3 godziny krótszy od czasu opróżniania tego zbiornika tylko przez drugi zawór. Oblicz, w ciągu ilu godzin pełen zbiornik zostanie opróżniony, jeśli woda będzie wypływać przez oba zawory jednocześnie.

3.77. Basen jest opróżniany przez otwór w dnie – osuszenie pełnego zbiornika trwa 4 godziny. Do napełniania basenu służą dwa krany. Jeśli woda leci tylko z pierwszego z nich, to napełnienie basenu zajmuje dwie godziny, jeśli tylko z drugiego – jedną godzinę. W ciągu ilu godzin napełni się basen, jeśli otwarte są obydwa krany i otwór w dnie?

3.78. Podczas budowy bloku mieszkalnego należało wywieźć w określonym terminie 8000 m^3 ziemi. Praca została wykonana na 8 dni przed terminem, gdyż robotnicy stale przekraczali dzienny plan o 50 m^3. Oblicz, na ile dni było zaplanowane wywożenie ziemi i o ile procent przekraczano dzienny plan.

3.79. Firma zaplanowała wytworzenie produktów A i B, łącznie 20 sztuk. Całkowity koszt wytworzenia produktów A ustalono na 12 000 zł, a produktów B – na 6400 zł. Koszt jednostkowy dla A był o 200 zł wyższy niż dla B. Ile sztuk każdego produktu zaplanowano i jakie były ich koszty jednostkowe?

3.80. Liczby x_1 i x_2 są różnymi pierwiastkami równania $(m+2)x^2 - (m+2)^2x + 3m + 2 = 0$ z niewiadomą x dla $m \in \mathbf{R} - \{-2\}$. Wyznacz dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji f danej wzorem $f(m) = x_1 \cdot x_2$.

D **3.81.** Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \geqslant \frac{1}{3}$.

3.82. Dla jakich wartości parametru k nierówność podwójna $-3 < \frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x?

3.83. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{ax}{bx^2 - 1}$ taka, że $f(2) = \frac{2}{3}$ i $f(-3) = -\frac{3}{8}$. Wyznacz współczynniki a i b tej funkcji. Dla jakich x wartości funkcji f są mniejsze od 2?

3.84. Przedział $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ jest zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{2}{x} < m$ z niewiadomą x. Oblicz m.

3.85. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} |x| - y = 1 \\ x^2 + (y+1)^2 = 8 \end{cases}$.

3.86. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań $\begin{cases} |x| + |y| = 3 \\ x \cdot y = -2 \end{cases}$.

3.87. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} x - |y+1| = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ x + y = 1 \end{cases}$

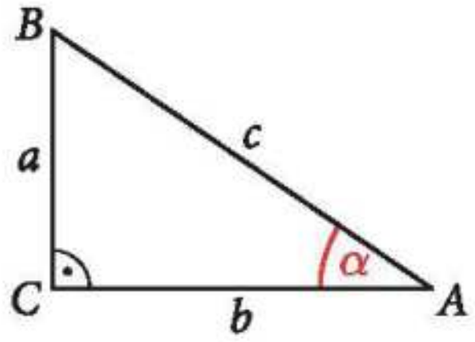
3.88. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + my = 3 \\ mx - 8y = 2m \end{cases}$ jest para liczb (x, y) spełniających warunek $2x + 7y = 3$?

4. Funkcje trygonometryczne

Definicje

- W trójkącie prostokątnym ABC, w którym α jest kątem ostrym (oznaczenia jak na rysunku), mamy:

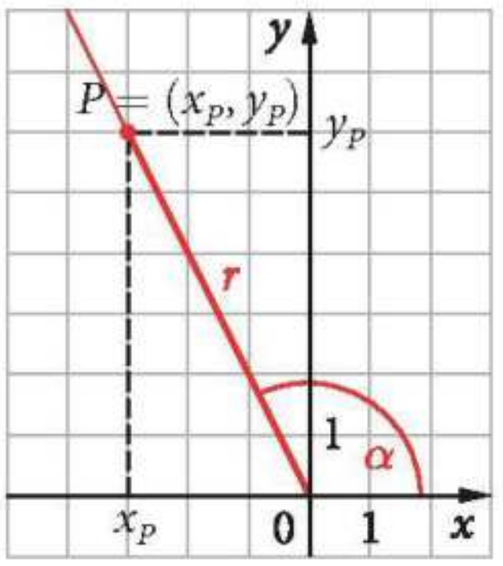
$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$



- Niech α będzie kątem o wierzchołku w początku układu współrzędnych i początkowym ramieniu pokrywającym się z dodatnią półosią x. Na ramieniu wodzącym kąta α wybieramy dowolny punkt $P = (x_P, y_P)$ różny od wierzchołka, o promieniu wodzącym r. Wtedy:

$$\sin\alpha = \frac{y_P}{r},\ \cos\alpha = \frac{x_P}{r},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_P}{x_P} \text{ dla } x_P \neq 0$$

gdzie $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$.



- **Miarą łukową kąta** jest stosunek długości zawartego w kącie łuku okręgu o środku w wierzchołku kąta do promienia tego okręgu. Jednostką miary łukowej jest **radian**.
  Kąt środkowy w okręgu oparty na łuku o długości równej promieniowi tego okręgu ma miarę 1 radiana.
- Jeżeli miarą łukową kąta α jest liczba t i $t \in \langle 0; 2\pi\rangle$, to każdej liczbie rzeczywistej postaci $t + n \cdot 2\pi$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$, przyporządkowujemy kąt α.
- Funkcję f o dziedzinie D nazywamy **okresową**, jeżeli istnieje taka liczba $T \neq 0$, że dla każdej liczby $x \in D$ spełnione są dwa warunki:
  – $x + T \in D$ i $x - T \in D$,
  – $f(x + T) = f(x)$.
  Każdą z liczb T nazywamy **okresem** funkcji f, a jeżeli wśród nich istnieje najmniejsza dodatnia liczba T_0, to nazywamy ją **okresem zasadniczym** funkcji f.

Twierdzenia

- **Jedynka trygonometryczna**
  Dla dowolnego kąta α zachodzi równość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
- Jeżeli $\alpha \neq 90° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbf{Z}$, to $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

- **Wzory redukcyjne**

Dla dowolnego kąta α zachodzą równości:

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$ $\quad$ $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Jeżeli $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$, to:

$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\quad$ $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ $\quad$ $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

- **Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów**

Dla dowolnych kątów α i β zachodzą równości:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\quad$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\quad$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

Jeżeli $\alpha, \beta \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $\alpha + \beta \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$, to:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Jeżeli $\alpha, \beta \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $\alpha - \beta \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$, to:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

- **Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta**

Dla dowolnego kąta α zachodzą równości:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

Jeżeli $\alpha \neq 45^\circ + k \cdot 90^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$, to:

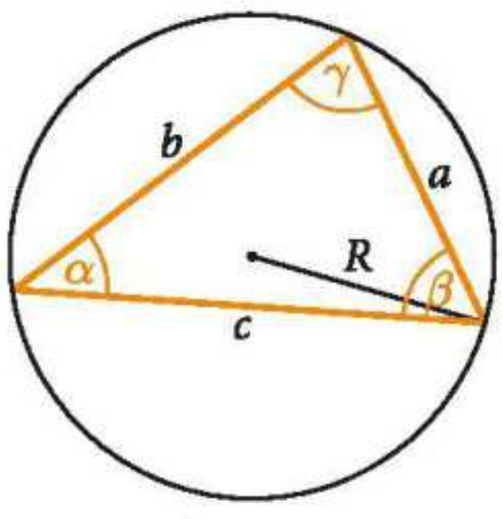
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

- **Wzór sinusów**

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest stały.

- **Twierdzenie sinusów**

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

- **Twierdzenie cosinusów**

W dowolnym trójkącie kwadrat długości boku równa się sumie kwadratów długości pozostałych boków, zmniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

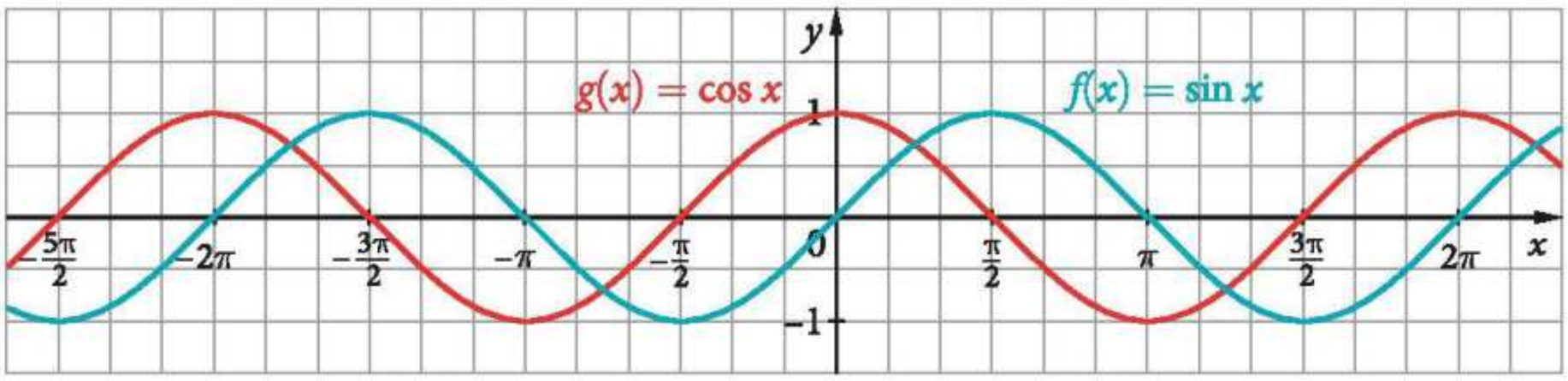
Wnioski, uwagi, komentarze...

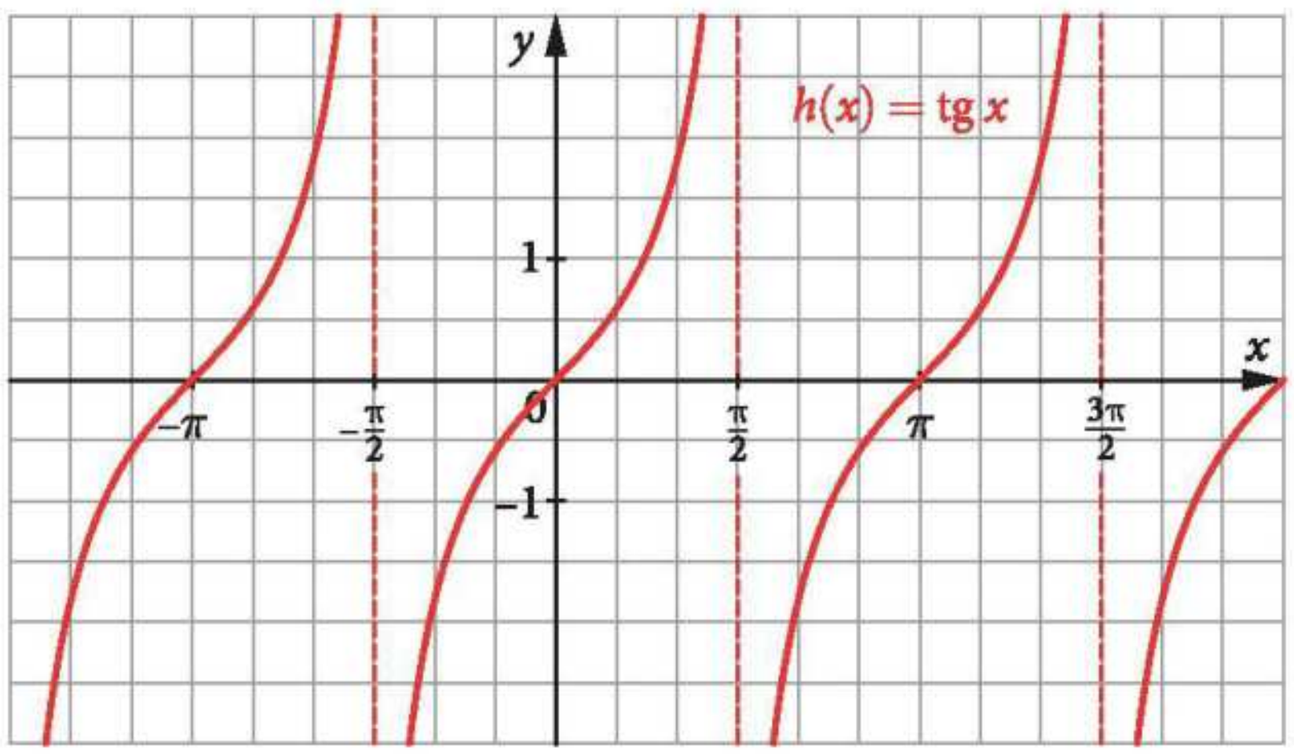
- Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0	nie istnieje	0

- Jeśli α oznacza miarę stopniową kąta, a x jest jego miarą łukową, to $x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$, $\alpha = \frac{x \cdot 180°}{\pi}$.

- **Wykresy funkcji trygonometrycznych**





- Rozwiązaniami równania $\sin x = a$ dla $a \in \langle -1; 1\rangle$ są liczby postaci $x = x_0 + 2k\pi$ oraz $x = \pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie x_0 jest jednym z rozwiązań tego równania i $k \in \mathbf{Z}$.
- Rozwiązaniami równania $\cos x = a$ dla $a \in \langle -1; 1\rangle$ są liczby postaci $x = x_0 + 2k\pi$ oraz $x = -x_0 + 2k\pi$, gdzie x_0 jest jednym z rozwiązań tego równania i $k \in \mathbf{Z}$.
- Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = a$ są liczby postaci $x = x_0 + k\pi$, gdzie x_0 jest jednym z rozwiązań tego równania i $k \in \mathbf{Z}$.

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.14 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Ile jest równy iloczyn $\operatorname{tg} 36^\circ \cdot \operatorname{tg} 54^\circ$?

A. 1 **B.** 0 **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$ **D.** 2

4.2. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Wskaż wartość wyrażenia $\frac{1-5\sin\alpha}{1+5\sin\alpha}$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ **B.** $-\frac{3}{5}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 1

4.3. Wiadomo, że $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Zatem

A. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. **B.** $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$. **C.** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. **D.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

4.4. Wskaż wartość a, dla której równanie $\cos\alpha = \frac{1}{a^2-4a}$ nie ma rozwiązania.

A. $a = \frac{1}{4}$ **B.** $a = \frac{1}{3}$ **C.** $a = -\frac{1}{2}$ **D.** $a = \frac{11}{2}$

4.5. Ile jest równa liczba $\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin 70^\circ \cos 20^\circ$?

A. 0 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 90

4.6. Kąt α jest rozwarty i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Zatem

A. $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$. **B.** $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. **D.** $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

4.7. Wiadomo, że $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Zatem

A. $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$. **B.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$. **C.** $\sin\alpha = \frac{13}{5}$. **D.** $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$.

4.8. Dwa boki trójkąta mają długości 5 i 11, a kąt między nimi ma miarę 120°. Wskaż długość trzeciego boku tego trójkąta.

A. $\sqrt{201}$ **B.** $\sqrt{91}$ **C.** $\sqrt{146-55\sqrt{3}}$ **D.** $\sqrt{146+55\sqrt{3}}$

4.9. W trójkącie ABC dane są $|AB| = 2\sqrt{5}$ i $\sphericalangle BCA = 30^\circ$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

4.10. Boki trójkąta mają długości $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ i 4. Wskaż wartość cosinusa największego kąta w tym trójkącie.

A. $\frac{7}{4\sqrt{5}}$ **B.** $-\frac{2}{\sqrt{35}}$ **C.** $\frac{2}{\sqrt{35}}$ **D.** $\frac{9}{4\sqrt{7}}$

4.11. Wskaż liczbę równą $\cos 133°$.

A. $\sin 47°$ **B.** $\cos 47°$ **C.** $-\sin 47°$ **D.** $-\cos 47°$

4.12. Dla której z podanych funkcji oś y nie jest osią symetrii wykresu funkcji?

A. $y = |\operatorname{tg} x|$ **B.** $y = \sin|x|$ **C.** $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **D.** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

4.13. Wskaż miarę łukową kąta $\alpha = 255°$.

A. $\frac{7\pi}{15}$ **B.** $\frac{17\pi}{12}$ **C.** $\frac{17\pi}{15}$ **D.** $\frac{21\pi}{13}$

4.14. Który z podanych kątów nie jest kątem wypukłym?

A. $\alpha = \frac{4\pi}{9}$ **B.** $\beta = 3{,}01$ **C.** $\gamma = 3{,}7$ **D.** $\delta = \frac{3}{4}$

W zadaniach 4.15–4.18 oceń prawdziwość podanych zdań.

4.15. Kąty wewnętrzne trójkąta mają miary α, β i γ. Zatem

A. $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$. **B.** $\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\beta+\alpha}{2}$. **C.** $\sin\beta = \cos(\alpha+\gamma)$.

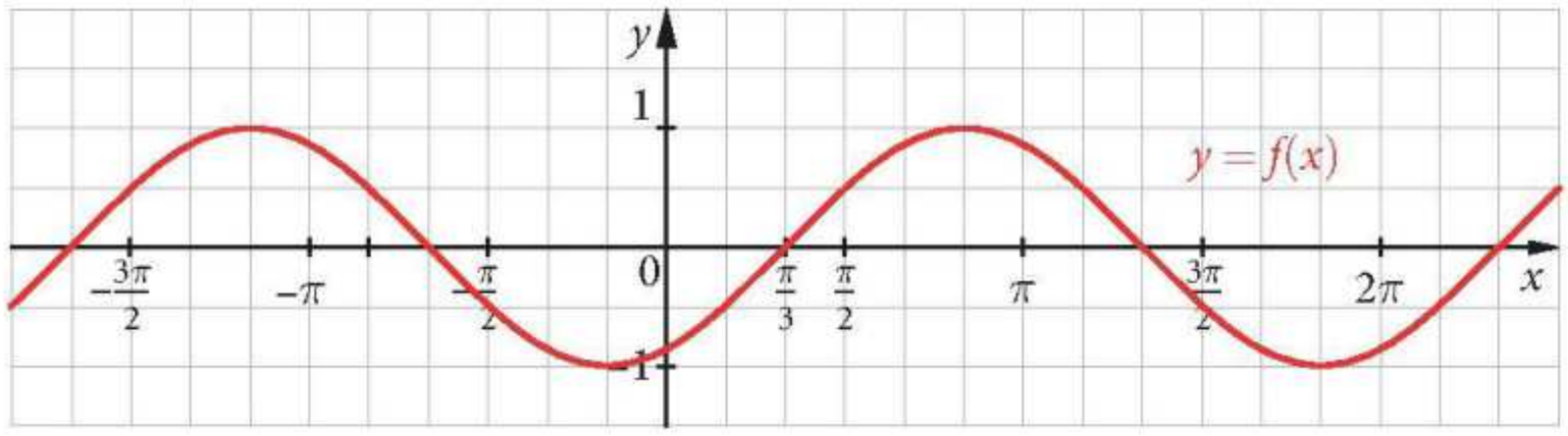
4.16. W trójkącie prostokątnym kąty α i β są ostre oraz $\beta > \alpha$. Zatem

A. $\sin\alpha < \cos\alpha$. **B.** $\cos\beta < \cos\alpha$. **C.** $\sin\alpha < \sin\beta$.

4.17. W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawy mają długości $|AB| = 15$, $|CD| = 13$, a każde ramię ma długość 3. Zatem

A. $\sin\sphericalangle ADC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\cos\sphericalangle ADC = \frac{1}{3}$. **C.** $\operatorname{tg}\sphericalangle ADC = 2\sqrt{2}$.

4.18. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.



Funkcję f można opisać za pomocą wzoru

A. $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. **B.** $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. **C.** $f(x) = \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$.

4.19. W trójkącie KLM dane są: $|KL| = 3\sqrt{5}$, $|LM| = 5\sqrt{2}$ i $|MK| = 2\sqrt{3}$. **Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.**
Kąt przy wierzchołku K

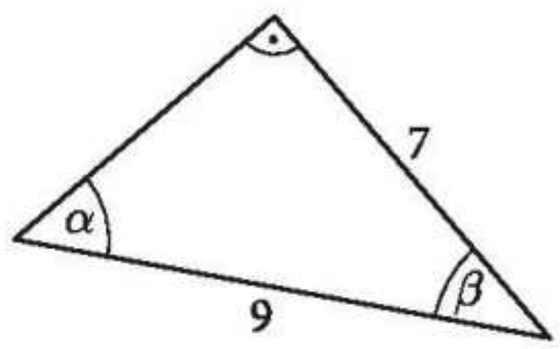
A.	jest ostry,		**1.**	$\|LM\|^2 > \|KL\|^2 + \|MK\|^2$.
B.	jest prosty,	ponieważ	**2.**	$\|LM\|^2 = \|KL\|^2 + \|MK\|^2$.
C.	jest rozwarty,		**3.**	$\|LM\|^2 < \|KL\|^2 + \|MK\|^2$.

4.20. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α spełniającego podane warunki.

a) $\operatorname{tg}\alpha = 3$ i $\cos\alpha < 0$ b) $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$

4.21. Kąty α i β są ostre oraz $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ i $\cos\beta = \frac{1}{6}$. Oblicz dokładną wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \cos\alpha \sin\beta$.

4.22. Na podstawie rysunku obok wyznacz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \sin\beta$.



4.23. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{4\cos\alpha - 3\sin\alpha}{3\cos\alpha + 5\sin\alpha}$.

4.24. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych w trójkącie ABC, w którym $\sphericalangle C = 90°$, a przyprostokątne mają długości

a) $|AC| = 18$ cm i $|BC| = 24$ cm. b) $|AC| = 21$ cm i $|BC| = 72$ cm.

4.25. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta BAC w trójkącie prostokątnym ABC, w którym

a) $\sphericalangle C = 90°$, $|AC| = 3$, $|BC| = 2$. b) $\sphericalangle B = 90°$, $|BC| = \sqrt{15}$, $|AC| = 4$.

4.26. W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych różnią się o 28 cm, a przeciwprostokątna ma 52 cm. Wyznacz z dokładnością do 1° miary kątów ostrych tego trójkąta.

4.27. Wyznacz z dokładnością do 1° miarę kąta przy podstawie w trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC| = 10$ cm, a wysokość poprowadzona z wierzchołka C jest równa

a) 5 cm. b) 8 cm. c) 12 cm.

4.28. Oblicz.

a) $\cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \operatorname{tg} 45^\circ$ b) $\sin^2 45^\circ \operatorname{tg} 60^\circ - \cos^2 30^\circ \operatorname{tg} 30^\circ$

4.29. Z jednego brzegu jeziora widać szczyt góry pod kątem 18° względem poziomu, a z drugiego brzegu, oddalonego od pierwszego o 1180 m w kierunku podnóża góry, widać jej szczyt pod kątem 22° względem poziomu. Oblicz wysokość h góry (mierzoną względem tafli wody). Podaj wynik z dokładnością do 10 m.

4.30. Do miseczki w kształcie półkuli o średnicy 18 cm nalano mleko, którego poziom jest o 2 cm niższy od poziomu maksymalnie napełnionego naczynia. Jaki jest największy kąt, o który można przechylić miseczkę tak, aby mleko się nie wylało? Podaj wartość dowolnie wybranej funkcji trygonometrycznej tego kąta. Następnie podaj miarę kąta z dokładnością do 1°.

4.31. Prosta droga wznosi się pod kątem 12° do poziomu. Na jaką wysokość ponad poziom wzniesiemy się po przebyciu 900 m tej drogi? Jakiej długości drogę musimy pokonać, aby wznieść się na wysokość 250 m? Wyniki podaj z dokładnością do 10 m.

4.32. Podstawą masztu jest punkt O, a jego wierzchołkiem – punkt P. Kąt, pod jakim widać maszt z punktu A $(AO \perp OP)$, ma miarę 32°, a kąt, pod jakim widać maszt z punktu B, leżącego na odcinku AO w odległości 15 m od A, ma miarę 68°. Oblicz wysokość masztu. Podaj wynik z dokładnością do 0,1 m.

4.33. Przekątna rombu jest $1\frac{3}{4}$ razy dłuższa od jego boku. Podaj wartości dowolnie wybranych funkcji trygonometrycznych kątów tego rombu oraz miary kątów z dokładnością do 1°.

4.34. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz dokładną wartość tangensa kąta α.

4.35. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$. Oblicz dokładne wartości sinusa i cosinusa kąta α.

4.36. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = 0{,}3$. Oblicz $\operatorname{tg}^2\alpha$.

4.37. Sprawdź, czy dla każdego kąta ostrego α wyrażenie ma stałą wartość. Jeżeli tak, to ją podaj.

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + 3(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \frac{4\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$ b) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha$

D **4.38.** Udowodnij tożsamość.

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$

b) $\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} - 2$

c) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

d) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = (\operatorname{tg}\alpha - 1)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + 1\right)$

D **4.39.** Udowodnij tożsamość.

a) $\operatorname{tg}^2\alpha - 1 = \frac{2\sin^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha}$

b) $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin^3\alpha - \sin\alpha}{\cos^3\alpha - \cos\alpha}$

c) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$

d) $\sin\alpha = \left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)(1 - \cos\alpha)$

4.40. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB taki, że $\sin\sphericalangle BAC = 0{,}3$ i $|AC| = 7$. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

4.41. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

4.42. W pewnym trójkącie prostokątnym suma cosinusów kątów ostrych jest równa $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Oblicz iloczyn sinusów tych kątów.

4.43. Ramię wodzące kąta α przechodzi przez podany punkt P. Wyznacz $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$.

a) $P = (-8, 6)$ b) $P = (-7, 7)$ c) $P = \left(-\frac{15}{2}, 4\right)$ d) $P = \left(-3, \sqrt{7}\right)$

4.44. Oblicz $\operatorname{tg}135^\circ + \cos 120^\circ \cdot \sin 150^\circ$.

4.45. Kąt trójkąta zawarty między bokami o długościach 5 i 4 ma miarę 60°. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

4.46. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 8$, $|BC| = 12$ i $|AC| = 15$. Wyznacz miary kątów tego trójkąta (z dokładnością do 1°).

4.47. Wiadomo, że $\cos 2x = -\frac{2}{3}$ i $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$. Oblicz $\cos x$.

4.48. Wiadomo, że $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ i $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$. Oblicz $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

4.49. Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ podaj najmniejszą wartość tej funkcji w przedziale $\langle 0; \pi\rangle$.

4.50. Wyznacz przedziały, w których funkcja $f(x) = 1 + \cos 2x$ określona dla $x \in \langle -\pi; \pi\rangle$ jest rosnąca.

4.51. Wyznacz zbiór wartości funkcji $g(x) = \sin x + \cos x + 2$.

4.52. Dla jakich $x \in \langle 0; 2\rangle$ określona jest funkcja $f(x) = \sqrt{1 - 2\cos x}$?

4.53. Dana jest funkcja $f(x) = 1 - 4\cos^2 x$, $x \in \langle -2\pi; 2\pi\rangle$. Podaj zbiór, w którym określona jest funkcja $h(x) = \sqrt{f(x)}$.

4.54. Dla jakich $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$ określone jest wyrażenie $\frac{\log(2\sin x - 1)}{\sqrt{1 - 2\cos^2 \frac{x}{2}}}$?

4.55. Odczytaj z wykresu funkcji $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ rozwiązanie nierówności $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$ dla $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$.

4.56. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{\sin^2 x - |\sin x|}{\sin x}$ określona dla $x \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f.

b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

4.57. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{2}\left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f.

b) Rozwiąż równanie $2f(x) = 1$.

4.58. Rozwiąż równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$.

4.59. Dla jakich $x \in \mathbf{R} - \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ zachodzi równość $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$?

4.60. Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$.

4.61. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ należące do przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$.

4.62. Rozwiąż równanie $\cos 2x + 2 = 3\cos x$.

4.63. Rozwiąż równanie $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$.

4.64. Rozwiąż równanie $3\sin^2 x - 4\sin^2 2x = -3\cos^2 x$.

4.65. Dla jakich $x \in \langle -\pi; \pi\rangle - \{0\}$ spełniona jest nierówność $\frac{1}{\operatorname{tg} x} \geqslant \frac{1}{2\sin x}$?

4.66. Rozwiąż nierówność $\sin^2 x \geqslant \cos^2 x$.

4.67. Dla jakich wartości α równanie $\frac{x+1}{2x-1} - \frac{2x+1}{x-1} = \cos\alpha$ z niewiadomą x ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty?

4.68. Znajdź te wartości parametru α, dla których pierwiastki x_1, x_2 równania $x^2 - 2x\sin\alpha - \cos^2\alpha = 0$ z niewiadomą x spełniają równość $x_1^3 + x_2^3 = 0$.

4.69. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \langle 0; 2\pi\rangle$ równanie $2x^2 - 2(2\cos\alpha - 1)x + 2\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?

4.70. Dla jakich wartości parametru m jeden pierwiastek równania $x^2 + mx + 2m - 2 = 0$ jest sinusem, a drugi cosinusem tego samego kąta?

4.71. Dane jest równanie $(2\sin\alpha - 1)x^2 - 2x + \sin\alpha = 0$ z niewiadomą x. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ suma odwrotności pierwiastków tego równania jest równa $4\cos\alpha$?

4.72. Oblicz $\dfrac{\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{17\pi}{3}\right)}$.

4.73. Podaj najmniejsze dodatnie rozwiązanie równania $\sin(12\pi x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.74. Rozwiąż nierówność $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) > \frac{\sqrt{2}}{4}$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$.

4.75. Dane są kąty α i β takie, że $90° < \alpha < 180°$, $0° < \beta < 90°$, $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$. Oblicz dokładną wartość $\cos(\alpha + \beta)$.

D **4.76.** Dany jest kąt ostry α taki, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{3}$. Wykaż, że $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{7}{18}$.

D * **4.77.** Niech α, β i γ oznaczają kąty wewnętrzne trójkąta ABC. Wiadomo, że kąty te spełniają równość $2\cos\alpha \cdot \cos\beta = 1 - \cos\gamma$. Wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny.

5. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

Definicje

- **Funkcją wykładniczą o podstawie** a nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych ($x \in \mathbf{R}$), a jej wykres nazywamy **krzywą wykładniczą**.
- **Logarytmem przy podstawie** a ($a > 0$ i $a \neq 1$) **liczby** b ($b > 0$) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać b.

  $\log_a b = c$, gdy $a^c = b$ i $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

  Liczbę b nazywamy **liczbą logarytmowaną**.
- **Funkcją logarytmiczną o podstawie** a nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór dodatnich liczb rzeczywistych ($x > 0$), a jej wykres nazywamy **krzywą logarytmiczną**.

Twierdzenia

- Jeżeli liczby a i b są dodatnie i $a \neq 1$, to istnieje dokładnie jedna taka liczba x, że $a^x = b$.
- Dla dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $k \in \mathbf{R}$ prawdziwe są wzory:

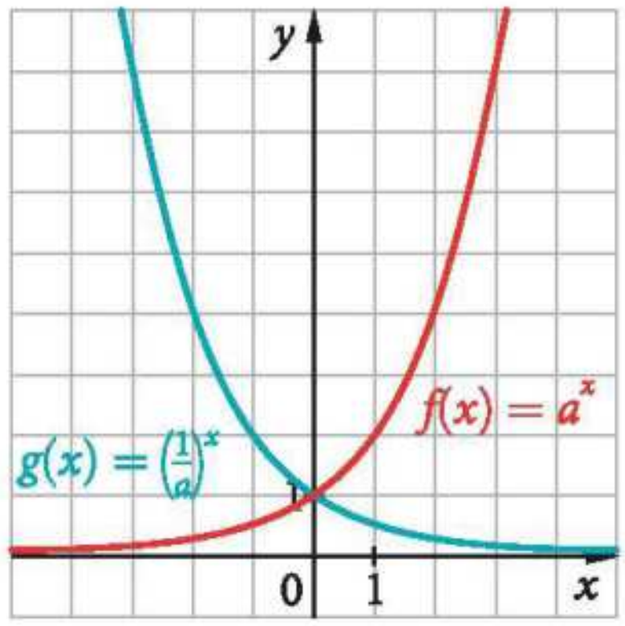
  $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

  $\log_a\left(x^k\right) = k \cdot \log_a x$
- Dla dowolnych liczb $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$ zachodzi równość: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Wnioski, uwagi, komentarze...

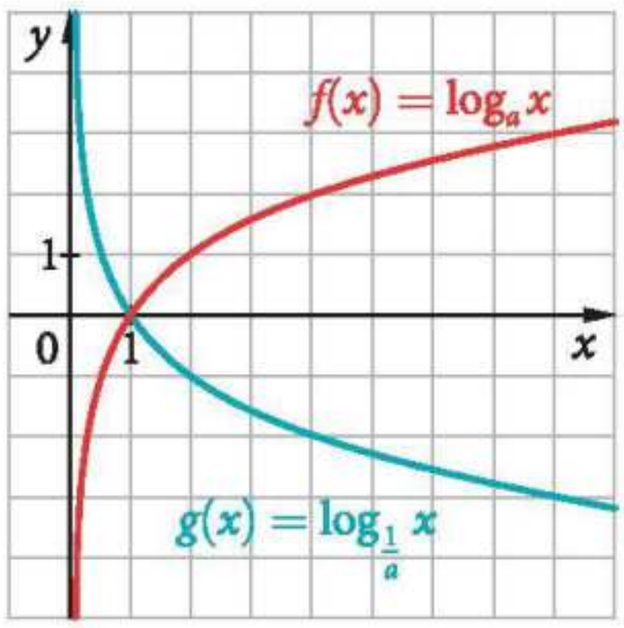
- Wykresy funkcji $f(x) = a^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ dla $a > 0$, $a \neq 1$ są symetryczne względem osi y.



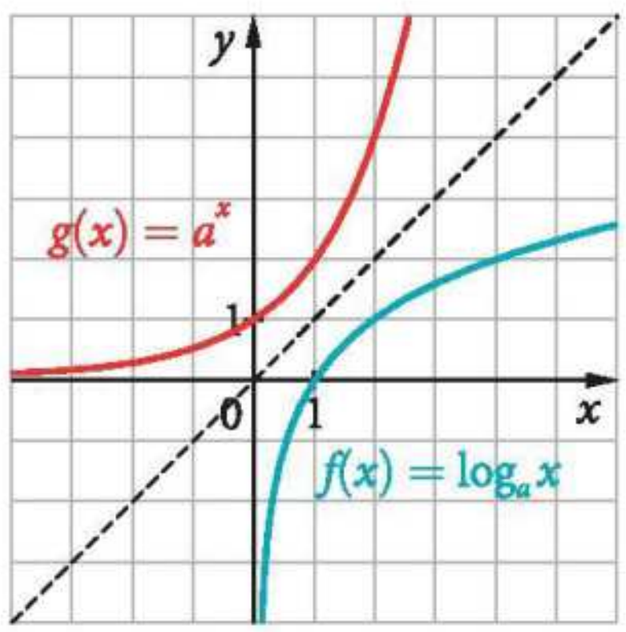
- Dla każdego $a > 0$ i $a \neq 1$:
  - $a^x = a^y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,
  - jeżeli $a \in (1; \infty)$, to $a^x > a^y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x > y$,
  - jeżeli $a \in (0; 1)$, to $a^x > a^y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < y$.
- Dla każdego $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $b > 0$:

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad a^{\log_a b} = b$$

- Wykresy funkcji $f(x) = \log_a x$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ dla $a > 0$ i $a \neq 1$ są symetryczne względem osi x (rys. 1).
- Wykresy funkcji $f(x) = \log_a x$ i $g(x) = a^x$, dla $a > 0$ i $a \neq 1$, są symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$ (rys. 2).



Rys. 1.



Rys. 2.

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.18 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Wiadomo, że $7^{x+1} = 49$. Wskaż wartość wyrażenia 4^{4x-1}.

A. 16 **B.** 1 **C.** 28 **D.** 64

5.2. Jeżeli $3 = a^x$, to $\frac{3}{a}$ jest równe

A. $3a^{x-1}$. **B.** a^{x+1}. **C.** a^{x-1}. **D.** 1.

5.3. Wiadomo, że $\log_x 9 = \frac{1}{2}$. Wskaż wartość x.

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 3 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** 81

5.4. Wskaż wartość wyrażenia $5^{\log_5 \frac{1}{125}}$.

A. -3 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $\frac{1}{125}$ **D.** 5

5.5. Wskaż wartość wyrażenia $5^{\frac{2}{\log_9 5}}$.

A. 3 **B.** 9 **C.** $\log_9 2$ **D.** 81

5.6. Która z liczb jest równa liczbie $3^{\log_9 \frac{1}{81}}$?

A. $\sqrt{3}$ **B.** 81 **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** -9

5.7. Wskaż zależność fałszywą.

A. $\left(\log_2 1 + \log_2 2\right)^2 = 1$

B. $\log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 - \log 24 = 0$

C. $\frac{\log 100 + \log 10}{\log 2 + \log 5} = 3$

D. $\frac{\log 27}{\log 9} = \log 3$

5.8. Jeden z podanych zbiorów jest zbiorem rozwiązań równania $\log^2 10x = \log^2 100$. Wskaż ten zbiór.

A. $\{-10, 10\}$ **B.** $\{1, 10\}$ **C.** $\{10\}$ **D.** $\left\{\frac{1}{1000}, 10\right\}$

5.9. Wskaż argument, dla którego funkcja $f(x) = 7^x$ przyjmuje wartość 14.

A. $x = \log_7 14$ **C.** $x = \log_{14} 7$

B. $x = 2$ **D.** $x = \log_7 2$

5.10. Wskaż argument, dla którego funkcja $f(x) = 2^x$ przyjmuje wartość 24.

A. $x = 3 + \log_2 3$ **C.** $x = \log_{24} 2$

B. $x = 12$ **D.** $x = \log_2 12$

5.11. Wskaż wzór funkcji malejącej.

A. $f(x) = \left(\frac{7}{5}\right)^x$ **C.** $f(x) = -4^x$

B. $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$ **D.** $f(x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^x$

5.12. Wskaż wzór funkcji g, której wykres powstanie w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ przez symetrię względem osi x.

A. $g(x) = -\left(\frac{5}{3}\right)^x$

B. $g(x) = -\left(\frac{3}{5}\right)^x$

C. $g(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

D. $g(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^{-x}$

5.13. Wskaż wzór funkcji g, której wykres powstanie w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = 3^x - 1$ przez symetrię względem osi y.

A. $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$

B. $g(x) = -3^x - 1$

C. $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

D. $g(x) = -3^x + 1$

5.14. Wskaż dziedzinę funkcji $f(x) = |\log x|$.

A. $(0; \infty)$ **B.** $\mathbf{R}$ **C.** $(0; \infty) - \{1\}$ **D.** $\mathbf{R} - \{0\}$

5.15. Wskaż zbiór wartości funkcji $f(x) = 3^{-x} - 2$.

A. $\mathbf{R}$ **B.** $(0; \infty)$ **C.** $(-2; \infty)$ **D.** $(-\infty; -2)$

5.16. Wskaż dziedzinę funkcji $f(x) = \log |x - 5|$.

A. $\mathbf{R}$ **B.** $(5; \infty)$ **C.** $(-\infty; 5)$ **D.** $\mathbf{R} - \{5\}$

5.17. Narysuj odpowiedni wykres i odczytaj z niego zbiór rozwiązań nierówności $\log_{\frac{1}{3}}(x + 4) > -2$.

A. $(5; \infty)$ **B.** $(-\infty; 5)$ **C.** $(-4; 5)$ **D.** $(0; \infty)$

5.18. Wskaż wzór funkcji malejącej.

A. $f(x) = -\log_{0,2} x$

B. $f(x) = \log_{2,3} x$

C. $f(x) = \left|\log_{0,5} x - 2\right|$

D. $f(x) = \log_{5,1}(-x)$

W zadaniach 5.19–5.22 oceń prawdziwość podanych zdań.

5.19. Dana jest funkcja $f(x) = 0{,}4^{-x} - 1$.

A. Funkcja f jest malejąca.

B. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1; \infty)$.

C. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 0.

5.20. Dana jest liczba $a = \log_{12} 3$.

A. Liczba a jest równa liczbie $1 + \log_4 3$.

B. Liczba a jest równa liczbie $\dfrac{\log_4 3}{1 + 2\log_4 3}$.

C. Liczba a jest równa liczbie $\dfrac{1}{1 + 2\log_3 2}$.

5.21. Dana jest funkcja $f(x) = \left|\left|3^{x-2} - 2\right| - 3\right|$.

A. Funkcja f ma jedno miejsce zerowe.

B. Równanie $\left|\left|3^{x-2} - 2\right| - 3\right| = m$ ma trzy rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (1; 3)$.

C. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(0; \infty)$.

5.22. Dana jest funkcja $f(x) = \log_{|x|} 10$.

A. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}$.

B. Dla każdego $x \in D$ zachodzi równość $f(-x) = f(x)$.

C. $f(x) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 10$.

5.23. Dane są liczby $a = \log_{\frac{2}{3}} 5$ i $b = \log_{\frac{2}{3}} 7$. **Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1 albo 2.**

Prawdziwa jest nierówność

A.	$a < b$,	ponieważ	**1.**	funkcja $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ jest rosnąca.
B.	$a > b$,		**2.**	funkcja $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ jest malejąca.

5.24. Oblicz.

a) $\log_3 9 - \log_2 16 + \log 100$

b) $\log_2 0{,}25 + \log_3 \dfrac{1}{81} - \log 0{,}001$

c) $\log_2 \sqrt[3]{2} + \log \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{125}$

d) $\log_2 \sqrt[5]{0{,}5} - \log \dfrac{1}{\sqrt[5]{1000}} + \log_7 1$

5.25. Oblicz.

a) $\log_3 6 + \log_3 12 - \log_3 8$

b) $2\log_2 10 - \log_2 25 - 0{,}1\log_2 2^{10}$

c) $\dfrac{\log_2 25 + \log_3 49}{\log_2 5 + \log_3 7}$

d) $\dfrac{2\log_3 6 - \log_3 2}{\log_3 2 + 2}$

5.26. Oblicz.

a) $10^{\log 17}$ b) $5^{1-\log_5 3}$ c) $27^{\log_3 2}$ d) $2^{1+\log_4 5}$

5.27. Przyjmij, że $\log_{\frac{1}{2}} 7 = -2{,}8$, i oblicz $\log_{\frac{1}{2}} 70 - \log_{\frac{1}{2}} 5$.

5.28. Niech $\log_3 5 = p$. Wyznacz $\log_3 0{,}36$.

5.29. Niech $\log 8 = t$. Wyznacz $\log 25$.

5.30. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek: $\log_4 c = \log_3 b = \log_2 a = 2$. Oblicz $\sqrt{abc}$.

5.31. Porównaj liczby $a = \log_2 36 + \log_2 30 + \log_2 25$ i $b = 4 + \log_2 28 + \log_2 49$.

D **5.32.** Niech $\log_{70} 5 = a$ i $\log_{70} 7 = b$. Wykaż, że $\log_{70} 4 = 2 - 2a - 2b$.

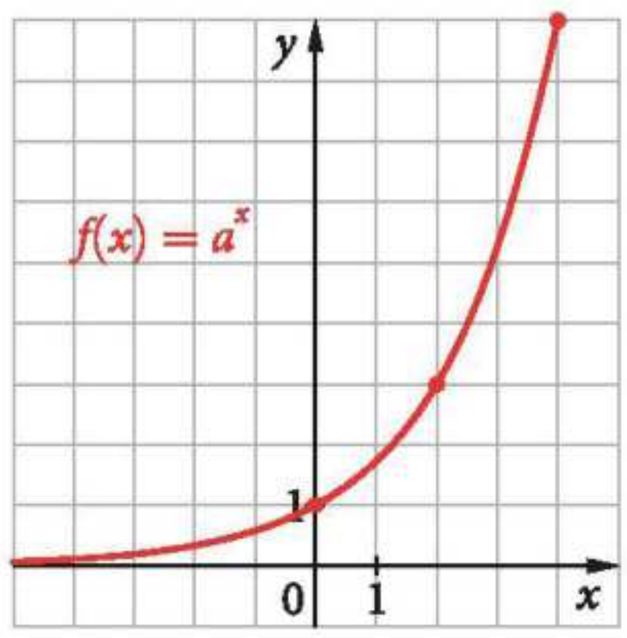
5.33. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = 2^x - 1$ c) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ e) $f(x) = -3^x - 3$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ d) $f(x) = 4^{-x} + 2$ f) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} - 4$

5.34. Narysuj wykres funkcji $f(x) = 2 - 5^{x-1}$ i podaj największą oraz najmniejszą wartość tej funkcji przyjmowane w przedziale $\langle 3; 5\rangle$.

5.35. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla $x \in \mathbf{R}$. Kropkami zaznaczone są punkty kratowe wykresu.

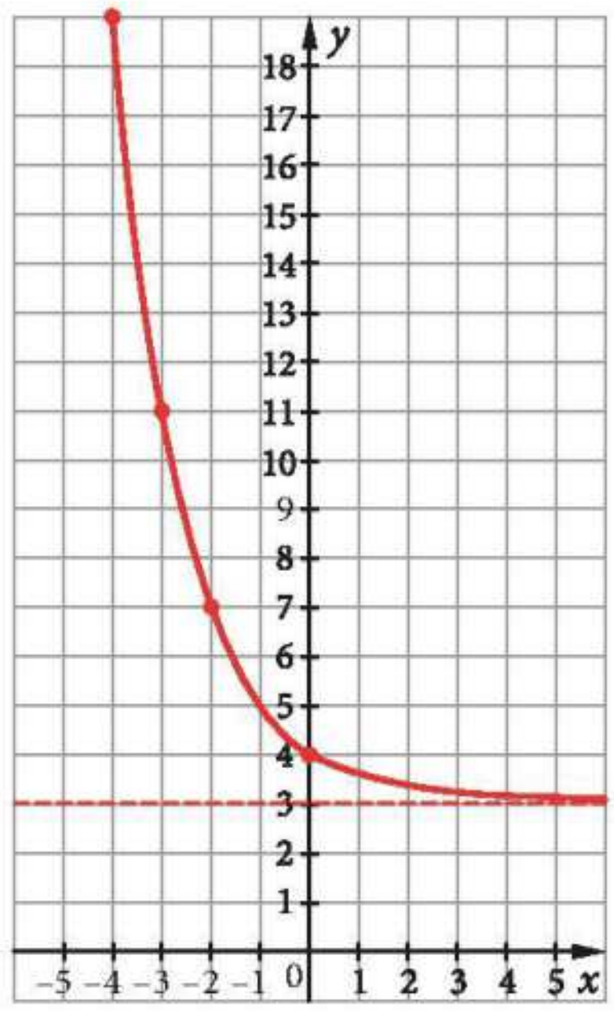


a) Na podstawie wykresu wyznacz a.
b) Narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x) - 2|$.
c) Podaj wszystkie wartości parametru $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie $g(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

5.36. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = a^x + b$. Kropkami zaznaczone są punkty kratowe wykresu.

a) Na podstawie wykresu wyznacz a i b.

b) Podaj wzór funkcji g, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem prostej $y = 2$.

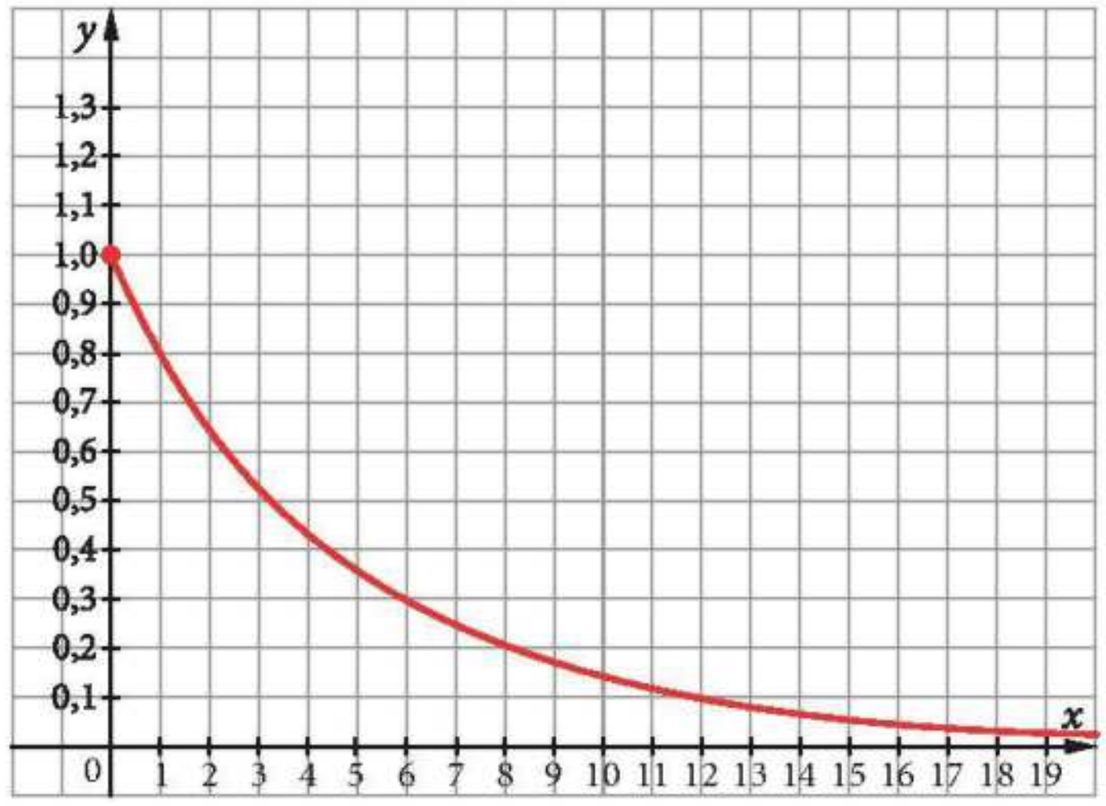


5.37. Pewien gatunek owadów co rok zwiększa trzykrotnie swoją liczebność. Przyjmijmy, że na początku populacja liczyła N osobników.

a) Zapisz wzór funkcji f opisującej liczebność populacji owadów po upływie x lat.

b) O ile procent zwiększy się liczebność populacji owadów po upływie półtora roku?

5.38. Na wykresie przedstawiono rozpad 1 grama pewnej substancji promieniotwórczej w zależności od czasu x mierzonego w latach.



a) Wzór funkcji opisującej masę tej substancji, która nie rozpadła się po upływie x lat, ma postać $f(x) = a^x$. Na podstawie wykresu wyznacz współczynnik a.

b) Wyznacz przybliżony okres połowicznego rozpadu tej substancji.

5.39. Rozwiąż graficznie równanie $\left|3^x - 3\right| + 1 = -x^2 + 2x$.

5.40. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{dla } x < 0 \\ 2^{-x} - 1 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$ i odczytaj z wykresu najmniejszą wartość funkcji.

5.41. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności $\begin{cases} y > 2^{|x|} \\ y + |x| < 6 \end{cases}$. Ile punktów kratowych, których druga współrzędna jest liczbą pierwszą, należy do otrzymanego zbioru?

5.42. Wiadomo, że 1,5849 jest przybliżeniem liczby $10^{0,2}$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Wyznacz przybliżenie liczby $10^{-\frac{4}{5}}$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku oraz przybliżenie liczby $10^{\frac{11}{5}}$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

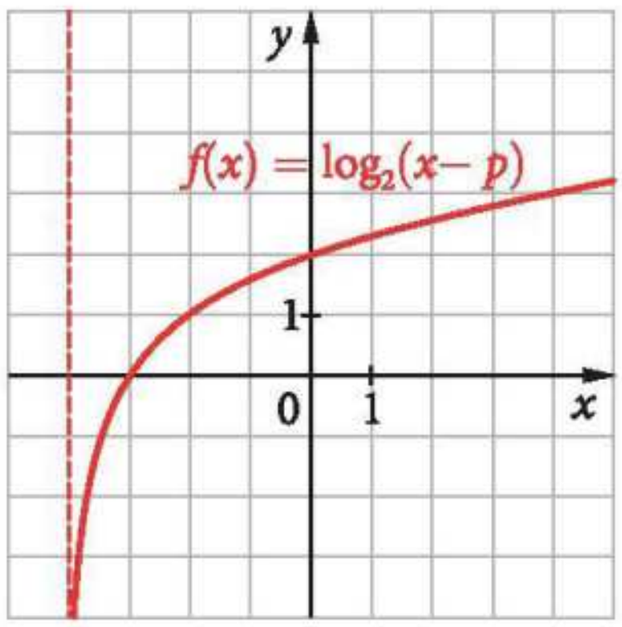
5.43. Wykres funkcji $f(x) = \log_2(x+m)+k$ o dziedzinie $D = (-2; \infty)$ przechodzi przez punkt $(2, -1)$. Oblicz m i k, a następnie naszkicuj wykres funkcji. Wyznacz zbiór tych argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

5.44. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_2(x - p)$.

a) Na podstawie wykresu wyznacz wartość p.

b) Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $y = |f(x)|$.

c) Podaj wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $|f(x)| = m$ ma dwa rozwiązania o przeciwnych znakach.



* **5.45.** Narysuj wykres funkcji $f(x) = \dfrac{\log x^2}{|\log x|}$.

5.46. Dana jest funkcja $f(x) = 2\log_5\left(x^2 - 4\right) + \sqrt{\dfrac{6-2x}{x+5}}$. Wyznacz wartość funkcji dla największej liczby całkowitej należącej do dziedziny f.

5.47. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{2\cos x}\left(9 - x^2\right)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

5.48. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-3}\left(x^3 + 4x^2 - x - 4\right)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

5.49. Dla jakich wartości $x \in \mathbf{R}$ określone jest wyrażenie $\dfrac{\log\left(16 - x^2\right)}{\sqrt{\sin x}}$?

6. Ciągi liczbowe

Definicje

- **Ciągiem** nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór dodatnich liczb naturalnych. Ciąg nazywamy **liczbowym**, gdy jego wartości są liczbami rzeczywistymi.
- Jeżeli dziedzinę ciągu ograniczymy do pewnego skończonego zbioru początkowych liczb naturalnych dodatnich, to otrzymamy **ciąg skończony**.
- **Ciągiem arytmetycznym** nazywamy ciąg liczbowy o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje w wyniku dodania do wyrazu poprzedniego stałej liczby r, nazywanej **różnicą** tego ciągu.
- **Ciągiem geometrycznym** nazywamy ciąg liczbowy o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje w wyniku pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę q, nazywaną **ilorazem** ciągu.

Twierdzenia

- Jeżeli dla każdego $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ mamy:

  $a_{n+1} > a_n$, to ciąg (a_n) jest rosnący,
  $a_{n+1} < a_n$, to ciąg (a_n) jest malejący,
  $a_{n+1} \geqslant a_n$, to ciąg (a_n) jest niemalejący,
  $a_{n+1} \leqslant a_n$, to ciąg (a_n) jest nierosnący.

  Ciąg liczbowy, który spełnia co najmniej jeden z powyższych warunków, jest ciągiem monotonicznym, pozostałe ciągi liczbowe są niemonotoniczne.
- **Wzór ogólny ciągu arytmetycznego** (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r ma postać: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$.
- Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), $n > 1$, prawdziwa jest zależność: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, czyli środkowy wyraz jest średnią arytmetyczną wyrazów z nim sąsiadujących.
- Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa:

  $$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$
- **Wzór ogólny ciągu geometrycznego** (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

- Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), $n > 1$, prawdziwa jest zależność: $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.
- Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \text{ dla } q \neq 1$$

$$S_n = n \cdot a_1 \text{ dla } q = 1$$

Wnioski, uwagi, komentarze...

- W ciągu arytmetycznym (a_n) zachodzi zależność $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ dla wszystkich $k < n$ i $k, n \in \mathbf{N} - \{0\}$.
- Ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 + (n-1)r$ jest:
  - rosnący dla $r > 0$,
  - malejący dla $r < 0$,
  - stały dla $r = 0$.
- Średnia arytmetyczna wszystkich wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego jest równa średniej arytmetycznej wyrazów pierwszego i ostatniego.
- Dany jest ciąg geometryczny o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 q^{n-1}$, w którym $a_1 \cdot q \neq 0$.
  Jeżeli $q > 1$, to ciąg (a_n) jest malejący dla $a_1 < 0$ i rosnący dla $a_1 > 0$.
  Jeżeli $0 < q < 1$, to ciąg (a_n) jest rosnący dla $a_1 < 0$ i malejący dla $a_1 > 0$.
  Jeżeli $q = 1$, to (a_n) jest ciągiem stałym.
  Jeżeli $q < 0$, to sąsiednie wyrazy ciągu mają różne znaki, zatem ciąg jest niemonotoniczny.

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.13 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.
Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Liczba ujemnych wyrazów ciągu określonego wzorem $a_n = (3n - 17)(2n + 3)$ dla $n \geqslant 1$ jest równa

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

6.2. Który z podanych ciągów ma wyraz równy 43?

A. $a_n = 4n - 121$
B. $b_n = 4n - 122$
C. $c_n = 4n - 123$
D. $d_n = 4n - 124$

6.3. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, gdzie $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Zatem

A. $a_5 = 125$. **B.** $a_5 = 177$. **C.** $a_5 = 207$. **D.** $a_5 = 225$.

6.4. Dany jest ciąg (a_n), w którym $a_n = (-1)^n \cdot (21 - 2n)$ dla $n \geqslant 1$. W tym ciągu

A. $a_{11} = -1$. **B.** $a_{11} > 0$. **C.** $a_{11} = 0$. **D.** $a_{11} < -1$.

6.5. Piąty wyraz pewnego ciągu arytmetycznego jest równy 11, a trzynasty wyraz jest równy 35. Wskaż trzeci wyraz tego ciągu.

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

6.6. Ciąg (a_n) jest określony za pomocą układu warunków: $a_1 = 2$ i $a_{n+1} = \dfrac{2}{1 - a_n}$ dla $n \geqslant 1$. Wskaż czwarty wyraz tego ciągu.

A. -2 **B.** 0 **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 6

6.7. Wskaż różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 5n - 11$ określonego dla $n \geqslant 1$.

A. 5 **B.** -5 **C.** -6 **D.** -11

6.8. Ile wynosi suma $k-1$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2n + 1$?

A. $k^2 + 1$ **B.** $k^2 - 1$ **C.** $k^2 - 2k + 1$ **D.** $(k + 1)^2$

6.9. Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy m, a dwunasty jest równy n. Jaką postać ma dziewiąty wyraz tego ciągu?

A. $\dfrac{n - m}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}(m + n)$ **C.** $\frac{1}{3}(m + n)$ **D.** $\dfrac{m - n}{3}$

6.10. Dany jest ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_1 \neq 0$ i iloraz $q \neq 1$. Która z poniższych zależności jest prawdziwa?

A. $\dfrac{a_9}{a_7} = \dfrac{a_{11}}{a_{13}}$ **C.** $2a_2 = a_1 \cdot a_3$

B. $a_7 - a_5 = a_{13} - a_{11}$ **D.** $a_5^2 = a_4 \cdot a_6$

6.11. Wskaż wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego o wyrazach $a_1 = 8$, $a_2 = 32$.

A. $a_n = 2^{n-1}$ **B.** $a_n = 8 \cdot 4^n$ **C.** $a_n = 2^{2n-1}$ **D.** $a_n = 2^{2n+1}$

6.12. Dla jakiej wartości $x \in \mathbf{N}$ liczby: $x + 1$, $4x + 1$, $10x + 7$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny?

A. $x = 1$ **B.** $x = 2$ **C.** $x = 3$ **D.** $x = 4$

6.13. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich, w którym $a_{17} = 4a_{15}$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 4.

W zadaniach 6.14–6.17 oceń prawdziwość podanych zdań.

6.14. Ciąg o wzorze ogólnym $a_n = 5n^2 - 7$, gdzie $n \in \mathbf{N} - \{0\}$,

A. ma pięć wyrazów mniejszych od 100.

B. jest monotoniczny.

C. ma wszystkie wyrazy dodatnie.

6.15. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy $a_4 = 6\sqrt{3}$ i $a_7 = 54$.

A. (a_n) jest ciągiem rosnącym.

B. (a_n) można określić wzorem $a_n = 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}}$.

C. a_{100} jest liczbą wymierną.

6.16. Ciąg liczbowy (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_n + 2} \end{cases}$.

A. Ciąg (a_n) jest ciągiem stałym.

B. $a_3 = \frac{8}{13}$

C. $a_4 < 1$

6.17. Liczby $\log_2 4$, $\log_2 16$, $\log_2 256$ są

A. kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

B. kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

C. wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

6.18. Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = 4n^2 - 16$. **Wskaż dwa zdania prawdziwe dotyczące tego ciągu.**

A. Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.

B. Ciąg (a_n) nie ma miejsc zerowych.

C. Tylko jeden wyraz ciągu (a_n) jest ujemny.

D. W ciągu (a_n) występuje wyraz równy 180.

E. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

F. Ciąg (a_n) jest geometryczny.

6.19. Ciąg liczbowy (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = -\dfrac{2}{a_n} \end{cases}$.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1, 2, 3 albo 4.
W opisanym ciągu zachodzi nierówność

A.	$a_{100} > 0$,	ponieważ	**1.**	wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.
			2.	wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są ujemne.
B.	$a_{100} < 0$,		**3.**	wyrazy ciągu (a_n) o numerach parzystych są dodatnie.
			4.	wyrazy ciągu (a_n) o numerach parzystych są ujemne.

6.20. Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony podanym wzorem?

a) $a_n = n^2 - 2n - 24$

b) $a_n = \dfrac{n^2 - 3n - 28}{n + 3}$

6.21. Zbadaj monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{1}{n^2 + 5n + 6}$.

D **6.22.** Wykaż, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ jest rosnący.

6.23. Wyznacz parametr k tak, aby ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = (-1)^n + k(n+1)$ był rosnący.

6.24. Sprawdź, korzystając z definicji, czy ciąg o wyrazie ogólnym a_n jest arytmetyczny. Jeśli jest, wyznacz jego pierwszy wyraz i różnicę r.

a) $a_n = 3n - 3$

b) $a_n = n(n-1)$

c) $a_n = 5n$

d) $a_n = 7^n$

e) $a_n = \dfrac{3 - 5n}{2}$

f) $a_n = \dfrac{9n^2 - 4}{3n + 2}$

6.25. Liczby x, y, 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, ponadto $x + y = 8$. Oblicz x i y.

6.26. W 9-wyrazowym ciągu arytmetycznym suma pierwszych trzech wyrazów jest równa 3, a suma ostatnich trzech jest równa 111. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

D **6.27.** Wykaż, że dla każdego m ciąg $\dfrac{m+1}{4}$, $\dfrac{m+3}{6}$, $\dfrac{m+9}{12}$ jest arytmetyczny.

6.28. Liczby 2, $x - 3$, 8 są w podanej kolejności pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

6.29. Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz a_{15}.

6.30. Dany jest ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 5$ i $r = -2$. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu od dwudziestego do trzydziestego włącznie.

6.31. Suma pierwszych n wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy 4 jest o 400 mniejsza od sumy następnych n jego wyrazów. Oblicz n.

6.32. Pierwszy wyraz skończonego ciągu arytmetycznego wynosi 30, różnica jest równa -3, a ostatni wyraz tego ciągu stanowi $\frac{1}{8}$ sumy wszystkich poprzednich wyrazów. Wyznacz liczbę wyrazów i sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

6.33. Pewien sprinter, biegający na dystansie 100 m, w pierwszej sekundzie po starcie przebiegł 7 m, a w każdej następnej o 0,1 m więcej niż w poprzedniej. W której sekundzie po starcie przekroczył on linię mety?

6.34. Długości boków trójkąta, którego jeden kąt ma miarę 120°, tworzą ciąg arytmetyczny. W jakim stosunku są boki tego trójkąta?

6.35. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_1 = x$, $a_2 = 3x + y$, $a_4 = 5x - 2y - 1$, $a_6 = 17$. Dla jakich n zachodzi równość $S_n = 260$?

6.36. W ciągu arytmetycznym stosunek wyrazu szóstego do trzeciego jest równy 7, a suma kwadratów wyrazów drugiego i czwartego jest równa 40. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać -64?

6.37. Znajdź wartość x, dla której liczby $\log_4 \sqrt{x}$, $1 + \log_4 x$, $\frac{1}{2} + \log_4 x^3$ są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Ile początkowych wyrazów tego ciągu daje w sumie 105?

6.38. Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest równy $8 \cdot \log_3 \sqrt{3}$, a szósty wyraz tego ciągu jest równy $\frac{5 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - 7\sqrt{3}$. Ile początkowych wyrazów ciągu należy dodać, aby otrzymać 14 650?

D **6.39.** Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 5 + (n - 1)\left(k - k^2\right)$, gdzie k jest parametrem. Wykaż, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Dla jakich wartości parametru k ciąg jest malejący?

D **6.40.** Suma n początkowych wyrazów pewnego ciągu (a_n) wynosi $S_n = -3n^2 + 6n$. Udowodnij, że jest to ciąg arytmetyczny.

6.41. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) dla $n \geqslant 1$ wynosi $S_n = 2n^2 + n$. Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych.

6.42. Oblicz sumę $7 + \left(9 - \sqrt{2}\right) + \left(11 - 2\sqrt{2}\right) + \ldots + \left(55 - 24\sqrt{2}\right)$.

6.43. Współczynniki a, b, c równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny o sumie 24. Jednym z pierwiastków tego równania jest liczba $-\frac{1}{5}$. Oblicz a, b, c oraz drugi pierwiastek równania.

6.44. Dany jest stuwyrazowy ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{4}(n + 19)$. Dla jakiej wartości m stosunek wyrazu stojącego na miejscu m, licząc od początku ciągu, do wyrazu stojącego na miejscu m, licząc od końca tego ciągu, jest równy $\frac{30}{109}$?

6.45. Sprawdź, korzystając z definicji, czy ciąg o wyrazie ogólnym a_n jest geometryczny. Jeśli jest, wyznacz jego pierwszy wyraz i iloraz q.

a) $a_n = 5^n$ b) $a_n = \frac{4}{2^{3n}}$ c) $a_n = 1 + 3^n$ d) $a_n = n^n$

6.46. Liczby 64, x, 4 są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem malejącego ciągu geometrycznego. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

6.47. Dla jakich wartości m liczby postaci: $m + 1$, $1 - 3m$, $5m + 1$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny?

6.48. Na trzech półkach ustawiono 76 płyt kompaktowych. Okazało się, że liczby płyt na półkach górnej, środkowej i dolnej tworzą rosnący ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoją 24 płyty. Oblicz, ile płyt stoi na górnej półce, a ile – na dolnej.

6.49. W trójkącie prostokątnym poprowadzono z wierzchołka kąta prostego wysokość h i środkową s. Przeciwprostokątna ma długość c. Liczby h, s i c tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny, którego iloczyn wyrazów jest równy 8. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

6.50. Piąty wyraz monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) jest odwrotnością wyrazu pierwszego, a wyraz czwarty jest sumą wyrazów drugiego i trzeciego. Oblicz drugi wyraz tego ciągu.

6.51. Ciąg 9, x, 19 jest arytmetyczny, a ciąg x, 42, y, z jest geometryczny. Oblicz x, y i z.

6.52. Ciąg 1, x, $y - 1$ jest arytmetyczny, a ciąg x, y, 12 jest geometryczny. Oblicz x i y.

D **6.53.** Wykaż, że jeżeli liczby b, c, $2b-a$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to liczby ab, b^2, c^2 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

6.54. Dla jakich wartości $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ liczby: $1 + \log_2 3$, $\log_x 36$, $\frac{4}{3}\log_8 6$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny?

6.55. Długości trzech odcinków są wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Jaki warunek musi spełniać iloraz q tego ciągu, aby z tych trzech odcinków można było zbudować trójkąt?

6.56. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_7 = 1$, $a_{11} = 9$.
a) Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n).
b) Sprawdź, czy ciąg o wyrazach a_7, a_8, a_{11} jest geometryczny.
c) Wyznacz n, dla którego suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) ma najmniejszą wartość.

6.57. Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + c = 10$, a ciąg $(a + 1, b + 4, c + 19)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a, b i c.

6.58. Pani Krystyna wpłaciła do banku 15 000 zł na okres trzech lat. Oprocentowanie roczne w tym banku wynosiło 2,8% z kapitalizacją co pół roku. Po roku bank zmienił oprocentowanie na 2,7%, nie zmieniając okresu kapitalizacji. O ile mniej pieniędzy otrzyma pani Krystyna w wyniku tej zmiany?

6.59. Pan Michał wpłacił 5000 zł do banku, w którym oprocentowanie wkładów wynosiło 2,6% w skali roku, a kapitalizacja odsetek była roczna. Pieniądze te przeznaczył dla swego chrześniaka, więc postanowił nie ruszać ich przez wiele lat. Oblicz, jaki kapitał zostanie zgromadzony na koncie pana Michała po 18 latach, jeśli wysokość oprocentowania się nie zmieni.

6.60. W banku ogłoszono następujące oprocentowanie lokat w stosunku rocznym: lokata 12-miesięczna – 2,4%, lokata 6-miesięczna – 2,3%, lokata 3-miesięczna – 2,2%. Oblicz, ile wyniosą odsetki po upływie terminu lokaty, jeżeli wpłacimy
a) kwotę 6000 zł na lokatę roczną.
b) kwotę 12 000 na lokatę półroczną.
c) kwotę 24 000 zł na lokatę trzymiesięczną.

6.61. Oprocentowanie lokaty półrocznej wynosi 2,4% w skali roku. Jaką kwotę należy wpłacić na taką lokatę, aby po upływie jej terminu odsetki wyniosły 360 zł?

7. Figury na płaszczyźnie

Definicje

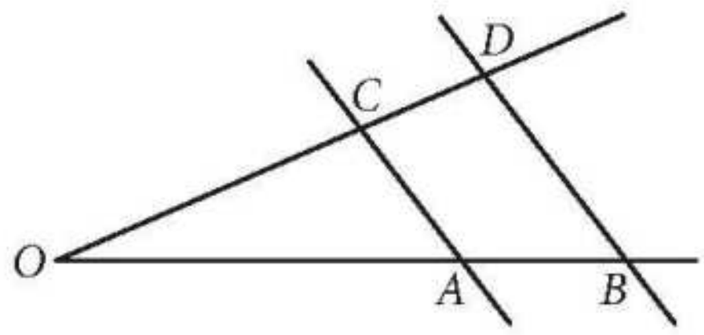
- **Symetralna** odcinka to prosta prostopadła do niego i przechodząca przez jego środek.
- **Dwusieczna** kąta to półprosta o początku w wierzchołku kąta dzieląca ten kąt na dwa przystające kąty.
- **Wysokością** trójkąta nazywamy odcinek prostopadły do prostej zawierającej jeden z boków trójkąta, którego jeden koniec należy do tej prostej, a drugi jest przeciwległym wierzchołkiem trójkąta.
- **Środkową** boku trójkąta nazywamy odcinek łączący środek boku z przeciwległym wierzchołkiem.
- Wielokąt, którego wszystkie boki są równe i wszystkie kąty są równe, nazywamy **wielokątem foremnym**.
- Kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu, nazywamy **kątem środkowym** w tym okręgu.
- **Kątem wpisanym** w okrąg nazywamy kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a każde ramię kąta ma z tym okręgiem jeszcze jeden punkt wspólny.
- Okrąg, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki wielokąta, nazywamy **okręgiem opisanym na tym wielokącie**.
- Okrąg, który jest styczny do każdego boku wielokąta, nazywamy **okręgiem wpisanym w ten wielokąt**.
- **Podobieństwem** o skali $k > 0$ nazywamy każde przekształcenie płaszczyzny, w którym dla dowolnych punktów A, B płaszczyzny oraz ich obrazów A', B' zachodzi równość $\left|A'B'\right| = k \cdot |AB|$.

Twierdzenia

- **Twierdzenie Pitagorasa**
  W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.
- **Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa**
  Jeżeli w trójkącie kwadrat długości najdłuższego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków, to ten trójkąt jest prostokątny.

- **Cechy przystawania trójkątów**
  - Jeżeli dwa trójkąty mają odpowiednie boki równe, to są przystające. (bbb)
  - Jeżeli w dwóch trójkątach dwa boki i kąt między nimi zawarty są odpowiednio równe, to te trójkąty są przystające. (bkb)
  - Jeżeli w dwóch trójkątach bok i dwa kąty do niego przylegające są odpowiednio równe, to te trójkąty są przystające. (kbk)
- Symetralna odcinka jest zbiorem wszystkich punktów równo oddalonych od końców tego odcinka.
- Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków trójkąta. Jest to środek okręgu opisanego na tym trójkącie.
- Dwusieczna kąta wypukłego jest zbiorem wszystkich jego punktów wewnętrznych równo oddalonych od ramion tego kąta.
- Dwusieczne trzech kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest jednakowo oddalony od wszystkich boków trójkąta. Jest to środek okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten, tzw. środek ciężkości trójkąta, dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2:1$, licząc od wierzchołka.
- Trzy proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie, tzw. ortocentrum.
- Dwa okręgi są styczne zewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy odległość między ich środkami jest równa sumie ich promieni.
- Dwa okręgi są styczne wewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy odległość między ich środkami jest równa wartości bezwzględnej różnicy ich promieni.
- **Twierdzenie o odcinkach stycznych**
  Jeżeli z punktu P leżącego poza okręgiem poprowadzimy dwie styczne do tego okręgu w punktach A i B, to $|PA| = |PB|$.
- Kąt wpisany równy jest połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.
- **Twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą**
  Kąt α między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu opartemu na łuku zawartym między ramionami kąta α.
- Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C. Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P, to $|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$.

- Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych kątów tego czworokąta są równe.
- Czworokąt wypukły można opisać na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.
- **Twierdzenie Talesa**
  Jeżeli ramiona kąta są przecięte dwiema prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta.
- **Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa**
  Jeżeli ramiona kąta COA są przecięte dwiema prostymi AC i BD w taki sposób, że odcinki OA i AB leżące na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odcinków OC i CD wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta: $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$, to proste AC i BD są równoległe.

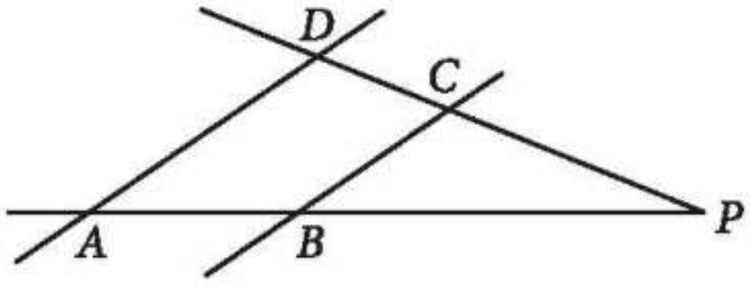


- Dwa wielokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie boki tych wielokątów są proporcjonalne i odpowiednie kąty są równe.
- **Cechy podobieństwa trójkątów**
  - Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.
  - Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąty między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.
  - Jeżeli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.
- Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali ich podobieństwa.
- **Twierdzenie o dwusiecznej**
  Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok trójkąta na odcinki proporcjonalne do boków przyległych do tego kąta.
- W trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego jest równy iloczynowi długości odcinków, na które ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną.

Wnioski, uwagi, komentarze...

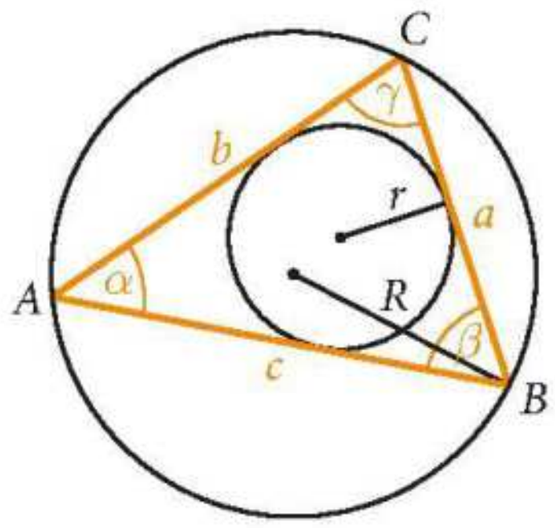
- Wszystkie kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe, ponieważ są równe połowie tego samego kąta środkowego.
- Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.
- Jeżeli proste AD i BC są równoległe, to:

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}, \quad \frac{|PA|}{|BA|} = \frac{|PD|}{|CD|}, \quad \frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$$



- **Wzory na pole trójkąta**

W dowolnym trójkącie ABC przyjmujemy oznaczenia:
a, b, c – długości boków,
α, β, γ – miary kątów wewnętrznych,
h_a, h_b, h_c – wysokości opuszczone odpowiednio na boki: a, b, c,
p – połowa obwodu trójkąta,
r – promień okręgu wpisanego,
R – promień okręgu opisanego.



Pole P trójkąta ABC można obliczyć za pomocą każdego ze wzorów:

$$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \qquad P = p \cdot r$$

$$P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}ac \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha \qquad P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Zadania

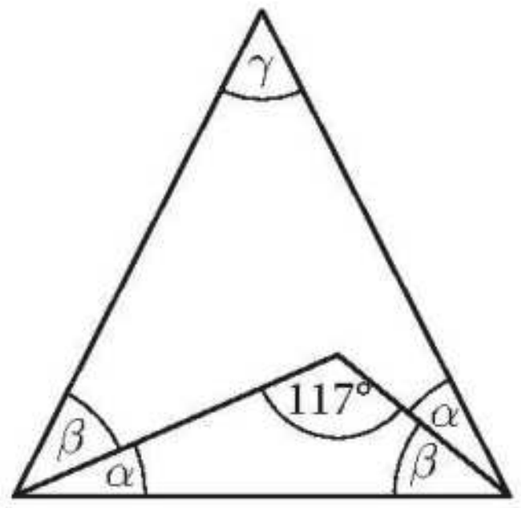
W każdym z zadań 7.1–7.18 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Trójkąt o bokach $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{13}$

A. jest ostrokątny.
B. jest prostokątny.
C. jest rozwartokątny.
D. nie istnieje.

7.2. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
Wskaż miarę kąta γ.

A. $\gamma = 43°$
B. $\gamma = 57°$
C. $\gamma = 54°$
D. $\gamma = 117°$



7.3. Obwód czworokąta wypukłego $ABCD$ jest równy 50 cm. Obwód trójkąta ABD jest równy 46 cm, a obwód trójkąta BCD jest równy 36 cm. Wskaż długość przekątnej BD.

A. 12 cm **C.** 14 cm
B. 16 cm **D.** Jest za mało danych, aby to obliczyć.

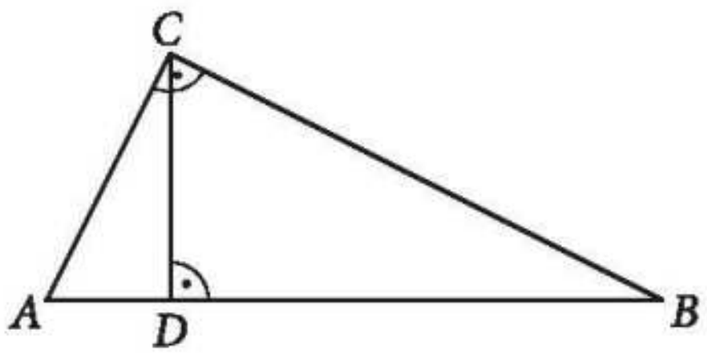
7.4. W trójkącie prostokątnym symetralna przeciwprostokątnej i środkowa wychodząca z wierzchołka kąta prostego tworzą kąt 22°. Zatem kąty ostre tego trójkąta mają miary

A. 56°, 34°. **B.** 68°, 22°. **C.** 62°, 28°. **D.** 54°, 36°.

7.5. Średnica koła w rowerze jest równa 50 cm. Ile pełnych obrotów wykona to koło na dystansie 700 m?

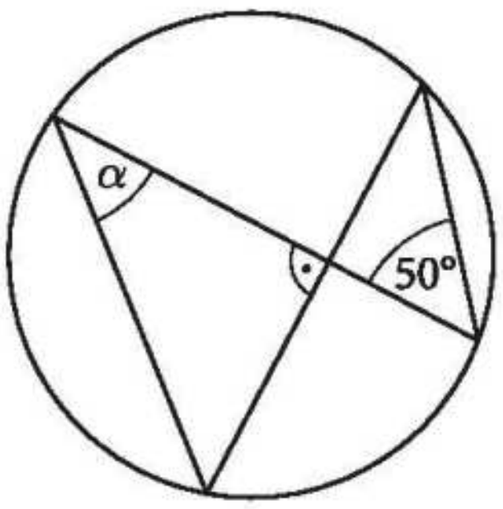
A. 446 **B.** 892 **C.** 891 **D.** 445

7.6. W trójkącie ABC przedstawionym na rysunku: $|AB| = 10$ i $|AD| : |DB| = 1 : 4$.
Jakiej długości są przyprostokątne tego trójkąta?



A. 6 i 8 **C.** $2\sqrt{5}$ i $8\sqrt{5}$
B. $2\sqrt{10}$ i $2\sqrt{15}$ **D.** $2\sqrt{5}$ i $4\sqrt{5}$

7.7. Na rysunku przedstawiono okrąg i niektóre jego cięciwy. Na podstawie podanych informacji wskaż miarę kąta α.



A. 40° **B.** 50° **C.** 60° **D.** 90°

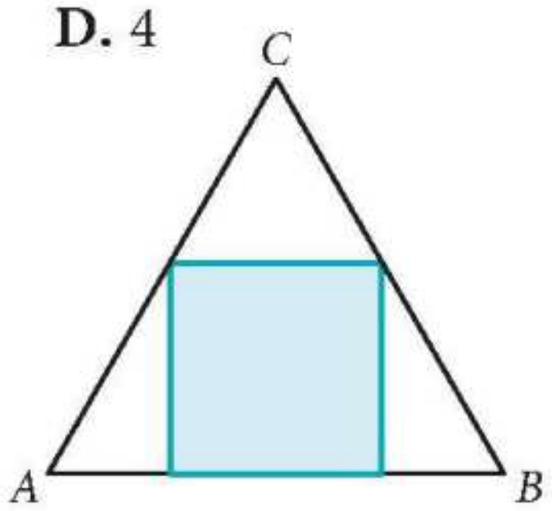
7.8. W trójkącie ABC mamy $|AC| = |BC|$ oraz $\sphericalangle C = 40°$. Wskaż miarę kąta rozwartego między dwusiecznymi kątów A i B.

A. 130° **B.** 120° **C.** 110° **D.** 100°

7.9. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC| = 10$ i $|AB| = 16$, środkowe przecinają się w punkcie S. Wskaż długość odcinka AS.

A. $4\sqrt{3}$ **B.** $4\sqrt{17}$ **C.** $2\sqrt{17}$ **D.** 4

7.10. Pole kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny ABC (zob. rysunek) jest równe 12. Wskaż długość boku trójkąta.



A. $4\sqrt{3}$ **C.** $4 + 2\sqrt{3}$
B. $2 + 2\sqrt{3}$ **D.** 16

7.11. Prosta l jest styczna do okręgu o promieniu 5 cm. Ile jest okręgów o promieniu 3 cm stycznych zewnętrznie do tego okręgu i równocześnie stycznych do prostej l?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

7.12. W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie mają miarę 30°, a wysokość opuszczona na tę podstawę jest równa 1. Wskaż promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

A. $\sqrt{3}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 4 **D.** 2

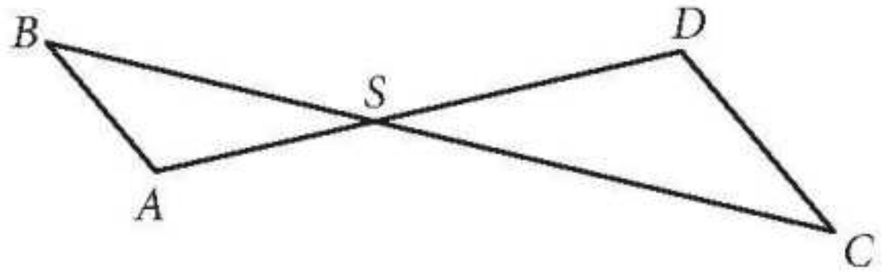
7.13. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$, wysokość poprowadzona z wierzchołka C jest równa 36 i $|AB| = 32$. Wskaż długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka B.

A. 31 **B.** $18\sqrt{3}$ **C.** 30 **D.** $16\sqrt{3}$

7.14. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 12$, $|BC| = 10$, $|CA| = 11$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie D. Wskaż długość odcinka AD.

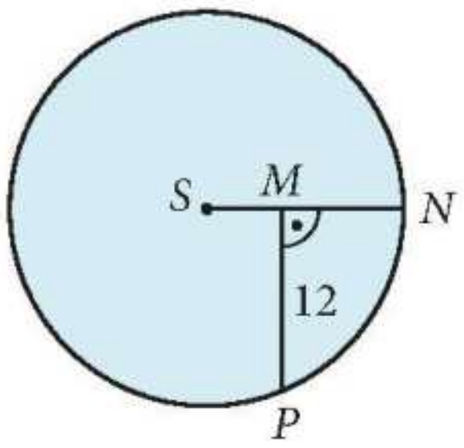
A. 5 **B.** 5,5 **C.** 6 **D.** $\sqrt{30}$

7.15. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wiadomo, że $AB \parallel CD$, $|AB| = 5$, $|BC| = 24$ oraz $|DC| = 7$. Wskaż długość odcinka BS.



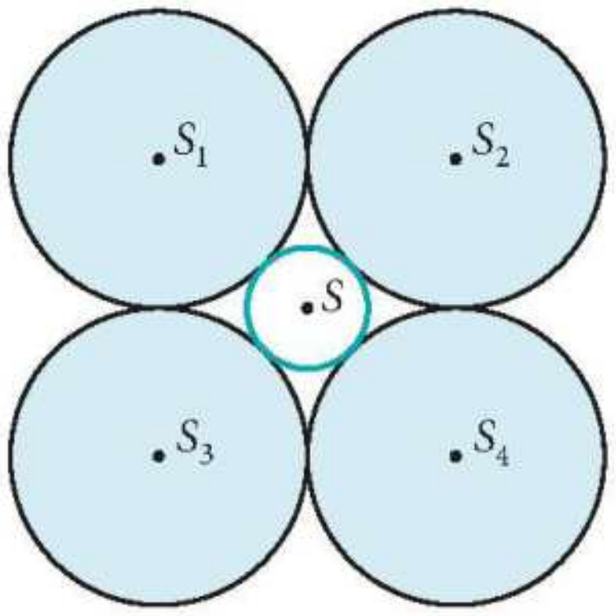
A. 14 **B.** 12 **C.** 10 **D.** 6

7.16. Pole koła o środku S przedstawionego na rysunku jest równe 169π. Długość odcinka MP wynosi 12. Wskaż długość odcinka NM.



A. 8 **B.** 7 **C.** 6 **D.** 5

7.17. Dane są cztery koła o równych promieniach, środkach S_1, S_2, S_3, S_4, parami styczne zewnętrznie. Suma pól tych kół wynosi 16π. Ile jest równy promień okręgu o środku S stycznego zewnętrznie do każdego z wymienionych kół, położonego jak na rysunku?



A. $4\left(\sqrt{2}-1\right)$ **C.** $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

B. 0,5 **D.** 1

7.18. Drzewo rzuca cień o długości 12 m. Pionowo ustawiony drążek o wysokości 90 cm rzuca cień o długości 72 cm. Wskaż wysokość drzewa.

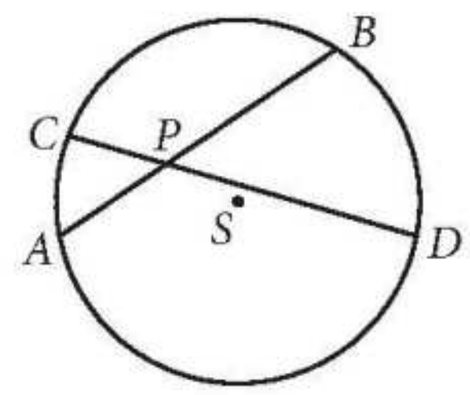
A. $8\sqrt{2}$ m **B.** 16 m **C.** $8\sqrt{3}$ m **D.** 15 m

W zadaniach 7.19–7.22 oceń prawdziwość podanych zdań.

7.19. W trójkącie ABC kąt przyległy do kąta ABC jest dwa razy większy od kąta BAC. Trójkąt ABC jest

A. ostrokątny. **B.** równoramienny. **C.** rozwartokątny.

7.20. Cięciwy AB i CD okręgu o środku w punkcie S przecinają się w punkcie P, przy czym $|AB| \neq |CD|$ (zob. rysunek).

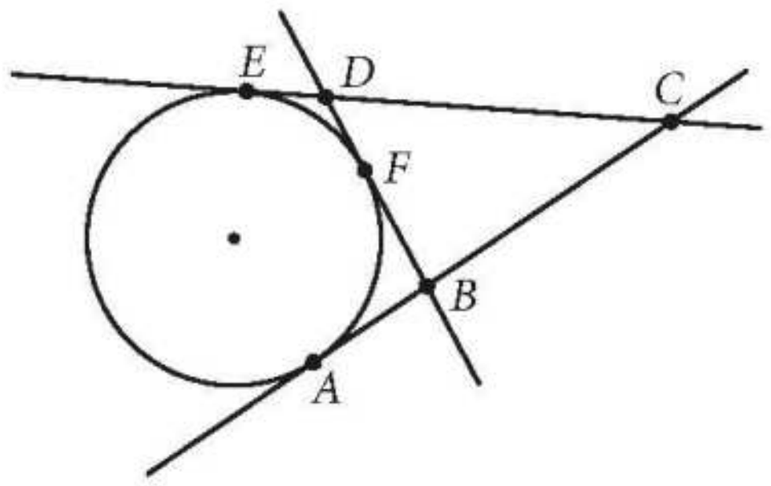


A. $\sphericalangle APD = 2 \cdot \sphericalangle ABD$

B. Trójkąty APC i DPB są podobne.

C. Trójkąty ACB i DBC są podobne.

7.21. Proste BC, CD i DB są styczne do okręgu odpowiednio w punktach A, E i F (zob. rysunek).



A. $|AB| = |BF|$

B. $|ED| = |DF|$

C. $|EC| = |AC|$

7.22. W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ przekątna BF ma długość 4.

A. Pole tego sześciokąta jest równe $8\sqrt{3}$.

B. Obwód tego sześciokąta wynosi $8\sqrt{3}$.

C. Promień okręgu opisanego na tym sześciokącie jest równy $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

7.23. W trójkącie ABC dane są $|AB| = 8$ i $|BC| = |AC| = 5$. **Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.**

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy

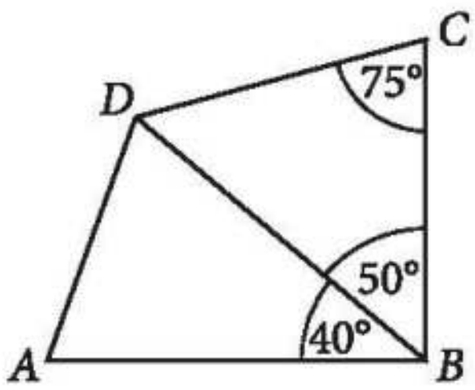
A.	2,	ponieważ	**1.**	trójkąt ABC jest prostokątny.
B.	4,		**2.**	wynika to z twierdzenia sinusów.
C.	$4\frac{1}{6}$,		**3.**	stanowi on $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta opuszczonej na podstawę.

7.24. Liczby 4, 10, c są długościami boków trójkąta równoramiennego. Oblicz c.

7.25. Liczby 6, 10, c są długościami boków trójkąta równoramiennego. Oblicz c.

7.26. Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AB| = |AD| = |CD|$. Oblicz miary kątów trójkąta ABC.

7.27. Na rysunku podano miary niektórych kątów w czworokącie $ABCD$, w którym $|AB| = |DB|$. Oblicz miarę kąta ADC.



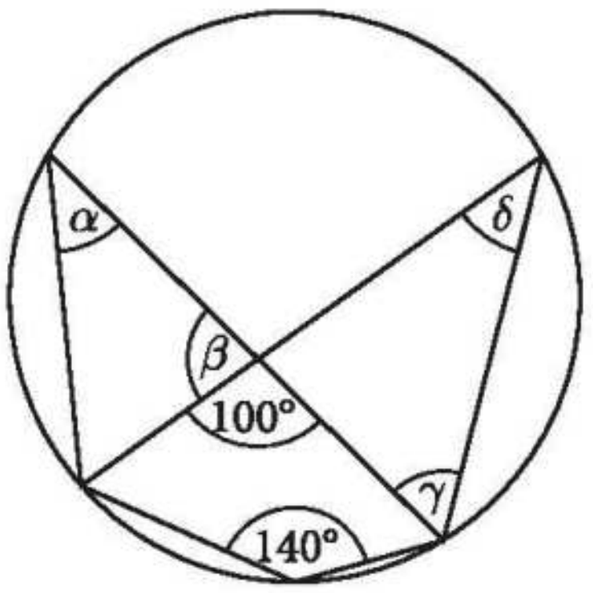
7.28. Pod wpływem silnego wiatru wysoka sosna pochyliła się do poziomu pod kątem 72°. Pod jakim kątem padają promienie słoneczne, jeżeli długość sosny równa jest długości jej cienia?

7.29. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 3{,}2$, $|AC| = 2{,}3$ i $\sphericalangle BAC = 72°$. Oblicz pole tego trójkąta. Podaj wynik z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

7.30. Koło o średnicy 72 cm toczy się po prostej drodze długości 5 m. Ile pełnych obrotów wykona koło?

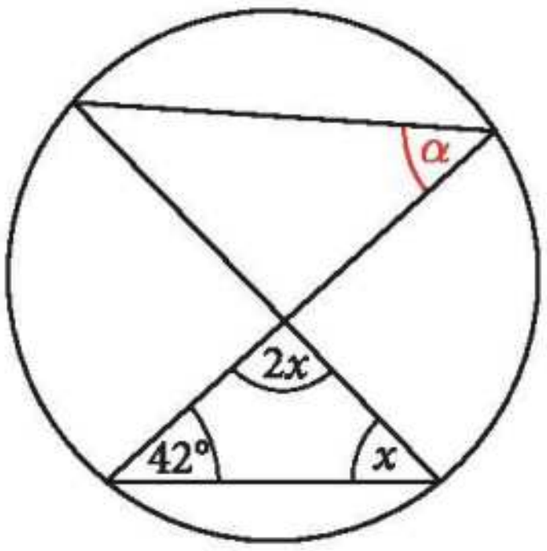
7.31. Pięć jednakowych kół o promieniu 18 cm jest stycznych zewnętrznie do koła o promieniu r. Ponadto każde z nich jest styczne zewnętrzne do dwóch sąsiednich kół. Oblicz r z dokładnością do 0,1 cm.

7.32. Na rysunku zaznaczono cięciwy w okręgu i niektóre kąty wyznaczone przez te cięciwy. Oblicz kąty: α, β, γ, δ.

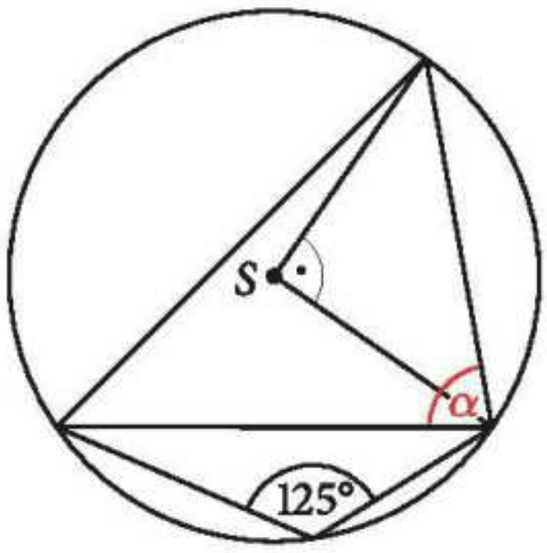


7.33. Na rysunku zaznaczono cięciwy w okręgu i niektóre kąty wyznaczone przez te cięciwy. Oblicz miarę kąta α (punkt S jest środkiem okręgu).

a)



b)



7.34. W trójkącie ABC wysokość CD dzieli bok AB na odcinki o długościach $|AD| = 3$ cm i $|BD| = 5$ cm. Bok BC ma długość 7 cm. Na jakie części zostanie podzielony bok BC symetralną boku AB?

7.35. W trójkącie ABC, w którym $|AB| = 16$, poprowadzono prostą równoległą do AB przecinającą bok AC w punkcie K i bok BC w punkcie L. Odcinek KL ma długość 12, a wysokość CE trójkąta KLC jest równa 15. Oblicz pole trapezu $ABLK$.

7.36. W trójkącie ABC poprowadzono odcinek RQ równoległy do boku AB (R leży na boku AC, Q leży na boku BC) i odcinek PQ równoległy do boku AC (P leży na boku AB). Dane są długości: $|PB| = 8$, $|QB| = 9$, $|PQ| = 7$, $|RQ| = 4$. Oblicz obwód trójkąta ABC.

7.37. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8, a $\sphericalangle BAC = 30°$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

7.38. W trójkącie prostokątnym ABC dane są długości przyprostokątnych: $|AC| = 2{,}4$ i $|AB| = 3{,}2$. Z punktu K będącego środkiem boku AC poprowadzono odcinek KL ($L \in BC$) prostopadły do boku BC. Z punktu M będącego środkiem boku AB poprowadzono odcinek MN ($N \in BC$) prostopadły do boku BC. Oblicz długości odcinków KL i MN.

7.39. Stosunek długości przekątnych rombu jest równy $4 : 3$. Oblicz stosunek obwodu rombu do sumy długości jego przekątnych.

7.40. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Kąt ACS jest trzy razy większy od kąta BAS, a kąt CBS jest dwa razy większy od kąta BAS. Oblicz kąty trójkąta ABC.

7.41. Boki trójkąta opisanego na okręgu mają długości równe 10, 14 i 20. Oblicz odległości wierzchołków tego trójkąta od punktów styczności boków z okręgiem.

7.42. W okrąg o promieniu 3 cm wpisano kąt o mierze 30°. W punktach przecięcia okręgu z ramionami kąta poprowadzono styczne do tego okręgu. Oblicz odległość punktu przecięcia stycznych od środka okręgu.

D **7.43.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w koło o środku S. Przekątna AC jest średnicą koła, a kąt BSD ma miarę 102°. Wykaż, że kąt ostry tego czworokąta jest równy 51°.

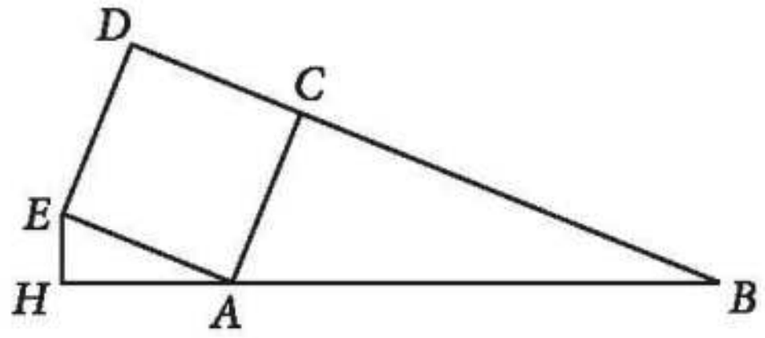
7.44. Na okręgu o promieniu 4 cm opisano trapez prostokątny, którego najkrótszy bok jest 1,5 raza większy od promienia okręgu. Oblicz pole tego trapezu.

7.45. Trapez równoramienny $ABCD$ jest opisany na okręgu o promieniu $\frac{3}{2}$ cm. Przekątna AC ma długość 5 cm. Oblicz obwód tego trapezu.

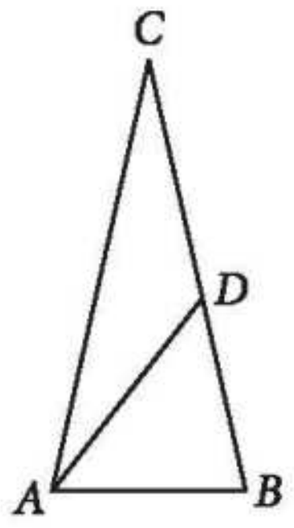
7.46. Środek podstawy trójkąta równoramiennego o ramionach długości 25 cm i podstawie równej 14 cm jest równocześnie środkiem okręgu stycznego do ramion trójkąta. Oblicz promień tego okręgu.

7.47. W trapezie opisanym na okręgu o promieniu 5,23 cm jeden z kątów jest prosty, a kąt ostry ma miarę 46°. Oblicz pole trapezu z dokładnością do 1 cm^2.

7.48. Na zewnątrz trójkąta prostokątnego ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90°$, $|AC| = 5$ i $|BC| = 12$, zbudowano kwadrat $ACDE$, jak na rysunku. Punkt H leży na prostej AB i $\sphericalangle EHA = 90°$. Oblicz pole trójkąta HAE.



D **7.49.** Punkt D leży na boku BC przedstawionego na rysunku trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$. Udowodnij, że $\sphericalangle ADC = 5 \cdot \sphericalangle ACD$.



7.50. W trapezie równoramiennym dane są: miara kąta ostrego równa 50° i długość ramienia równa 6 cm. Środek okręgu opisanego na tym trapezie należy do jego podstawy. Oblicz pole trapezu. Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

7.51. W trapezie $ABCD$ dane są: $AC = 5$, $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ABC = 30°$. Proste AD i BC, w których zawierają się ramiona trapezu, są prostopadłe. Oblicz pole trapezu.

7.52. W trójkącie równobocznym ABC poprowadzono odcinek AD taki, że punkt D leży na boku BC. Stosunek pola trójkąta ADC do pola trójkąta ADB jest równy $1 : 3$. Wyznacz tangens kąta DAB.

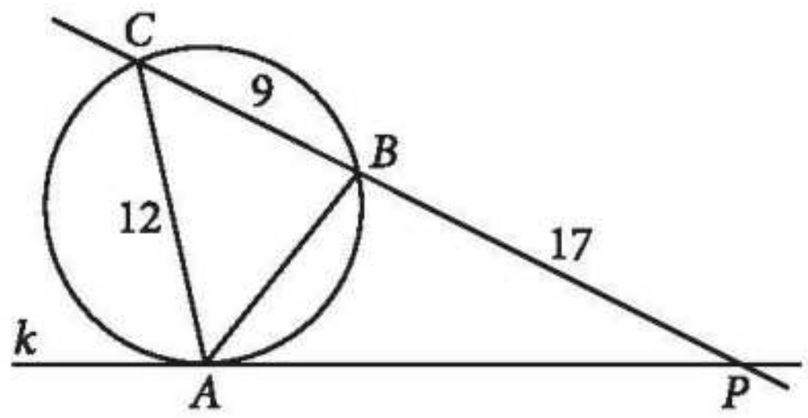
7.53. Oblicz stosunek promienia koła opisanego na ośmiokącie foremnym do promienia koła wpisanego w ten ośmiokąt.

7.54. Prosta równoległa do boku AB trójkąta ABC przecina bok AC w punkcie M i dzieli trójkąt na części o równych polach. Wyznacz stosunek $|AM| : |MC|$.

7.55. Dany jest trójkąt ABC, w którym wysokość CD równa 5 cm dzieli bok AB na dwie części: $|AD| = 4$ cm i $|DB| = 8$ cm. Znajdź długość odcinka równoległego do CD, którego końce leżą na bokach trójkąta i który dzieli ten trójkąt na części o równych polach.

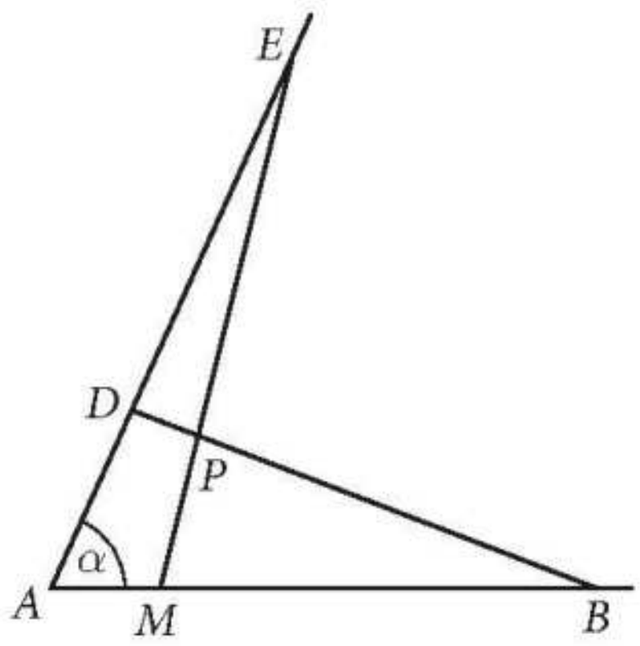
7.56. Okrąg przechodzący przez wierzchołek kąta ostrego i wierzchołki kątów rozwartych rombu dzieli przekątną rombu na odcinki o długościach 25 cm i 7 cm. Oblicz pole rombu.

7.57. Dane są trójkąt ABC i prosta k styczna w punkcie A do okręgu opisanego na tym trójkącie, jak na rysunku. Prosta BC przecina prostą k w punkcie P. Długości odcinków AC, BC i PB podano na rysunku. Oblicz długość odcinka AB.

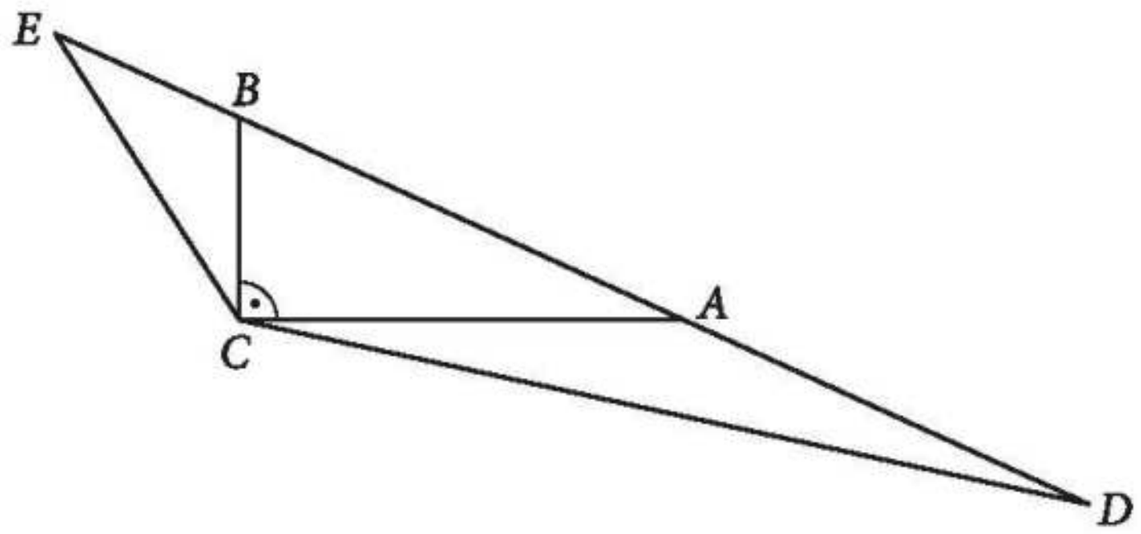


D * **7.58.** Na rysunku 1 przedstawiono kąt α o wierzchołku A. Na jednym ramieniu tego kąta wybrano punkty E i D takie, że $|AE| = 3|AD|$, a na drugim – punkty M i B takie, że $|MB| = 4|AM|$. Odcinek ME przecina odcinek BD w punkcie P. Wykaż, że $|BP| = 6|PD|$.

D **7.59.** Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C i obwodzie równym $2p$. Na prostej AB obrano punkty D i E leżące poza odcinkiem AB takie, że $|AD| = |AC|$ i $|BE| = |BC|$, jak na rysunku 2. Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ECD jest równy $p\sqrt{2}$.



Rys. 1.



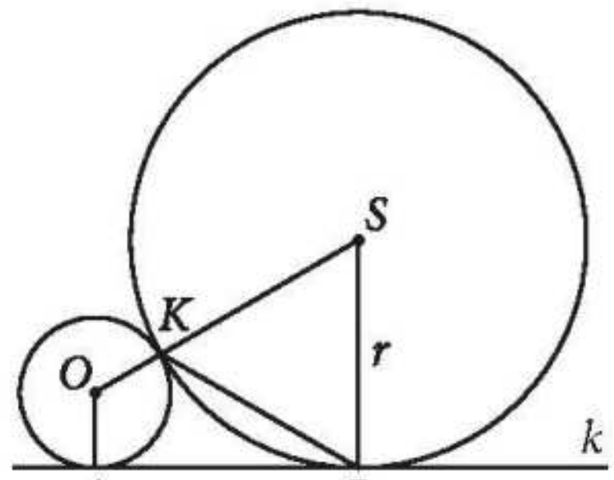
Rys. 2.

7.60. W równoległoboku $ABCD$ dane są: $|AB| = |BD| = a$ oraz $|AC| = 2a$. Oblicz długość boku AD oraz cosinus kąta ostrego α utworzonego przez przekątne tego równoległoboku.

7.61. Na okręgu o promieniu 1 opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD. Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$. Wyznacz długość ramienia tego trapezu.

7.62. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ i $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC.

7.63. Okręgi o środkach w punktach O i S są styczne zewnętrznie w punkcie K i styczne do prostej k w punktach A i B, jak na rysunku. Trójkąt BSK jest równoboczny. Wiedząc, że $|SB| = r$, oblicz długość odcinka OA.

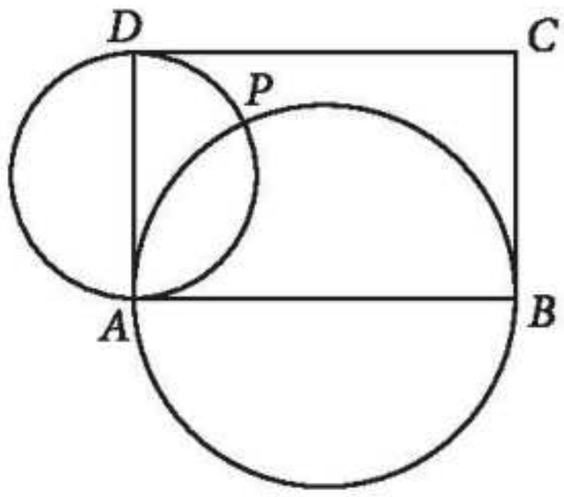


D **7.64.** Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Udowodnij, że $MQ \parallel PN$.

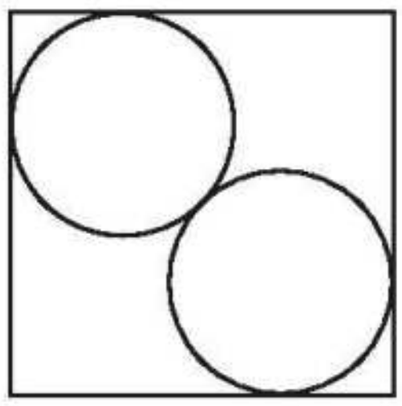
D **7.65.** Dany jest prostokąt $ABCD$ (rys. 1). Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P, jak na rysunku. Wykaż, że punkty B, P i D leżą na jednej prostej.

D **7.66.** W kwadrat o boku 1 wpisano dwa przystające okręgi o promieniu r styczne zewnętrznie i styczne do boków kwadratu, jak na rysunku 2. Wykaż, że $r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

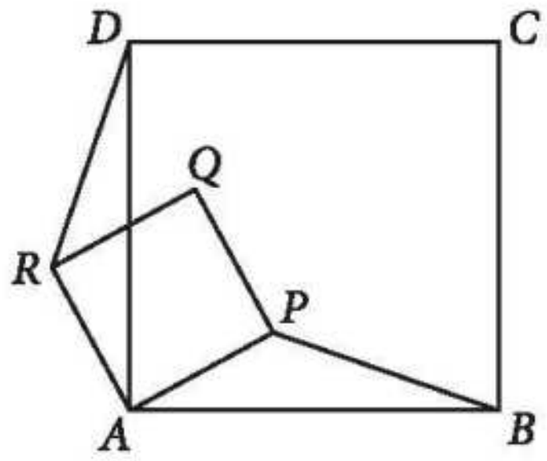
D **7.67.** Czworokąty $ABCD$ i $APQR$ na rysunku 3 są kwadratami. Udowodnij, że $|BP| = |DR|$.



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

7.68. Oblicz długość dłuższej przekątnej równoległoboku, którego boki mają długości 9 i 4, a kąt ostry ma miarę 45°.

8. Geometria analityczna

Definicje

- Uporządkowaną parę punktów (A, B) nazywamy **wektorem o początku** A **i końcu** B i oznaczamy symbolem $\overrightarrow{AB}$.
- **Współrzędnymi wektora** $\overrightarrow{AB}$ o początku $A = (x_A, y_A)$ i końcu $B = (x_B, y_B)$ nazywamy uporządkowaną parę liczb $[x_B - x_A, y_B - y_A]$.
- Równanie $y = ax + b$ o zmiennych x, y nazywamy **równaniem prostej w postaci kierunkowej**. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** tej prostej.
- Równanie $Ax + By + C = 0$ o zmiennych x, y, w którym A i B nie są jednocześnie równe 0, nazywamy **równaniem prostej w postaci ogólnej**.

Twierdzenia

- Dane są wektory $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$. Zachodzą równości:
  $\vec{u} + \vec{v} = [a + c, b + d]$, $\vec{u} - \vec{v} = [a - c, b - d]$, $k \cdot \vec{u} = [k \cdot a, k \cdot b]$ dla $k \in \mathbf{R}$.
- Jeżeli $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to wektor $\overrightarrow{AB}$ ma długość:
  $$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
- Środkiem odcinka o końcach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest punkt
  $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- Środkiem ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ jest punkt $S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.
- Prosta $y = ax + b$ jest nachylona do osi x pod takim kątem α, że $\operatorname{tg}\alpha = a$.
- Odległość między punktami $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest równa
  $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Proste o równaniach $y = a_1 x + b_1$ i $y = a_2 x + b_2$ $(a_1 a_2 \neq 0)$ są:
  - równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$,
  - prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = -\frac{1}{a_2}$.

- Prosta l jest równoległa do prostej k: $Ax + By + C = 0$ $\left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$ wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $Ax + By + C_1 = 0$. Ponadto jeżeli $C = C_1$, to $k = l$, a jeżeli $C \neq C_1$, to $k \neq l$.
- Prosta l jest prostopadła do prostej k: $Ax + By + C = 0$ $\left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$ wtedy i tylko wtedy, gdy równanie prostej l można zapisać w postaci $Bx - Ay + C_1 = 0$.
- Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ $\left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$ jest równa $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
- Równanie $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ $(r > 0)$ opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej okrąg o środku $S = (a, b)$ i promieniu r.
- Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii:
  - osiowej względem osi x jest punkt $A' = (x, -y)$,
  - osiowej względem osi y jest punkt $A' = (-x, y)$.
  - środkowej względem początku układu współrzędnych jest punkt $A' = (-x, -y)$.

Wnioski, uwagi, komentarze…

- Równanie $Ax + By + C = 0$ opisuje:
  - całą płaszczyznę, gdy $A = B = C = 0$,
  - zbiór pusty, gdy $A = B = 0$ i $C \neq 0$,
  - prostą, gdy A i B nie są jednocześnie równe 0.
- Jeżeli mamy wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, to najpierw sprawdzamy, czy pierwsze współrzędne tych punktów są równe – jeśli tak, prosta ma równanie postaci $x = c$. Jeśli pierwsze współrzędne tych punktów są różne, korzystamy z postaci kierunkowej równania prostej: $y = ax + b$.
- Prosta o równaniu $Ax + By + C = 0$ jest wspólnym brzegiem dwóch półpłaszczyzn domkniętych. Jedną z tych półpłaszczyzn opisuje nierówność $Ax + By + C \geqslant 0$, a drugą – nierówność $Ax + By + C \leqslant 0$. Nierówności $Ax + By + C > 0$ i $Ax + By + C < 0$ opisują półpłaszczyzny otwarte.
- Równanie $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej okrąg o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, o ile $a^2 + b^2 > c$.
- Równanie okręgu:
  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ $(r > 0)$ nazywamy równaniem **w postaci kanonicznej**,
  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ $\left(a^2 + b^2 > c\right)$ nazywamy równaniem **w postaci ogólnej**.

- Nierówność $(x-a)^2+(x-b)^2 \leqslant r^2$ $(r>0)$ opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej **koło o środku** $S=(a, b)$ **i promieniu** r. Nierówność $(x-a)^2+(x-b)^2>r^2$ opisuje zbiór punktów leżących na zewnątrz tego koła.

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.24 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

8.1. Punkt $(-1, 7)$ jest środkiem odcinka AB, w którym $A=\left(3-2\sqrt{7}, \sqrt{3}\right)$. Wskaż współrzędne punktu B.

A. $\left(-5-2\sqrt{7}, 7-\sqrt{3}\right)$ **C.** $\left(-5-2\sqrt{7}, 14-\sqrt{3}\right)$

B. $\left(5+2\sqrt{7}, 14-\sqrt{3}\right)$ **D.** $\left(-5+2\sqrt{7}, 14-\sqrt{3}\right)$

8.2. Odległość punktu przecięcia prostych $y=-3$ oraz $2x+y=7$ od początku układu współrzędnych jest równa

A. 8. **B.** $2\sqrt{17}$. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

8.3. Wierzchołkami trójkąta są punkty $A=(-3, 4)$, $B=(1, -2)$, $C=(5, 8)$. Wskaż długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka B.

A. 4 **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** 8 **D.** $2\sqrt{17}$

8.4. Wskaż równanie prostej, która tworzy z osią x kąt o mierze 120°.

A. $y=\sqrt{3}x-3$ **B.** $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$ **C.** $y+\sqrt{3}x=\sqrt{3}$ **D.** $2y+x+4=0$

8.5. Wskaż środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A=(-5, -1)$, $B=(7, 3)$, $C=(1, 7)$.

A. $(2, 3)$ **B.** $(1, 4)$ **C.** $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ **D.** $(1, 3)$

8.6. Ile wynosi pole czworokąta $ABCD$, w którym $A=(-1, -1)$, $B=(6, -1)$, $C=(6, 3)$, $D=(-1, 3)$?

A. 18 **B.** 28 **C.** 30 **D.** 48

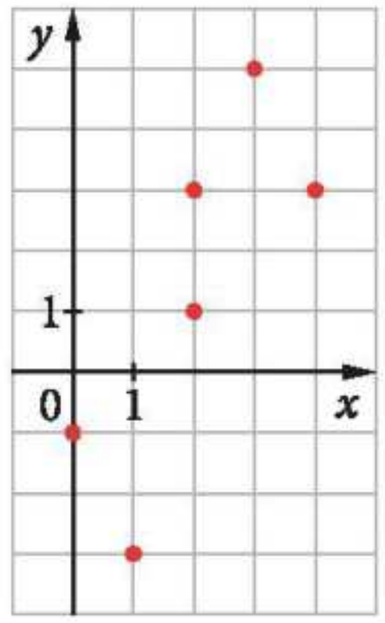
8.7. Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach $x-1=0$, $y+4=0$, $2x-y=0$. Pole tego trójkąta jest równe

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{10}$. **C.** 9. **D.** 4,5.

8.8. W równoległoboku $ABCD$, w którym $A=(1, 0)$, $B=(x_B, 0)$ i $C=(x_C, 3)$, kąt BAD ma miarę 30° i $|AB|=|AD|$. Wskaż obwód tego równoległoboku.

A. $24\sqrt{3}$ **B.** 24 **C.** 12 **D.** $12\sqrt{3}$

8.9. Która z prostych nie przechodzi przez żaden z punktów kratowych zaznaczonych na rysunku?



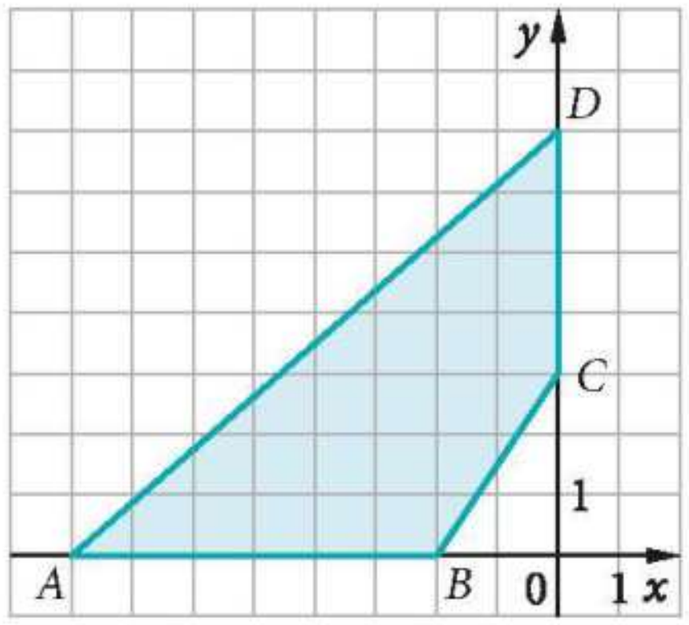
A. $x - y - 1 = 0$ **C.** $2x - y - 1 = 0$

B. $4x - y - 7 = 0$ **D.** $x - 2y + 1 = 0$

8.10. Wskaż odległość między prostymi $3x + y = 1$ i $3x + y = 6$.

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$ **C.** $\sqrt{5}$ **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$

8.11. Pole czworokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku jest równe



A. 25. **C.** 12,5.

B. 50. **D.** $12\sqrt{3}$.

8.12. Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ z osiami układu współrzędnych jest równa

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

8.13. Wskaż punkt nienależący do okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + y^2 - 9 = 0$.

A. $\left(1, \sqrt{5}\right)$ **B.** $(6, 0)$ **C.** $\left(1, -\sqrt{5}\right)$ **D.** $\left(1, \sqrt{2}\right)$

8.14. Odległość między środkami okręgów o równaniach $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ oraz $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 6$ jest równa

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $2 + \sqrt{6}$. **D.** 10.

8.15. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą nierówności $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 0$?

A. zbiór pusty **C.** zbiór jednoelementowy

B. koło **D.** okrąg

8.16. Jaki zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej jest opisany za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x - 4)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 4 \\ y + x = 2 \end{cases}$?

A. odcinek **B.** koło **C.** półpłaszczyzna **D.** zbiór pusty

8.17. Prosta o równaniu $3x - y + 20 = 0$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $S = (3, -1)$. Wskaż promień tego okręgu.

A. 9 **B.** $\sqrt{10}$ **C.** $\sqrt{30}$ **D.** $3\sqrt{10}$

8.18. Okrąg o równaniu $(x+9)^2+(y-4)^2=11$ przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $(0, 0)$. Wskaż równanie otrzymanego okręgu.

A. $(x-9)^2+(y-4)^2=11$
C. $(x-9)^2+(y+4)^2=11$
B. $(x+9)^2+(y+4)^2=11$
D. $(x-4)^2+(y+9)^2=11$

8.19. Wskaż równanie okręgu, który jest styczny do osi układu współrzędnych w punktach $P=(5, 0)$ i $Q=(0, -5)$.

A. $(x-5)^2+(y+5)^2=5$
C. $(x+5)^2+(y-5)^2=25$
B. $(x+5)^2+(y+5)^2=25$
D. $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

8.20. Trójkąt $A'B'C'$ jest obrazem trójkąta o wierzchołkach $A=(-3, -1)$, $B=(7, -2)$, $C=(2, 6)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wskaż współrzędne środka ciężkości trójkąta $A'B'C'$.

A. $(-2, -1)$ **B.** $(2, 1)$ **C.** $(-2, 1)$ **D.** $(2, -1)$

8.21. Wskaż współrzędne obrazu punktu $P=(1, 5)$ w symetrii środkowej względem punktu $T=(-2, -1)$.

A. $(-1, -5)$ **B.** $(1, -5)$ **C.** $(-5, -7)$ **D.** $(-4, -6)$

8.22. Dane są wektory $\vec{u}=[2, 1]$, $\vec{v}=[-1, -8]$ oraz punkty $A=(-1, 2)$ i $B=(4, -3)$. Wskaż zależność prawdziwą.

A. $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}+\vec{v}$ **B.** $\overrightarrow{AB}=-3\vec{u}+\vec{v}$ **C.** $\overrightarrow{AB}=4\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ **D.** $\overrightarrow{AB}=3\vec{u}+\vec{v}$

8.23. Punkt P jest środkiem symetrii równoległoboku $ABCD$. Wskaż zależność prawdziwą.

A. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}\right)$
C. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}\right)$
B. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CB}\right)$
D. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

8.24. Wskaż równanie prostej, która nie jest osią symetrii kwadratu o wierzchołkach $(-5, -1)$, $(1, -5)$, $(5, 1)$, $(-1, 5)$.

A. $2y=3x$ **B.** $x-5y=0$ **C.** $2x+5y=0$ **D.** $2x+3y=0$

W zadaniach 8.25–8.29 oceń prawdziwość podanych zdań.

8.25. Dany jest punkt $S=(0, -8)$.

A. Okrąg $o\left(S, \sqrt{3}\right)$ można opisać za pomocą równania $x^2+(y+8)^2=3$.

B. Punkt $N=(1, -8)$ należy do koła $k\left(S, \sqrt{3}\right)$.

C. Punkt $M=\left(0, \sqrt{3}-8\right)$ należy do okręgu $o\left(S, \sqrt{3}\right)$.

8.26. Dany jest okrąg o środku $S = (-3, 7)$ i promieniu $r = 5$ oraz prosta k: $4y - 3x = 12$.

A. Prosta k jest styczna do okręgu $o(S, r)$.

B. Prosta k przecina okrąg $o(S, r)$.

C. Figura utworzona przez prostą k i okrąg $o(S, r)$ ma dokładnie jedną oś symetrii.

8.27. Zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej opisany za pomocą układu warunków $\begin{cases} (x+3)^2 + (y-1)^2 \leqslant 4 \\ y = 3 + 2x \end{cases}$

A. jest odcinkiem. **B.** ma dokładnie dwie osie symetrii. **C.** jest zbiorem pustym.

8.28. Figurę F tworzą: koło oraz dwa punkty nienależące do tego koła. Figura F

A. ma zawsze dokładnie jeden środek symetrii.

B. ma zawsze oś symetrii.

C. może mieć oś symetrii.

8.29. Po przekształceniu okręgu F przez symetrię osiową względem osi x otrzymano okrąg F'. Figura będąca sumą okręgów F i F'

A. ma zawsze dokładnie dwie osie symetrii.

B. może mieć tylko jedną oś symetrii.

C. może mieć nieskończenie wiele osi symetrii.

8.30. Figura F jest sumą prostej k: $2x+y+4=0$ i okręgu o: $(x+3)^2+(y-2)^2=6$.
Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.
Figura F

A.	nie ma osi symetrii,	ponieważ	**1.**	prosta k przechodzi przez środek okręgu o.
B.	ma jedną oś symetrii,		**2.**	prosta k jest styczna do okręgu o.
C.	ma dwie osie symetrii,		**3.**	prosta k nie ma punktów wspólnych z okręgiem o.

8.31. Wyznacz kąt nachylenia do osi x prostej o podanym równaniu.

a) $y = x - 3$ b) $y = \sqrt{3}x$ c) $y = -x + 2$ d) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$

8.32. Sprawdź, czy punkty A, B, C są współliniowe.

a) $A = (1, 2)$, $B = (0, -1)$, $C = (-1, -4)$

b) $A = (-1, 5)$, $B = (2, 2)$, $C = (3, 1)$

c) $A = (0, 0)$, $B = (1, -3)$, $C = (2, -5)$

8.33. Napisz równania boków trójkąta o danych wierzchołkach A, B, C.
a) $A = (-3, -3)$, $B = (3, -1)$, $C = (1, 5)$
b) $A = (-2, 2)$, $B = (0, 5)$, $C = (-2, 11)$

8.34. Sprawdź, czy dane proste k i l pokrywają się, są równoległe i różne, czy się przecinają. Jeśli się przecinają, to wyznacz ich punkt wspólny.
a) k: $y = -\frac{2}{3}x + 4$ $\quad$ l: $2x + 3y + 4 = 0$
b) k: $x - 3y + 5 = 0$ $\quad$ l: $y = 3x - 5$
c) k: $-2x + 4y - 7 = 0$ $\quad$ l: $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{3}{4}$

8.35. Dane jest równanie prostej l: $3x + 2y - 4 = 0$. Napisz równanie prostej k
a) równoległej do l i przechodzącej przez punkt $K = (-2, -5)$.
b) prostopadłej do l i przechodzącej przez punkt $M = (-3, 0)$.

8.36. Określ wzajemne położenie prostych l, k, p, q.
l: $2x - y + 7 = 0$, $\quad k$: $\frac{1}{2}x + y - 2 = 0$, $\quad p$: $x + 2y - 8 = 0$, $\quad q$: $x + 2y - 4 = 0$

8.37. Wyznacz wartość m, dla której proste $(3m - 8)x - 3y - 18 = 0$ i $x - 3y - 12 = 0$ są
a) równoległe. $\quad$ b) prostopadłe.

8.38. Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-3, 1)$, $Q = (5, 3)$.

8.39. Punkt $A = (5, -3)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC. Punkty A i B są symetryczne względem osi x, a punkty A i C są symetryczne względem osi y.
a) Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C.
b) Oblicz pole tego trójkąta.

8.40. Wyznacz równanie prostej, która jest symetryczna do prostej o równaniu $2x - y + 5 = 0$ względem początku układu współrzędnych.

8.41. Oblicz obwód trójkąta o wierzchołkach $P = (0, -2)$, $Q = (6, -8)$, $R = (2, 2)$.

8.42. Oblicz długość środkowej CD w trójkącie o wierzchołkach $A = (-2, -5)$, $B = (4, -7)$, $C = (3, -1)$.

8.43. W trójkącie ABC dane są wierzchołki $A = (3, 5)$ i $B = (-7, -1)$ oraz punkt $S = (-5, 4)$ będący środkiem boku BC. Wyznacz równanie prostej zawierającej bok AC tego trójkąta.

8.44. Dane są punkty: $A = (1, 3)$, $B = (4, 7)$ i $C = (-2, -3)$. Oblicz odległość punktu A od środka odcinka BC.

8.45. Punkty $A = (-1, -6)$ i $B = (4, 2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $S = (1, -1)$ jest jego środkiem symetrii. Oblicz obwód tego równoległoboku.

8.46. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-3, 4)$, $B = (5, 2)$, $C = (6, 6)$.

D a) Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

b) Oblicz pole tego trójkąta.

c) Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

8.47. Oblicz pole i obwód trójkąta o wierzchołkach $A = (-5, -1)$, $B = (-1, 7)$, $C = (3, 0)$.

8.48. Sprawdź, czy czworokąt o wierzchołkach $A = (-6, 0)$, $B = (5, -7)$, $C = (4, 6)$, $D = (-7, 13)$ jest rombem. Oblicz pole tego czworokąta.

8.49. W trójkącie ABC dane są: wierzchołek $A = (3, -4)$, wysokość CD: $7x - 2y - 1 = 0$ oraz wysokość BE: $2x - 7y - 6 = 0$. Wyznacz równania prostych zawierających boki tego trójkąta.

8.50. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (0, 5)$, $B = (6, -1)$, $C = (7, 8)$. Wyznacz

a) równanie wysokości tego trójkąta opuszczonej z wierzchołka C.

b) równanie środkowej wychodzącej z wierzchołka C.

c) pole trójkąta ABC.

8.51. Dane są trzy wierzchołki równoległoboku $ABCD$: $A = (-3, 2)$, $B = (6, -1)$, $C = (10, 1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D oraz oblicz pole równoległoboku.

D **8.52.** Wykaż, że prosta o równaniu $y + 2x = 4$ jest osią symetrii pięciokąta o wierzchołkach: $A = (2, -3)$, $B = (4, -2)$, $C = (4, 6)$, $D = (-1, 6)$, $E = (-4, 2)$.

8.53. Punkty $C = (2, 2)$ i $D = (1, 5)$ dzielą odcinek AB na trzy równe części. Punkty są położone w kolejności: A, C, D, B. Wyznacz współrzędne początku i końca wektora $\overrightarrow{AB}$.

8.54. W układzie współrzędnych dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$, $C = (2, 3)$, a D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ mają współrzędne: $\overrightarrow{AB} = [6, 4]$ i $\overrightarrow{CD} = [-2, 3]$. Wyznacz równania boków trójkąta ABC.

D **8.55.** W czworokącie $ABCD$ dane są $A = (7, 3)$, $C = (-3, 1)$ i $\overrightarrow{AB} = [-8, -8]$. Punkt $S = \left(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ jest środkiem boku AD. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

8.56. Dane są punkty $A = (3, -5)$, $B = (-1, 3)$, $C = (1, 7)$. Oblicz długość wektora $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

8.57. W układzie współrzędnych zaznaczono punkty $A = (2, 0)$ i $B = (4, 0)$. Wyznacz wszystkie możliwe położenia punktu C, dla których ABC jest trójkątem równoramiennym o podstawie AB i polu równym 3.

8.58. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} y = -3x^2 + 6x + 4 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2} \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -3x - 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -2x - 1 \end{cases}$

8.59. Napisz równanie okręgu o średnicy AB.

a) $A = (-7, 3)$, $B = (1, 3)$
b) $A = (2, 17)$, $B = (-8, -7)$
c) $A = (-4, 0)$, $B = (6, -8)$

8.60. Wyznacz środek i promień okręgu o podanym równaniu.

a) $x^2 + y^2 = 144$ b) $(x + 7)^2 + (y - 3)^2 = 8$ c) $x^2 + (y - 3)^2 = 5$

8.61. Punkty $A = (0, -1)$ i $B = (-2, 1)$ należą do okręgu $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$. Znajdź współrzędne punktu C, leżącego na tym okręgu i takiego, aby trójkąt ABC był równoramienny o podstawie AB.

8.62. Okrąg o środku w punkcie $S = (3, 7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

8.63. Wyznacz równanie okręgu o środku $S = (3, -5)$
a) stycznego do osi y.
b) przechodzącego przez początek układu współrzędnych.

8.64. Punkt $A = (1, 9)$ należy do okręgu stycznego do osi x w punkcie $B = (-2, 0)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

8.65. Dane są okręgi o równaniach $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ i $x^2+y^2=4$. Wyznacz równania osi symetrii figury będącej sumą tych okręgów.

8.66. Prostokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o równaniu $x^2+y^2+4x+6y-12=0$. Bok AB zawiera się w prostej o równaniu $2x+y-3=0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta.

8.67. Dany jest okrąg o równaniu $x^2+y^2-2x-4y+1=0$. Przez środek okręgu i początek układu współrzędnych poprowadzono prostą k. Prosta m, prostopadła do k i przechodząca przez punkt $A=(1, 1)$, wyznacza cięciwę PQ danego okręgu. Oblicz długość tej cięciwy.

8.68. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A=(-1, 3)$, $B=(0, 2)$, $C=(-1, 1)$.

8.69. Punkty $A=(7, 7)$, $B=(0, 8)$, $C=(-2, 4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC.
a) Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz równanie stycznej do tego okręgu w punkcie $M=(3, 9)$.
b) Oblicz pole tego trójkąta.

8.70. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $P=(-5, 6)$, którego środek leży na prostej $y=2x+4$, a promień jest równy $4\sqrt{2}$.

D **8.71.** Okrąg o środku $S=(4, 3)$ przechodzi przez punkt $P=(5, 6)$. Prosta $y=-x+3$ przecina ten okrąg w punktach A i B. Wykaż, że trójkąt ABP jest prostokątny, i oblicz jego pole.

8.72. Punkt $A=(-2, 5)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Bok BC jest zawarty w prostej o równaniu $y=x+1$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

8.73. Punkt $A=(6, 3)$ jest wierzchołkiem kwadratu wpisanego w okrąg o równaniu $x^2+y^2-6x+2y-15=0$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu.

8.74. Dane są: okrąg $x^2+y^2=16$, równanie prostej l: $x-y-4=0$ i punkt $A=(8, 0)$. Wyznacz
a) równanie okręgu symetrycznego do danego względem prostej l.
b) równanie prostej stycznej do danego okręgu przechodzącej przez punkt A.

8.75. W układzie współrzędnych rozważamy wszystkie punkty P postaci $P = \left(\frac{1}{2}m + \frac{5}{2}, m\right)$, gdzie $m \in \langle -1; 7\rangle$. Oblicz najmniejszą i największą wartość $|PQ|^2$ dla $Q = \left(\frac{55}{2}, 0\right)$.

8.76. Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ poprowadzonymi z punktu $A = (2, 0)$.

8.77. Okrąg o środku $S = (5, 4)$ jest styczny wewnętrznie do okręgu o równaniu $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 36$. Wyznacz równanie wspólnej stycznej obu okręgów.

8.78. Pary liczb (x, y) spełniające układ równań $\begin{cases} -4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$ są współrzędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego.

a) Wyznacz współrzędne wierzchołków tego czworokąta.

D b) Wykaż, że ten czworokąt jest trapezem równoramiennym.

c) Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym czworokącie.

8.79. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = |AC|$ i $B = (7, 2)$. Pole trójkąta jest równe 20. Wysokość poprowadzona z wierzchołka A zawiera się w prostej $y = 3x + 1$. Oblicz współrzędne punktów A i C.

8.80. Wyznacz równanie okręgu o promieniu 3 przechodzącego przez punkt $P = (2, -1)$ i stycznego do osi odciętych, wiedząc, że ten okrąg nie przecina osi rzędnych.

8.81. W trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD można wpisać okrąg. Dane są współrzędne wierzchołków $A = (1, -3)$, $B = (4, 1)$ i $C = (1, 1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D.

8.82. Wierzchołki A i C rombu $ABCD$ są punktami przecięcia okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$ z prostą o równaniu $y = x$. Pole rombu jest równe 8. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D.

8.83. Wyznacz punkty wspólne okręgów o równaniach $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$ i $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 14 = 0$.

8.84. Wyznacz równanie prostej, która przechodzi przez punkty wspólne okręgów o równaniach $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ i $x^2 + y^2 - 6y - 4 = 0$.

9. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Definicje

- Dla liczby naturalnej $n > 1$ symbol $n!$ (n **silnia**) oznacza iloczyn liczb naturalnych od 1 do n:

  $$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

  Przyjmujemy również, że $0! = 1$ i $1! = 1$.

- Jeżeli $n, k \in \mathbf{N}$ i $k \leqslant n$, to wyrażenie $\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ nazywamy **symbolem Newtona** i oznaczamy $\binom{n}{k}$.

- Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych. Jeżeli każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba $P(A)$ taka, że:

  (1) $P(A) \geqslant 0$,

  (2) dla każdej pary wykluczających się zdarzeń $A, B \subset \Omega$ zachodzi

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

  (3) $P(\Omega) = 1$,

  to mówimy, że **na zdarzeniach w zbiorze Ω określone jest prawdopodobieństwo** P, a liczbę $P(A)$ nazywamy **prawdopodobieństwem zdarzenia** A.

- Jeżeli w danym doświadczeniu losowym wszystkie zdarzenia elementarne tworzą zbiór Ω i są jednakowo prawdopodobne, to **prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia** A jest równe stosunkowi liczby zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia A do liczby wszystkich zdarzeń ze zbioru Ω:

  $$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

- **Zdarzeniem przeciwnym** do A nazywamy zdarzenie polegające na tym, że zdarzenie A nie zajdzie. Zdarzenie przeciwne do A oznaczamy A'.

- Niech $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$. **Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia** A **pod warunkiem, że zaszło zdarzenie** B, nazywamy liczbę:

  $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Zdarzenia $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n \subset \Omega$ tworzą **układ zupełny zdarzeń**, jeżeli spełniają trzy warunki:
  $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$,
  $P(B_i) \neq 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$,
  $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ dla $i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

- Jeżeli w grze losowej wyniki gracza X przyjmują wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ odpowiednio z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, \ldots, p_n$, gdzie $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, to wartością oczekiwaną EX tej gry nazywamy liczbę:
  $$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

- W uporządkowanym niemalejąco szeregu liczb **medianą** nazywamy wyraz środkowy (w szeregu o nieparzystej liczbie wyrazów) lub średnią arytmetyczną dwóch wyrazów środkowych (w szeregu o parzystej liczbie wyrazów).

- **Dominantą** w zestawie danych jest ta wartość, która występuje w nim najczęściej i więcej niż raz.

- Jeżeli liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są wszystkimi wynikami obserwacji, to ich **średnia** jest równa:
  $$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

- Jeżeli wynikom $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nadane są odpowiednio dodatnie wagi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, to **średnią ważoną** tych wyników jest liczba:
  $$\overline{x}_w = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

- **Wariancją** σ^2 w zestawie wyników $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy przeciętne odchylenie kwadratowe od wartości średniej $\overline{x}$:
  $$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

- **Odchyleniem standardowym** σ w zestawie wyników $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy pierwiastek kwadratowy z wariancji:
  $$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

- p-**tym centylem** w zbiorze liczb nazywamy taką wartość k, że p% liczb z tego zbioru jest mniejszych lub równych k.

Twierdzenia

- **Reguła mnożenia**
  Jeśli pewien wybór zależy od k $(k \in \mathbf{N}$ i $k > 0)$ decyzji oraz: podejmując pierwszą decyzję, mamy m_1 możliwości, drugą – mamy m_2 możliwości, …, ostatnią (k-tą) – mamy m_k możliwości, to wyboru tego można dokonać na $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ sposobów.
- Liczba wszystkich k-elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego jest równa n^k.
- Liczba wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego, $k \leqslant n$, jest równa $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.
- Liczba wszystkich permutacji zbioru n-elementowego jest równa:
  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- Liczba wszystkich k-elementowych kombinacji ze zbioru n-elementowego, $k \leqslant n$, jest równa $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.
- Dla dowolnych liczb naturalnych n i k, $k < n$:
  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- Dla dowolnej liczby naturalnej n:
  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$
- **Dwumian Newtona**
  Dla dowolnej liczby naturalnej n:
  $$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$
- Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P – prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach A, $B \subset \Omega$. Wtedy:
  (1) $P(\emptyset) = 0$,
  (2) jeżeli $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$,
  (3) dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ prawdziwa jest nierówność $P(A) \leqslant 1$,
  (4) $P(A) + P\left(A'\right) = 1$,
  (5) dla dowolnych zdarzeń A, $B \subset \Omega$ zachodzi równość:
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
- **Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym**
  Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n \subset \Omega$ tworzą układ zupełny i $A \subset \Omega$, to:
  $$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

- **Wzór Bayesa**
  Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n \subset \Omega$ tworzą układ zupełny, $A \subset \Omega$ i $P(A) > 0$, to dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ zachodzi równość:
  $$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}$$
- **Twierdzenie Bernoulliego**
  Prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego wyraża się wzorem:
  $$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$
  gdzie p jest prawdopodobieństwem uzyskania sukcesu w pojedynczej próbie, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ i $0 \leqslant k \leqslant n$.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 1$ zachodzi równość $n! = n \cdot (n-1)!$.
- Jeżeli z urny zawierającej n ponumerowanych kul losujemy **ze zwracaniem** k razy po jednej kuli, to liczba wszystkich możliwych wyników losowania jest równa n^k.
- Jeżeli z urny zawierającej n ponumerowanych kul losujemy **bez zwracania** k razy $(k \leqslant n)$ po jednej kuli, to liczba wszystkich możliwych wyników losowania jest równa $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.
- Jeżeli ustawiamy w ciągu wszystkie elementy zbioru n-elementowego, to liczba wszystkich możliwych ustawień jest równa $n!$.
- Liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego jest równa 2^n.
- Żadne zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A nie sprzyja zdarzeniu A' i na odwrót. Inaczej mówiąc, każde zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ albo sprzyja zdarzeniu A, albo sprzyja zdarzeniu A'.
- W statystyce mamy do czynienia z odwróconym, w stosunku do rachunku prawdopodobieństwa, wnioskowaniem:
  – w rachunku prawdopodobieństwa – na podstawie znajomości całej populacji określamy prawdopodobieństwo wylosowania próbki o określonej własności,
  – w statystyce – na podstawie własności próbki losowej wyciągamy najbardziej prawdopodobne wnioski o nieznanych własnościach populacji.
- Mediana dzieli uporządkowany szereg danych surowych w taki sposób, że przed nią i za nią jest tyle samo danych.
- **Rozstęp**, czyli odległość między danymi skrajnymi, jest jedną z miar rozproszenia danych.

Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.12 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

9.1. Ile jest liczb trzycyfrowych, których wszystkie cyfry są różnymi liczbami nieparzystymi?

A. 125 **B.** 100 **C.** 40 **D.** 60

9.2. Mamy do dyspozycji 8 skrytek bagażowych. Na ile sposobów możemy rozmieścić w nich 3 różne walizki tak, aby w każdym schowku znajdowała się co najwyżej jedna walizka?

A. 8^3 **B.** 3^8 **C.** $8 \cdot 3$ **D.** $8 \cdot 7 \cdot 6$

9.3. Przesuwamy się wzdłuż krawędzi sześcianu $ABCDA'B'C'D'$. Na ile sposobów możemy dojść z punktu A do punktu C', przechodząc po drodze przez dokładnie dwa z pozostałych wierzchołków?

A. 3 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 27

9.4. Rzucamy sześcienną kostką do gry. Wskaż prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek będącej liczbą złożoną.

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{5}{6}$

9.5. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Wskaż prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których iloczyn jest parzysty.

A. 0,6 **B.** 0,64 **C.** 0,7 **D.** 0,8

9.6. W urnie znajduje się 12 kul białych i 4 czarne. Losujemy dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kul różnego koloru?

A. $\frac{4}{15}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{3}{16}$

9.7. Ze zbioru wszystkich krawędzi graniastosłupa wybieramy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to krawędź jednej z podstaw tego graniastosłupa?

A. Jest za mało danych, żeby to obliczyć. **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{2}{3}$

9.8. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma liczb wyrzuconych oczek będzie większa od 7?

A. $\frac{17}{36}$ **B.** $\frac{5}{12}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{3}{4}$

9.9. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry i trzema monetami. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy tylko piątki i orły.

A. $\frac{1}{32}$ **B.** $\frac{1}{44}$ **C.** $\frac{1}{98}$ **D.** $\frac{1}{288}$

9.10. Z trzech części egzaminu, którym nadano wagi 1, 2 oraz 3, Anna otrzymała odpowiednio 42, 30 i 60 punktów. Końcowy wynik był średnią ważoną wyników trzech części. Ile punktów otrzymała Anna za cały egzamin?

A. 94 **B.** 46,5 **C.** 141 **D.** 47

9.11. W uporządkowanym szeregu: 1, 2, 2, 2, 6, x, x, 12, 12, 21, 23, 27 mediana wynosi 9. Wskaż liczbę x.

A. 6 **B.** 9 **C.** 12 **D.** Wyznaczenie x jest niemożliwe.

9.12. Wskaż odchylenie standardowe następującego zestawu danych:

$-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3$

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{5}{16}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

W zadaniach 9.13–9.19 oceń prawdziwość podanych zdań.

9.13. Liczba wszystkich liczb pięciocyfrowych utworzonych z cyfr 1, 2, 3 oraz

A. parzystych jest równa 81.

B. nieparzystych jest równa 162.

C. podzielnych przez 4 jest równa 16.

9.14. Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby

A. podzielnej przez 3 jest równe $\frac{1}{3}$.

B. podzielnej przez 41 jest równe $\frac{2}{89}$.

C. podzielnej przez 12 jest równe $\frac{1}{12}$.

9.15. Rzucamy trzema kostkami sześciennymi. Oznaczmy zdarzenia: A – iloczyn liczb oczek jest nieparzysty, B – iloczyn liczb oczek jest parzysty, C – suma liczb oczek jest nieparzysta, D – suma liczb oczek jest parzysta.

A. Zdarzenia A i B się wykluczają.

B. Zdarzenia A i D się wykluczają.

C. Zdarzenia B i C się wykluczają.

9.16. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 układamy wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe o różnych cyfrach. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana jedna z tych liczb jest

A. równa 3541, wynosi $\frac{1}{625}$.

B. parzysta, wynosi $\frac{2}{5}$.

C. większa od 5430, wynosi $\frac{1}{60}$.

9.17. Liczba $\binom{20}{10}$

A. jest podzielna przez 111.

B. jest podzielna przez 1998.

C. jest podzielna przez 2000.

9.18. Dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$, liczba $\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1}$

A. jest równa liczbie $\binom{4n}{2n+1}$.

B. jest równa liczbie $\binom{2n+1}{n}$.

C. jest równa liczbie $\binom{2n+1}{n+1}$.

9.19. Wielomian $W(x) = (2x - 1)^5$ zapisano w postaci uporządkowanej sumy. W tej sumie

A. współczynnik przy x jest równy 10.

B. współczynnik przy x^3 jest równy 80.

C. suma wszystkich współczynników jest równa 1.

9.20. Mamy 6 różnych książek i 5 różnych pudełek. W każdym z nich mogą się zmieścić wszystkie książki. **Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.**

Liczba sposobów rozmieszczenia tych książek w pudełkach jest równa

A.	30,	ponieważ	**1.**	zgodnie z regułą mnożenia należy pomnożyć liczbę książek przez liczbę pudełek.
B.	5^6,		**2.**	każdemu pudełku możemy jednoznacznie przyporządkować książkę, która do niego trafi.
C.	6^5,		**3.**	każdej książce możemy jednoznacznie przyporządkować pudełko, do którego trafi.

9.21. Ile jest możliwych wyników danego doświadczenia losowego?
a) Rzucamy 5 razy monetą i zapisujemy kolejne wyniki.
b) Rzucamy 3 razy kostką do gry i zapisujemy kolejne wyniki.
c) W urnie jest 15 ponumerowanych losów. Wyciągamy 2 razy po jednym losie bez zwracania i zapisujemy kolejne wyniki.
d) W urnie są 4 różnokolorowe kule. Losujemy kolejno 3 razy po jednej kuli ze zwracaniem i zapisujemy kolejne wyniki.
e) W pudełku są kartki z cyframi 2, 4, 6 i 8. Losujemy kolejno wszystkie kartki i zapisujemy otrzymaną liczbę czterocyfrową.
f) Rzucamy 13 razy kostką do gry i zapisujemy kolejne wyniki.

9.22. Hasło składa się z ośmiu znaków: trzech liter na początku i pięciu cyfr. Ile takich haseł można ułożyć, mając do dyspozycji 24 litery i wszystkie cyfry?

9.23. Ile jest możliwości wypisania na świadectwie ocen z dziewięciu przedmiotów uczniowi, który otrzymał promocję do następnej klasy?

9.24. W alfabecie Morse'a litery są kodowane za pomocą ciągu znaków: kropek i kresek. Ile liter można zakodować, jeżeli założymy, że do zakodowania każdej z nich możemy użyć co najwyżej czterech znaków?

9.25. W sali do nauki języków obcych jest 15 miejsc. Na ile sposobów może usiąść w tej sali pięciu uczniów? Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc znaczących.

9.26. Na ile sposobów można rozłożyć 5 różnych kart pocztowych w 8 przegródkach, jeżeli
a) w pojedynczej przegródce może być kilka kart?
b) w każdej przegródce może być najwyżej jedna karta?

9.27. Z urny zawierającej siedem kul oznaczonych cyframi 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9 losujemy ze zwracaniem trzy razy po jednej kuli i tworzymy trzycyfrowe liczby. Ile otrzymamy w ten sposób liczb
a) większych od 400?
b) większych od 650?
c) mniejszych od 777?

9.28. Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, które mają różne cyfry i są
a) większe od 300?
b) mniejsze od 520?
c) mniejsze od 458?

9.29. Test sprawdzający wiedzę z historii składa się z 45 pytań. Do każdego pytania są cztery odpowiedzi, a wśród nich tylko jedna poprawna. Na ile sposobów uczeń rozwiązujący test może wypełnić tabelę odpowiedzi, jeżeli
a) odpowie na wszystkie pytania poprawnie?
b) odpowie (dobrze lub źle) na wszystkie pytania?
c) poda odpowiedzi tylko do pierwszych 40 pytań?
d) odpowie poprawnie tylko na pierwszych 10 pytań, a do wszystkich pozostałych poda błędne odpowiedzi?

9.30. Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 15 lub przez 20?

9.31. Na jednej prostej zaznaczono 3 punkty, a na drugiej 4 punkty, jak na rysunku. Ile jest wszystkich trójkątów, których wierzchołkami są trzy spośród zaznaczonych punktów?

9.32. Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie występuje jedna cyfra będąca liczbą nieparzystą i trzy parzyste?

9.33. Oblicz, na ile sposobów można wybrać trzy różne liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ tak, by ich iloczyn był liczbą nieparzystą.

9.34. Ile jest nieparzystych liczb trzycyfrowych, w których zapisie co najmniej jedna cyfra jest jedynką?

9.35. Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2 i 3, wiedząc, że cyfry w liczbie mogą się powtarzać.

9.36. Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12.

9.37. Oblicz, ile jest liczb dwunastocyfrowych, których suma cyfr jest równa 6 i w których zapisie występują tylko cyfry 0, 1 i 2.

9.38. Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero, natomiast występują dwie piątki i trzy dziewiątki.

9.39. Zapisz w postaci uporządkowanej sumy liczbę $\left(3-\sqrt{5}\right)^5$.

9.40. Kuba ma w szufladzie 5 koszulek: białą, niebieską, zieloną, pomarańczową i czarną, oraz 3 pary spodni: niebieskie, brązowe i czarne. Po ciemku wyjmuje jedną koszulkę i jedną parę spodni. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będą one w tym samym kolorze.

9.41. Ze zbioru wszystkich liczb trzycyfrowych, które mają różne cyfry i są utworzone z cyfr 0, 1, 5, 8, 9, losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej.

9.42. Z pudełka, w którym jest 9 kul ponumerowanych od 1 do 9, losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za pierwszym razem wylosujemy kulę z numerem parzystym, a za drugim razem kulę z numerem nieparzystym. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

9.43. Dwaj bracia codziennie losują, który z nich ma sprzątnąć wspólny pokój. Każdy z nich rzuca kostką. Sprząta ten, kto wyrzuci mniejszą liczbę oczek. Jeżeli obaj wyrzucą tyle samo, pokój pozostaje niesprzątnięty do następnego dnia.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jutro będzie sprzątać młodszy brat.
b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przez 5 kolejnych dni pokój nie będzie sprzątany?

9.44. Na kostkach domina są po dwa pola, każde oznaczone liczbą od 0 do 6. Zestaw do gry składa się z kostek, które wykorzystują wszystkie możliwe układy liczb na obu polach i każda kostka ma inny układ pól. Z zestawu wszystkich kostek wyciągamy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na wyjętej kostce są

a) pola z takimi samymi liczbami.
b) pola z co najmniej jedną dwójką lub co najmniej jedną trójką.

9.45. Pan Euzebiusz pamięta, że kod PIN jego karty do bankomatu jest czterocyfrowy i składa się z cyfr 2, 3, 7 i 9, ale zupełnie nie pamięta ich kolejności. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że uda mu się podjąć gotówkę, jeżeli bankomat nie oddaje karty po trzeciej nieudanej próbie wprowadzenia kodu?

9.46. Rysiek, przechodząc codziennie koło cukierni, rzuca monetą dwuzłotową. Jeżeli wypadnie reszka – przeznacza monetę na zakup pączka, jeżeli orzeł – chowa ją do kieszeni i idzie dalej. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przez tydzień kupi co najmniej jednego pączka?

9.47. Rzucamy trzy razy sześcienną kostką do gry. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a następnie oblicz prawdopodobieństwo, że w każdym rzucie liczba oczek będzie większa od numeru rzutu.

9.48. Dane są dwa pojemniki. W pierwszym z nich jest 9 kul: 4 białe, 3 czarne i 2 zielone. W drugim pojemniku jest 6 kul: 2 białe, 3 czarne i 1 zielona. Z każdego pojemnika losujemy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru.

9.49. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Jedna ściana tej kostki ma jedno oczko, dwie ściany mają po dwa oczka i trzy ściany mają po trzy oczka. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się o 1.

9.50. Z pojemnika, w którym są dwa losy wygrywające i trzy losy puste, losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

9.51. Mateusz losuje kolejno ze zwracaniem dwie kule z pudełka zawierającego dwie kule białe, trzy żółte i pięć niebieskich. Jeżeli wylosuje dwie kule w takim samym kolorze, wygrywa 10 zł. W przeciwnym wypadku przegrywa 6 zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

9.52. Podczas gry w jedną z wielu wersji Multi Multi skreślamy 2 liczby spośród 80. Maszyna losuje 20 liczb spośród 80. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że obie skreślone liczby znajdą się w wybranej dwudziestce? A jakie byłoby, gdybyśmy skreślali 3 liczby?

9.53. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy trzy razy ze zwracaniem po jednym elemencie. Wylosowane liczby ustawiamy w ciąg w kolejności losowania. Oznaczmy zdarzenia: A – wylosowane liczby tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 0,5 lub 3, B – wylosowane liczby tworzą ciąg arytmetyczny rosnący, którego różnica jest liczbą parzystą, C – za pierwszym razem wylosowano liczbę parzystą. Oblicz $P(A)$ i $P(B|C)$.

9.54. Tasujemy talię 52 kart i wykładamy kolejno wszystkie karty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że najpierw zostaną wyłożone cztery kiery?

9.55. Rzucamy trzy razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma kwadratów liczb wyrzuconych oczek będzie podzielna przez 3.

9.56. Rzucamy cztery razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: iloczyn liczb otrzymanych oczek jest równy 60.

9.57. Ze zbioru liczb dwucyfrowych losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia: suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3 pod warunkiem, że ich iloczyn jest podzielny przez 3?

9.58. Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: jedną z wylosowanych liczb będzie 8 pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

9.59. Z grupy osób, w której jest dwa razy więcej mężczyzn niż kobiet, wybrano losowo dwuosobową delegację. Prawdopodobieństwo tego, że w delegacji znajdą się tylko kobiety, jest równe 0,1. Oblicz, ile kobiet i ilu mężczyzn jest w tej grupie.

9.60. W urnie znajdują się kule białe i czarne, białych jest trzy razy więcej niż czarnych. Oblicz, ile kul jest w urnie, jeśli przy jednoczesnym losowaniu dwóch kul prawdopodobieństwo otrzymania kul o różnych kolorach jest większe od $\frac{9}{22}$.

9.61. W pudełku znajduje się pięć sześciennych kostek do gry. Trzy z nich są zielone, a dwie czerwone. Z pudełka wyjmujemy losowo trzy kostki, a następnie wykonujemy rzut tymi wyjętymi kostkami, które są zielone. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek wyrzuconych na wszystkich kostkach będzie równa 4.

9.62. Losujemy jedną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3\}$, a następnie rzucamy monetą tyle razy, ile wskazała wylosowana liczba. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła.

9.63. Do pustej urny włożono 8 kul białych i 4 czarne, a następnie wylosowano bez zwracania 5 kul. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po losowaniu stosunek liczby kul czarnych do liczby kul białych w urnie będzie większy niż przed losowaniem?

9.64. W urnie są dwie kule czarne, trzy białe i jedna zielona. Losujemy jedną kulę i zatrzymujemy ją. Jeśli wylosowana kula była zielona, to losujemy jeszcze dwie kule spośród pozostałych w urnie. W przeciwnym razie kończymy losowanie.

a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy dwie kule czarne.
b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy dokładnie jedną kulę czarną.

9.65. W pierwszej urnie są 2 kule białe i 3 czarne, w drugiej – 3 kule białe i 2 czarne. Z obu urn losujemy po jednej kuli i, nie oglądając ich, wkładamy do trzeciej urny, początkowo pustej. Następnie losujemy jedną kulę z trzeciej urny. Oblicz prawdopodobieństwo, że z trzeciej urny wylosujemy kulę białą.

9.66. W urnie jest 6 kul białych i 4 czarne. Losujemy z urny pięć razy po jednej kuli, zwracając kulę za każdym razem do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej dokładnie dwa razy?

9.67. Rzucamy 10 razy parą sześciennych kostek do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia dokładnie cztery razy sumy liczb oczek równej 9?

9.68. Wilhelm trafia z łuku do tarczy z prawdopodobieństwem 0,6. Ile co najmniej razy powinien strzelić, aby prawdopodobieństwo, że trafi co najmniej raz, było większe od 90%?

D **9.69.** Zdarzenia losowe A, B są zawarte w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0{,}9$ i $P(B) = 0{,}7$, to $P\left(A \cap B'\right) \leqslant 0{,}3$.

D **9.70.** O zdarzeniach losowych $A, B \subset \Omega$ wiadomo, że $P\left(A \cap B'\right) = 0{,}7$. Wykaż, że $P\left(A' \cap B\right) \leqslant 0{,}3$.

D **9.71.** Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0{,}85$ i $P(B) = 0{,}75$, to $P(A|B) \geqslant 0{,}8$.

D **9.72.** Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$ oraz $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Wykaż, że $P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$.

9.73. Dzieci kolejno wchodzące na lodowisko miały: 6, 7, 8, 8, 11, 12, 9, 8, 7, 13, 14, 15, 15, 10, 15, 14, 8, 7, 11, 12, 8, 7, 12 lat. Znajdź medianę, dominantę oraz średnią wieku tych dzieci. Wyniki podaj w pełnych latach.

9.74. Z samochodu dostawczego wypakowano trzydzieści worków z cukrem i sprawdzono ich wagę. Otrzymano wyniki w kilogramach: 50, 49, 48, 51, 50, 48, 50, 48, 53, 49, 48, 50, 51, 48, 50, 51, 49, 50, 47, 48, 49, 48, 50, 50, 47, 51, 51, 48, 53, 50. Oblicz

a) rozstęp wartości tych danych.
b) medianę tego zestawu danych.
c) dominantę tego zestawu danych.
d) średnią wagę worka cukru.

9.75. Średnia arytmetyczna liczb: 3, 1, 1, 0, x, 0 jest równa 2. Oblicz x.

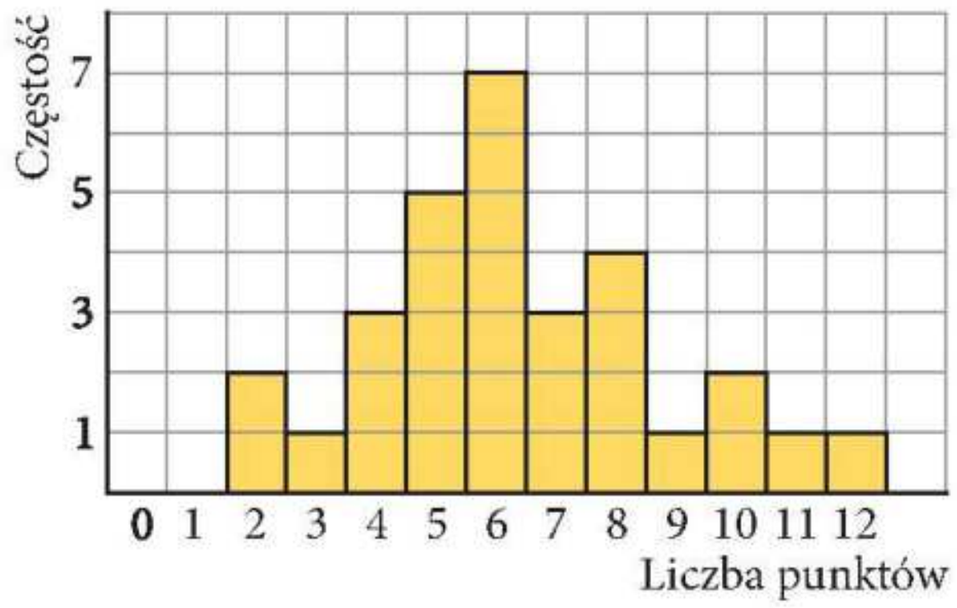
9.76. Siostry Gabrysia i Marysia zapisywały czas trwania swoich rozmów telefonicznych w pewnym określonym przez rodziców okresie. Wyniki przedstawiły w tabeli. Zilustruj te dane na diagramie słupkowym. Oblicz dla każdej z dziewcząt

a) średni czas jednej rozmowy.
b) odchylenie standardowe czasu rozmowy.

Wyniki podaj w pełnych minutach.

Czas trwania rozmowy (w min)	Liczba rozmów	
	Gabrysi	Marysi
2	17	8
3	21	26
4	25	11
5	13	5
6	8	28
7	12	16
8	3	12
9	0	4
10	1	0

9.77. W rozgrywkach pewnej dyscypliny sportowej startowało wiele drużyn. Diagram przedstawia liczby punktów zdobytych przez poszczególne drużyny. Na jego podstawie odpowiedz na pytanie.



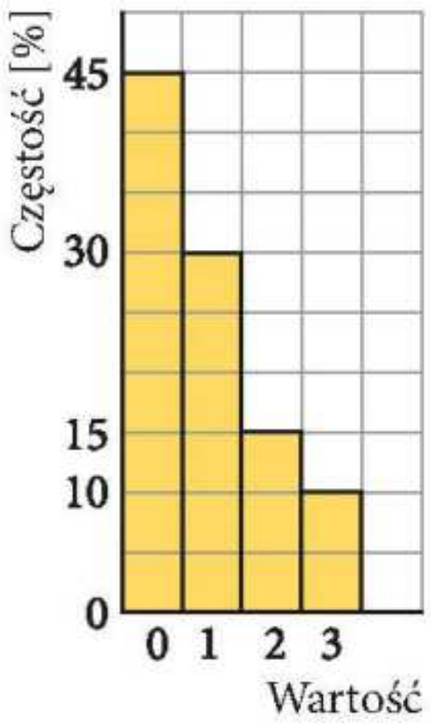
a) Ile drużyn uczestniczyło w zawodach?
b) Jaką najmniejszą i jaką największą liczbę punktów zdobyły drużyny?
c) Ile wynosi dominanta liczby punktów?
d) Ile drużyn zdobyło co najmniej 10 punktów, a ile – co najwyżej 5?
e) Ile wynosi średnia liczba punktów zdobytych w tych rozgrywkach przez jedną drużynę?

9.78. Bartek przez 50 dni notował czas przejścia z domu do szkoły oraz czas przejścia ze szkoły do domu. Wyniki przedstawił w tabeli.

Czas (w min)	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Częstość	12	18	25	16	13	10	3	2	1

Narysuj diagram częstości ilustrujący te dane. Oblicz średni czas (w pełnych minutach), w jakim Bartek pokonywał trasę szkoła – dom. Znajdź wariancję i odchylenie standardowe danych.

9.79. Oblicz średnią arytmetyczną danych przedstawionych na zamieszczonym obok diagramie częstości.



10. Stereometria

Definicje

- Dwie płaszczyzny: są **równoległe**, jeżeli nie mają punktów wspólnych albo mają wszystkie punkty wspólne; **przecinają się**, jeżeli mają wspólną prostą (nazywaną krawędzią przecięcia).

- Mówimy, że prosta: jest **równoległa do płaszczyzny**, jeżeli nie ma z nią punktów wspólnych albo jest w niej zawarta; **przecina płaszczyznę**, jeżeli ma z nią jeden punkt wspólny.

- Jeżeli przez dwie różne proste przechodzi jedna płaszczyzna, to takie proste nazywamy **współpłaszczyznowymi**.

- Dwie proste, przez które nie można poprowadzić jednej płaszczyzny, nazywamy **skośnymi**.

- Dwie różne proste, które są współpłaszczyznowe i równoległe na tej płaszczyźnie, nazywamy **prostymi równoległymi**. Ponadto przyjmujemy, że proste pokrywające się są również równoległe.

- **Prosta a jest prostopadła do prostej b ($a \perp b$) w przestrzeni**, gdy istnieje prosta a' równoległa do prostej a i przecinająca prostą b pod kątem prostym.

- **Prosta k jest prostopadła do płaszczyzny α** ($k \perp \alpha$), jeżeli k jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie α.

- **Płaszczyzna α jest prostopadła do płaszczyzny β**, jeżeli zawiera prostą prostopadłą do płaszczyzny β.

- Dane są: płaszczyzna π i prosta a nierównoległa do tej płaszczyzny. Przez punkt P przestrzeni prowadzimy prostą b równoległą do prostej a. Prosta b przecina płaszczyznę π w punkcie P', który nazywamy **rzutem równoległym** punktu P na płaszczyznę π **w kierunku** a.
  Jeżeli prosta a jest prostopadła do π, to P' nazywamy **rzutem prostokątnym** punktu P na płaszczyznę π.

- Jeżeli prosta nie jest prostopadła ani równoległa do płaszczyzny, to **kątem nachylenia prostej do płaszczyzny** nazywamy kąt ostry utworzony przez tę prostą i jej rzut prostokątny na płaszczyznę.

- Dwie różne półpłaszczyzny P_1, P_2 o wspólnej krawędzi m dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z nich wraz z tymi półpłaszczyznami nazywamy **kątem dwuściennym** o krawędzi m i ścianach P_1 i P_2.
- **Miarą kąta dwuściennego** nazywamy miarę kąta płaskiego będącego częścią wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi.
- **Siatką wielościanu** (rozwinięciem powierzchni wielościanu na płaszczyźnie) nazywamy płaską figurę będącą sumą wielokątów stykających się bokami, a powstałą przez rozcięcie pewnej liczby krawędzi wielościanu tak, aby jego ściany dały się rozłożyć na płaszczyźnie.
- **Graniastosłupem** nazywamy wielościan, którego dwie ściany (zwane podstawami) są przystającymi wielokątami leżącymi w równoległych płaszczyznach, a pozostałe ściany (zwane bocznymi) są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.
- Graniastosłup nazywamy **prostym**, jeżeli jego krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzn podstaw.
- **Równoległościan** to graniastosłup, którego podstawą jest równoległobok.
- **Prostopadłościanem** nazywamy graniastosłup prosty, którego podstawą jest prostokąt. Prostopadłościan, którego wszystkie krawędzie są równe, nazywamy **sześcianem**.
- Graniastosłup nazywamy **prawidłowym**, jeżeli jest prosty i ma w podstawie wielokąt foremny.
- **Ostrosłupem** nazywamy wielościan, którego jedną ścianą (zwaną podstawą) jest dowolny wielokąt wypukły, a pozostałe ściany (zwane bocznymi) są trójkątami o wspólnym wierzchołku, nazywanym **wierzchołkiem ostrosłupa**.
- **Ostrosłup prawidłowy** to ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny i którego spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.
- **Wielościanem foremnym** nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są wielokątami foremnymi o tej samej liczbie boków i w każdym wierzchołku zbiega się taka sama liczba krawędzi.
- Jeżeli figurę płaską f obracamy w przestrzeni o kąt pełny wokół prostej k zawartej w płaszczyźnie figury f, to otrzymaną w ten sposób figurę przestrzenną nazywamy **bryłą obrotową**, a prostą k – jej **osią obrotu**.
- **Walcem** nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z boków prostokąta.

- **Stożkiem** nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.
- **Kulą** nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót półkola dookoła prostej zawierającej średnicę.
  Przekrój płaski kuli przechodzący przez jej środek nazywamy **kołem wielkim**.
  Każdą z dwóch części kuli, na które dzieli ją koło będące jej przekrojem, nazywamy **odcinkiem kuli**. Płaszczyzna przekroju dzieli jednocześnie sferę na dwie części nazywane **czaszami**.
  Wycinkiem kuli nazywamy część kuli ograniczoną sferą i powierzchnią boczną stożka o wierzchołku w środku tej kuli.
  Warstwą kuli nazywamy część kuli zawartą między dwiema równoległymi płaszczyznami przecinającymi kulę.
- **Podobieństwo** o skali k ($k > 0$) jest przekształceniem przestrzeni o tej własności, że dla dowolnych punktów A, B i ich obrazów A', B' zachodzi równość:
  $$\left|A'B'\right| = k \cdot |AB|$$
- Figura (bryła) F jest podobna do figury (bryły) F', co zapisujemy symbolicznie $F \sim F'$, gdy istnieje takie podobieństwo P przestrzeni, w którym $P(F) = F'$.
- **Ostrosłup jest opisany na stożku (wpisany w stożek)** ⇔ podstawa ostrosłupa jest wielokątem opisanym na podstawie stożka (wpisanym w podstawę stożka), a wysokość pokrywa się z wysokością stożka.
- **Wielościan jest wpisany w kulę** ⇔ wszystkie jego wierzchołki należą do sfery tej kuli.
- **Walec jest wpisany w kulę** ⇔ okręgi jego podstaw są zawarte w sferze tej kuli.
- **Stożek jest wpisany w kulę** ⇔ okrąg jego podstawy jest zawarty w sferze i wierzchołek należy do sfery tej kuli.
- **Wielościan jest opisany na kuli** ⇔ wszystkie jego ściany są styczne do kuli.
- **Walec jest opisany na kuli** ⇔ jego podstawy i tworzące są styczne do kuli.
- **Stożek jest opisany na kuli** ⇔ jego podstawa i tworzące są styczne do kuli.

Twierdzenia

- Prosta prostopadła do dwóch przecinających się prostych jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste.

- **Twierdzenie o trzech prostopadłych**
  Dana jest płaszczyzna α i prosta l, która nie jest do niej prostopadła. Prosta m jest rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę α, a k jest dowolną prostą leżącą na płaszczyźnie α. Prosta l jest prostopadła do k wtedy i tylko wtedy, gdy prosta m jest prostopadła do k.

- W ostrosłupie prawidłowym:
  - wszystkie krawędzie boczne są równe i nachylone do płaszczyzny podstawy pod takim samym kątem,
  - ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi,
  - kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy są równe,
  - kąty dwuścienne między sąsiednimi ścianami są równe.

- Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny i wszystkie krawędzie boczne są równe, to ten ostrosłup jest prawidłowy.

- Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny i wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem, to ten ostrosłup jest prawidłowy.

- Jeżeli bryła F' jest podobna w skali k do bryły F o polu powierzchni P_F i objętości V_F, to:
  - pole powierzchni bryły F' jest równe $P_{F'} = k^2 \cdot P_F$,
  - objętość bryły F' jest równa $V_{F'} = k^3 \cdot V_F$.

- **Twierdzenie Eulera**
  W wielościanie wypukłym liczba wierzchołków w, liczba ścian s i liczba krawędzi k spełniają równość $w + s = k + 2$.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π, jeżeli odcinek AB nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną π.
- Wyznaczenie kąta ostrego najczęściej polega na wyznaczeniu wartości jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.
- Istnieje tylko pięć wielościanów foremnych: czworościan foremny, sześcian, ośmiościan foremny, dwunastościan foremny, dwudziestościan foremny.

Zadania

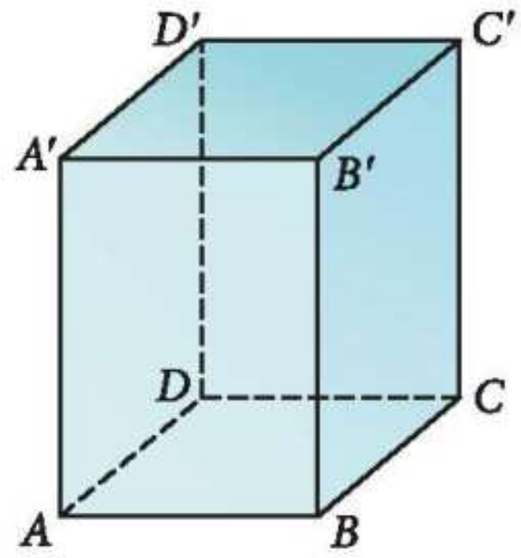
W każdym z zadań 10.1–10.10 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

10.1. Punkty A, B, C i D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Ile płaszczyzn można jednoznacznie wyznaczyć za pomocą tych punktów?

A. 2 **C.** 4

B. 3 **D.** nieskończenie wiele

10.2. Na rysunku obok przedstawiono prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Do której z wymienionych płaszczyzn równoległa jest prosta CD'?



A. $ABCD$ **C.** $ADD'A'$

B. $ABB'A'$ **D.** $BCC'B'$

10.3. W prostopadłościanie $ABCDA'B'C'D'$ dane są długości krawędzi: $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|AA'| = 12$. Ile jest równy cosinus kąta nachylenia przekątnej BD' do płaszczyzny $ABCD$?

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{5}{13}$ **C.** $\sqrt{\frac{7}{151}}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10.4. Długości trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka prostopadłościanu pozostają w stosunku $4 : 3 : 1$. Objętość tego prostopadłościanu wynosi 324. Wskaż jego pole powierzchni całkowitej.

A. 38 **B.** 60 **C.** 342 **D.** Jest za mało danych, żeby to obliczyć.

10.5. Graniastosłup prosty ma wysokość 10 cm. Jego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm. Wskaż objętość tego graniastosłupa.

A. 240 cm^3 **B.** 250π cm^3 **C.** 100 cm^3 **D.** 480 cm^3

10.6. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$, w którym $|AC| : |AS| = 6 : 5$. Ile wynosi cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy?

A. $\frac{3}{5}$ **B.** $\frac{2}{5}$ **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** $\frac{2}{3}$

10.7. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość a i jest nachylona do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa pod kątem 60°. Wskaż objętość ostrosłupa.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **C.** $\frac{a^3}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

10.8. Długość każdej krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6 cm. Wskaż pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

A. $36\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **B.** $36+12\sqrt{3}$ **C.** $144\sqrt{3}$ **D.** $36\left(1+\sqrt{3}\right)$

10.9. Tworząca stożka o promieniu podstawy 3 ma długość 6. Wskaż miarę kąta rozwarcia stożka.

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

10.10. Powierzchnię boczną stożka tworzy wycinek kołowy o promieniu 12 i kącie środkowym 90°. Wskaż pole powierzchni całkowitej stożka.

A. 36π **B.** 45π **C.** 9π **D.** $12\sqrt{3}\pi$

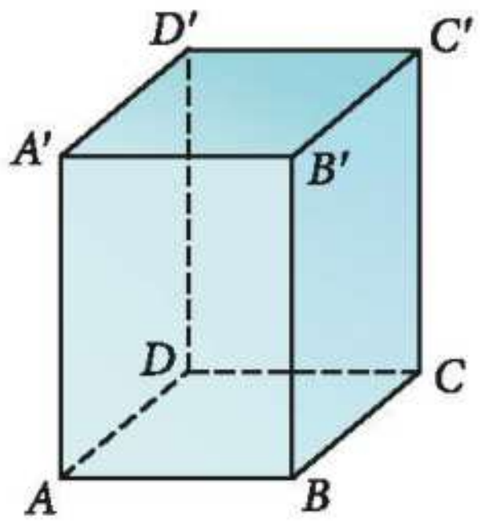
10.11. W sześcianie o krawędzi 1 połączono wszystkie wierzchołki dolnej podstawy z jednym wierzchołkiem podstawy górnej. Otrzymano w ten sposób krawędzie ostrosłupa. **Oceń prawdziwość podanych zdań.**

A. Objętość tak utworzonego ostrosłupa jest równa $\frac{1}{3}$.

B. Trzy krawędzie tego ostrosłupa mają długość równą $\sqrt{2}$.

C. Pole jednej ze ścian tego ostrosłupa jest równe $\frac{1}{2}$.

10.12. Na rysunku przedstawiono prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. **Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.**



Proste DC i AA'

A.	są skośne,	ponieważ	**1.**	nie mają punktu wspólnego.
B.	nie są skośne,		**2.**	są niewspółpłaszczyznowe.
C.	są równoległe,		**3.**	zawierają się w płaszczyznach równoległych.

10.13. Podaj liczbę ścian, krawędzi, wierzchołków i przekątnych
a) prostopadłościanu.
b) graniastosłupa sześciokątnego.
c) czworościanu.
d) ostrosłupa pięciokątnego.

10.14. Narysuj siatkę
a) graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.
b) ostrosłupa o podstawie prostokątnej, którego spodkiem wysokości jest punkt przecięcia przekątnych prostokąta.
c) ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt równoboczny, a jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

10.15. Krawędź podstawy i wysokość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego są równe $5\sqrt{5}$. Oblicz długości przekątnych graniastosłupa.

10.16. Z punktu P oddalonego od płaszczyzny o 10 cm poprowadzono prostą nachyloną do tej płaszczyzny pod kątem 25° i przecinającą ją w punkcie Q. Oblicz długość odcinka PQ z dokładnością do 1 cm.

10.17. Wyznacz miarę kąta
a) nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny jego podstawy.
b) między przekątnymi sześcianu.

10.18. Przekątna prostopadłościanu ma długość $d = 11$ cm i tworzy z płaszczyzną podstawy prostopadłościanu kąt $\alpha = 43°$, a z płaszczyzną jednej ze ścian bocznych kąt $\beta = 21°$. Oblicz objętość prostopadłościanu z dokładnością do 1 cm^3.

10.19. Pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest cztery razy większe od sumy pól obu podstaw. Wyznacz kąt nachylenia dłuższej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

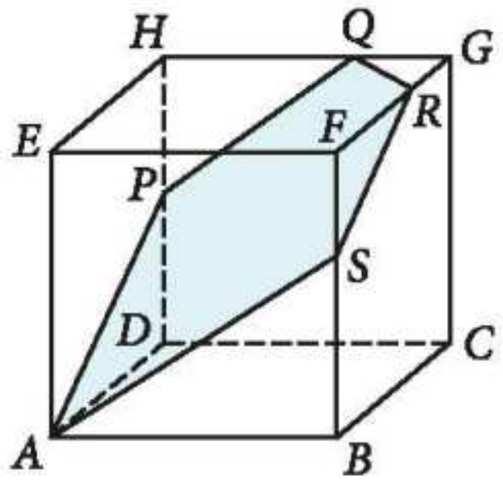
10.20. W prostopadłościanie $ABCDA'B'C'D'$ dane są długości krawędzi: $|AB| = 3$, $|BC| = 2$, $|AA'| = 4$. Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej BD' do płaszczyzny ściany $BCC'B'$.

10.21. Przekątna prostopadłościanu ma długość d i jest nachylona do płaszczyzn ścian bocznych pod kątam α i β. Oblicz objętość prostopadłościanu.

10.22. W graniastosłupie prostym trójkątnym dwie przekątne ścian bocznych wychodzące z jednego wierzchołka są prostopadłe i każda z nich ma długość $\sqrt{3}$. Wysokość graniastosłupa jest równa 1. Wyznacz długości krawędzi i kąty podstawy tego graniastosłupa.

10.23. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 1. Punkt S jest środkiem krawędzi DH. Odcinek DW jest wysokością ostrosłupa $ACSD$ opuszczoną z wierzchołka D na ścianę ACS. Oblicz długości odcinków AW, CW i SW.

10.24. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$, którego krawędź ma długość 15. Punkty Q i R dzielą krawędzie HG i FG w stosunku $2:1$, jak na rysunku. Płaszczyzna AQR przecina krawędzie DH i BF odpowiednio w punktach P i S. Oblicz długości odcinków DP i BS.



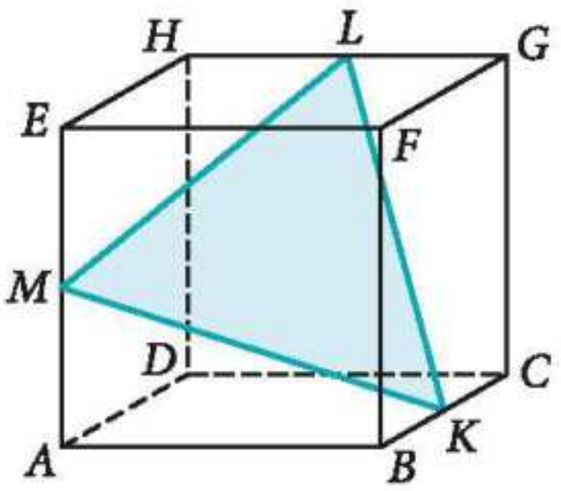
10.25. Podstawą graniastosłupa jest równoległobok o bokach $a = 2{,}5$ cm i $b = 1{,}1$ cm oraz kącie między nimi $\alpha = 25°$. Krawędź boczna graniastosłupa ma długość $c = 4{,}4$ cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\beta = 27°$. Oblicz objętość graniastosłupa z dokładnością do 0,1 cm^3.

10.26. W prostopadłościanie punkt przecięcia przekątnych dolnej podstawy połączono odcinkiem ze środkiem jednej z krawędzi bocznych. Odcinek ten ma długość $d = 5$ cm, jest nachylony do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 19°$, a do jednej ze ścian bocznych pod kątem 2α. Oblicz objętość prostopadłościanu z dokładnością do 1 cm^3.

10.27. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy 8 poprowadzono płaszczyznę przez dwa przeciwległe wierzchołki dolnej podstawy i jeden z wierzchołków górnej podstawy. Płaszczyzna ta jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Wyznacz

a) wysokość graniastosłupa.

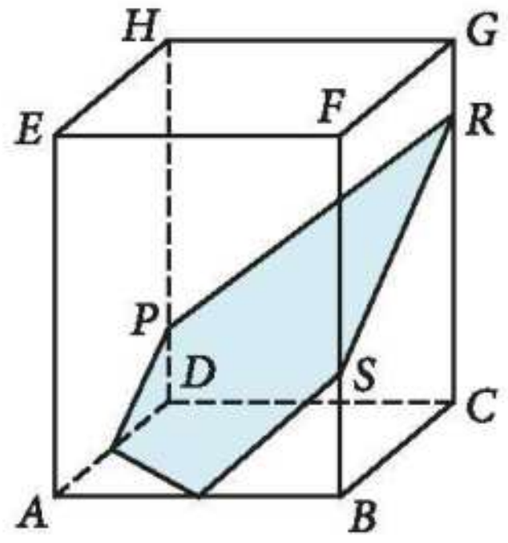
b) pole otrzymanego przekroju.



10.28. Punkty K, L i M są środkami krawędzi BC, GH i AE sześcianu $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 1, jak na rysunku. Oblicz pole trójkąta KLM.

10.29. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku długości 6 i kącie ostrym 60°. Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

D **10.30.** Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego przedstawionego na rysunku ma długość a. Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną zawierającą środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Płaszczyzna przekroju przecina trzy krawędzie boczne graniastosłupa. Wykaż, że pole otrzymanego przekroju jest równe $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$.



D **10.31.** Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$. Punkt M jest środkiem krawędzi AB i $|AM| = |MC|$. Odcinek AS jest wysokością tego ostrosłupa. Wykaż, że kąt SCB jest prosty.

10.32. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe $12\sqrt{3}$, a kąt nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy jest równy $60°$. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

10.33. Wysokość prawidłowego ostrosłupa czworokątnego jest równa 3,2 cm, a kąt dwuścienny przy podstawie ma miarę $37°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa z dokładnością do 1 cm^2.

10.34. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 4. Odcinek DS jest wysokością ostrosłupa i ma długość 6. Punkt M jest środkiem odcinka DS. Oblicz pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną BCM.

10.35. Przez jedną krawędź czworościanu foremnego o krawędzi długości a poprowadzono płaszczyznę przecinającą przeciwległą krawędź pod kątem α. Wyznacz pole otrzymanego przekroju.

10.36. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 1$, $|BC| = \sqrt{2}$. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa mają długość 1. Wyznacz cosinus kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

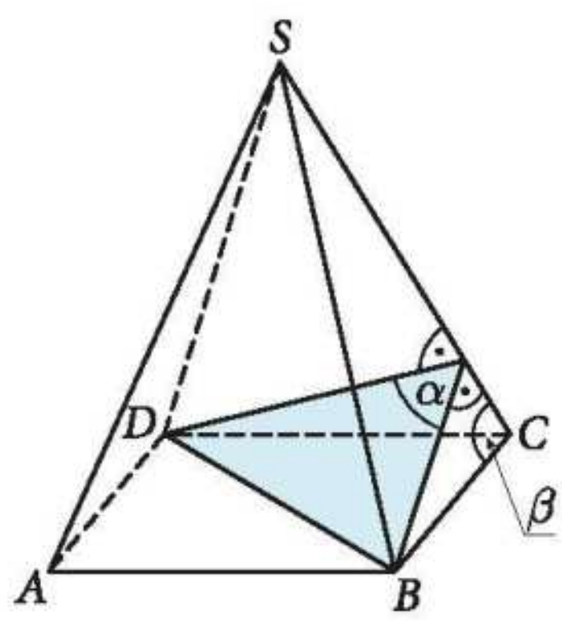
D **10.37.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym dane są: H – wysokość ostrosłupa oraz α – miara kąta utworzonego przez krawędź boczną i krawędź podstawy $(45° < \alpha < 90°)$. Wykaż, że objętość V tego ostrosłupa jest równa $\frac{4H^3}{3\left(\operatorname{tg}^2\alpha - 1\right)}$.

10.38. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Płaszczyzna przechodząca przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

10.39. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi. Miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równa 2α. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

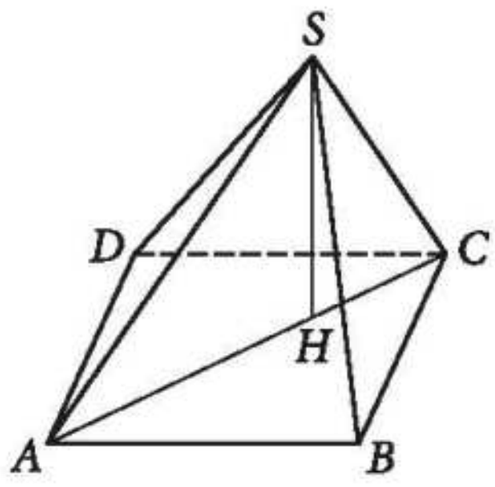
10.40. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe $100\ \text{cm}^2$, a jego pole powierzchni bocznej jest równe $260\ \text{cm}^2$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

D **10.41.** Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Na rysunku zaznaczono kąty: α – między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi oraz β – przy podstawie ściany bocznej (tzn. między krawędzią podstawy i krawędzią boczną ostrosłupa). Wykaż, że $\cos\alpha \cdot \text{tg}^2\,\beta = -1$.



10.42. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$, w którym $|AC| : |AS| = 6 : 5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

10.43. Kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Odcinek HS jest wysokością ostrosłupa. Punkt H dzieli przekątną AC podstawy w stosunku $2 : 1$, jak na rysunku. Krawędzie boczne BS i DS mają długość 1. Oblicz objętość V tego ostrosłupa oraz długości krawędzi AS i CS.



10.44. Dany jest czworościan $ABCS$. Trójkąty ABC i ACS są równoboczne. Ściana ACS jest prostopadła do ściany ABC. Oblicz tangens kąta dwuściennego α między ścianami ABS i ABC.

10.45. W ostrosłupie $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości a. Krawędź AS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka A od płaszczyzny ściany BCS jest równa d. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

10.46. Podstawą ostrosłupa jest romb o kącie ostrym $\alpha = 54°$. Koło wpisane w ten romb ma promień $r = 2{,}4$ dm. Ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem $\beta = 48°$. Oblicz objętość (z dokładnością do $1\ \text{dm}^3$) i pole powierzchni całkowitej (z dokładnością do $1\ \text{dm}^2$) tego ostrosłupa.

10.47. Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Pole trójkąta równoramiennego ACS jest równe 120 i $|AC| : |AS| = 10 : 13$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

10.48. Podstawą ostrosłupa $ABCDE$ jest kwadrat $ABCD$. Punkt F jest środkiem krawędzi AD, odcinek EF jest wysokością ostrosłupa, ponadto $|AE| = 15$ i $|BE| = 17$. Oblicz objętość ostrosłupa.

10.49. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt ABC. Krawędź AD jest wysokością ostrosłupa, $|AD| = 12$, $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$. Oblicz objętość ostrosłupa.

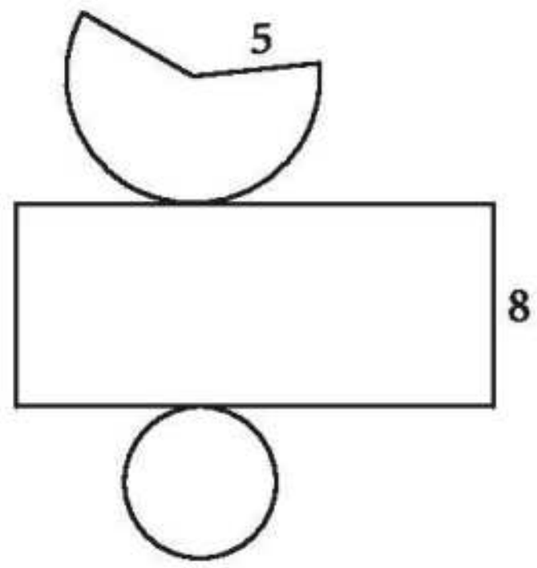
10.50. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Krawędź AS jest wysokością ostrosłupa oraz $|AS| = 8\sqrt{210}$, $|BS| = 118$, $|CS| = 131$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

10.51. Trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej c i kącie ostrym α obraca się wokół przeciwprostokątnej. Oblicz pole powierzchni powstałej bryły.

10.52. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o kącie 120° i promieniu 27 cm. Oblicz pole podstawy tego stożka.

10.53. Objętość stożka o promieniu podstawy 3 jest równa 6π. Wyznacz sinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.

10.54. Kapsuła lądownika ma kształt stożka zakończonego w podstawie półkulą o tym samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa niż promień półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. Oblicz objętość kapsuły lądownika.



10.55. Na rysunku przedstawiono siatkę bryły o polu powierzchni całkowitej 72π. Oblicz objętość tej bryły.

10.56. Kula i stożek, postawione obok siebie na płaszczyźnie, stykają się powierzchniami. Odcinek łączący środek podstawy stożka ze środkiem kuli przechodzi przez punkt styczności tych powierzchni. Kąt między tworzącą stożka a jego wysokością jest równy 30°. Oblicz stosunek promienia kuli do promienia podstawy stożka.

10.57. W stożek wpisano kulę. Odległość wierzchołka stożka od środka kuli wynosi d, a kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny jego podstawy jest równy α. Wyznacz objętość stożka.

10.58. Z koła o promieniu 8 usunięto wycinek o kącie 45°. Z reszty koła wykonano powierzchnię boczną stożka. Oblicz objętość tego stożka.

10.59. Stosunek wysokości stożka do promienia opisanej na nim kuli wynosi k. Wyraź w zależności od k stosunek objętości V_S stożka do objętości V_K kuli.

10.60. Producent jogurtów sprzedawał 200-gramowe jogurty w pojemnikach w kształcie walca o średnicy podstawy 6 cm.

a) Jaką wysokość miały te pojemniki? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 cm. Przyjmij, że 1 g jogurtu ma objętość 1 ml.

b) Po pewnym czasie producent wprowadził na rynek jogurt w nowych, 180-gramowych opakowaniach. Nie zmienił średnicy pojemników, lecz w denku pojawiło się wgłębienie w kształcie półkuli o średnicy 4 cm. Dzięki temu nowe pojemniki miały zbliżoną do poprzednich wysokość. Jaką? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 cm.

10.61. Z drewnianego pnia w kształcie walca o obwodzie około 94,2 cm i wysokości 40 cm wycięto prostopadłościenny klocek o wymiarach 20 cm × 10 cm × 40 cm. Jaki procent drewna wykorzystano na klocek? Jakie wymiary powinien mieć prostopadłościenny klocek, aby jak najmniej drewna poszło na odpady? Obliczenia wykonaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

D **10.62.** Prostokąt $ABCD$, obracany wokół boku AB, zakreślił walec w_1. Ten sam prostokąt, obracany wokół boku AD, zakreślił walec w_2. Otrzymane walce mają równe pola powierzchni całkowitych. Wykaż, że prostokąt $ABCD$ jest kwadratem.

10.63. W stożek, którego promień podstawy i wysokość są równe a, wpisano ostrosłup. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, a jeden z kątów płaskich przy wierzchołku ostrosłupa jest równy α. Wyznacz objętość ostrosłupa.

10.64. W ostrosłup prawidłowy czworokątny o kącie nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy α wpisano kulę o promieniu r. Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

11. Analiza matematyczna

Definicje

- Otoczeniem o promieniu $\varepsilon > 0$ liczby g na osi nazywamy przedział $(g-\varepsilon;\ g+\varepsilon)$.
- **Granicą ciągu (a_n) jest liczba** 0 wtedy i tylko wtedy, gdy do każdego otoczenia liczby 0 należą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu. Zapisujemy to: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - g) = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego M prawie wszystkie wyrazy ciągu są większe od M.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego M prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze od M.
- **Szeregiem geometrycznym** nazywamy ciąg sum częściowych (S_n) o wyrazie ogólnym $S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$, gdzie (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym. Jeżeli ciąg (S_n) ma granicę $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, to szereg nazywamy **zbieżnym**, a liczbę S – jego **sumą**.
- Dana jest funkcja $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór **R** albo przedział liczbowy, albo suma przedziałów. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0:
  - **granicę równą** g wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach różnych od x_0 i zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest zbieżny do liczby g; zapisujemy to: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$,
  - **granicę prawostronną (lewostronną) równą** g wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach większych (mniejszych) od x_0 i zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest zbieżny do liczby g; zapisujemy to: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g\right)$,
  - **granicę niewłaściwą** ∞ $(-\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach różnych od x_0 i zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest rozbieżny do ∞ $(-\infty)$; zapisujemy to: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty\right)$.

- Dana jest funkcja $y = f(x)$ określona na przedziale $(a; \infty)$.
  Mówimy, że funkcja f:
  - ma **dla x dążącego do nieskończoności granicę równą** g wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach należących do przedziału $(a; \infty)$ i rozbieżnego do nieskończoności odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest zbieżny do g; zapisujemy to: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$; analogicznie definiujemy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$,
  - **dla x dążącego do nieskończoności dąży do nieskończoności** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach należących do przedziału $(a; \infty)$ i rozbieżnego do nieskończoności odpowiadający mu ciąg wartości funkcji jest rozbieżny do nieskończoności; zapisujemy to: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; analogicznie definiujemy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

- Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową** wykresu funkcji.

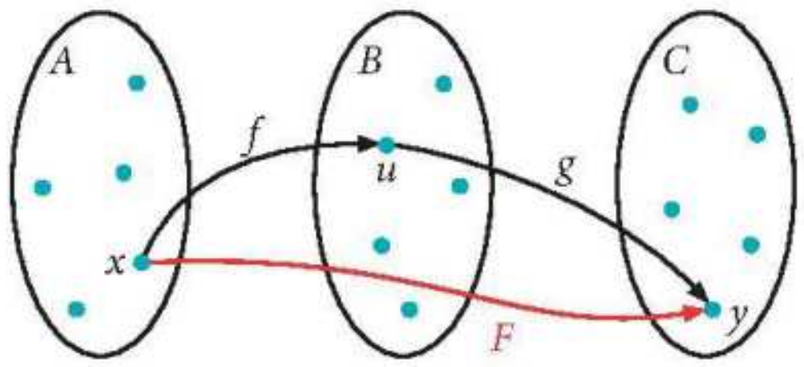
- Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową lewostronną** wykresu funkcji. Podobnie, jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową prawostronną** wykresu funkcji.

- Jeżeli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$, to prostą $y = g$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w nieskończoności.

- Jeżeli $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$, to prostą $y = k$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w minus nieskończoności.

- Funkcja $f\colon (a; b) \to$ **R jest ciągła w punkcie** $x_0 \in (a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
  Funkcję ciągłą w każdym punkcie jej dziedziny nazywamy **funkcją ciągłą**.

- Dane są funkcje $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$.
  Funkcję $F\colon A \to C$ taką, że $F(x) = g(f(x))$, nazywamy **funkcją złożoną** z funkcji f i g (**złożeniem** funkcji f i g) oraz zapisujemy krótko $F = g \circ f$.
  Funkcję f nazywamy wtedy **funkcją wewnętrzną**, a funkcję g – **funkcją zewnętrzną**.



- Dana jest funkcja f określona w pewnym otoczeniu punktu x_0. Jeżeli istnieje granica właściwa $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, to nazywamy ją **pochodną** funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$, a funkcję f nazywamy **różniczkowalną** w punkcie x_0. Funkcję różniczkowalną w każdym punkcie zbioru A nazywamy **różniczkowalną w tym zbiorze**.
- Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to **styczną do wykresu** funkcji w punkcie $A=(x_0, f(x_0))$ nazywamy prostą przechodzącą przez punkt A taką, że jej współczynnik kierunkowy jest równy $f'(x_0)$.
- Jeżeli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie zbioru A, to funkcję f', która każdemu $x\in A$ przyporządkowuje liczbę $f'(x)$, nazywamy **funkcją pochodną** (krócej: pochodną) funkcji f w zbiorze A.
- Funkcja f ma **maksimum** (**minimum**) w punkcie x_0, jeśli istnieje takie otoczenie punktu x_0, że dla wszystkich punktów $x\neq x_0$ z tego otoczenia zachodzi nierówność $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$.

Twierdzenia

- Jeżeli $|q|<1$, to ciąg geometryczny o wyrazie ogólnym $a_n=a_1q^{n-1}$ jest zbieżny do zera.
- **Działania na granicach ciągów zbieżnych**

  Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, to:

  $\lim\limits_{n\to\infty}(t\cdot a_n)=t\cdot a$ dla $t\in\mathbf{R}$, $\qquad\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$,

  $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$, $\qquad\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}$, o ile $b\neq 0$,

  $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$, o ile wszystkie wyrazy ciągu spełniają nierówność $a_n\geqslant 0$.
- **Własności granic niewłaściwych ciągów rozbieżnych**

  Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ oraz:

  $t>0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(t\cdot a_n)=\infty$,

  $t<0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(t\cdot a_n)=-\infty$,

  $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$,

  $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\infty$,

  $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ i $b>0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\infty$,

  $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ i $b<0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=-\infty$.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oraz:

$t > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (t \cdot a_n) = -\infty$,

$t < 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (t \cdot a_n) = \infty$,

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$,

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$,

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ i $b > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$,

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ i $b < 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.

- Jeżeli ciąg (a_n) ma wszystkie wyrazy różne od zera i $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
- Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n):
  - spełniają nierówność $a_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$,
  - spełniają nierówność $a_n < 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.
- **Twierdzenie o trzech ciągach**
  Dane są trzy ciągi: (a_n), (b_n) i (c_n).
  Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągu (b_n) spełniają nierówność $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, a ponadto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ i $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$
- Jeżeli w nieskończonym ciągu geometrycznym (a_n) o pierwszym wyrazie różnym od 0 iloraz q spełnia warunek $|q| < 1$, to szereg geometryczny (S_n) jest zbieżny i ma sumę $S = \frac{a_1}{1-q}$.
- Dane są funkcje $f\colon D \to \mathbf{R}$ i $g\colon D \to \mathbf{R}$, gdzie $D = \mathbf{R}$ albo D jest przedziałem liczbowym, albo sumą przedziałów. Jeżeli istnieją granice właściwe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, to:

  (1) $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ dla każdego $c \in \mathbf{R}$,

  (2) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

  (3) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

  (4) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

  (5) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ przy założeniu, że $g(x) \neq 0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

- Jeżeli $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} W(x) = W(x_0)$.
- Jeżeli $x_0 > 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.
- Jeżeli funkcja f przyjmuje wartości nieujemne i istnieje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, to:

  $$\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} f(x)}$$

- Jeżeli $x_0 \in \mathbf{R}$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$
- Suma, różnica i iloczyn funkcji ciągłych w punkcie x_0 są ciągłe w punkcie x_0.
- Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 oraz $g(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0.
- Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.
- **Twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich**
  Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b\rangle$ i $f(a) \neq f(b)$, to funkcja f przyjmuje w tym przedziale każdą wartość pośrednią między $f(a)$ i $f(b)$.
- **Twierdzenie Weierstrassa**
  Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b\rangle$, to w pewnym punkcie tego przedziału funkcja f przyjmuje wartość największą i w pewnym punkcie tego przedziału funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą.
- **Działania na pochodnych**
  Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi w zbiorze A. Prawdziwe są wzory:

  (1) $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ dla $k \in \mathbf{R}$,

  (2) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,

  (3) $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$,

  (4) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,

  (5) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ dla $g(x) \neq 0$.

- Dla każdej liczby rzeczywistej $k \neq 0$ i $k \neq 1$ pochodna funkcji $f(x) = x^k$ jest równa $f'(x) = kx^{k-1}$.
- Niech $F = g \circ f$. Jeżeli istnieją $f'(x_0)$ oraz $g'(u_0)$, gdzie $u_0 = f(x_0)$, to istnieje $F'(x_0)$ i $F'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

- Dana jest funkcja f różniczkowalna w przedziale $(a; b)$.
  Jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a; b)$, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.
  Jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a; b)$, to funkcja f jest w tym przedziale malejąca.
- Jeżeli funkcja f określona i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ ma ekstremum w punkcie $x_0 \in (a; b)$, to $f'(x_0) = 0$.
- Dana jest funkcja f określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ punktu x_0 i różniczkowalna w punkcie x_0. Jeżeli spełnione są warunki:
  (1) $f'(x_0) = 0$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, to funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum,
  (2) $f'(x_0) = 0$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum.

Wnioski, uwagi, komentarze...

- Funkcja wymierna postaci $f(x) = \frac{W(x)}{Q(x)}$ (W i Q są wielomianami zmiennej x) jest różniczkowalna w każdym punkcie x takim, że $Q(x) \neq 0$, czyli $D = D'$.
- Dana jest funkcja f ciągła i różniczkowalna w przedziale $\langle a; b\rangle$. Aby wyznaczyć wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji w tym przedziale, porównujemy ekstrema lokalne i wartości funkcji na końcach przedziału $\langle a; b\rangle$.
- Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a; b\rangle$ i jej wartości na końcach przedziału są liczbami o różnych znakach, to istnieje taki punkt $x_0 \in (a; b)$, że $f(x_0) = 0$.

Zadania

W każdym z zadań 11.1–11.17 jest dokładnie jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

11.1. (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{4}{5}$ i sumie $S = 25$. Wskaż wyraz a_2 tego ciągu.

A. 5 **B.** 4 **C.** $\frac{64}{25}$ **D.** $\frac{16}{5}$

11.2. Wskaż granicę ciągu $a_n = \frac{5^{2n}}{6^n}$.

A. 0 **B.** $\frac{5}{6}$ **C.** $\frac{25}{6}$ **D.** ∞

11.3. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \begin{cases} 10^n & \text{dla } n < 100! \\ \dfrac{10}{n} & \text{dla } n \geqslant 100! \end{cases}$.

A. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

B. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

C. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 10$

D. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje.

11.4. Dane są ciągi (a_n) i (b_n) takie, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -3$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ i $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbf{N}$.

A. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$

B. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = -\infty$

C. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$

D. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = -\infty$

11.5. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \cos(\pi n)$.

A. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$

B. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

C. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

D. (a_n) jest ciągiem rozbieżnym.

11.6. Granica $\lim\limits_{x\to -1} \left(2x - x^3\right)$ jest równa

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** -1. **D.** ∞.

11.7. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{-x^3 - x^2 + 2x}{x + 2}$. Dla tej funkcji

A. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -6$.

B. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 6$.

C. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$.

D. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ nie istnieje.

11.8. Wskaż funkcję, dla której spełniony jest warunek $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

A. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **B.** $f(x) = \dfrac{-x}{x^2 - 1}$ **C.** $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ **D.** $f(x) = \dfrac{x - 2}{|x - 1|}$

11.9. Wskaż funkcję $y = f(x)$, dla której spełniony jest warunek $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = \infty$.

A. $f(x) = \dfrac{x}{x - 7}$ **B.** $f(x) = \dfrac{5}{(x-7)^2}$ **C.** $f(x) = \dfrac{x + 7}{x - 7}$ **D.** $f(x) = \dfrac{1}{(x+7)^2}$

11.10. Wskaż wartość m, dla której funkcja $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 - x + 1 & \text{dla } x \neq 2 \\ m & \text{dla } x = 2 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.

A. $m = -1$ **B.** $m = 0$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 2$

11.11. Wskaż wartość pochodnej funkcji $f(x) = -x^4 + 3x^2$ w punkcie $x_0 = \sqrt{2}$.

A. $-2\sqrt{2}$ **B.** $-\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{2}$

11.12. W którym punkcie x_0 pochodna funkcji $f(x) = x^2 - 8$ jest równa 8?

A. $x_0 = 4$
B. $x_0 = 8$
C. $x_0 = -4$ oraz $x_0 = 4$
D. Nie ma takiego punktu.

11.13. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2 - x}$. Wskaż zależność prawdziwą.

A. $f'(-2) = 0$ **B.** $f'(1) = 0$ **C.** $f'(0) = 0$ **D.** $f'(-1) = 0$

11.14. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{3 - x}$. Wskaż zależność prawdziwą.

A. $f'(0) < 0$ **B.** $f'(-1) < f'(0)$ **C.** $f'(1) < f'(-1)$ **D.** $f'(2) < f'(0)$

11.15. Wskaż współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 2}$ w punkcie $x_0 = 0$.

A. -2 **B.** $-\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 2

11.16. Wskaż dziedzinę D' funkcji pochodnej funkcji $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$.

A. $D' = \langle -1; 2\rangle$
B. $D' = (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
C. $D' = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 2; \infty)$
D. $D' = (-1; 2)$

11.17. Wskaż wartość pochodnej funkcji $f(x) = \left(2x^2 - x + 1\right)^3$ w punkcie $x_0 = 1$.

A. 6 **B.** 12 **C.** 24 **D.** 36

W zadaniach 11.18–11.23 oceń prawdziwość podanych zdań.

11.18. Iloczyn dwóch funkcji nieciągłych

A. może być funkcją nieciągłą.
B. jest zawsze funkcją nieciągłą.
C. może być funkcją ciągłą.

11.19. Funkcja $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < 0 \\ x + 1 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$

A. jest określona w punkcie $x_0 = 0$.
B. jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.
C. jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

11.20. Dziedziną funkcji ciągłej f jest przedział $(1; \infty)$.

A. Zbiorem wartości funkcji f może być $\mathbf{R}$.

B. Zbiorem wartości funkcji f może być przedział $\langle -1; 1\rangle$.

C. Zbiorem wartości funkcji f może być przedział $\langle 1; \infty)$.

11.21. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x-3}{(x+2)^2}$.

A. Wykres funkcji f ma jedną asymptotę poziomą.

B. Wykres funkcji f ma jedną asymptotę pionową.

C. Wykres funkcji f ma dwie asymptoty poziome.

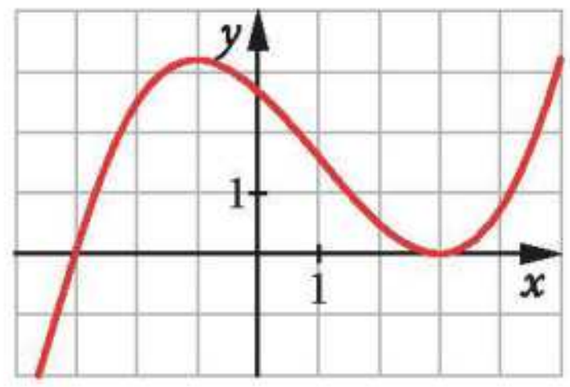
11.22. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{2x-5}{3x-1}$.

A. Dla każdego $x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ zachodzi nierówność $f'(x) > 0$.

B. $f(-4) < f(4)$

C. $f'(-4) < f'(4)$

11.23. Na rysunku przedstawiono wykres pochodnej f' funkcji f.



A. Funkcja f ma ekstremum w punkcie -3.

B. Funkcja f ma ekstremum w punkcie -1.

C. Funkcja f ma ekstremum w punkcie 3.

11.24. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{5n+6}{10(n+1)}$.

a) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

b) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

c) Wskaż największą liczbę a i najmniejszą liczbę b takie, że dla każdego n spełniony jest warunek $a \leqslant a_n \leqslant b$.

11.25. Oblicz.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)\left(\frac{6n+5}{2n-7} + 3\right)\left(1 + \frac{n}{3n-1}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(2n^2 - 3n + 5\right)^2}{(3n-5)^3(5n+17)}$

11.26. Dla jakich wartości parametru k granica ciągu $a_n = \dfrac{\left(k^2 - k - 1\right)n^2 - 5}{n^2 + 2n + 2}$ jest równa 2?

11.27. Oblicz granicę ciągu $a_n = \dfrac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$ i zbadaj jego monotoniczność.

11.28. Oblicz.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + 6^n + 8^n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{\frac{n}{2}} + 3^{\frac{n}{2}}}$

11.29. Oblicz sumę podanego szeregu geometrycznego, jeżeli taka suma istnieje.

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{21} + \ldots$

b) $6 - \frac{18}{5} + \frac{54}{25} - \frac{162}{125} + \ldots$

c) $-\sqrt{5} - \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{4} - \frac{25}{8} + \ldots$

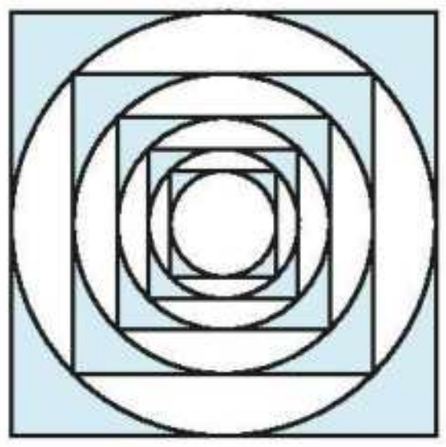
d) $-12 - 6\sqrt{2} - 6 - 3\sqrt{2} - \ldots$

11.30. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równa 24, a suma jego trzech początkowych wyrazów wynosi 21. Wyrazy trzeci i piąty ciągu (a_n) są równe odpowiednio trzeciemu i piątemu wyrazowi pewnego ciągu arytmetycznego (b_n). Oblicz sumę 25 początkowych wyrazów ciągu (b_n).

11.31. Lewa strona nierówności $\frac{x}{x-1} + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^3 + \ldots < 2$ jest sumą szeregu geometrycznego. Rozwiąż tę nierówność.

11.32. Lewa strona równania $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x + \ldots = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 5n + 2}}{2n + 1}$ jest sumą szeregu geometrycznego. Rozwiąż to równanie.

11.33. W kwadrat o boku 1 wpisano koło, w to koło wpisano kwadrat, w ten kwadrat – następne koło itd., jak na rysunku. Oblicz sumę pól wszystkich zamalowanych obszarów zawartych w tym kwadracie.



11.34. Pierwszy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego jest równy 2, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 5. Oblicz sumę sześcianów wszystkich wyrazów tego ciągu.

11.35. Oblicz.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + x - 3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x + 1}{\sqrt{x + 2} + x}$

11.36. Oblicz.

a) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{5}^+} \frac{\sqrt{1 + 5x}}{2 - 5x}$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^3 - 4x^2 + 8}{x^2 - 3x}$

c) $\lim\limits_{x\to 5^+} \frac{x^2 - 5}{\sqrt{x - 5}}$

d) $\lim\limits_{x\to -6^-} \frac{x^2 + 7x + 6}{x^3 + 12x^2 + 36x}$

11.37. Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$. Oblicz $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

D **11.38.** Skorzystaj z definicji i wykaż, że funkcja $f(x) = 2 + x - x^3$ o dziedzinie D ma granicę w każdym punkcie $x_0 \in D$.

D **11.39.** Wykaż, że funkcja $f(x) = \begin{cases} \log_2(5 - x) & \text{dla } x < 1 \\ \log_2(x + 1) & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ nie ma granicy w punkcie $x_0 = 1$.

11.40. Zbadaj ciągłość podanej funkcji.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 + x - 6}{x^2 + 3x + 2} & \text{dla } x \in \mathbf{R} - \{-2, -1\} \\ -9 & \text{dla } x = -2 \\ 0 & \text{dla } x = -1 \end{cases}$$

11.41. Wyznacz takie wartości m i k, aby funkcja f była ciągła w punkcie 3.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + kx - 12}{x - 3} & \text{dla } x \neq 3 \\ m & \text{dla } x = 3 \end{cases}$$

D **11.42.** Wykaż, że równanie $x^2 - 5x + \dfrac{x + 3}{x + 2} = 0$ ma w przedziale $\langle 0; 6 \rangle$ co najmniej dwa rozwiązania.

D **11.43.** Wykaż, że równanie $16x^5 - 5x + 5 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

D **11.44.** Wykaż, że funkcja $f(x) = 5 + 3x - x^3$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

11.45. Zbadaj ciągłość i różniczkowalność funkcji f.

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 12x - 12 & \text{dla } x < 2 \\ x^3 - 6x^2 + 12x - 8 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$$

D **11.46.** Wykaż, że funkcja $f(x) = 2x - |x + 2|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = -2$.

11.47. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \dfrac{3 - 2x}{x^2 - 1}$ w punkcie $x = -3$.

11.48. Wyznacz pochodną podanej funkcji.

a) $f(x) = \left(3x^2 - 5x + 2\right)^3$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$

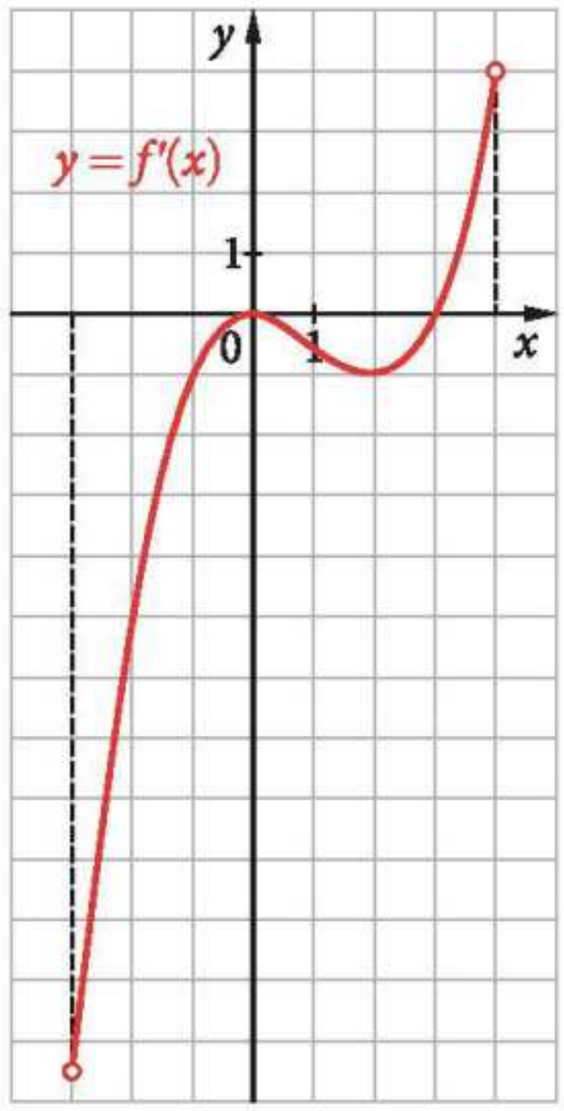
c) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x + 3}$

d) $f(x) = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^4$

11.49. Styczna do wykresu funkcji $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5$ w punkcie $(2, 27)$ ma z tym wykresem jeszcze jeden punkt wspólny. Oblicz współrzędne tego punktu.

11.50. W tabeli podane są wartości funkcji $f\colon (-3; 4) \to \mathbf{R}$ dla trzech argumentów.

x	-2	0	3
$f(x)$	$3\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	-1



Na rysunku przedstawiony jest wykres pochodnej $y = f'(x)$ funkcji f.

a) Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej $x = 0$.

b) Wyznacz ekstremum funkcji f. Podaj argument, dla którego funkcja f przyjmuje to ekstremum.

c) Podaj najmniejszą wartość funkcji f.

11.51. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$.

a) Wyznacz przedziały monotoniczności tej funkcji.

b) Wyznacz wartość największą oraz wartość najmniejszą tej funkcji w przedziale $\langle -2; 6\rangle$.

11.52. Funkcja f opisana jest wzorem $f(x) = x^3 - 6x^2 + c$ i $f(0) = 8$. Wyznacz wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji f w przedziale $\langle -1; 3\rangle$.

11.53. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + px + q$ należy punkt $M = \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$. Styczna do wykresu funkcji f w punkcie M jest nachylona do osi x pod kątem $135°$. Wyznacz ekstrema tej funkcji.

11.54. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Prosta l jest nachylona do osi x pod kątem, którego sinus jest równy 0,6. Zbadaj, ile jest stycznych do wykresu funkcji f równoległych do prostej l.

11.55. Dla jakich wartości parametru m funkcja f ma ekstremum?

$$f(x) = \frac{m-2}{3}x^3 + (2m-3)x^2 + (5m-6)x$$

11.56. Funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{x^2-1}$ ma w punkcie $x = 0$ ekstremum równe -2. Wyznacz a i b.

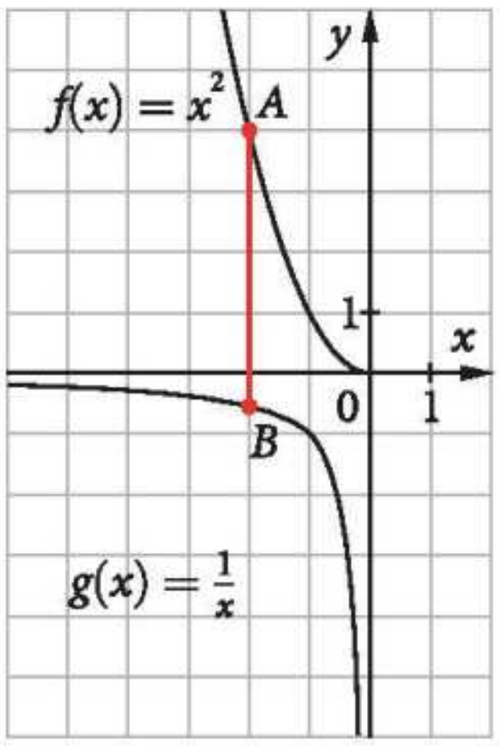
11.57. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^3 - 3x - m = 0$ ma trzy rozwiązania?

11.58. Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o podstawie kwadratowej, dla których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24. Jaką wysokość ma prostopadłościan o największej objętości?

11.59. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu wynosi 12 cm, a stosunek długości krawędzi podstawy jest równy $2:3$. Oblicz wymiary, jakie powinien mieć taki prostopadłościan, by jego objętość była możliwie największa.

11.60. Wyznacz punkt na wykresie funkcji $f(x) = x^2$ leżący najbliżej punktu $A = (3, 0)$.

11.61. Rozpatrujemy odcinki AB równoległe do osi y, których jeden koniec leży na wykresie funkcji $f(x) = x^2$ dla $x < 0$, a drugi koniec leży na wykresie funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$ dla $x < 0$, jak na rysunku. Oblicz długość najkrótszego z tych odcinków.



11.62. Rozpatrujemy odcinki równoległe do osi y, których jeden koniec leży na wykresie funkcji $f(x) = x^2 + 2$, a drugi koniec – na wykresie funkcji $g(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geqslant 0$. Oblicz długość najkrótszego z tych odcinków.

11.63. Wyznacz wartość parametru k, dla której suma odwrotności pierwiastków równania $x^2 + (k-3)x + k^2 - k + 1 = 0$ jest największa.

11.64. Dane jest równanie $x^2 + (m-5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$. Dla jakich wartości parametru m stosunek sumy pierwiastków tego równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą? Oblicz tę wartość.

11.65. Dane są okręgi $x^2 + y^2 = 4 - m$ i $x^2 + y^2 = m - 2$. Dla jakiej wartości m suma odwrotności kwadratów promieni tych okręgów jest najmniejsza?

11.66. Trójkąt równoramienny o obwodzie a obraca się wokół podstawy. Jakie powinny być długości boków tego trójkąta, aby objętość powstałej bryły była jak największa?

Odpowiedzi

1. Stereometria

s. 17

1.1. B **1.2.** C **1.3.** B **1.4.** F, P, F **1.5.** zbiór pusty, punkt, prosta **1.6.** płaszczyzny: KOZ, KOA, OAZ, KAZ; krawędzie: KO, KZ, KA, OZ, OA, ZA **1.7.** BW, DW **1.8.** BT, MO, MB **1.9.** BC, AD, FG, EH, AE, BF, CG, DH **1.10.** a) nieskończenie wiele b) tak, jedna **1.11.** Prosta m istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy prosta p nie jest równoległa do płaszczyzn równoległych zawierających k i l. **1.12.** a) AB, DC, KL, NM b) AK, BL, CM, DN, AD, BC, LM, KN c) KN, ND, ML, MC d) $ABCD$, $DCMN$, $KLMN$, $ABLK$ e) $BCML$, $ADNK$ **1.13.** a) AB, DC, $A'B'$, $D'C'$ b) BC, CC', $C'B'$, $B'B$, AD, DD', $D'A'$, $A'A$ c) $BCC'B'$, $ADD'A'$ d) $ABCD$, $ABB'A'$, $A'B'C'D'$, $DCC'D'$ **1.14.** Nie, są równoległe. **1.15.** Nie, są równoległe. **1.16.** nieskończenie wiele **1.20.** *Wskazówka*: Wyznacz płaszczyzny α i β – prowadź je przez pary przecinających się i odpowiednio dobranych prostych.

s. 20

1. P, P, P **2.** a) CB, FE b) CF, BE, AD, AC, DF c) DF, AD, DE d) pł. ABC, pł. DEF, pł. $CBEF$ e) pł. $ACFD$ **3.** nieskończenie wiele, gdy $k \parallel$ pr. PQ; jedna, gdy $k \nparallel$ pr. PQ **4.** *Wskazówka*: Przez punkt P poprowadź prostą a' równoległą do prostej a i prostą b' równoległą do prostej b. Szukana płaszczyzna zawiera a' i b'. **5.** *Wskazówka*: Poprowadź płaszczyznę przez dwie wybrane proste i zbadaj położenie trzeciej prostej względem tej płaszczyzny.

s. 27

2.1. C **2.2.** D **2.3.** B **2.5.** Trójkąt lub odcinek. Trójkąt i jego obraz są przystające, gdy leżą w płaszczyznach równoległych. **2.6.** tak **2.7.** W kierunku równoległym do płaszczyzny zawierającej proste przecinające się, ale nie równoległym do π. Takiego wyniku nie można uzyskać, gdy proste leżą na płaszczyźnie równoległej do π. **2.8.** *Wskazówka*: Szukanym kątem jest: a) $\sphericalangle LDB$, b) $\sphericalangle LDK$, c) $\sphericalangle LDM$, d) $\sphericalangle DLN$. **2.11.** a) 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 0 **2.12.** a) $8\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{29}$ **2.13.** $8\sqrt{2}$ **2.14.** a) 4 b) $\frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}31$ c) 2,01 d) 11,52 **2.15.** a) 30° b) 45° c) 60° d) Taka sytuacja jest niemożliwa. e) Taka sytuacja jest niemożliwa. **2.16.** a) 20 lub 4 b) 12 c) 10 d) 5 lub 29 **2.17.** a) 10,9 b) 50° c) 81° d) 17,5 **2.18.** a) 26 cm b) $13\sqrt{2}$ cm **2.19.** 15 cm **2.20.** Każda z szukanych wielkości jest równa 2 m. **2.21.** $25\sqrt{15}$ cm^2 **2.22.** *Wskazówka*: Z dowolnego punktu $M \in m$, różnego od punktów przecięcia prostej z płaszczyznami, poprowadź prostą k prostopadłą do π_1 i π_2, a następnie rozważ sytuację na płaszczyźnie wyznaczonej przez proste m i k.

s. 30

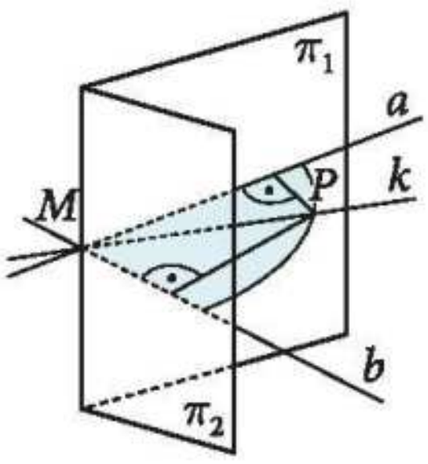
1. P, P, F **3.** 22° **4.** 22 cm lub 38 cm **5.** a

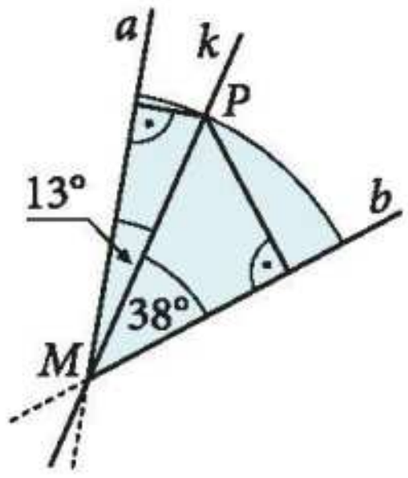
s. 34

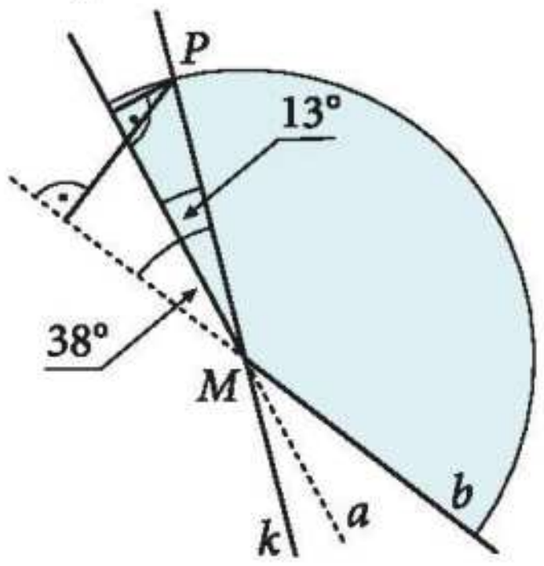
3.1. C **3.2.** D **3.3.** A **3.7.**

α	β_1	β_2	$\lvert AA' \rvert$	$\lvert AB_1 \rvert$	$\lvert AB_2 \rvert$	$\lvert B_1A' \rvert$	$\lvert B_2A' \rvert$	$\sphericalangle B_1AB_2$
90°	30°	60°	10	5	$5\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	5	90°
120°	30°	90°	$4\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	6	0	60°
80°	35°	45°	13,95	8	9,86	11,43	9,86	100°

3.8. 51° lub 155°. *Wskazówka*: Przyjrzyj się rysunkom poniżej.







3.9. Kąt między ścianami bocznymi jest rozwarty, więc jest większy. **3.10.** $\alpha = 90°$

3.11. *Wskazówka*: Są to kąty DCS i DAS. **3.12.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. *Wskazówka*: Zauważ, że kąt SPD jest prosty.

s. 36

1. F, F, P **3.** $6\sqrt{3}$ **4.** $\frac{1}{2}a$ **5.** 9 cm

s. 46

4.1. D **4.2.** C **4.3.** C **4.4.** a) 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków b) 5 ścian, 9 krawędzi, 6 wierzchołków c) 7 ścian, 15 krawędzi, 10 wierzchołków d) 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków e) 9 ścian, 21 krawędzi, 14 wierzchołków **4.5.** 27 **4.6.** a) 16 wierzchołków, 24 krawędzie b) 60 wierzchołków, 90 krawędzi c) 208 wierzchołków, 312 krawędzi **4.7.** graniastosłup siedmiokątny **4.8.** 4 **4.9.** a) 10 b) 18 **4.10.** b) $a\sqrt{3}$ cm **4.11.** ok. 35° **4.12.** dwie o długości $10\sqrt{2}$ cm, dwie o długości 20 cm **4.18.** Nie. Odcinki, które po złożeniu siatki stają się jedną krawędzią, muszą być równej długości. **4.19.** $4\sqrt{13}, 2\sqrt{43}$ **4.21.** $P = \frac{\sqrt{6}}{4}$

4.22. Przekrój jest albo prostokątem o polu $54\sqrt{2}$ cm^2, albo trójkątem o polu $9\sqrt{22}$ cm^2.

4.23. Jeżeli $0 < \operatorname{tg}\alpha \leqslant \sqrt{2}$, to $P = \frac{1}{2\cos\alpha}$. Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha > \sqrt{2}$ lub $\alpha = 90°$, to $P = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

s. 48

1. F, P, P **2.** 2340 **3.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ **4.** $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ **5.** $\cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

s. 60

5.1. C **5.2.** B **5.3.** C **5.4.** a) $s = 4,\ k = 6,\ w = 4$ b) $s = 5,\ k = 8,\ w = 5$ c) $s = 8,\ k = 14,\ w = 8$ **5.5.** a) trzydziestokąt b) trzynastokąt c) dwunastokąt **5.6.** a) stukątny b) 21-kątny c) siedemnastokątny **5.7.** 6 **5.8.** 7 **5.9.** b) $h = 2\sqrt{2}$ cm c) $\alpha = 45°$ **5.13.** *Wskazówka:* Zastanów się, jakie wartości może przyjmować suma kątów ścian bocznych przy wierzchołku ostrosłupa. **5.16.** trapezem prostokątnym **5.17.** 25 cm **5.18.** 10 cm **5.19.** $2\sqrt{6}$ cm **5.20.** krawędź podstawy: 24 cm, krawędź boczna: $12\sqrt{3}$ cm **5.21.** a) $\alpha = 72°$ b) $\beta = 74°$ **5.22.** 74° **5.23.** $P_p = \frac{800}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{6}$ **5.24.** 68° **5.25.** Wszystkie krawędzie są nachylone pod takim samym kątem α, $\cos\alpha = \frac{a}{b}$. **5.26.** $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ **5.27.** $P = \frac{a^2\sqrt{3}\sin\beta}{4\sin(\alpha+\beta)}$ **5.28.** $k = 30,\ w = 20$ **5.29.** a) 33,11 m b) 41°

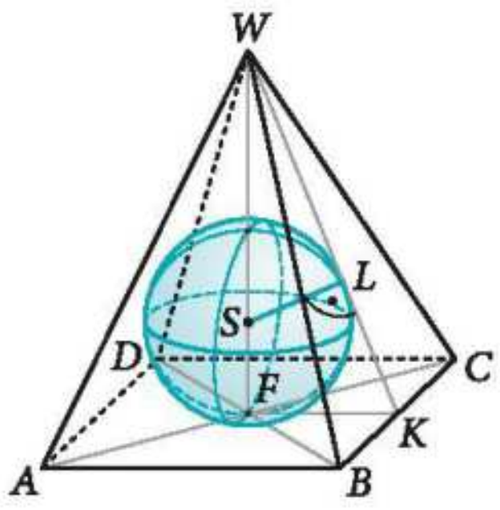
s. 64

1. P, F, P **2.** 53° **3.** $P = \frac{a^2\sqrt{11}}{8}$ **4.** $\frac{b}{a}$, $\frac{b\sqrt{2}}{2a}$, $\frac{b}{a}$

s. 73

6.1. B **6.2.** D **6.3.** C **6.4.** 31° lub 59° **6.5.** a) $r = \frac{5}{2}$, $h = 5\sqrt{3}$ b) $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $h = 5\sqrt{2}$ c) $r \approx 2{,}27$, $h \approx 8{,}91$ **6.6.** a) $r = 12$, $l = 24$ b) $r = 7\sqrt{3}$, $l = 14$ c) $r = 10$, $l = 10\sqrt{2}$ d) $r = 10{,}1$, $l = 15{,}7$ e) $r = 4{,}8$, $l = 18{,}6$ **6.7.** a) $r = 12$ cm, $h = 12\sqrt{3}$ cm b) $r = 12\sqrt{2}$ cm, $h = 12\sqrt{2}$ cm **6.8.** kąt rozwarcia: 44°, kąt nachylenia tworzącej: 68° **6.9.** Otrzymano sumę dwóch stożków o wspólnej podstawie; przekrój jest rombem o kątach 60° i 120°. **6.10.** a) 4 cm b) 4,8 cm **6.11.** $49\sqrt{3}\pi$ dm^2, $7\sqrt[4]{27}$ dm **6.12.** $9\sqrt{3}$ cm, 60° **6.13.** *Wskazówka:* Jest to suma stożka i walca z wydrążonym stożkiem; stożki te są przystające. **6.14.** *Wskazówka:* a) Jest to suma walca i stożka. b) Jest to suma stożka o tworzącej równej dłuższej podstawie trapezu i stożka ściętego o tworzącej równej krótszemu ramieniu, z wydrążonym stożkiem o tworzącej równej krótszej podstawie trapezu. **6.15.** a) 10 b) 6 **6.16.** Pole każdego z przekrojów jest równe 8π cm^2. **6.17.** $P = \frac{r^2\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta}}{\cos\beta}$ dla $\beta < 90° - \alpha$ **6.18.** Droga przez szczyt zajmie ok. 1 h 25 min, a obejście góry ok. 1 h 35 min. **6.19.** $\frac{81}{14}$ **6.20.** $3\sqrt{6}$

6.21. $\left(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\right)$ cm. *Wskazówka:* Przyjmij oznaczenia jak na rysunku. Zauważ, że płaszczyzna przechodząca przez wysokość WF i środki krawędzi AD oraz BC jest prostopadła do ścian ADW i BCW, a punktem styczności kuli ze ścianą BCW jest punkt należący do wysokości tej ściany – oznaczony na rysunku literą L. Wykorzystaj podobieństwo trójkątów FKW oraz LSW.



6.22. $\frac{c}{5}\left(2\sqrt{6}+3\right)$ **6.23.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

s. 75

1. P, P, F **2.** 15 cm **3.** promień: 9,7 cm, tworząca: 15,4 cm **4.** $P = 135\pi\ \text{cm}^2$ **5.** 4

s. 91

7.1. C **7.2.** A **7.3.** C **7.4.** 300 **7.5.** 5 dm **7.6.** $8\left(6+\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$

7.7. $P_c = \left(192+112\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$, $V = 96\left(1+\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^3$ **7.8.** $V = 90\sqrt{3}$, $P_c = 96\sqrt{3}$ **7.9.** $486\ \text{cm}^2$

7.10. 324 **7.11.** $\sqrt{3}\ \text{dm}^3$ **7.12.** $216 \cdot \text{tg}\,70° \approx 593$ **7.13.** a) 76° b) $25\sqrt{17}$ c) $166\frac{2}{3}$, $833\frac{1}{3}$

7.14. $72\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ **7.15.** $V = 24\sqrt{3}$, $P_c = 36\left(2+\sqrt{3}\right)$ **7.16.** $V = \frac{\sqrt{11}}{12}a^3$, $P_c = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{4}a^2$

7.17. $100\left(3+2\sqrt{3}\right)$ **7.18.** $V = 648\ \text{cm}^3$, $P = 216\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **7.19.** $V = 1296\ \text{cm}^3$,
$P_c = 108\sqrt{3}\left(1+\sqrt{13}\right)\ \text{cm}^2$ **7.20.** 1666 **7.21.** $320\sqrt{3}$ **7.22.** 2223 **7.23.** $2\ \text{dm}^3$.

Wskazówka: Wyznacz spodek wysokości ostrosłupa. **7.24.** $99\sqrt{11}\ \text{cm}^3$ **7.25.** $V = \frac{a^3\,\text{tg}\,\alpha}{12}$,
$P_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{1+4\,\text{tg}^2\,\alpha}$ **7.26.** $P_c = 74{,}8$, $V = 44{,}0$ **7.27.** $38\ \text{cm}^3$ **7.28.** $2400\pi\ \text{cm}^2$

7.29. 2 **7.30.** 628 **7.31.** $618\ \text{cm}^2$ **7.32.** na cztery części: $V_1 = \pi R^3\frac{\sqrt{15}}{48}$, na trzy części:
$V_2 = 2\pi R^3\frac{\sqrt{2}}{27}$, $V_1 < V_2$ **7.33.** $\frac{125}{16}\ \text{cm}$ **7.34.** ok. $11\ \text{m}^2$ **7.35.** $200\pi\left(2+\sqrt{5}\right)\ \text{cm}^2$

7.36. $17\frac{1}{3}\pi\ \text{cm}^3$ **7.38.** 27 : 37. *Wskazówka*: Skorzystaj z zależności między objętościami brył podobnych. **7.39.** $\frac{S}{\sqrt[3]{4}}$. *Wskazówka*: Skorzystaj z zależności między objętościami brył podobnych.

7.40. $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)H$. *Wskazówka*: Skorzystaj z zależności między objętościami brył podobnych.

7.41. 17 dm **7.42.** $\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$ **7.43.** $\frac{\pi a^2}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}$, $0 < a < 2R$ **7.44.** $\frac{\pi h^2 r^2}{3(h-2r)}$, $0 < r < \frac{h}{2}$

7.45. $4R^2\sin 2\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ **7.46.** $\frac{24r^2}{\sin\alpha}$. *Wskazówka*: Zauważ, że wysokość graniastosłupa jest równa $2r$.

s. 96

1. P, P, P **2.** $P_c = 422$, $V = 513$ **3.** $V = 10\ \text{dm}^3$, $P_c = 32\ \text{dm}^2$ **4.** $\frac{P}{2} \cdot \sqrt{\frac{Z-P}{2\pi}}$
5. $V = abc\sin\alpha\sin\beta$

s. 101

8.1. A **8.2.** D **8.3.** D **8.4.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}a$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ **8.5.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **8.6.** promień podstawy: $\frac{1}{3}a$,
wysokość: $\frac{1}{3}H$, $V = \frac{\pi a^2 H}{27}$ **8.7.** promień podstawy: $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, wysokość: $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ **8.8.** $53\frac{1}{3}\pi$
8.9. $d\sqrt{3}$ **8.10.** $\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$ **8.11.** $\frac{8}{\pi}$ **8.12.** $\frac{4R\sqrt{5}}{15}$, $\frac{8R\sqrt{5}}{15}$, $\frac{H}{3}$. *Wskazówka*: Wykorzystaj

przekrój płaski stożka zawierający przekątną podstawy prostopadłościanu. **8.13.** 4 **8.14.** $\frac{32}{81}\pi$

8.15. $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

s. 103

1. P, P, F **2.** 9π **3.** długość krawędzi: 8, $V = 64\sqrt{3}$ **5.** R^3

s. 104

1. B **2.** D **3.** C **4.** C **5.** B **6.** B **7.** B **8.** D **9.** A **10.** A **11.** B **12.** B **13.** B **14.** D **15.** D **16.** C **17.** D **18.** B **19.** B **20.** F, P, F **21.** F, P, P **22.** P, F, P **23.** P, F, P **24.** P, P, P **25.** P, P, P **26.** F, P, P **27.** P, P, P **28.** P, P, P **29.** P, P, F **30.** P, F, P **31.** F, P, F **32.** F, P, F **33.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. *Wskazówka*: Zauważ, że pole powierzchni nie ma wpływu na wynik rozwiązania. **34.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **35.** $2\sqrt{7}$ **36.** $36\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+3\right)$ **37.** 45° **38.** a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ b) 55° c) 45° **39.** $4\sqrt{17}\pi$ **40.** 256 **41.** $81\pi\left(1+\sqrt{2}\right)$ **42.** $12\pi\sqrt{13}\cdot\sqrt[3]{9}$ **43.** 48 **44.** $a = 4\sqrt{3}$ **45.** $P_b = 48\ \text{dm}^2$, $V = 36\ \text{dm}^3$ **46.** o 0,4 mm **47.** $0{,}168d^3$ **48.** $V = 1350$, $P = 779$ **49.** 56,25 **50.** 108 **51.** $P_c = 8\left(24+25\sqrt{5}\right)\text{cm}^2$, $V = 480\sqrt{5}\ \text{cm}^3$ **52.** szerokość wału: 11 m; 41 569 m^3 **53.** $V = 245$, $P = 264$ **54.** $2\sqrt[3]{3}$ **55.** $V = \frac{a^3\cos\alpha}{12\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}$, $\alpha \in (30°; 45°)$ **56.** a) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, $P_c = a^2\sqrt{3}$ b) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \approx 71°$ c) $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{4\sin\beta}$ **57.** $2a^2\cdot\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1+2\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$ **58.** 60° **59.** $\frac{c^2\sqrt{4b^2-c^2}}{24}$ **60.** $96\sqrt{3}$ **61.** $\sqrt[3]{\frac{V_1\cdot V_2}{\pi^2}}$, 1,2 **62.** $V = 2\pi r^3\operatorname{tg}\alpha$, $P_c = 2\pi r^2(1+2\operatorname{tg}\alpha)$ **63.** $V = \frac{\pi r^3}{3\operatorname{tg}\alpha}$, $P_b = \frac{\pi r^2}{\sin\alpha}$ **64.** $\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$, $0° < \alpha < 90°$ **65.** stosunek pól: $\frac{3}{2}$, stosunek objętości: $\frac{4}{3}$ **66.** $\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$ **67.** 8 : 117 **68.** $\frac{\pi r^3}{3\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ **69.** $\frac{16}{9}R$ **70.** $\frac{\pi\sqrt{3}a^3\operatorname{tg}\alpha}{216}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ **71.** $V = \pi h^3$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ **72.** $\frac{\pi a^3\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{24\cos^3\frac{\alpha}{2}}$ **73.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **74.** $2\sqrt{6}$ **75.** $\frac{\sqrt{2S^3}}{24}$

2. Kombinatoryka i teoria prawdopodobieństwa

s. 124

1.1. D **1.2.** C **1.3.** C **1.4.** wariacje z powtórzeniami: a) 3^{10}, b) 6^5, d) 5^{27}, f) 12^{35}; wariacje bez powtórzeń: c) $\frac{20!}{8!} = 20\cdot19\cdot18\cdot\ldots\cdot10\cdot9$, g) $\frac{35!}{18!} = 35\cdot34\cdot33\cdot\ldots\cdot20\cdot19$; permutacje: e) 8! **1.5.** 120 **1.6.** 24 godziny **1.7.** 8!, 7!, 6! **1.8.** 10! a) 8! b) 8! c) 3!·8! **1.9.** a) 5!, 8!, 13!

b) 9!, 6!, 6!, $17 \cdot 16$ c) $(n+1)!, (n+1)!, (n+3)!$ d) $(n-1)!, n, n+1, n-2$ e) $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n(n+1)}$

1.10. a) 30, 90, 35, 60 b) 210, $\frac{1}{120}$, 9, 66 **1.11.** a) $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$ b) $\frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 45\,360$ c) $\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!} = 83\,160$ **1.12.** $\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$ **1.13.** $\frac{12!}{5! \cdot 4! \cdot 3!}$ **1.14.** a) 48 b) 120 c) 360 d) 288 **1.15.** a) $10 \cdot 2 \cdot 8!$ b) $10 \cdot 4 \cdot 7!$ c) $10 \cdot 3! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5!$ **1.16.** a) 5^4 b) 5 c) 5 **1.17.** a) 4^4 b) $2 \cdot 4^4$ c) $2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3$ **1.18.** a) $\frac{41 \cdot 8!}{3!}$ b) $\frac{17 \cdot 8!}{3!}$ c) $\frac{22 \cdot 7!}{3!}$ **1.19.** 90 **1.20.** 244 **1.21.** 42

1.22. 6^6. *Wskazówka*: Przy wypełnianiu pierwszego wiersza mamy $3 \cdot 3$ możliwości (wybór kwadratu i wybór miejsca w kwadracie). W kolejnych wierszach możliwości jest $2 \cdot 3$, $1 \cdot 3$, $3 \cdot 2$, $2 \cdot 2$ itd.

s. 127

1. P, P, F **2.** a) 2 b) $7! \cdot 7!$ c) $8 \cdot 7! \cdot 7!$ **4.** $13 \cdot 5^6$ **5.** $\frac{160 \cdot 7!}{4!}$

s. 134

2.1. B **2.2.** B **2.3.** A **2.4.** 28, 45, 66, 197, 37 **2.5.** a) np. $21 \cdot 22 \cdot 23$ b) np. $50 \cdot 33 \cdot 98$ c) np. $9 \cdot 11 \cdot 13$ d) np. $4 \cdot 14 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25$ **2.6.** a) $n = 7$ b) $n = 3$ lub $n = 6$ c) $n = 3$ lub $n = 14$ d) $n = 1$ e) $n = 7$ f) $n = 5$ **2.7.** 286 **2.8.** $\binom{1000}{30}$ **2.9.** $\binom{3000}{500}$ **2.10.** 21

2.11. $\binom{5}{1}\binom{7}{3}\binom{4}{2} = 1050$ **2.12.** $\binom{3}{1}\binom{8}{3}\binom{8}{4}\binom{6}{3} = 235\,200$ **2.13.** a) 3360 b) 252 c) 308 d) $\binom{8}{4}\binom{10}{1} + \binom{8}{5} = 756$ **2.14.** a) 20 b) 110 c) 76 d) $\binom{4}{3} + \binom{8}{3} = 60$

2.15. $\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} = 2520$ **2.16.** a) $\binom{24}{7} = 346\,104$ b) $\binom{12}{7} = 792$ c) $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 144$

2.17. a) $\binom{100}{7}$ b) 672 **2.18.** $\binom{30}{3} = 4060$. Nie, potrzeba 203 strony. **2.19.** 22 **2.20.** 720

2.21. $\binom{8}{2} + 2 \cdot 8 + 1$ **2.22.** 12 870. *Wskazówka*: Każda droga składa się z 8 fragmentów prowadzących w lewo i 8 fragmentów prowadzących w prawo. Wszystkich dróg jest $\binom{16}{8}$.

s. 136

1. P, P, P **2.** $\binom{45}{3}$ **3.** $n = 7$ **4.** $n = 7$ **5.** 78

s. 144

3.1. B **3.2.** B **3.3.** C **3.4.** a) $\binom{57}{18}$ b) $\binom{101}{33}$ c) $\binom{49}{15}$ d) $\binom{3n+3}{n+3}$ **3.5.** 1001

3.6. $2^{30} - 1$ **3.7.** a) 8 b) 4 c) 32 d) 16 **3.8.** a) $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ b) $16c^8 + 96c^6 + 216c^4 + 216c^2 + 81$ c) $x^{15} + 10x^{11} + 40x^7 + 80x^3 + \frac{80}{x} + \frac{32}{x^5}$ d) $\frac{m^6}{t^{12}} - \frac{6m^4}{t^7} + \frac{15m^2}{t^2} - 20t^3 + \frac{15t^8}{m^2} - \frac{6t^{13}}{m^4} + \frac{t^{18}}{m^6}$ **3.9.** a) $17 + 12\sqrt{2}$ b) $9 - 12\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{3} + 18\sqrt[3]{9} - 12\sqrt[6]{243}$ c) $41 + 29\sqrt{2}$ d) $792 - 560\sqrt{2}$ **3.10.** 60

3.11. $10\,626x^{13}$ **3.12.** *Wskazówka*: Podstaw odpowiednie liczby do wzoru na rozwinięcie $(a+b)^n$.

3.13. *Wskazówka*: Podstaw odpowiednie liczby do wzoru na rozwinięcie $(a+b)^n$.

s. 146

1. P, F, P **2.** 968 **3.** $1792x^4$ **4.** $362 - 209\sqrt{3}$

s. 149

4.1. A **4.2.** C **4.3.** D **4.4.** P, P, F **4.5.** $\frac{7}{36}$ **4.6.** $\frac{1}{8}$ **4.7.** 12 **4.8.** $\frac{1}{3}$ **4.9.** $\frac{12}{25}$
4.10. $\frac{1}{169}$ **4.11.** $\frac{8}{75}$ **4.12.** $\frac{3}{10}$ **4.13.** $\frac{255}{256}$

s. 157

5.1. D **5.2.** A **5.3.** D **5.4.** a) $\frac{1}{120}$ b) $\frac{1}{20}$ **5.5.** $\frac{1}{512}$ **5.6.** $\frac{44}{95}$ **5.7.** $\frac{215}{216}$ **5.8.** $\frac{1}{5}$
5.9. $\frac{255}{3542}$ **5.10.** $\frac{7}{9}$ **5.11.** $\frac{1}{3}$ **5.12.** a) $\frac{25}{81}$ b) $\frac{41}{81}$ **5.13.** $\frac{3}{5}$
5.14. $\dfrac{\binom{34}{13}\binom{21}{7}+\binom{34}{15}\binom{19}{5}+\binom{34}{15}\binom{19}{7}}{\binom{36}{15}\binom{21}{7}} = \frac{31}{90}$ **5.15.** $\frac{1}{18}$ **5.16.** $\frac{1}{7}$ **5.17.** a) $\frac{1}{504}$ b) $\frac{1}{84}$
c) $\frac{3}{8}$ **5.18.** a) $\frac{17}{32}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $b = 9$ **5.19.** a) 15 b) $\frac{88}{95}$ **5.20.** $n \in \{4, 5\}$
5.21. $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **5.22.** a) 0,2 b) 0,05 c) 0,15 **5.23.** $\frac{12!}{2^6 \cdot 6^{12}}$

s. 160

1. P, P, P **2.** $\frac{9}{20}$ **3.** $\frac{10}{21}$ **4.** $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^3} = \frac{18}{25}$ **5.** $n \in \{6, 7, 8, 9\}$

s. 165

6.1. B **6.2.** D **6.3.** A **6.4.** $\frac{15}{16}$ **6.5.** $\frac{3}{5}$ **6.6.** $\frac{1}{5}$ **6.7.** $\frac{156}{703}$ **6.8.** $\frac{1}{3}$ **6.9.** 42%
6.10. $\frac{2}{3}$ **6.11.** 0,375 **6.12.** 0,18 **6.13.** $\frac{15}{16}$ **6.14.** $\frac{6}{7}$ **6.15.** 1 **6.17.** $\frac{1}{9}$

s. 167

1. P, P, F **2.** $\frac{3}{16}$ **3.** 80% **4.** $\frac{4}{7}$

s. 174

7.1. D **7.2.** B **7.3.** A **7.4.** a) Tak, bo $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \emptyset$, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. b) Nie, bo $A \cup B \neq \Omega$. c) Tak, bo $A \cup B \cup C = \Omega$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $C \cap B = \emptyset$, $P(A) = P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{2}$. **7.5.** a) Tak, bo $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \emptyset$, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. b) Nie, bo $A \cup B \neq \Omega$. c) Nie, bo $A \cup B \neq \Omega$. **7.6.** $\frac{9}{16}$ **7.7.** $\frac{9}{32}$ **7.8.** $\frac{5}{12}$ **7.9.** a) $\frac{5}{33}$ b) $\frac{47}{66}$ **7.10.** a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{7}{9}$
7.11. 0,0356 **7.12.** $\frac{59}{156}$ **7.13.** $\frac{1}{2}$ **7.14.** $\frac{119}{432}$ **7.16.** $\frac{49}{248}$ **7.17.** $\frac{43}{80}$ **7.18.** $\frac{31}{90}$
7.19. $\frac{455}{8192}$ **7.20.** w pierwszym pudełku: dwie, w drugim: jedna **7.21.** $\frac{5}{12}$ **7.22.** $\frac{5}{7}$
7.23. 14%

s. 177

1. F, P, F **2.** $\frac{58}{135}$ **3.** $\frac{67}{156}$ **4.** $\frac{386}{1015}$ **5.** $\frac{243}{275}$

s. 186

8.1. B **8.2.** D **8.3.** C **8.4.** $\frac{7}{32}$ **8.5.** $\frac{80}{243}$ **8.6.** $\frac{60}{343}$ **8.7.** $\binom{7}{4}\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^4\cdot\left(\frac{7}{15}\right)^3$

8.8. $\frac{4077}{4096}$ **8.9.** Wygranie 2 rozgrywek z 4. *Wskazówka:*
$\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}>\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$ **8.10.** $P(A)=\frac{27}{128}$, $P(B)=\frac{40}{243}$, $P(A)>P(B)$

8.11. $\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^3\cdot\left(\frac{11}{12}\right)^2$ **8.12.** $\frac{397}{2048}$ **8.13.** 10 **8.14.** 2 **8.15.** 17 **8.16.** 16 i 17

8.17. $\frac{27}{128}$

s. 188

1. F, P, F **2.** $\binom{8}{3}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^3\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^5$ **3.** $\frac{2304}{3125}$ **5.** 6

s. 189

1. B **2.** A **3.** C **4.** B **5.** C **6.** C **7.** D **8.** B **9.** D **10.** B **11.** F, F, F **12.** P, F, F **13.** F, P, P **14.** P, F, P **15.** F, P, F **16.** P, P, P **17.** P, P, P **18.** F, F, P **19.** F, P, P **20.** F, F, F **21.** 168 **22.** 952 **23.** $\binom{12}{0}+\binom{12}{1}+\binom{12}{2}+\ldots+\binom{12}{11}+\binom{12}{12}=2^{12}$

24. $\frac{3}{5}$ **26.** 24 **27.** $\frac{18!}{2^9}$ **28.** 0,5 **30.** $P(A)=\frac{19}{35}$, $P(B)=\frac{31}{35}$ **31.** 6, 7, 8 lub 9 **32.** bez zwracania **33.** 21 **34.** $\frac{20}{81}$ **35.** a) 0,08 b) 0,5 c) 0,16 **36.** $\frac{1}{4}$ **37.** $\frac{716}{729}$ **38.** $n\geqslant 5$

3. Dowody w matematyce

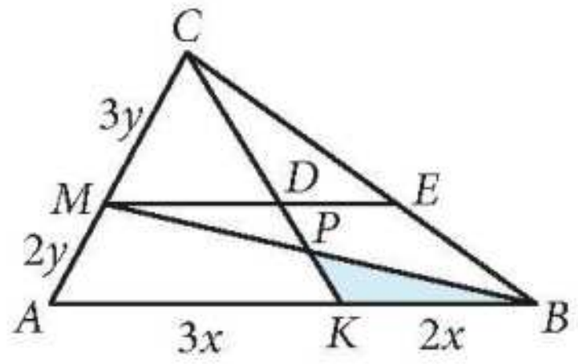
s. 201

1.23. *Wskazówka*: Zauważ, że na czworokącie $ABEF$ można opisać okrąg. **1.24.** *Wskazówka*: Zauważ, że na czworokącie $AFEC$ można opisać okrąg. **1.26.** *Wskazówka*: Skorzystaj z nierówności trójkąta. **1.27.** b) *Wskazówka*: Zauważ, że na czworokątach AC_1MB_1, C_1BA_1M i B_1MA_1C można opisać okręgi, i wykorzystaj twierdzenie o kątach wpisanych w okrąg.

1.29. *Wskazówka*: Przedłuż ramiona trapezu do punktu przecięcia M, wykaż, że pola trójkątów BDC i CDM są równe, i wykorzystaj zależność między polami trójkątów ABM oraz DCM.

1.31. *Wskazówka*: Wykaż, że $P_{AMD}=P_{BMC}=\sqrt{P_1\cdot P_2}$. **1.32.** *Wskazówka*: Wykaż, że $|EB|=2|DE|$, a następnie zastosuj twierdzenie o dwusiecznej dla trójkąta prostokątnego CDB.

1.40. *Wskazówka*: Przez punkt M poprowadź prostą ME równoległą do boku AB. Wykaż, że trójkąty PMD i PBK są podobne w skali $9:10$, a następnie, że $|PK| = \frac{4}{19}|KC|$.



s. 217

2.10. *Wskazówka*: Liczba niepodzielna przez 3 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1 lub 2.

2.23. *Wskazówka*: Przekształć tezę równoważnie przez podniesienie obu stron do kwadratu.

2.29. *Wskazówka*: Pomnóż daną nierówność stronami przez 2. **2.37.** *Wskazówka*: Przekształć tezę równoważnie przez podniesienie obu stron do kwadratu. **2.44.** *Wskazówka*: Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 6x^2 - 72x + 50$.

4. Powtórzenie

s. 225

1.1. B **1.2.** C **1.3.** D **1.4.** D **1.5.** D **1.6.** B **1.7.** A **1.8.** D **1.9.** B **1.10.** B
1.11. B **1.12.** D **1.13.** B **1.14.** C **1.15.** D **1.16.** C **1.17.** A **1.18.** A **1.19.** A
1.20. C **1.21.** D **1.22.** P, F, F **1.23.** F, P, P **1.24.** F, P, P **1.25.** P, P, F **1.26.** C, E
1.27. A2 **1.28.** $-2, 0, 2, 4$ **1.29.** a) np. 1,52 b) np. $1\frac{2}{3}$ c) np. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **1.30.** 10 050
1.31. Liczba n jest cztery razy większa od m. **1.32.** a) $(a+12)^2$ b) $\left(k-\sqrt{6}m\right)^2$ c) $(1-2x)^2$
d) $\left(\frac{1}{2}y+4z\right)^2$ **1.33.** a) $(a-15)(a+15)$ b) $\left(\frac{1}{2}b-5d^2\right)\left(\frac{1}{2}b+5d^2\right)$ c) $(m-p-k)(m-p+k)$
d) $(x+y)(x+3y)$ **1.34.** $\frac{24+\sqrt{2}}{14}$ **1.35.** $3\frac{1}{5} < 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$ **1.36.** 2 min 5 s
1.37. a) 57,4% b) o 26,48% c) Średnia kwota odliczeń na dojazdy dzieci do szkół nie jest ilorazem wielkości z dwóch pierwszych diagramów. **1.38.** a) o 100% b) o 50% c) 22,9% **1.39.** o 32
1.40. 80% **1.41.** 780 zł **1.42.** 100 wiadomości **1.43.** 400 000 zł **1.44.** 24 h 37 min
1.45. o 37,5% **1.46.** o 189% **1.47.** Pole trójkąta zmniejszyło się o 9%. **1.48.** 9 uczniów
1.49. 800 **1.50.** a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{25}$ **1.51.** a) $\frac{1}{24}$ b) 40 **1.52.** $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ **1.53.** $a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{4}{3}}$, $\sqrt[4]{2}$
1.54. a) 1 b) 9 c) $\frac{1}{25}$ d) $\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{3}$ e) 1 f) $\sqrt[3]{2}$ **1.55.** $m < n$ **1.56.** Dane liczby są równe.
Wskazówka: Zauważ, że wyrażenie $5+2\sqrt{6}$ jest kwadratem sumy dwóch pierwiastków kwadratowych.

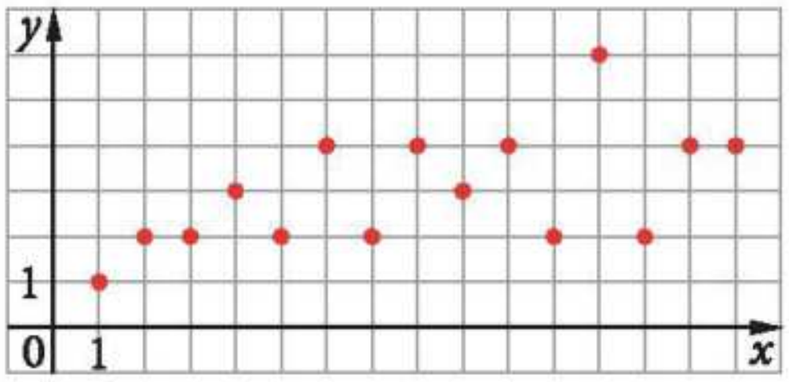
s. 233

2.1. A **2.2.** B **2.3.** B **2.4.** C **2.5.** A **2.6.** B **2.7.** C **2.8.** A **2.9.** C **2.10.** C
2.11. B **2.12.** A **2.13.** D **2.14.** C **2.15.** F, P, P **2.16.** F, P, P **2.17.** P, P, P
2.18. B. $g(x)$, D. $h(x)$ **2.19.** C2 **2.20.** a) tak, $D = \{-2, 0, 1, 3\}$, $ZW = \{-6, 0, 3, 9\}$, np. $y = 3x$ b) tak, $D = \{-5, 0, 1, 5\}$, $ZW = \{0, 1, 25\}$, np. $y = x^2$ c) nie d) nie

2.21. $y = 2x - 1$, $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $ZW = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$ **2.22.** a) $\mathbf{R} - \{-2\}$ b) $\left\langle -\frac{1}{2}; \infty \right)$ c) $(-\infty; 5)$ d) $\langle -3; 4\rangle$ e) $\left\langle \frac{1}{3}; 3 \right) \cup (3; \infty)$ f) $(2; \infty)$ g) $\langle -3; 6)$ h) $(-5; 5) \cup (5; \infty)$

2.23. $f(-3) = -6$, $f(0) = \frac{3}{2}$, $f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{2}$, $f(2) = \frac{1}{4}$, $f(3) = 0$ **2.24.** a) $\{0, 4, 6\}$ b) $\{-1, 0, -4\}$ c) $\{0, 1, 3\}$ d) $\left\{0, -1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$ **2.25.** $f(x) = 0{,}85x + 5$, $D = \{40, 52, 68, 84, 120\}$, $ZW = \{39, 49{,}2, 62{,}8, 76{,}4, 107\}$

2.26.



wartość funkcji dla każdej liczby pierwszej: 2; wartość największa: 6 dla $x = 12$, wartość najmniejsza: 1 dla $x = 1$

2.27. $f(n) = \frac{60 - n}{2n}$, $D = \{3, 4, ..., 59\}$

2.28. a) $\frac{3}{2}$ b) -3 c) 0, 1 d) 3

2.29. a) $D = \langle -6; 5)$, $ZW = (-2; 6)$; brak wartości najmniejszej, brak wartości największej; miejsca zerowe: -4, -1; $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -6; -4) \cup (-1; 5)$; $f(x) < 0$ dla $x \in (-4; -1)$; funkcja malejąca w przedziale $\langle -6; -1)$, rosnąca w przedziale $\langle -1; 5)$; $f(-6) = 5$, $f(0) = 2$, $f(2) = 4$; równanie $f(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 6; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-2; 0) \cup \langle 3; 4) \cup (5; 6)$, 2 rozwiązania dla $m \in \langle 0; 3) \cup \langle 4; 5\rangle$

b) $D = (-6; -2\rangle \cup (0; \infty) \cup \{-1\}$, $ZW = (-2; \infty)$; brak wartości najmniejszej, brak wartości największej; miejsca zerowe: -2, -1, 2; $h(x) > 0$ dla $x \in (-6; -2) \cup (2; \infty)$; $h(x) < 0$ dla $x \in (0; 2)$; funkcja malejąca w przedziale $(-6; -2\rangle$, rosnąca w przedziale $(0; \infty)$; $x = -6 \notin D$, $x = 0 \notin D$, $h(2) = 0$; równanie $h(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2\rangle$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-2; 0) \cup (0; 2\rangle \cup \langle 5; \infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in (2; 5)$, 3 rozwiązania dla $m = 0$

c) $D = (-8; 6\rangle$, $ZW = (-3; 2\rangle \cup \{3\}$; brak wartości najmniejszej, wartość największa: 3 dla $x \in (2; 6\rangle$; miejsca zerowe: -5, 1; $g(x) > 0$ dla $x \in (-5; -4\rangle \cup (1; 6\rangle$; $g(x) < 0$ dla $x \in (-8; -5) \cup (-4; 1)$; funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-8; -4\rangle$ i $\langle -2; 2\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -4; -2\rangle$, stała w przedziale $(2; 6\rangle$; $g(-6) = g(0) = -1$, $g(2) = 2$; równanie $g(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -3\rangle \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-3; -2) \cup (1; 2\rangle$, 2 rozwiązania dla $m \in \langle -1; 1\rangle \cup \{-2\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (-2; -1)$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 3$

d) $D = (-\infty; 6\rangle$, $ZW = \langle -3; 6\rangle$; wartość najmniejsza: -3 dla $x = 6$, wartość największa: 6 dla $x = 2$; miejsca zerowe: -5, 5; $k(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; 5)$; $k(x) < 0$ dla $x \in (5; 6\rangle$; funkcja stała w każdym z przedziałów $(-\infty; -7\rangle$ i $(-2; 1)$, malejąca w każdym z przedziałów $\langle -7; -5\rangle$ i $\langle 2; 6\rangle$, rosnąca w każdym z przedziałów $\langle -5; -2)$ i $\langle 1; 2\rangle$; $k(-6) = 1$, $k(0) = 5$, $k(2) = 6$; równanie $k(x) = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -3) \cup (6; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in \langle -3; 0) \cup \{6\}$, 2 rozwiązania dla $m \in (2; 3) \cup (3; 5) \cup (5; 6) \cup \{0\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (0; 2) \cup \{3\}$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m \in \{2, 5\}$ **2.30.** a) $D = \langle -4; 7)$, $ZW = (1; 9)$ b) równanie $-h(x) - 2 = m$ ma: 0 rozwiązań dla $m \in \langle 0; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -7\rangle \cup \langle -4; -2) \cup (-2; 0)$, 2 rozwiązania dla $m \in (-7; -4)$; 3 rozwiązania dla $m = -2$ c) rosnąca w przedziale $(-9; -5\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -5; -3\rangle$, niemalejąca w przedziale $\langle -3; 5\rangle$ d) wartość najmniejsza: -2 dla $x = -6$, wartość największa: 7 dla $x = -2$ **2.31.** $D = \langle -8; 10\rangle$, $ZW = \langle 3; 8\rangle$ **2.32.** a) malejąca w przedziale

$\langle -2; 1\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 1; 5\rangle$ b) rosnąca w przedziale $\langle -5; -1\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -1; 2\rangle$

2.33. f – rosnąca, g – niemonotoniczna, h – malejąca **2.34.** a) 4 mln b) Wszystkie funkcje są niemonotoniczne. c) 2004 r. – ok. 3,5 mln, 2005 r. – ok. 3,8 mln, 2006 r. – ok. 4 mln, 2007 r. – ok. 4,5 mln d) w 2001 r., 1,4 mln e) odwiedziny u krewnych lub znajomych

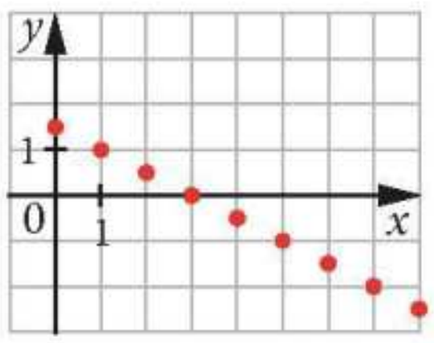
2.36. a) 482 tys. b)

c) w 6. tygodniu d) po 5 tygodniach

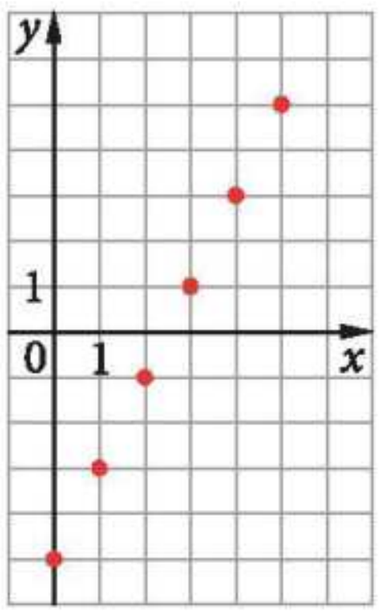
2.38. 145 zł **2.39.** a) $1\frac{1}{2}$, 63° b) $\frac{2}{3}$, 124°

2.40.

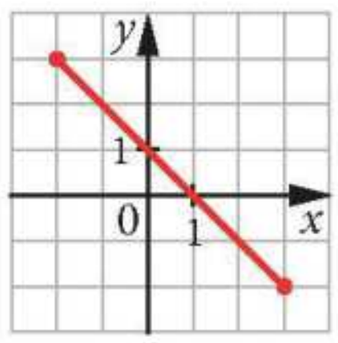
a)



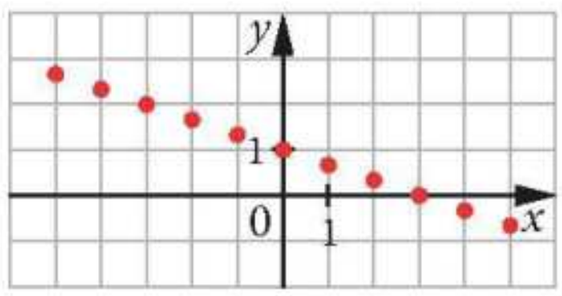
b)



c)

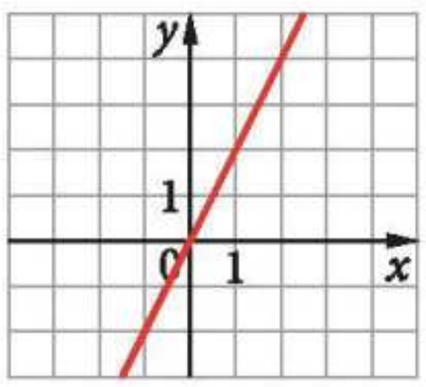


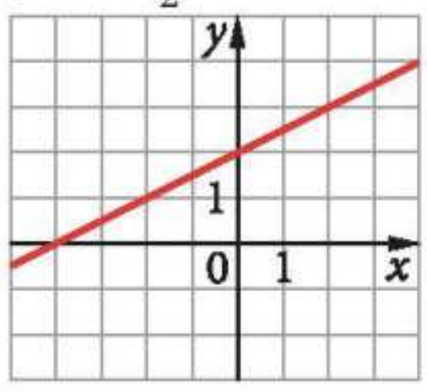
d)

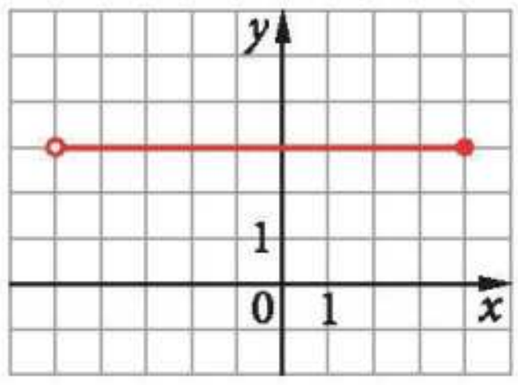


2.41. a) $f(x) = -x + 3$ b) $f(x) = 2x + 4$

2.42. a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ c) $f(x) = 3$ dla $x \in (-5; 4\rangle$

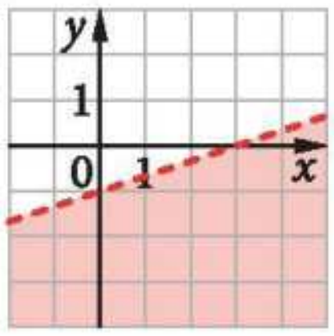




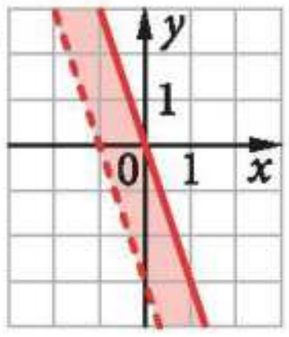


2.43. $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ **2.44.** a) $f(x) = 3x - 9$ b) $f(x) = -4x + 4$ c) $f(x) = x - 2$ d) $f(x) = 3x + 1$ **2.45.** a) rosnąca dla $m < 2$, malejąca dla $m > 2$ b) rosnąca dla $m < -\sqrt{2}$, malejąca dla $m > -\sqrt{2}$ **2.46.** a) $g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$ b) $g(x) = \frac{2}{5}x$ **2.47.** $-2\frac{2}{3}$

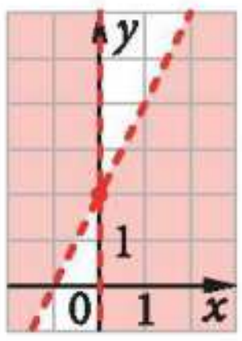
2.48. a)



b)



c)

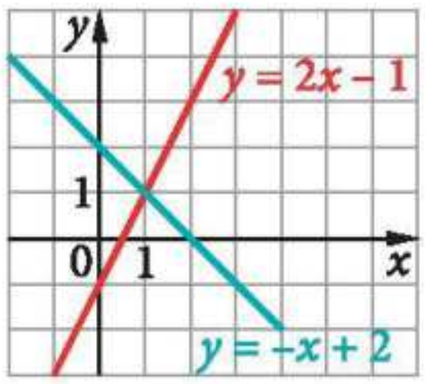


2.49. $m = -2$ **2.50.** $k = -\sqrt{3}$ **2.51.** $p = 5$

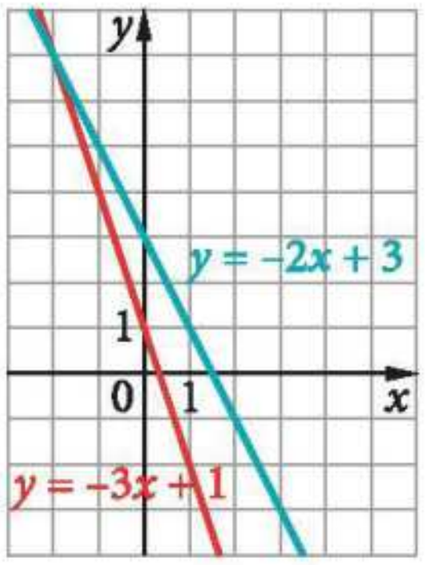
2.52. a) $x = \frac{1}{4}$ b) $x = 2$ c) $x = 2\left(2\sqrt{5} - 3\right)$ d) $x \in \mathbf{R}$ e) $x = 1$ f) $x \in \left\langle 21\frac{1}{2}; \infty\right)$ g) $x \in (-\infty; -4)$ h) $x \in (-\infty; -2\rangle$ **2.54.** $x = 2^3$

2.55. a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ b) układ sprzeczny c) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ d) układ nieoznaczony: $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = -x \end{cases}$

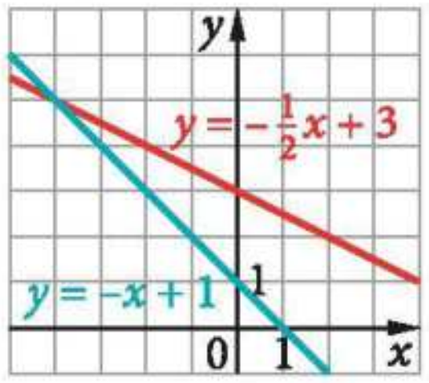
2.56. a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$



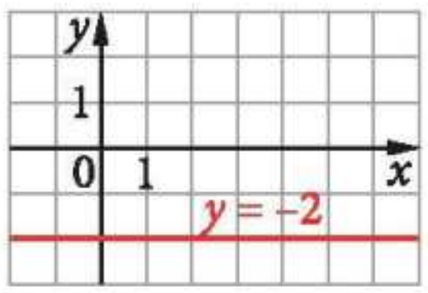
b) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases}$



c) $\begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases}$



d) $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = -2 \end{cases}$



2.57. 263 telefony stacjonarne i 102 telefony komórkowe **2.58.** o 400 zł **2.59.** Jacka: 32 m × 25 m i Artura: 40 m × 28 m lub Jacka: $66\frac{2}{3}$ m × 12 m i Artura: $74\frac{2}{3}$ m × 15 m

2.60. $V(t) = 12t + 180$; $D = \langle 0;\ 110\rangle$; po 1 h 50 min

2.61. $p(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1000 \\ \frac{1}{5}(x - 1000) & \text{dla } x > 1000 \end{cases}$ **2.62.** a) $x = -2$ lub $x = 8$ b) $x = -16$ lub $x = 6$ c) $x = -11$ d) $x = -8$ lub $x = -4$ e) równanie sprzeczne f) $x = 4$ lub $x = 10$

2.63. a) $x \in (-1;\ 5)$ b) $x \in (-\infty;\ -10) \cup (0;\ \infty)$ c) nierówność tożsamościowa d) $x \in \langle 3;\ 5\rangle$ e) nierówność sprzeczna f) $x \in (-36;\ -6)$ **2.64.** a) $x = -2$ lub $x = 6$ b) $x = -5$ lub $x = -1$, lub $x = 1$, lub $x = 5$ c) $x = -8$ lub $x = -6$, lub $x = -2$, lub $x = 0$ **2.65.** $\frac{4}{7}$ **2.66.** a) $x = -9$ lub $x = 11$ b) $x = -2$ lub $x = 6$ c) $x = \frac{7}{3}$ lub $x = 5$ **2.67.** a) $x \in (-\infty;\ 1)$ b) $x \in \langle -3;\ 1\rangle$ c) $x \in (-\infty;\ -7\rangle \cup \left\langle -1;\ \frac{11}{3}\right\rangle$ **2.68.** a) $ZW = \{3\}$ b) *Wskazówka*: Wzór funkcji można zapisać w postaci $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-\infty;\ -2) \\ -2x - 1 & \text{dla } x \in \langle -2;\ 1) \\ -3 & \text{dla } x \in \langle 1;\ \infty) \end{cases}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $m \in (-\infty;\ -3) \cup (3;\ \infty)$

2.69. $k \in \left(\frac{5}{3};\ 4\right)$ **2.70.** $m = -0{,}2$ lub $m = 1$

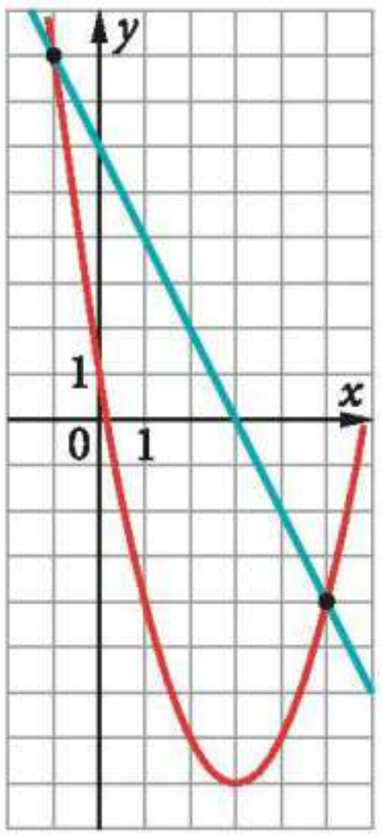
s. 246

3.1. C **3.2.** C **3.3.** D **3.4.** A **3.5.** C **3.6.** D **3.7.** D **3.8.** B **3.9.** C **3.10.** B

3.11. F, F, P **3.12.** F, P, F **3.13.** B2 **3.14.** a) postać ogólna: $f(x) = -x^2 + 8x - 15$, postać iloczynowa: $f(x) = -(x - 3)(x - 5)$ b) postać kanoniczna: $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 4\frac{1}{2}$, postać iloczynowa: $f(x) = \frac{1}{2}(x + 4)(x - 2)$ c) postać kanoniczna: $f(x) = 3(x - 1)^2 + 3$, postać iloczynowa nie istnieje d) postać ogólna: $f(x) = -2x^2 + x + 3$, postać kanoniczna: $f(x) = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 3\frac{1}{8}$ e) postać kanoniczna: $f(x) = (x - 1)^2 + 2$, postać iloczynowa nie istnieje f) postać kanoniczna: $f(x) = -2(x + 2)^2 + 2$, postać iloczynowa: $f(x) = -2(x + 1)(x + 3)$ **3.15.** a) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -4;\ \infty)$; miejsca zerowe: -3, 1; $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty;\ -3) \cup (1;\ \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-3;\ 1)$; funkcja malejąca w przedziale $(-\infty;\ -1\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -1;\ \infty)$; wartość najmniejsza: -4 dla $x = -1$ b) $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty;\ 1\rangle$; miejsca zerowe: 0, 4; $f(x) > 0$ dla $x \in (0;\ 4)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty;\ 0) \cup (4;\ \infty)$; rosnąca w przedziale $(-\infty;\ 2\rangle$, malejąca

w przedziale $\langle 2;\ \infty)$; wartość największa: 1 dla $x = 2$ c) $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty;\ 0\rangle$; miejsce zerowe: 2; $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty;\ 2) \cup (2;\ \infty)$; funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty;\ 2\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 2;\ \infty)$; wartość największa: 0 dla $x = 2$ d) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -2;\ \infty)$; miejsca zerowe: $\frac{-3-\sqrt{6}}{3}$, $\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$; $f(x) > 0$ dla $x \in \left(-\infty;\ \frac{-3-\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{6}}{3};\ \infty\right)$, $f(x) < 0$ dla $x \in \left(\frac{-3-\sqrt{6}}{3};\ \frac{-3+\sqrt{6}}{3}\right)$; funkcja malejąca w przedziale $(-\infty;\ -1\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -1;\ \infty)$; wartość najmniejsza: -2 dla $x = -1$ **3.16.** a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$, $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty;\ 4\rangle$ b) $f(x) = x^2 - 6x + 7$, $D = \langle 2;\ 6\rangle$, $ZW = \langle -2;\ 7\rangle$ **3.17.** a) wartość największa: 5 dla $x = 3$, wartość najmniejsza: -7 dla $x = 1$ b) wartość największa: 1 dla $x = 1$, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$ **3.18.** 121 **3.19.** -9 **3.20.** 15 cm $\times$ 15 cm **3.21.** $P = 6$ **3.22.** a) $x = 2 - \sqrt{3}$ lub $x = 2 + \sqrt{3}$ b) brak rozwiązań c) $x = 1\frac{1}{3}$ lub $x = 4$ d) $x = -1$ lub $x = -4$ e) $x \in \mathbf{R}$ f) $x \in \left(-\infty;\ \frac{-2\sqrt{6}}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{2\sqrt{6}}{3};\ \infty\right)$ g) $x \in (1;\ 5)$ h) $x \in \langle -4;\ 3\rangle$ **3.23.** -1, 0, 1, 2 **3.24.** 12 m $\times$ 5 m **3.25.** siedmiokąt i jedenastokąt **3.26.** 30 m, 40 m, 50 m **3.27.** $6\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ **3.28.** $(1,\ -7)$, $(-3,\ -15)$ **3.29.** $b = -2$, $c = -3$ **3.30.** $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$ **3.31.** $a = 2$, $b = 12$; wartość najmniejsza: -2 dla $x = -3$, wartość największa: 6 dla $x = -1$ **3.32.** $b = 10$, $c = 4\frac{1}{2}$, $x \in \left\langle -8;\ \frac{2}{3}\right\rangle$ **3.33.** $f(x) = x^2 + 6x + 8$, $y > 3$ dla $x \in (-\infty;\ -5) \cup (-1;\ \infty)$

3.34. a) $x = -1$ lub $x = 5$ b) 2 rozwiązania dla $m < 3$, 1 rozwiązanie dla $m = 3$, brak rozwiązań dla $m > 3$



3.35. wartość najmniejsza: $5\frac{1}{4}$ dla $x = 1$, wartość największa: $7\frac{1}{3}$ dla $x = -\frac{2}{3}$ **3.37.** $b \in (-2;\ 2)$ **3.38.** $g(x) = -\frac{5}{9}(x-2)(x-8)$ **3.39.** 194 **3.40.** $A = \left(3-\sqrt{3},\ 6\right)$, $B = \left(3+\sqrt{3},\ 6\right)$, $C = (3,\ 9)$. *Wskazówka*: Wyznacz równanie prostej AC. **3.41.** a) $f(x) = x^2 + \frac{m-26}{4}x + \frac{30-m}{4}$ b) $m \in \left(-\infty;\ 18-8\sqrt{2}\right) \cup \left(18+8\sqrt{2};\ \infty\right)$ **3.42.** $k \in (5;\ \infty)$ **3.43.** $m \in (4;\ \infty)$ **3.46.** $k \in \left\{-2,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right\}$; $x = 2$ dla $k = -2$, $x = 2 + \sqrt{3}$ dla $k = -\sqrt{3}$, $x = 2 - \sqrt{3}$ dla $k = \sqrt{3}$ **3.47.** $a = 2$, $b = 1$ lub $a = 1$, $b = 2$, lub $a = -2$, $b = -1$, lub $a = -1$, $b = -2$. *Wskazówka*: Zastosuj wzory Viète'a.

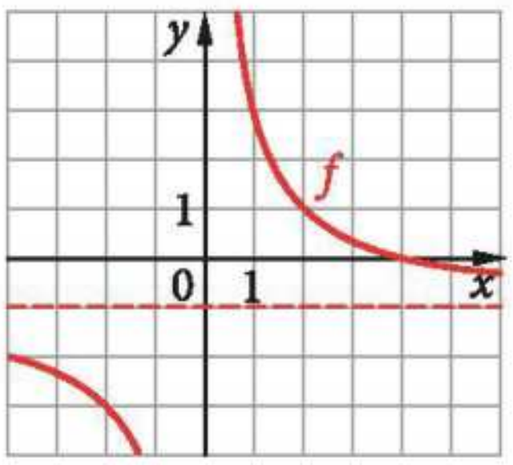
3.48. $m \in \left\{-\sqrt{14},\ \sqrt{14}\right\}$ **3.49.** $m \in \left\langle 0;\ 3-\sqrt{7}\right\rangle$ **3.50.** $m \in \left(-\infty;\ -\frac{4}{5}\right)$ **3.51.** $k \in (1;\ \infty)$ **3.52.** $m \in (0;\ 2)$ **3.55.** $m \in (0;\ 1) \cup (2;\ 3)$ **3.56.** $m = \frac{1}{9}$ **3.57.** $Q(x) = x^6 - 2x^3 - 2x^2 + 16$, stopień $Q = 6$, $Q\left(\sqrt{2}\right) = 20 - 4\sqrt{2}$ **3.58.** a) $W(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$ b) $W(x) = x(x-1)^3$ c) $W(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$ d) $W(x) = (x-1)(x+1)\left(x^2+2x+3\right)$ **3.59.** a) $x = 0$ lub $x = 3$ b) $x = -2$ lub $x = 2$, lub $x = 3$ c) $x = -2$ lub $x = 1$, lub $x = 5$ d) $x = -2$ lub $x = 2$ **3.60.** $x = \frac{1+\sqrt{11}}{2}$ **3.61.** a) $x \in (-\infty;\ -5\rangle \cup \langle 2;\ 3\rangle$ b) $x \in \langle -1;\ \infty)$ c) $x \in (-2;\ 0) \cup \left(\frac{3}{2};\ \infty\right)$

d) $x \in (-\infty; 2)$ **3.62.** $x \in \left\{-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\}$ **3.63.** $m = 6,\ x \in \left\{-2, \frac{1}{4}, 3\right\}$ **3.64.** $a = -5,\ b = 9$

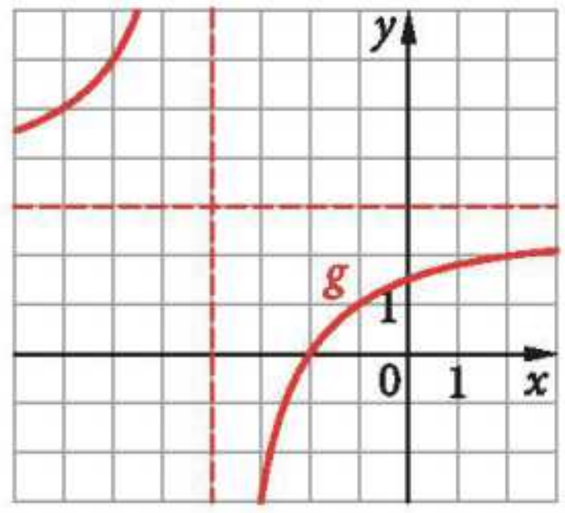
3.65. $x \in (1; 2) \cup (3; \infty)$ **3.66.** $W(x) = \left(x^2 + x - 1\right)\left(x^2 - 3x + 1\right)$. *Wskazówka*: Najpierw zapisz wielomian w postaci $W(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x^2 + 4x - 1$, a następnie jako różnicę kwadratów.

3.67. $m \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$

3.68. $\frac{4}{x} - 1 > 0$ dla $x \in (0; 4)$



3.69. $ZW = \mathbf{R} - \{3\}$; funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -4)$ i $(-4; \infty)$



3.70. a) $x = -\frac{3}{5}$ lub $x = 3$ b) $x = -\frac{8}{3}$ lub $x = -2$ c) brak rozwiązań d) $x = -1$ lub $x = 2$

3.71. a) $x \in (-\infty; -4) \cup \left\langle \frac{3}{2}; \infty \right)$ b) $x \in (-1; 1)$ c) $x \in (-1; 0) \cup \left(1; \frac{17}{3}\right)$

d) $x \in (-\infty; -2) \cup \langle -1; 1) \cup \langle 3; \infty)$ **3.72.** $x \in \left(-\infty; \frac{-\sqrt{6}}{2}\right\rangle \cup (-1; 1) \cup \left\langle \frac{\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$

3.73. 80 km/h **3.74.** 21 godzin **3.75.** Było 12 wychowawców, każdy miał pod opieką 12 dzieci.

3.76. $6\frac{2}{3}$ h **3.77.** 48 min **3.78.** 40 dni, o 25% **3.79.** 12 sztuk produktu A po 1000 zł i 8 sztuk produktu B po 800 zł **3.80.** $D = (-\infty; -6) \cup (-2; 0) \cup (0; \infty)$. *Wskazówka*: $f(m) = \frac{3m + 2}{m + 2}$

3.82. $k \in (-5; 1)$ **3.83.** $a = b = 1$; $f(x) < 2$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{4}; 1\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{4}; \infty\right)$

3.84. $m = -\frac{4}{3}$ **3.85.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$ **3.86.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$, lub $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$,

lub $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ **3.87.** a) $\begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{41}}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{41}}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$ **3.88.** $m = 0$

lub $m = 7$

s. 258

4.1. A **4.2.** B **4.3.** C **4.4.** A **4.5.** B **4.6.** D **4.7.** D **4.8.** A **4.9.** D **4.10.** B

4.11. D **4.12.** C **4.13.** B **4.14.** C **4.15.** P, F, F **4.16.** P, P , P **4.17.** P, F, F

4.18. P, F, P **4.19.** A3 **4.20.** a) $\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$

4.21. $\frac{41\sqrt{7}}{18}$ **4.22.** $\frac{28\sqrt{2}}{81}$ **4.23.** $-\frac{2}{13}$ **4.24.** a) $\sin\sphericalangle A = \cos\sphericalangle B = \frac{4}{5}$, $\sin\sphericalangle B = \cos\sphericalangle A = \frac{3}{5}$,

$\operatorname{tg}\sphericalangle A = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle B = \frac{3}{4}$ b) $\sin\sphericalangle A = \cos\sphericalangle B = \frac{24}{25}$, $\sin\sphericalangle B = \cos\sphericalangle A = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle A = \frac{24}{7}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle B = \frac{7}{24}$

4.25. a) $\sin\sphericalangle BAC = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\sphericalangle BAC = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle BAC = \frac{2}{3}$ b) $\sin\sphericalangle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos\sphericalangle BAC = \frac{1}{4}$,

$\operatorname{tg}\sphericalangle BAC = \sqrt{15}$ **4.26.** 67° i 23° **4.27.** a) 30° b) 53° c) Taki trójkąt nie istnieje.

4.28. a) $\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **4.29.** $h = \frac{1180 \cdot \operatorname{tg}18^\circ \cdot \operatorname{tg}22^\circ}{\operatorname{tg}22^\circ - \operatorname{tg}18^\circ} \approx 1960$ [m] **4.30.** $\sin\alpha = \frac{2}{9}$, $\alpha \approx 13^\circ$

4.31. wysokość: 190 m, długość drogi: 1200 m **4.32.** $h = \frac{15\operatorname{tg}32^\circ \operatorname{tg}68^\circ}{\operatorname{tg}68^\circ - \operatorname{tg}32^\circ} \approx 12{,}5$ [m]

4.33. cosinus kąta ostrego: 0,53125, kąt ostry: 58°, sinus kąta rozwartego: 0,8472, kąt rozwarty: 122°

4.34. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ **4.35.** $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ **4.36.** $\frac{91}{9}$ **4.37.** a) tak, 4 b) tak, 0

4.40. $P = \frac{175\pi}{13}$ **4.41.** $\frac{47}{15}$ **4.42.** $\frac{1}{6}$ **4.43.** a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$

b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$ c) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{15}$ d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$,

$\cos\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ **4.44.** $-\frac{5}{4}$ **4.45.** $\sqrt{7}$ **4.46.** 32°, 53°, 95° **4.47.** $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

4.48. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **4.49.** -1 **4.50.** $\left\langle -\frac{\pi}{2}; 0\right\rangle$, $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$ **4.51.** $ZW = \left\langle 2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}\right\rangle$

4.52. $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; 2\right\rangle$ **4.53.** $\left\langle -\frac{5}{3}\pi; -\frac{4}{3}\pi\right\rangle \cup \left\langle -\frac{2}{3}\pi; -\frac{\pi}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right\rangle \cup \left\langle \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi\right\rangle$

4.54. $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5}{6}\pi\right)$ **4.55.** $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{6}\pi; 2\pi\right\rangle$ **4.56.** b) $\frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3\pi}{2}$ **4.57.** a) *Wskazówka:*

$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ b) $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **4.58.** $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

4.59. Nie ma takiego x. **4.60.** $x \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$ **4.61.** $x = \frac{7\pi}{6}$ lub $x = \frac{11\pi}{6}$

4.62. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, lub $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **4.63.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$,

$k \in \mathbf{Z}$ **4.64.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, lub $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, lub $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

4.65. $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right\rangle \cup \left(0; \frac{\pi}{3}\right\rangle$ **4.66.** $x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi\right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

4.67. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **4.68.** $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **4.69.** $\alpha \in \left\langle 0; \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}\pi; 2\pi\right\rangle$ **4.70.** $m = 1$.

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. **4.71.** $\alpha = \frac{\pi}{4}$ **4.72.** $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ **4.73.** $x = \frac{1}{9}$

4.74. $x \in \left(\frac{11}{24}\pi; \frac{17}{24}\pi\right) \cup \left(\frac{35}{24}\pi; \frac{41}{24}\pi\right)$ **4.75.** $-\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}$

s. 266

5.1. D **5.2.** C **5.3.** D **5.4.** C **5.5.** D **5.6.** C **5.7.** D **5.8.** D **5.9.** A **5.10.** A

5.11. C **5.12.** B **5.13.** A **5.14.** A **5.15.** C **5.16.** D **5.17.** C **5.18.** D **5.19.** F, F, P

5.20. F, F, P **5.21.** P, P, F **5.22.** P, P, F **5.23.** B2 **5.24.** a) 0 b) -3 c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{5}$

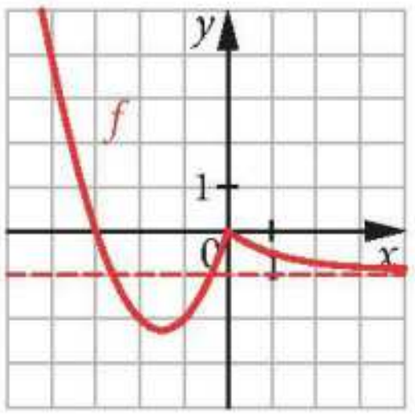
5.25. a) 2 b) 1 c) 2 d) 1 **5.26.** a) 17 b) $\frac{5}{3}$ c) 8 d) $2\sqrt{5}$ **5.27.** $-3{,}8$ **5.28.** $2-2p$

5.29. $\frac{6-2t}{3}$ **5.30.** 24 **5.31.** $a > b$ **5.34.** wartość największa: -23 dla $x = 3$, wartość

najmniejsza: -623 dla $x = 5$ **5.35.** a) $a = \sqrt{3}$ c) $m \in \{0\} \cup (2; \infty)$ **5.36.** a) $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$

b) $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ **5.37.** a) $f(x) = N \cdot 3^x$ b) o ok. 420% **5.38.** a) $a = \frac{4}{5}$ b) 3 lata **5.39.** $x = 1$

5.40. $-\frac{9}{4}$



5.41. pięć: (−1, 3), (0, 2), (0, 3), (0, 5) i (1, 3)

5.42. $10^{-\frac{4}{5}} \approx 0{,}158$, $10^{\frac{11}{5}} \approx 158{,}5$ **5.43.** $m = 2$, $k = -3$; $f(x) < 0$ dla $x \in (-2; 6)$ **5.44.** a) $p = -4$ c) $m > 2$

5.46. 2 **5.47.** $D = \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$

5.48. $D = (-4; -2) \cup \left(-2; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; 2\right) \cup (2; \infty)$

5.49. $x \in (-4; -\pi) \cup (0; \pi)$

s. 274

6.1. A **6.2.** A **6.3.** D **6.4.** B **6.5.** C **6.6.** D **6.7.** A **6.8.** B **6.9.** B **6.10.** D **6.11.** D **6.12.** B **6.13.** C **6.14.** F, P, F **6.15.** P, F, F **6.16.** F, P, P **6.17.** P, F, P **6.18.** C, D **6.19.** A3 **6.20.** a) pięć b) sześć **6.21.** ciąg malejący **6.23.** $k \in (2; \infty)$ **6.24.** a) tak, $a_1 = 0$, $r = 3$ b) nie c) tak, $a_1 = 5$, $r = 5$ d) nie e) tak, $a_1 = -1$, $r = -\frac{5}{2}$ f) tak, $a_1 = 1$, $r = 3$ **6.25.** $x = -1$, $y = 9$ **6.26.** 171 **6.28.** $x = 7$ **6.29.** $a_{15} = 72$ **6.30.** −473 **6.31.** $n = 10$ **6.32.** $n = 6$ i $S_6 = 135$ lub $n = 33$ i $S_{33} = -594$ **6.33.** w czternastej **6.34.** 3 : 5 : 7 **6.35.** $n = 13$ **6.36.** osiem lub nie istnieje n takie, że $S_n = -64$ **6.37.** $x = 4$; dwanaście **6.38.** sto **6.39.** $k \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$ **6.41.** 10 150 **6.42.** $25\left(31 - 12\sqrt{2}\right)$ **6.43.** $a = 15$, $b = 8$, $c = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ **6.44.** $m = 11$ **6.45.** a) tak, $a_1 = 5$, $q = 5$ b) tak, $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = 2^{-3}$ c) nie d) nie **6.46.** $\frac{1}{4}$ **6.47.** $m = 0$ lub $m = 3$ **6.48.** na górnej: 16 płyt, na dolnej: 36 płyt **6.49.** $\sqrt{6} - 2$ **6.50.** $a_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ lub $a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ **6.51.** $x = 14$, $y = 126$, $z = 378$ **6.52.** $x = 3$, $y = 6$ **6.54.** $x = 8$ lub $x = \frac{1}{8}$ **6.55.** $1 < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ **6.56.** a) $a_1 = -11$, $r = 2$ b) tak c) $n = 6$ **6.57.** $a = 2$, $b = 5$, $c = 8$ lub $a = 26$, $b = 5$, $c = -16$ **6.58.** o 32 zł mniej **6.59.** 7936,38 zł **6.60.** a) 144 zł b) 138 zł c) 132 zł **6.61.** 30 000 zł

s. 284

7.1. C **7.2.** C **7.3.** B **7.4.** A **7.5.** D **7.6.** D **7.7.** A **7.8.** C **7.9.** C **7.10.** C **7.11.** C **7.12.** D **7.13.** C **7.14.** C **7.15.** C **7.16.** A **7.17.** C **7.18.** D **7.19.** F, P, F **7.20.** F, P, F **7.21.** P, P, P **7.22.** P, P, P **7.23.** C2 **7.24.** $c = 10$ **7.25.** $c = 6$ lub $c = 10$ **7.26.** 36°, 72°, 72° **7.27.** 125° **7.28.** 54° **7.29.** $P = 3{,}50$ **7.30.** dwa **7.31.** $r = 12{,}6$ cm **7.32.** $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$, $\gamma = 60°$, $\delta = 40°$ **7.33.** a) $\alpha = 46°$ b) $\alpha = 80°$ **7.34.** 1,4 cm, 5,6 cm **7.35.** $P = 70$ **7.36.** $obw = 36$ **7.37.** $\frac{4\sqrt{21}}{3}$ **7.38.** $|KL| = |MN| = 0{,}96$ **7.39.** 10 : 7 **7.40.** $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 45°$, $\sphericalangle C = 75°$ **7.41.** 2, 8 i 12 **7.42.** $2\sqrt{3}$ cm **7.44.** $P = 72$ cm^2 **7.45.** $obw = 16$ cm **7.46.** 6,72 cm **7.47.** $P = 131$ cm^2 **7.48.** $P = \frac{750}{169}$ **7.49.** *Wskazówka:* Jeżeli $\sphericalangle ACD = \alpha$, to $\sphericalangle ADC = 180° - 2\alpha$, $\sphericalangle ADB = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$, $\sphericalangle DAB = 2\alpha$, $\sphericalangle ABD = 3\alpha$, $\sphericalangle ADB = 180° - 5\alpha$, $\sphericalangle ADC = 180° - (180° - 5\alpha) = 5\alpha$. **7.50.** $P = 25{,}18$ cm^2 **7.51.** $P = \frac{25\sqrt{3}}{3}$ **7.52.** $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ **7.53.** $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ **7.54.** $\sqrt{2} - 1$ **7.55.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

7.56. $P = 384\ \text{cm}^2$ **7.57.** $\frac{12\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$ **7.58.** *Wskazówka*: Z punktu D poprowadź półprostą równoległą do odcinka AB do przecięcia z odcinkiem PE i wykorzystaj podobieństwo odpowiednich trójkątów. **7.59.** *Wskazówka*: Wyznacz miarę kąta ECD. **7.60.** $|AD| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ **7.61.** $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ **7.62.** $P = 84$ **7.63.** $\frac{1}{3}r$ **7.68.** ok. 12,16

s. 295

8.1. D **8.2.** C **8.3.** C **8.4.** C **8.5.** D **8.6.** B **8.7.** C **8.8.** B **8.9.** D **8.10.** A **8.11.** A **8.12.** B **8.13.** D **8.14.** B **8.15.** C **8.16.** A **8.17.** D **8.18.** C **8.19.** D **8.20.** A **8.21.** C **8.22.** D **8.23.** B **8.24.** C **8.25.** P, P, P **8.26.** P, F, P **8.27.** P, P, F **8.28.** F, F, P **8.29.** F, F, P **8.30.** C1 **8.31.** a) 45° b) 60° c) 135° d) 150° **8.32.** a) tak b) tak c) nie **8.33.** a) pr. AB: $x - 3y - 6 = 0$, pr. BC: $3x + y - 8 = 0$, pr. AC: $2x - y + 3 = 0$ b) pr. AB: $3x - 2y + 10 = 0$, pr. BC: $3x + y - 5 = 0$, pr. AC: $x + 2 = 0$ **8.34.** a) Proste są równoległe i różne. b) Proste przecinają się w punkcie $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. c) Proste się pokrywają. **8.35.** a) k: $3x + 2y + 16 = 0$ b) k: $2x - 3y + 6 = 0$ **8.36.** $p \parallel k$, $p \parallel q$, $k = q$, $l \perp p$, $l \perp k$, $l \perp q$ **8.37.** a) $m = 3$ b) $m = -\frac{1}{3}$ **8.38.** $y = -4x + 6$ **8.39.** a) $B = (5, 3)$, $C = (-5, -3)$ b) $P = 30$ **8.40.** $2x - y - 5 = 0$ **8.41.** $obw = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{29}$ **8.42.** $|CD| = \sqrt{29}$ **8.43.** $y = -\frac{2}{3}x + 7$ **8.44.** 1 **8.45.** $obw = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{89}$ **8.46.** b) $P = 17$ c) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 5)^2 = \frac{85}{4}$ **8.47.** $P = 30$, $obw = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{65}$ **8.48.** tak; $P = 136$ **8.49.** pr. AB: $2x + 7y + 22 = 0$, pr. AC: $7x + 2y - 13 = 0$, pr. BC: $x - y + 2 = 0$ **8.50.** a) $x - y + 1 = 0$ b) $3x - 2y - 5 = 0$ c) $P = 30$ **8.51.** $D = (1, 4)$, $P = 30$ **8.53.** $A = (3, -1)$, $B = (0, 8)$ **8.54.** AB: $2x - 3y + 18 = 0$, BC: $5x - y - 7 = 0$, AC: $x + 5y - 17 = 0$ **8.56.** $2\sqrt{101}$ **8.57.** $C = (3, 3)$ lub $C = (3, -3)$ **8.58.** a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -7 \\ y = -4 \end{cases}$ c) brak rozwiązań d) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$ **8.59.** a) $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 16$ b) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 169$ c) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 41$ **8.60.** a) środek: (0, 0), promień: 12 b) środek: (−7, 3), promień: $2\sqrt{2}$ c) środek: (0, 3), promień: $\sqrt{5}$ **8.61.** $C = \left(1 - \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}\right)$ lub $C = \left(1 + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}\right)$ **8.62.** $\left(\frac{23}{5}, \frac{31}{5}\right)$ **8.63.** a) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 9$ b) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 34$ **8.64.** $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$ **8.65.** $x + 2y = 0$, $4x - 2y - 5 = 0$ **8.66.** (1, 1), (3, −3), (−5, −7), (−7, −3) **8.67.** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ **8.68.** $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ **8.69.** a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$, $y = 9$ b) $P = 15$ **8.70.** $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 32$ lub $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(y - 5\frac{1}{5}\right)^2 = 32$ **8.71.** $P = 8$ **8.72.** $C = (-3, -2)$ lub $C = (5, 6)$ **8.73.** (0, −5), (−1, 2), (7, −4) **8.74.** a) $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$ b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{3}$ lub $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{8\sqrt{3}}{3}$ **8.75.** wartość najmniejsza: $511\frac{1}{4}$, wartość największa: $651\frac{1}{4}$ **8.76.** 90°. *Wskazówka*: Nie wyznaczaj równań tych stycznych. **8.77.** $x + 2y - 8 - 6\sqrt{5} = 0$ **8.78.** a) (−1, −3), (1, −3), (3, 5), (−3, 5) c) $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{85}{4}$ **8.79.** $A = (0, 1)$ lub $A = (2, 7)$, $C = (-5, 6)$ **8.80.** $\left(x - 2 - \sqrt{5}\right)^2 + (y + 3)^2 = 9$

8.81. $D = \left(\frac{4}{13}, \frac{1}{13}\right)$ **8.82.** $B = (4, 0),\ D = (0, 4)$ **8.83.** $\left(\frac{2-3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{2+3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
8.84. $x + y - 4 = 0$

s. 308

9.1. D **9.2.** D **9.3.** B **9.4.** A **9.5.** C **9.6.** C **9.7.** D **9.8.** B **9.9.** D **9.10.** D
9.11. B **9.12.** D **9.13.** P, P, F **9.14.** P, F, F **9.15.** P, P, F **9.16.** F, P, P **9.17.** F, F, F
9.18. F, P, P **9.19.** P, P, P **9.20.** B3 **9.21.** a) 32 b) 216 c) 210 d) 64 e) 24 f) 6^{13}
9.22. $24^3 \cdot 10^5$ **9.23.** 5^9 **9.24.** 30 **9.25.** 360 000 **9.26.** a) 8^5 b) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$
9.27. a) 245 b) 175 c) 228 **9.28.** a) 504 b) 304 c) 254 **9.29.** a) 1 b) 4^{45} c) 4^{40}
d) 3^{35} **9.30.** 90 **9.31.** 30 **9.32.** 2125 **9.33.** 117 600 **9.34.** 162 **9.35.** 5994
9.36. 280 **9.37.** 3157 **9.38.** 192 080 **9.39.** $1968 - 880\sqrt{5}$ **9.40.** $\frac{2}{15}$ **9.41.** $\frac{7}{16}$
9.42. $\frac{5}{18}$ **9.43.** a) $\frac{5}{12}$ b) $\left(\frac{1}{6}\right)^5$ **9.44.** a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{13}{28}$ **9.45.** $\frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$
9.46. $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{127}{128}$ **9.47.** $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6^3} = \frac{5}{18}$ **9.48.** $\frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{9 \cdot 6} = \frac{19}{54}$ **9.49.** $\frac{4}{9}$
9.50. $1 - \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} = \frac{7}{10}$ **9.51.** 0,08 zł **9.52.** dla dwóch liczb: $\frac{20 \cdot 19}{80 \cdot 79}$, dla trzech liczb: $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{80 \cdot 79 \cdot 78}$
9.53. $P(A) = \frac{1}{243},\ P(B|C) = \frac{1}{162}$ **9.54.** $\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11}{4165}$ **9.55.** $\frac{1}{3}$
9.56. $\frac{5}{108}$ **9.57.** $\frac{29}{149}$ **9.58.** $\frac{1}{6}$ **9.59.** 7 kobiet i 14 mężczyzn **9.60.** 4 lub 8 **9.61.** $\frac{73}{720}$
9.62. $\frac{17}{24}$ **9.63.** $\frac{14}{33}$ **9.64.** a) $\frac{1}{60}$ b) $\frac{13}{30}$ **9.65.** $\frac{1}{2}$ **9.66.** $\frac{216}{625}$ **9.67.** $\binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^6$
9.68. 3 razy **9.73.** mediana: 10 lat, dominanta: 8 lat, średnia: 10 lat **9.74.** a) 6 kg b) 50 kg
c) 50 kg d) 49,5 kg **9.75.** $x = 7$ **9.76.** a) Gabrysia: 4 min, Marysia: 5 min b) Gabrysia: 2 min, Marysia: 2 min **9.77.** a) 30 b) najmniejsza: 2, największa: 12 c) 6 d) co najmniej 10 punktów: 4, co najwyżej 5 punktów: 11 e) 6,37 **9.78.** $\overline{x} = 17,\ \sigma^2 = 3{,}24,\ \sigma = 1{,}85$ **9.79.** 0,9

s. 322

10.1. C **10.2.** B **10.3.** B **10.4.** C **10.5.** A **10.6.** A **10.7.** B **10.8.** D **10.9.** C
10.10. B **10.11.** P, F, P **10.12.** A2 **10.13.** a) 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków, 4 przekątne b) 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków, 18 przekątnych c) 4 ściany, 6 krawędzi, 4 wierzchołki, 0 przekątnych d) 6 ścian, 10 krawędzi, 6 wierzchołków, 0 przekątnych
10.15. $10\sqrt{5}$, 25 **10.16.** 24 cm **10.17.** a) ok. 35° b) ok. 70° **10.18.** $V = 207\ \text{cm}^3$
10.19. 60° **10.20.** $\frac{2\sqrt{145}}{29}$ **10.21.** $V = d^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$
10.22. $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, 30°, 30°, 120° **10.23.** $|AW| = |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6},\quad |SW| = \frac{\sqrt{3}}{6}$
10.24. $|DP| = |BS| = 9$ **10.25.** $V = 2{,}3\ \text{cm}^3$ **10.26.** $V = 144\ \text{cm}^3$ **10.27.** a) $4\sqrt{6}$ b) $P = 64$
10.28. $P = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ **10.29.** $V = 108\sqrt{3}$ **10.32.** 4 **10.33.** $P_c = 162\ \text{cm}^2$ **10.34.** $P = 15$
10.35. $P = \frac{a^2\sqrt{2}}{4\sin\alpha}$ **10.36.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **10.38.** $V = \frac{a^3 \operatorname{tg}\alpha}{12},\ P_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$
10.39. $V = \frac{a^3\cos\alpha}{12\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$ **10.40.** $V = 400\ \text{cm}^3$ **10.42.** $\frac{4\sqrt{82}}{41}$

10.43. $V = \frac{2}{9}$, $|AS| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $|CS| = \frac{\sqrt{6}}{3}$ **10.44.** $\operatorname{tg}\alpha = 2$. *Wskazówka*: $\alpha = \sphericalangle SKD$, gdzie D jest środkiem odcinka AC, natomiast K dzieli odcinek AB tak, że $|AK| : |KB| = 1 : 3$.

10.45. $V = \frac{d \cdot a^3}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}$ **10.46.** $V = 25\ \mathrm{dm}^3$, $P_c = 71\ \mathrm{dm}^2$ **10.47.** $P_b = 20\sqrt{313}$

10.48. $V = \frac{64\sqrt{209}}{3}$ **10.49.** $V = 48$ **10.50.** $V = 1760\sqrt{210}$

10.51. $P_c = \pi c^2 \sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)$ **10.52.** $P = 81\pi\ \mathrm{cm}^2$ **10.53.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ **10.54.** $V = \frac{2}{27}\pi\ \mathrm{m}^3$

10.55. $V = 84\pi$ **10.56.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **10.57.** $V = \frac{\pi d^3(1+\cos\alpha)^3}{3\operatorname{tg}^2\alpha}$ **10.58.** $V = \frac{49\sqrt{15}}{3}\pi$

10.59. $V_s : V_k = \frac{1}{4}k^2(2-k)$, $0 < k < 2$ **10.60.** a) 7,1 cm b) 7,0 cm **10.61.** ok. 28,32%, wymiary (w cm) $21{,}21 \times 21{,}21 \times 40$. *Wskazówka*: Skorzystaj z tego, że ze wszystkich prostokątów o danej przekątnej największe pole ma kwadrat. **10.63.** $V = \frac{4}{3}a^3 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{2\cos\alpha}$

10.64. $P_c = \frac{8r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

s. 335

11.1. B **11.2.** D **11.3.** A **11.4.** B **11.5.** D **11.6.** C **11.7.** A **11.8.** D **11.9.** B **11.10.** A **11.11.** A **11.12.** A **11.13.** B **11.14.** B **11.15.** C **11.16.** D **11.17.** D **11.18.** P, F, P **11.19.** P, P, F **11.20.** P, P, P **11.21.** P, P, F **11.22.** P, F, P **11.23.** P, F, F **11.24.** a) ciąg malejący b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ c) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{11}{20}$ **11.25.** a) 8 b) $\frac{4}{135}$ **11.26.** $k = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ lub $k = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ **11.27.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$; ciąg rosnący **11.28.** a) 8 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\sqrt{3}$ **11.29.** a) 1 b) $\frac{15}{4}$ c) szereg rozbieżny d) $-24 - 12\sqrt{2}$ **11.30.** $-\frac{825}{4}$ **11.31.** $x \in \left(-2; \frac{1}{2}\right)$ **11.32.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ **11.33.** $2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ **11.34.** $10\frac{10}{49}$ **11.35.** a) 0 b) 4 c) 2 d) $\frac{2}{3}$ **11.36.** a) $-\infty$ b) ∞ c) ∞ d) $-\infty$ **11.37.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ **11.40.** Funkcja jest ciągła w zbiorze $\mathbf{R} - \{-2, -1\}$. **11.41.** $k = 1$, $m = 7$ **11.45.** Funkcja jest ciągła i różniczkowalna w zbiorze $\mathbf{R}$. **11.47.** $\frac{19}{32}$

11.48. a) $f'(x) = 3\left(3x^2 - 5x + 2\right)^2(6x - 5)$ b) $f'(x) = \frac{-4x-2}{(x^2+x+1)^3}$ c) $f'(x) = \frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+4x+3}}$ d) $f'(x) = \frac{4\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}{3\sqrt[3]{x^2}}$ **11.49.** $(-1, 0)$ **11.50.** a) $y = \frac{5}{8}$ b) $y = -1$ dla $x = 3$ c) -1

11.51. a) rosnąca w przedziale $(-\infty; 1\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 1; 5\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 5; \infty)$ b) wartość największa: 8 dla $x = 1$, wartość najmniejsza: -73 dla $x = -2$ **11.52.** wartość największa: 8 dla $x = 0$, wartość najmniejsza: -19 dla $x = 3$ **11.53.** maksimum: 0 dla $x = -2$, minimum: $-\frac{4}{3}$ dla $x = 0$ **11.54.** cztery **11.55.** $m \in (1; 3)$ **11.56.** $a = 0$, $b = 2$ **11.57.** $m \in (-2; 2)$ **11.58.** 2 **11.59.** $0{,}8\ \mathrm{cm} \times 1{,}2\ \mathrm{cm} \times 1\ \mathrm{cm}$ **11.60.** $(1, 1)$ **11.61.** $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ **11.62.** $2 - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ **11.63.** $k = 3 - \sqrt{7}$ **11.64.** $\frac{4}{11}$, dla $m = -6$ **11.65.** $m = 3$ **11.66.** długość podstawy: $\frac{a}{4}$, długość ramienia: $\frac{3a}{8}$

Skorowidz

Alternatywa (suma) zdarzeń 148
aksjomat 194
asymptota pionowa 331
— — lewostronna 331
— — prawostronna 331
— pozioma 331

Bryła obrotowa 65, 319
bryły podobne 78, 320

Cechy podobieństwa trójkątów 283
— przystawania trójkątów 282
centyl 305
ciąg 273
— arytmetyczny 273
— geometryczny 273
— liczbowy 273
— malejący 273
— monotoniczny 273
— niemalejący 273
— niemonotoniczny 273
— nierosnący 273
— rosnący 273
— skończony 273
ciągłość funkcji w punkcie 331
cięciwa kuli 68
cosinus kąta 255
czasza kuli 69, 320
czworościan 49
— foremny 59

Dominanta 305
dwudziestościan foremny 59
dwumian Newtona 142, 306
dwunastościan foremny 59
dwusieczna kąta 281
dzielenie z resztą 212, 213

Figura wypukła 37
funkcja ciągła 331
— liniowa 232
— logarytmiczna 265
— okresowa 255
— pochodna 332
— różniczkowalna 332
— wewnętrzna 331
— wielomianowa (wielomian) 244
— wykładnicza 265
— wymierna 244
— zewnętrzna 331
— złożona (złożenie funkcji) 331

Graniastosłup 319
— opisany na walcu 66
— pochyły 39
— prawidłowy 40, 319
— prosty 39, 319
— wpisany w walec 66
— wypukły 38
granica ciągu 330
— funkcji w punkcie 330
— lewostronna funkcji w punkcie 330
— prawostronna funkcji w punkcie 330
— niewłaściwa funkcji 330

Hiperbola 245
hipoteza 194

Iloczyn (koniunkcja) zdarzeń 136

Jedynka trygonometryczna 255

Kąt dwuścienny 31, 319
— nachylenia prostej do płaszczyzny 23, 318
— rozwarcia stożka 67
— środkowy 281
— wpisany 281
koło wielkie kuli 69, 320
kombinacja 130
kombinatoryka 114
koniunkcja (iloczyn) zdarzeń 148
krawędź przecięcia płaszczyzn 8
— wielościanu 37
krzywa logarytmiczna 265
— wykładnicza 265
kula 68, 320

Liczba logarytmowana 265
— pierwsza 222
liczby względnie pierwsze 222
logarytm 265

Maksimum 332
mediana 305

miara łukowa kąta 255
— kąta dwuściennego 31, 319
minimum 332

Nierówność opisująca koło 295

Odchylenie standardowe 305
odcinek kuli 69, 320
odległość między punktami na płaszczyźnie 293
odległość punktu od płaszczyzny 26
— — — prostej 294
okrąg opisany na wielokącie 281
— wpisany w wielokąt 281
okres funkcji 255
— zasadniczy funkcji 255
ostrosłup 49, 319
— opisany na stożku 67, 320
— prawidłowy 49, 319
— wpisany w stożek 67, 320
ośmiościan foremny 59
oś obrotu 65, 319

Permutacja 116
pierwiastek wielomianu 244
płaszczyzny prostopadłe 16, 318
— równoległe 9, 318
pochodna funkcji w punkcie 332
podobieństwo na płaszczyźnie 281
— w przestrzeni 78, 320
podstawa graniastosłupa 38, 319
— ostrosłupa 49, 319
— stożka 67
— walca 66
podzielność liczb 208
pojęcie pierwotne 194
postać iloczynowa funkcji kwadratowej 245
— kanoniczna funkcji kwadratowej 244
— ogólna funkcji kwadratowej 244
powierzchnia boczna stożka 67
— — walca 66
prawdopodobieństwo całkowite 170
— warunkowe 162, 304
procent 223
promień podstawy walca 66
— wodzący 255
prosta prostopadła do płaszczyzny 14, 318
— równoległa do płaszczyzny 10, 318
proste prostopadłe na płaszczyźnie 293, 294
— — w przestrzeni 13, 318
— równoległe na płaszczyźnie 293, 294
— — w przestrzeni 12, 318
— skośne 11, 318
— współpłaszczyznowe 11
prostopadłościan 40, 319
próba Bernoulliego 180
przedziały liczbowe 222
przekątna wielościanu 37
przekrój osiowy bryły obrotowej 65
— płaski wielościanu 42
— poprzeczny bryły obrotowej 65
przybliżenie z nadmiarem 224
— — niedomiarem 224

Radian 255
reguła dodawania 114
— mnożenia 114, 306
reszta z dzielenia 212, 213
rozstęp 307
równanie okręgu 294
— — w postaci kanonicznej 294
— — — — ogólnej 294
— prostej w postaci kierunkowej 293
— — — — ogólnej 293
równoległościan 39, 319
różnica zdarzeń 148
rzut prostokątny (prostopadły) 22, 318
— równoległy 21, 318

Schemat Bernoulliego 180
sfera 68
silnia 117, 304
sinus kąta 255
spodek wysokości ostrosłupa 49
stożek 67, 320
— opisany na kuli 69, 320
— ścięty 67
— wpisany w kulę 69, 320
styczna do wykresu funkcji 332
suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 273
— — — — geometrycznego 274
— szeregu geometrycznego 330
— (alternatywa) zdarzeń 136
symbol Newtona 130, 304
symetralna odcinka 281
sześcian 40, 59, 319
szereg geometryczny 330
— — zbieżny 330

Ściana boczna graniastosłupa 38, 319
— — ostrosłupa 49, 319
— wielościanu 37
średnia 305
— arytmetyczna 223
— geometryczna 223
— ważona 305
średnica kuli 68
środek kuli 68
środkowa boku trójkąta 281

Tangens kąta 255
teza 194
trójkąt Pascala 139
trójmian kwadratowy 244
twierdzenie Bernoulliego 182, 307
— Bézouta 245
— cosinusów 256
— odwrotne do twierdzenia Pitagorasa 196, 281
— — — — Talesa 283
— o dwusiecznej 283
— o kącie między styczną a cięciwą 282
— o odcinkach stycznych 282
— o prawdopodobieństwie całkowitym 170, 306
— o przyjmowaniu wartości pośrednich 334
— o trzech ciągach 333
— — — prostopadłych 22, 321
— Pitagorasa 281
— sinusów 256
— Talesa 283
— (wzór) Eulera 60, 321
— Weierstrassa 334
tworząca stożka 67
— walca 66

Układ równań nieoznaczony 232
— — oznaczony 232
— — sprzeczny 232
— zupełny zdarzeń 169, 305

Walec 65, 319
— opisany na kuli 69, 320
— wpisany w kulę 69, 320
wariacja 119
— bez powtórzeń 119
— z powtórzeniami 119
wariancja 305
warstwa kuli 69, 320
wartość bezwzględna liczby 222
— oczekiwana gry losowej 305
wektor 293
wielokąt foremny 281
wielomian (funkcja wielomianowa) 244
— stopnia 0 244
— zerowy 244
wielomiany równe 245
wielościan foremny 59, 319
— opisany na kuli 69, 320
— wpisany w kulę 69, 320
— wypukły 37
wierzchołek ostrosłupa 49, 319
— stożka 67
— wielościanu 37
współczynnik kierunkowy funkcji liniowej 232
— — prostej 293
współrzędne wektora 293
wycinek kuli 69, 320
wykresy funkcji trygonometrycznych 257
wyróżnik trójmianu kwadratowego (delta) 244
wysokość graniastosłupa 38
— ostrosłupa 49
— stożka 67
— trójkąta 281
— walca 66
wzory redukcyjne 256
— skróconego mnożenia 224
— Viète'a 246
wzór Bayesa 172, 307
— dwumianowy Newtona 142
— (twierdzenie) Eulera 60, 321
— ogólny ciągu arytmetycznego 273
— — — geometrycznego 273
— sinusów 256

Założenie 194
zbiór liczb wymiernych 222
zdarzenia identyczne 148
— wykluczające (wyłączające) się 148
— przeciwne 148, 304
złożenie funkcji (funkcja złożona) 331

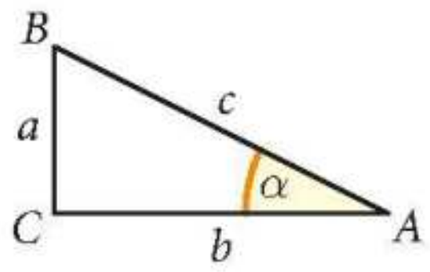
Tablica wartości logarytmów dziesiętnych liczb od 1 do 9,9

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
log x	0,000	0,041	0,079	0,114	0,146	0,176	0,204	0,230	0,255	0,279
x	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
log x	0,301	0,322	0,342	0,362	0,380	0,398	0,415	0,431	0,447	0,462
x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
log x	0,477	0,491	0,505	0,519	0,531	0,544	0,556	0,568	0,580	0,591
x	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
log x	0,602	0,613	0,623	0,633	0,643	0,653	0,663	0,672	0,681	0,690
x	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
log x	0,699	0,708	0,716	0,724	0,732	0,740	0,748	0,756	0,763	0,771
x	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
log x	0,778	0,785	0,792	0,799	0,806	0,813	0,820	0,826	0,833	0,839
x	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
log x	0,845	0,851	0,857	0,863	0,869	0,875	0,881	0,886	0,892	0,898
x	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
log x	0,903	0,908	0,914	0,919	0,924	0,929	0,934	0,940	0,944	0,949
x	9	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9
log x	0,954	0,959	0,964	0,968	0,973	0,978	0,982	0,987	0,991	0,996

Wybrane wzory trygonometryczne

Definicje funkcji trygonometrycznych

kąta ostrego	dowolnego kąta



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

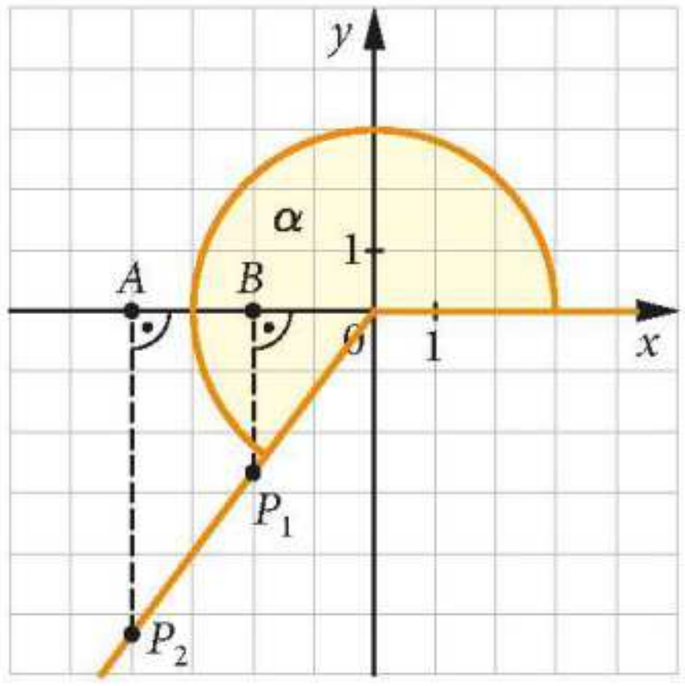
$$\sin\alpha = \frac{y_P}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_P}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_P}{x_P}, \text{ dla } x_P \neq 0$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_P}{y_P}, \text{ dla } y_P \neq 0$$

$$r = |OP| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$$



Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0	nie istnieje	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	nie istnieje	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nie istnieje	0	nie istnieje

α	$(0°; 90°)$	$(90°; 180°)$	$(180°; 270°)$	$(270°; 360°)$
	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	$\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
$\sin\alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\operatorname{tg}\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$

Wzory redukcyjne

β	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin\beta =$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta =$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\beta =$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta =$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Podstawowe zależności trygonometryczne

- **Jedynka trygonometryczna:** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ i $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

Zależności trygonometryczne w trójkącie

- **Pole trójkąta**

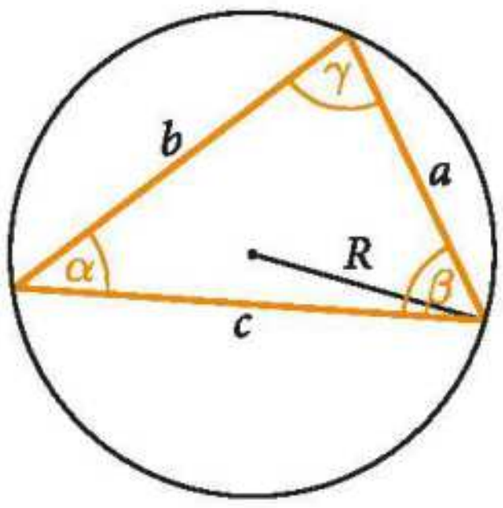
$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \qquad P = \frac{1}{2}ac\sin\beta \qquad P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

- **Twierdzenie sinusów**

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

- **Twierdzenie cosinusów**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



Tablica wartości funkcji trygonometrycznych

Miara kąta α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	Miara kąta α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000	90°	1,0000	0,0000	—

nowa era Twoje mocne strony

Prosto do matury

Podręcznik *Prosto do matury 4* do zakresu podstawowego i rozszerzonego został opracowany z myślą o uczniach przygotowujących się do matury z matematyki w zakresie rozszerzonym. Prawie 1400 zadań z odpowiedziami pozwala wyćwiczyć umiejętności sprawdzane na maturze.

Pomoc w zrozumieniu

Przykładowe rozwiązania zadań typu maturalnego pokazują różne możliwości radzenia sobie z takimi zadaniami.

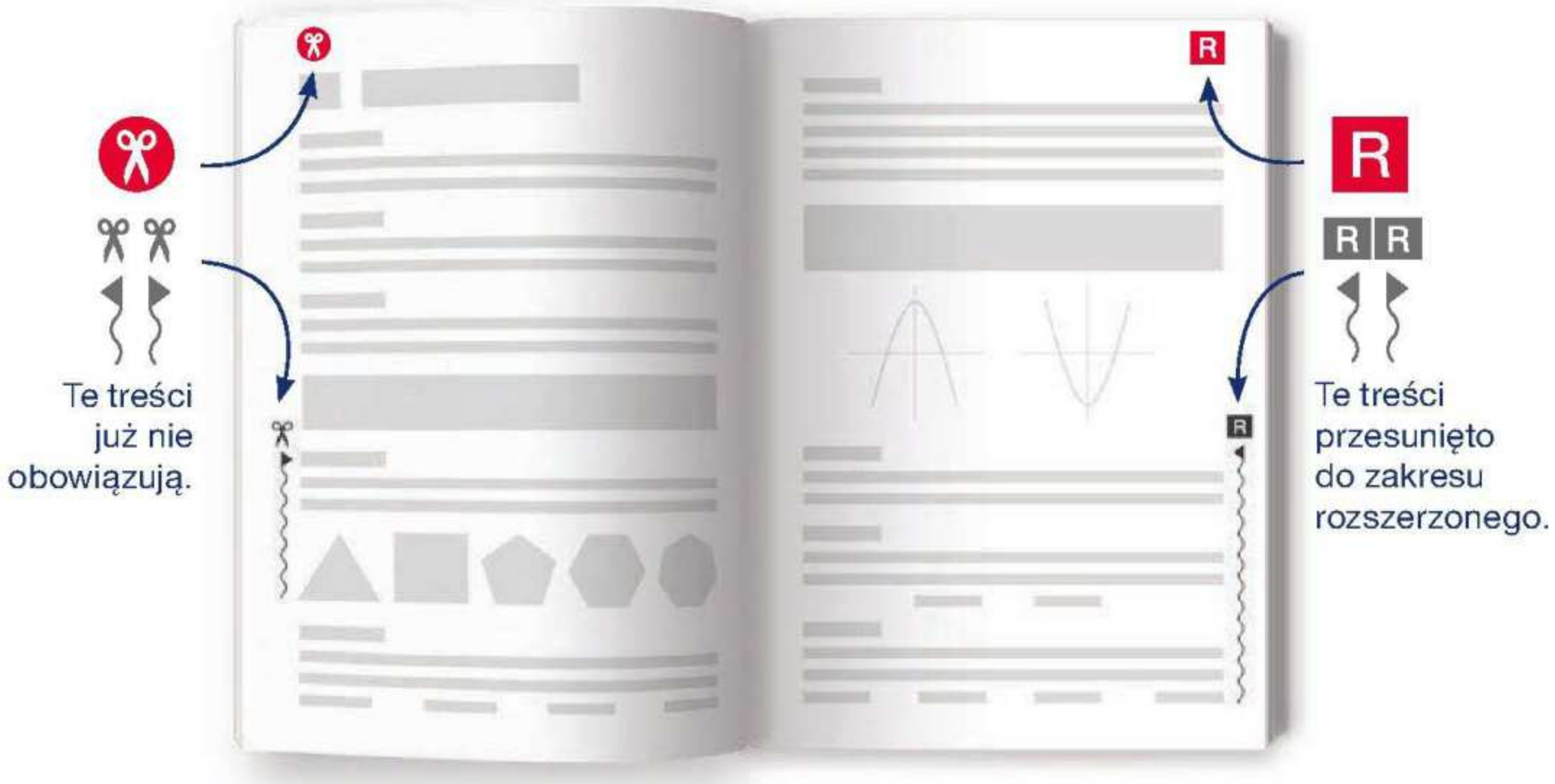
Porządkowanie i syntetyzowanie

Warto powtórzyć przypominają wiadomości z wcześniejszego etapu nauki.

Obszerne powtórzenia

Ostatni dział – *Powtórzenie* – zawiera najważniejsze treści teoretyczne obejmujące cały cykl nauczania oraz zadania sprawdzające zdobytą wiedzę.

W podręczniku znajdziesz oznaczenia związane ze zmianami obowiązującymi od września 2024 r.



Czerwone ikony na górze strony informują, że na tej stronie są zmiany.
Ich dokładne umiejscowienie wskazują szare ikony z falkami.

Nowa Era Sp. z o.o.

www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-5093-9